Lösung zu Aufgabe 4

$$\begin{aligned}
f_Z(z) &= \int_{-\infty}^{\infty}(2-x-(z-x))\mathbb{1}_{[0;1](x)}\mathbb{1}_{[0;1]}(z-x)dx \\
&= \int_{-\infty}^{\infty}(2-z)\mathbb{1}_{[0;1](x)}\mathbb{1}_{[0;1]}(z-x)dx \\
&= (2-z)\int_{-\infty}^{\infty}\mathbb{1}_{[0;1](x)}\mathbb{1}_{[0;1]}(z-x)dx
\end{aligned}$$

Dabei ist $\mathbb{1}_{[0;1]}(z-x) = \mathbb{1}_{[z-1;z]}(x)$, denn $0 \le z-x \le 1 \Leftrightarrow z-1 \le x \le z$.

Also gilt $\mathbb{1}_{[0;1](x)}\mathbb{1}_{[0;1]}(z-x) = \mathbb{1}_{[0;1](x)}\mathbb{1}_{[z-1;z]}(x) = \begin{cases} \mathbb{1}_{[0;z]}(x) & 0 \le z \le 1 \\ \mathbb{1}_{[z-1,1]}(x) & 1 \le z \le 2 \\ 0 & \text{sonst} \end{cases}$

Daher gilt dann

- Für $z \in [0;1]$ ist $f_Z(z) = (2-z)\int_0^z dx = 2z - z^2$
- Für $z \in [1;2]$ ist $f_Z(z) = (2-z)\int_{z-1}^1 dx = (2-z)^2$
- Für alle anderen z ist $f_Z(z) = 0$

Lösung zu Aufgabe 5

a) Randverteilungen durch Zeilen- und Spaltensummen:

$X =$ $Y =$	2	3	4	5	$\mathbb{P}^X$
25	0	0	0,05	0,1	0,15
50	0,05	0,05	0,1	0,05	0,25
75	0,1	0,1	0,1	0,05	0,35
100	0,1	0,1	0,05	0	0,25
$\mathbb{P}^Y$	0,25	0,25	0,3	0,2	

- $\mathbb{E}X = 25 \cdot 0,15 + 50 \cdot 0,25 + 75 \cdot 0,35 + 100 \cdot 0,25 = 67,5$
- $\mathbb{E}X^2 = 25^2 \cdot 0,15 + 50^2 \cdot 0,25 + 75^2 \cdot 0,35 + 100^2 \cdot 0,25 = 5187,5$
- $Var(X) = \mathbb{E}X^2 - (\mathbb{E}X)^2 = 5185,5 - 67,5^2 = 631,25$
- $\mathbb{E}Y = 2 \cdot 0,25 + 3 \cdot 0,25 + 4 \cdot 0,3 + 5 \cdot 0,2 = 3,45$
- $\mathbb{E}Y^2 = 2^2 \cdot 0,25 + 3^2 \cdot 0,25 + 4^2 \cdot 0,3 + 5^2 \cdot 0,2 = 13,05$
- $Var(Y) = 13,05 - 3,45^2 = 1,1475$

X, Y sind nicht stochastisch unabhängig, z.B. gilt $\mathbb{P}(X = 25, Y = 2) = 0$, aber $\mathbb{P}(X = 25)\mathbb{P}(Y = 2) = 0,15 \cdot 0,25 \neq 0$.

b) Erlös ist $X \cdot Y$, der erwartete Erlös ist

$$\begin{aligned}
\mathbb{E}(XY) &= \sum_{\substack{i\in\{25,50,75,100\} \\ j\in\{2,3,4,5\}}} i \cdot j \cdot \mathbb{P}(X=i, Y=j) \\
&= 0,05 \cdot (25\cdot 4 + 50\cdot(2+3+5) + 75\cdot 5 + 100\cdot 4) \\
&\quad +0,1 \cdot (25\cdot 5 + 50\cdot 4 + 75\cdot(2+3+4) + 100\cdot(2+3)) \\
&= 218,75
\end{aligned}$$

Kovarianz ist

$Cov(X,Y) = \mathbb{E}(XY) - \mathbb{E}X\mathbb{E}Y = 218,75 - 67,5 \cdot 3,45 = -14,125$

Pearson-Korrelation ist

$$\rho(X,Y) = \frac{Cov(X,Y)}{\sqrt{Var(X)Var(Y)}} = \frac{-14,124}{\sqrt{631,25 \cdot 1,1475}} \approx -0,524821$$

c) Bedingte Wahrscheinlichkeiten durch zeilenweises „Normieren“ der Tabelle aus der ersten Teilaufgabe:

	$\mathbb{P}(Y=j\|X=i)$						
$i =$	2	3	4	5	erw. Erlös= #Körbe×erw. Preis/Korb	Kosten	DB
25	0	0	$\frac{1}{3}$	$\frac{2}{3}$	$25(\frac{1}{3} \cdot 4 + \frac{2}{3} \cdot 5) = \frac{350}{3}$	$43,75$	$72,92$
50	$\frac{1}{5}$	$\frac{1}{5}$	$\frac{2}{5}$	$\frac{1}{5}$	$50 \cdot (\frac{1}{5} \cdot 2 + \frac{1}{5} \cdot 3 + \frac{2}{5} \cdot 4 + \frac{1}{5} \cdot 5) = 180$	$87,5$	$92,5$
75	$\frac{2}{7}$	$\frac{2}{7}$	$\frac{2}{7}$	$\frac{1}{7}$	$75 \cdot (\frac{2}{7} \cdot 2 + \frac{2}{7} \cdot 3 + \frac{2}{7} \cdot 4 + \frac{1}{7} \cdot 5) = 246,42$	$131,25$	$115,18$
100	$\frac{2}{5}$	$\frac{2}{5}$	$\frac{1}{5}$	0	$100 \cdot (\frac{2}{5} \cdot 2 + \frac{2}{5} \cdot 3 + \frac{1}{5} \cdot 4) = 280$	175	105

z.B. $\mathbb{P}(Y=2|X=75) = \frac{\mathbb{P}(X=75,Y=2)}{\mathbb{P}(X=75)} = \frac{1/10}{7/20} = \frac{2}{7}$

Der größte erwartete DB ergibt sich bei 75 verkauften Körben.

Lösung zu Aufgabe 6

a) Intuitiv überlegt: In 35% der Fälle wollen die Mitglieder kein Eis, in 25% der Fälle ein Wassereis zu 0,80€ und in 40% der Fälle ein Schoko-Eis zu 1,50€ . Somit ergeben sich die erwarteten Einnahmen abhängig von der Anzahl Vereinsmitglieder k, welche im Stadion sind:

$E(Y|N=k) = k \cdot 0 \cdot 0.35 + k \cdot 0.25 \cdot 0.8 + k \cdot 0.4 \cdot 1.5 = 0.8k$

b) Nach dem Satz von der t.W. gilt

$$\begin{aligned} E(Y) &= E(E(Y|N)) \\ &= \sum_{k=0}^{4000} E(Y|N=k) \cdot P(N=k) \\ &= 0.8 \cdot \sum_{k=0}^{4000} k \cdot P(N=k) \\ &= 0.8 \cdot E(N) = 0.8 \cdot 4000 \cdot 0.7 = 2240 \end{aligned}$$

Dabei beachten: N ist $Bin(4000, 0.7)$-verteilt mit Erwartungswert $4000 \cdot 0.7$

Alternativ kann man sich intuitiv P(B) als Wahrscheinlichkeit, dass ein Vereinsmitglied im Stadion ist, überlegen und entsprechend P(A|B) als Einnahmen definieren. Dementsprechend kann man die Einnahmen pro Mitglied wie folgt berechnen:

$P(B) \cdot P(A|B) + P(\overline{B}) \cdot P(A|\overline{B}) = 0.7 \cdot 0.8 + 0.3 \cdot 0 = 0.56$

Multipliziert man dies mit den Zahl an Vereinsmitgliedern ergibt sich:

$4000 \cdot 0.56 = 2240.$