Aufgabe 7 (ML-Schätzung bei der geometrischen Verteilung $\mathcal{G}(p)$) Es seien $X_1, \ldots, X_N$ u.i.v.-Zufallsvariablen mit $P(X_1 = k) = (1-p)^{k-1}p$ für $k \in \{1, 2, 3, \ldots\}$. Berechnen Sie einen ML-Schätzer für den Parameter $p \in]0; 1[$.

Aufgabe 8 Eine verbogene Münze wird so lange geworfen, bis zum ersten Mal „Zahl" fällt. Hierzu seien insgesamt $X \geq 1$ Würfe erforderlich. Anschließend wird die Münze weitere X-mal geworfen und $Y \in \{0, \ldots, X\}$ gebe die Anzahl der Würfe an, in denen „Zahl" fällt (d.h. ingesamt fällt $(Y+1)$-mal „Zahl").

Für die Zufallsvariablen X, Y ergibt sich die gemeinsame Wahrscheinlichkeit

$$L(x, y, p) = P(X = x, Y = y) = p(1-p)^{x-1} \cdot \binom{x}{y} p^y (1-p)^{x-y}$$

für $x \in \mathbb{N}, y \in \{0, \ldots, x\}$. Dabei sei $p \in]0; 1[$.

a) (Klausur SoSe 2016) Berechnen Sie einen ML-Schätzer für p aufgrund der Ergebnisse $X = x$ und $Y = y$. Gehen Sie auch auf die hinreichenden Bedingungen ein. Hinweis: Überlegen Sie sich wieso $L(x, y, p)$ so zusammengefasst werden kann, Stichwort Potenzregeln. Überlegen Sie sich weiter, wieso der Binomialkoeffizient beim Ableiten nach p wegfällt und somit in der Ableitung nicht mehr auftaucht.

b) Prüfen Sie, ob der ML-Schätzer erwartungstreu ist.
Hinweis: Verwenden Sie die folgende Summenformel: $\sum_{k=1}^{\infty} p^k/k = -\ln(1-p)$.

Aufgabe 9 (ML-Schätzer, Klausur WS1516) Es seien $X_1, \ldots, X_n$ stochastisch unabhängige stetige Zufallsvariablen mit Dichte $f_{X_i}(x) = \frac{2x}{\theta^2}\mathbb{1}_{[0;\theta]}(x)$. Dabei sei $\theta > 0$.

a) Wie lautet die Likelihood-Funktion $L(x_1, \ldots, x_n; \theta)$ in dieser Situation? Berechnen Sie einen ML-Schätzer für θ auf Basis von $X_1, \ldots, X_n$. Hinweis: Nutzen Sie bei der Umformung der Likelihood-Funktion die folgenden Zusammenhänge aus: $\mathbb{1}_{[0\,;\,\theta]}(x) = \mathbb{1}_{[x\,;\,\infty[}(\theta)$ und $\mathbb{1}_{[a_1;\,b_1]}(x)\mathbb{1}_{[a_2;\,b_2]}(x) = \mathbb{1}_{[\max(a_1,a_2)\,;\,\min(b_1,b_2)]}(x)$

b) Berechnen Sie einen MM-Schätzer für θ auf Basis von $X_1, \ldots, X_n$. Nutzen Sie dabei ohne gesonderten Nachweis aus, dass $E(X_i) = \frac{2\theta}{3}$.