## Lösung zu Aufgabe 15

Die Lösung finden Sie bei den Lösungen zu Blatt 5.

## Lösung zu Aufgabe 16

a)
$$\begin{aligned} EX_1 &= \int_0^1 x\frac{6x(x+\theta)}{2+3\theta}dx = \int_0^1 \frac{6x^3+6x^2\theta}{2+3\theta}dx \\ &= \left[\frac{\frac{3}{2}x^4+2x^3\theta}{2+3\theta}\right]_{x=0}^{x=1} \\ &= \frac{\frac{3}{2}+2\theta}{2+3\theta} = \frac{3+4\theta}{4+6\theta} \end{aligned}$$

b) Aufgrund der u.i.v. Annahme folgt nach dem Gesetz großer Zahlen, dass für $N \to \infty$

$$\hat{\theta}_{0N} = \frac{4\bar{X}_N - 3}{4-6\bar{X}_N} \to \frac{4\frac{3+4\theta}{4+6\theta}-3}{4-6\frac{3+4\theta}{4+6\theta}} = \frac{4(3+4\theta)-3(4+6\theta)}{4(4+6\theta)-6(3+4\theta)} = \frac{-2\theta}{-2} = \theta$$

c) Die Log-Likelihood-Funktion lautet (hier oBdA für $x_n \in [0;1]$)

$$\begin{aligned} \log L(x_1,\ldots,x_N;\theta) &= \log \prod_{n=1}^N p(x_N,\theta) \\ &= \log \prod_{n=1}^N \frac{6x_n(x_n+\theta)}{2+3\theta} \\ &= \sum_{n=1}^N \log(6)+\log(x_n)+\log(x_n+\theta)-\log(2+3\theta) \\ &= \sum_{n=1}^N \log(x_n+\theta) + N(\log(6)-\log(2+3\theta)) + \sum_{n=1}^N \log(x_n) \end{aligned}$$

Notwendig für ein lokales Maximum in $\theta$ ist

$$\tfrac{\partial}{\partial\theta}(\log(L(x_1,\ldots,x_N;\theta))) = 0 \quad \Leftrightarrow \quad (\sum_{n=1}^N \tfrac{1}{x_n+\theta}) - \tfrac{3N}{2+3\theta} = 0$$

## Lösung zu Aufgabe 17

Der Parameter $\theta$ bezeichnet hier also den höchsten Preis, den ein Kunde (theoretisch) zu zahlen bereit ist. $\theta$ ist unbekannt, FuS möchte aber aus naheliegenden Gründen gerne mehr darüber wissen. Die WS-Dichte von $X_i$ ist $f(x) = \frac{1}{\theta}\mathbf{1}_{[0;\theta]}(x)$.

a) Für $t \in [0;\theta]$ gilt

$$\begin{aligned} P(T \le t) &= P(\max(X_1,\ldots,X_N) \le t) \\ &= P(X_1 \le t,\ldots,X_N \le t) \\ &= P(X_1 \le t)\cdots P(X_N \le t) \\ &= (P(X_1 \le t))^N \\ &= \left(\tfrac{t}{\theta}\right)^N \end{aligned}$$

Durch Ableiten gewinnt man hieraus eine WS-Dichte $g$ von $T$:

$g(t) = \frac{\partial}{\partial t}\left(\frac{t}{\theta}\right)^N = \frac{N}{\theta^N}t^{N-1}$ für $t \in [0;\theta]$ (dabei $g(t) = 0$ sonst)

b) Es gilt $ET = \int_0^\theta tg(t)dt = \int_0^\theta \frac{N}{\theta^N} t^N dt = [\frac{N}{\theta^N}\frac{1}{N+1}t^{N+1}]_0^\theta = \frac{N}{N+1}\theta$

Für $S = \frac{N+1}{N}T$ gilt dann $ES = \frac{N+1}{N}ET = \frac{N+1}{N}\frac{N}{N+1}\theta = \theta$, also ist $S$ erwartungstreu.

c) $\lim\limits_{N\to\infty} ET = \lim\limits_{N\to\infty} \frac{N}{N+1}\theta = \theta$. Also ist $T$ asymptotisch erwartungstreu.

$S$ ist asymptotisch erwartungstreu, weil $S$ schon erwartungstreu ist für jedes $N \in \mathbb{N}$.

d) Zur Varianz:

$ET^2 = \int_0^\theta t^2 \frac{N}{\theta^N} t^{N-1} dt = \int_0^\theta \frac{Nt^{N+1}}{\theta^N} dt = [\frac{N}{N+2}\frac{t^{N+2}}{\theta^N}]_0^\theta = \theta^2 \frac{N}{N+2}$

$VarT = ET^2 - (ET)^2 = \theta^2 \frac{N}{N+2} - (\frac{N}{N+1}\theta)^2 = \theta^2 \frac{N(N+1)^2 - N^2(N+2)}{(N+1)^2(N+2)} = \theta^2 \frac{N}{(N+1)^2(N+2)}$

$Var(S) = Var(\frac{N+1}{N}T) = \left(\frac{N+1}{N}\right)^2 Var(T) = \theta^2 \frac{N(N+1)^2}{N^2(N+1)^2(N+2)} = \theta^2 \frac{1}{N(N+2)}$

Zum Bias (bzw. Bias-Quadrat):

$(ET - \theta)^2 = (\frac{N}{N+1}\theta - \theta)^2 = \theta^2 \frac{1}{(N+1)^2}$

$(ES - \theta)^2 = (\theta - \theta)^2 = 0$ (Erwartungstreue)

Zum MSE:

$MSE(T) = Var(T) + (ET - \theta)^2 = \theta^2 \frac{N}{(N+1)^2(N+2)} + \theta^2 \frac{1}{(N+1)^2} = \theta^2 \frac{N+(N+2)}{(N+1)^2(N+2)} = \theta^2 \frac{2(N+1)}{(N+1)^2(N+2)} = \theta^2 \frac{2}{(N+1)(N+2)}$

$MSE(S) = Var(S) + (ES - \theta)^2 = \theta^2 \frac{1}{N(N+2)} + 0 = \theta^2 \frac{1}{N(N+2)}$

e) ja, es gilt $MSE(S) \to 0$ für $N \to \infty$