7. Zweistichprobentests

- Gauß-Test (Normalverteilung mit bekannten Varianzen)
- t-Test (Normalverteilungen mit unbekannter Varianz)
- Welch-Test
- Approximativer Gauß-Test
- t-Test bei verbundenen Stichproben
- Wilcoxon-Rangsummentest

Zweistichprobentests

- ↪ Ziehung zweier Stichproben, Analyse möglicher Unterschiede
- ↪ Herkunft der zwei Stichproben
  - □ aus verschiedenen Grundgesamtheiten, unabh. Stichproben
    z.B. Vergleich des Durchschnittseinkommens von Ärzten und Anwälten
  - □ zwei unabh. Stichproben aus einer Grundgesamtheit
    z.B. Aufteilung von n Studenten zufällig auf zwei Gruppen mit verschiedenem Übungskonzept, Vergleich der Leistungen beider Gruppen
  - □ zwei gebundene Stichproben aus einer Grundgesamtheit
    z.B. WI-Studierende: Abiturnote vs. Bachelornote

Grundsätzliche Vorgehensweise bei Mittelwerttests:

$\hookrightarrow$ Ziehen zweier Stichproben der Umfänge n_1 und n_2 mit $\bar{x}_1$ und $\bar{x}_2$

$\hookrightarrow$ Überprüfung von Hypothesen bzgl. der Differenz $\mu_1 - \mu_2$ anhand von $d = \bar{x}_1 - \bar{x}_2$

$$a)\ H_0 : (\mu_1 - \mu_2) = \delta_0 \qquad \text{vs.} \qquad H_1 : (\mu_1 - \mu_2) \neq \delta_0$$

$$b)\ H_0 : (\mu_1 - \mu_2) \geq \delta_0 \qquad \text{vs.} \qquad H_1 : (\mu_1 - \mu_2) < \delta_0$$

$$c)\ H_0 : (\mu_1 - \mu_2) \leq \delta_0 \qquad \text{vs.} \qquad H_1 : (\mu_1 - \mu_2) > \delta_0$$

7.1 Gauß-Test (Normalverteilung mit bekannten Varianzen)

Annahme: $X_1 \sim \mathcal{N}(\mu_1, \sigma_1^2), X_2 \sim \mathcal{N}(\mu_2, \sigma_2^2)$, σ_i^2 bekannt.

1. Hypothesen

a) $H_0 : \mu_1 - \mu_2 = \delta_0$ vs. $H_1 : \mu_1 - \mu_2 \neq \delta_0$

b) $H_0 : \mu_1 - \mu_2 \geq \delta_0$ vs. $H_1 : \mu_1 - \mu_2 < \delta_0$

c) $H_0 : \mu_1 - \mu_2 \leq \delta_0$ vs. $H_1 : \mu_1 - \mu_2 > \delta_0$

2. Teststatistik V und Stichprobenverteilung F_V

$$V = \frac{\bar{X}_1 - \bar{X}_2 - \delta_0}{\sqrt{\sigma_1^2/n_1 + \sigma_2^2/n_2}} \sim \mathcal{N}(0,1)$$

3. Entscheidungsregel – Gauß-Test

Ablehnung von H_0, falls	a) $\lvert v \rvert > z_{1-\alpha/2}$	b) $v < z_\alpha$	c) $v > z_{1-\alpha}$
p-Wert $p^* =$	$2(1 - \Phi(\lvert v \rvert))$	$\Phi(v)$	$1 - \Phi(v)$

Durchschnittseinkommen von Praktikanten

Stichproben von $n_1 = 35$ Studenten in Stadt A, $\bar{x}_1 = 600$
$n_2 = 40$ Studenten in Stadt B, $\bar{x}_2 = 520$

Annahme: $X_1 \sim \mathcal{N}(\mu_1, \sigma_1^2), X_2 \sim \mathcal{N}(\mu_2, \sigma_2^2), \sigma_1^2 = 8000, \sigma_2^2 = 5000$ (bekannt).

Kann man aus den Daten folgern, dass die Einkommen von Praktikanten in Stadt A höher als in Stadt B sind ($\alpha = 0.01$)?

$\hookrightarrow$ Hypothesen $H_0 : \mu_1 \leq \mu_2$ vs. $H_1 : \mu_1 > \mu_2$ (Fall c) mit $\delta_0 = 0$)

$\hookrightarrow$ Teststatistik $V = \dfrac{\bar{X}_1 - \bar{X}_2 - \delta_0}{\sqrt{\sigma_1^2/n_1 + \sigma_2^2/n_2}} = \frac{600-520-0}{\sqrt{8000/35+5000/40}} = \frac{80}{10.177} = 7.86$

$\hookrightarrow$ Entscheidung: $v = 7.86 > z_{1-0.01} = z_{0.99} = 2.33$ $(\alpha = 0.05)$,
also wird H_0 abgelehnt.

$\hookrightarrow$ $p^* = (1 - \Phi(7.86)) \approx 0 < 0.01$

Bemerkung: Die Annahme, dass die Varianz bekannt ist (wenn gleichzeitig der Erwartungswert unbekannt ist), ist eher unrealistisch. Für $n_1, n_2 > 30$ kann die Varianz durch die Stichprobenvarianz ersetzt werden (approx. Gaußtest)

7.2 t-Test (Normalverteilungen mit unbekannter Varianz)

Annahme: $X_1 \sim \mathcal{N}(\mu_1, \sigma^2), X_2 \sim \mathcal{N}(\mu_2, \sigma^2)$, σ^2 unbekannt.

1. Hypothesen

a) $H_0 : \mu_1 - \mu_2 = \delta_0$ vs. $H_1 : \mu_1 - \mu_2 \neq \delta_0$

b) $H_0 : \mu_1 - \mu_2 \geq \delta_0$ vs. $H_1 : \mu_1 - \mu_2 < \delta_0$

c) $H_0 : \mu_1 - \mu_2 \leq \delta_0$ vs. $H_1 : \mu_1 - \mu_2 > \delta_0$

2. Teststatistik V und Stichprobenverteilung F für $\mu_1 - \mu_2 = \delta_0$

$$V = \frac{\bar{X}_1 - \bar{X}_2 - \delta_0}{\sqrt{(1/n_1 + 1/n_2)\,\frac{(n_1-1)S_1^2 + (n_2-1)S_2^2}{n_1+n_2-2}}} \sim t(n) \text{ mit } n = n_1 + n_2 - 2$$

3. Entscheidungsregel – t-Test

Abl. von H_0, falls	a) $\lvert v\rvert > t_{1-\alpha/2}(n)$	b) $v < t_{\alpha}(n)$	c) $v > t_{1-\alpha}(n)$
p-Wert $p^* =$	$2(1 - F(\lvert v\rvert))$	$F(v)$	$1 - F(v)$

Durchschnittseinkommen von Praktikanten

Stichproben von $n_1 = 35$ Studenten in Stadt A, $\bar{x}_1 = 600$, $s_1 = 100$
$n_2 = 40$ Studenten in Stadt B, $\bar{x}_2 = 520$, $s_2 = 70$

Annahme: $X_1 \sim \mathcal{N}(\mu_1, \sigma_1^2), X_2 \sim \mathcal{N}(\mu_2, \sigma_2^2), \sigma_1 = \sigma_2$ unbekannt.

Sind die Durchschnittseinkommen der Studenten beider Städte gleich($\alpha = 0.05$)?

Hypothesen $H_0 : \mu_1 = \mu_2$ vs. $H_1 : \mu_1 \neq \mu_2$

Teststatistik

$$V = \frac{\bar{X}_1 - \bar{X}_2 - \delta_0}{\sqrt{(1/n_1 + 1/n_2)\frac{(n_1-1)S_1^2 + (n_2-1)S_2^2}{n_1+n_2-2}}}$$

$$= \frac{600 - 520 - 0}{\sqrt{(1/35 + 1/40)\frac{34 \cdot 100^2 + 39 \cdot 70^2}{35+40-2}}} = 4.05$$

Testentscheidung $|v| = 4.05 > t_{0.975}(35 + 40 - 2) = 1.99$ $(\alpha = 0.05)$

$\Rightarrow$ H_0 wird abgelehnt

7.3 Welch-Test

Annahme: $X_j \sim F_j$, $n_1, n_2 > 30$, oder $X_j \sim \mathcal{N}(\mu_j, \sigma_j^2)$, σ_j^2 unbekannt.

1. Hypothesen

a) $H_0 : \mu_1 - \mu_2 = \delta_0$ vs. $H_1 : \ldots \neq \delta_0$
b) $H_0 : \mu_1 - \mu_2 \geq \delta_0$ vs. $H_1 : \cdots < \delta_0$
c) $H_0 : \mu_1 - \mu_2 \leq \delta_0$ vs. $H_1 : \cdots > \delta_0$

2. Teststatistik V und Stichprobenverteilung F für $\mu_1 - \mu_2 = \delta_0$

$$V = \frac{\bar{X}_1 - \bar{X}_2 - \delta_0}{\sqrt{S_1^2/n_1 + S_2^2/n_2}} \overset{appr}{\sim} t(k),\ k = \left\lfloor \frac{S_1^2/n_1 + S_2^2/n_2}{\frac{1}{n_1-1}\left(\frac{S_1^2}{n_1}\right)^2 + \frac{1}{n_2-1}\left(\frac{S_2^2}{n_2}\right)^2} \right\rfloor,\ S_i^2 = \frac{1}{n_i-1}\sum_{j=1}^{n_i}(X_{ij} - \bar{X}_i)^2$$

3. Entscheidungsregel – Welch-Test

Abl. von H_0, falls	a) $\lvert v\rvert > t_{1-\alpha/2}(k)$	b) $v < t_\alpha(k)$	c) $v > t_{1-\alpha}(k)$
p-Wert $p^* =$	$2(1 - F(\lvert v\rvert))$	$F(v)$	$1 - F(v)$

Alternativ für $n_1, n_2 > 30$: Gauß-Test mit obigem $V \overset{approx.}{\sim} \mathcal{N}(0,1)$

7.4 Approximativer Gauß-Test

Annahme: $X_{ji} \sim F_j$ für $i = 1, \dots, n_j$, $j_=1, 2$. Dabei $n_1, n_2 > 30$

1. Hypothesen

a) $H_0 : \mu_1 - \mu_2 = \delta_0$ vs. $H_1 : \dots \neq \delta_0$
b) $H_0 : \mu_1 - \mu_2 \geq \delta_0$ vs. $H_1 : \dots < \delta_0$
c) $H_0 : \mu_1 - \mu_2 \leq \delta_0$ vs. $H_1 : \dots > \delta_0$

2. Teststatistik V und Stichprobenverteilung F für $\mu_1 - \mu_2 = \delta_0$

$$V = \frac{\bar{X}_1 - \bar{X}_2 - \delta_0}{\sqrt{S_1^2/n_1 + S_2^2/n_2}} \overset{approx}{\sim} \mathcal{N}(0,1), \text{ mit } S_i^2 = \frac{1}{n_i - 1} \sum_{j=1}^{n_i} (X_{ij} - \bar{X}_i)^2$$

3. Entscheidungsregel – approx. Gauß-Test

Ablehnung von H_0, falls	a) $\lvert v \rvert > z_{1-\alpha/2}$	b) $v < z_\alpha$	c) $v > z_{1-\alpha}$
p-Wert $p^* =$	$2(1 - F(\lvert v \rvert))$	$F(v)$	$1 - F(v)$

Alternativ: Welch-Test, nichtparametrische Verfahren (z.B. Wilcoxon-Test, s.u.)

7.5 t-Test (verb. Stichpr.) $X_{ij} \sim \mathcal{N}(\mu_i, \sigma_i^2), \delta = \mu_2 - \mu_1$

$\hookrightarrow$ Erhebung $X_{11}, \ldots, X_{1n}, X_{21}, \ldots, X_{2n}$ z.B. an denselben Merkmalsträgern

$\hookrightarrow$ **Differenzentest**: Einstichproben-t-Test auf Differenzen $D_i = X_{2i} - X_{1i}$

1. Hypothesen

a) $H_0 : \delta = 0$ vs. $H_1 : \delta \neq 0$

b) $H_0 : \delta \geq 0$ vs. $H_1 : \delta < 0$

c) $H_0 : \delta \leq 0$ vs. $H_1 : \delta > 0$

2. Prüfgröße V

$V = \sqrt{n}\bar{D}/\hat{\sigma}_D \sim t(n-1)$ für $\delta = 0$

mit $\sigma_D^2 = var(X_{i2} - X_{i1})$,

$\hat{\sigma}_D^2 = \frac{1}{n-1} \sum_{i=1}^n (D_i - \bar{D})^2$

3. Entscheidung: H_0 wird abgelehnt, wenn

a) $H_0 : \delta = 0$: $|v| > t_{1-\alpha/2}(n-1)$ $\quad p^* = 2(1 - F(|v|))$

b) $H_0 : \delta \geq 0$: $v < t_\alpha(n-1)$ $\quad p^* = F(v)$

c) $H_0 : \delta \leq 0$: $v > t_{1-\alpha}(n-1)$ $\quad p^* = 1 - F(v)$

$\hookrightarrow$ Bei beliebig verteilter Grundgesamtheit: approx. Gaußtest ($V \overset{approx.}{\sim} \mathcal{N}(0,1)$)

$\hookrightarrow$ Auch verfügbar: Wilcoxon-Test bei gebundenen Stichproben

Bearbeitungsdauer zweier Programme P1,P2 auf einem Maschinentyp

Maschine i	1	2	3	4	5	6	7	8
Dauer P1 (X_{1i})	5.9	5.1	3.1	6.5	5.6	4.9	4.6	4.2
Dauer P2 (X_{2i})	5.0	4.0	5.3	6.2	5.1	4.6	7.7	3.9
$D_i = X_{2i} - X_{1i}$	-0.9	-1.1	2.2	-0.3	-0.5	-0.3	3.1	-0.3

Ist Bearbeitungsdauer bei P1 signifikant höher als bei P2, d.h. $\mu_1 > \mu_2$ ($\alpha = 0.05$)?

$$H_0 \quad : \quad \mu_1 \leq \mu_2, \text{ d.h. } \mu_2 - \mu_1 \geq 0 \text{ Fall b)}$$

$$V = \sqrt{n}\bar{D}/\hat{\sigma}_D \sim t(n-1) \qquad \text{Grundgesamtheit NV, unbekannte Varianz}$$

$$\bar{d} = (-0.9 - 1.1 + 2.2 - 0.3 - 0.5 - 0.3 + 3.1 - 0.3)/8 = 0.2375$$

$$\hat{\sigma}_d^2 = \frac{1}{n-1}\sum_{i=1}^{n}(d_i - \bar{d})^2 = \frac{1}{7}((-0.9 - 0.2375)^2 + \cdots) = 2.36$$

$$v = \frac{0.2375}{\sqrt{2.36}/\sqrt{8}} = 0.437 > t_{0.05,7} = -1.89$$

$\Rightarrow H_0$ kann nicht abgelehnt werden.

7.6 Wilcoxon-Rangsummentest

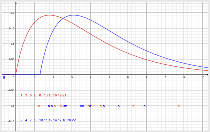
- ↪ die vorangegangenen Tests setzen entweder die Normalverteilung oder einen hinreichend großen Stichprobenumfang voraus
- ↪ nichtparametrische Alternative basierend auf Rängen
- ↪ In R: wilcox.test (...)

Annahmen:

$$X = X_1, \ldots, X_{n_1} \overset{u.i.v.}{\sim} F, \text{ (stetig)}$$

$$Y = Y_1, \ldots, Y_{n_2} \overset{u.i.v.}{\sim} G \text{ (stetig)}$$

X und Y sind st.u., $F_Y(x) = F_X(x-a)$



https://www.geogebra.org/m/khj3n2by

Idee:

- ↪ Verteilungsfunktionen von der Form her gleich, u.U. Verschiebung einer VF
- ↪ Gleichheit der Mediane entspricht Gleichheit der Verteilungen. Keine Existenz von Erwartungswerten vorausgesetzt.

1. Hypothese: H_0

a) $med(X) = med(Y)$ b) $med(X) \geq med(Y)$ c) $med(X) \leq med(Y)$

Unter der Annahme $F_Y(x) = F_X(x - a)$ ist dies gleichwertig zu
a) $a = 0$ b) $a \leq 0$ c) $a \geq 0$

2. Teststatistik:

$W = \sum_{i=1}^{n_1} rg(X_i)$, in R: $V = \sum_{i,j} 1_{\{X_i \leq Y_j\}} \overset{!}{=} W - \frac{n_1(n_1+1)}{2}$

- $\hookrightarrow$ Teststatistik basiert auf X-Rängen der gepoolten Stichprobe $Z = (X, Y)$.
- $\hookrightarrow$ Bei Gleichheit der Gruppenmediane wird eine gute Durchmischung von Z erwartet. Nullverteilung von W ist dann:
  - □ für $n_i \leq 25$: Wilcoxon-Verteilung (Quantile w_α) vertafelt bzw. mit R
  - □ für $\max(n_1, n_2) > 25$ approximativ: $\overset{approx.}{\sim} \mathcal{N}\left(\frac{n_1(n_1+n_2+1)}{2}, \frac{n_1 \cdot n_2(n_1+n_2+1)}{12}\right)$
- $\hookrightarrow$ Wichtig bei der Anwendung: Bindungsfreie Daten (Stetige Verteilungen!)

3. Testentscheidung: H_0 wird abgelehnt, falls

a) $H_0 : med(X) = med(Y)$: $w > w_{1-\alpha/2}(n_1, n_2)$ oder $w < w_{\alpha/2}(n_1, n_2)$

b) $H_0 : med(X) \geq med(Y)$: $w < w_{\alpha}(n_1, n_2)$

c) $H_0 : med(X) \leq med(Y)$: $w > w_{1-\alpha}(n_1, n_2)$

p-values für $\max(n_1, n_2) \leq 25$ (Berechnung von F z.B. mit R, pwilcox (...)):

a) $p^* = 2\min(F(w), 1 - F(w-1))$

b) $p^* = F(w)$

c) $p^* = 1 - F(w-1)$

p-values für $\max(n_1, n_2) > 25$ mit Normalapproximation: $\tilde{w} = \frac{w - \frac{n_1(n_1+n_2+1)}{2}}{\sqrt{\frac{n_1 n_2(n_1+n_2+1)}{12}}}$

a) $p^* = 2(1 - \Phi(|\tilde{w}|))$

b) $p^* = \Phi(\tilde{w})$

c) $p^* = 1 - \Phi(\tilde{w})$

Tabelle der α-Quantile w_α für $n_1, n_2 \leq 25$ (mit R berechnet, `qwilcox(...)`):

.05	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14	15	16	17	18	19	20	21	22	23	24	25
2	3	3	3	4	4	4	5	5	5	5	6	6	6	7	7	7	8	8	8	9	9	9	10	10
3	6	6	7	8	9	9	10	10	11	12	12	13	14	14	15	16	16	17	18	18	19	20	20	21
4	10	11	12	13	14	15	16	17	18	19	20	21	22	23	25	26	27	28	29	30	31	32	33	34
5	16	17	18	20	21	22	24	25	27	28	29	31	32	34	35	36	38	39	41	42	44	45	46	48
6	22	24	25	27	29	30	32	34	36	38	39	41	43	45	47	48	50	52	54	56	58	59	61	63
7	29	31	33	35	37	40	42	44	46	48	50	53	55	57	59	62	64	66	68	70	73	75	77	79
8	38	40	42	45	47	50	52	55	57	60	63	65	68	70	73	76	78	81	84	86	89	91	94	97
9	47	49	52	55	58	61	64	67	70	73	76	79	82	85	88	91	94	97	100	103	106	109	112	115
10	57	60	63	67	70	73	76	80	83	87	90	93	97	100	104	107	111	114	118	121	124	128	131	135
11	68	72	75	79	83	86	90	94	98	101	105	109	113	117	121	124	128	132	136	140	144	148	152	156
12	81	84	88	92	96	100	105	109	113	117	121	126	130	134	139	143	147	151	156	160	164	169	173	177
13	94	98	102	107	111	116	120	125	129	134	139	143	148	153	157	162	167	172	176	181	186	190	195	200
14	108	113	117	122	127	132	137	142	147	152	157	162	167	172	177	183	188	193	198	203	208	213	219	224
15	124	128	133	139	144	149	154	160	165	171	176	182	187	193	198	204	209	215	221	226	232	237	243	249
16	140	145	151	156	162	167	173	179	185	191	197	202	208	214	220	226	232	238	244	250	256	262	268	274
17	157	163	169	174	180	187	193	199	205	211	218	224	231	237	243	250	256	263	269	275	282	288	295	301
18	176	181	188	194	200	207	213	220	227	233	240	247	254	260	267	274	281	288	295	302	308	315	322	329
19	195	201	208	214	221	228	235	242	249	256	263	271	278	285	292	300	307	314	321	329	336	343	351	358
20	215	222	229	236	243	250	258	265	273	280	288	295	303	311	318	326	334	341	349	357	365	372	380	388
21	237	243	251	258	266	273	281	289	297	305	313	321	329	337	345	353	362	370	378	386	394	402	411	419
22	259	266	274	282	290	298	306	314	322	331	339	348	356	365	373	382	390	399	408	416	425	433	442	451
23	282	290	298	306	314	323	331	340	349	358	367	375	384	393	402	411	420	429	438	447	456	466	475	484
24	307	314	323	331	340	349	358	367	376	386	395	404	414	423	432	442	451	461	470	480	489	499	508	518
25	332	340	349	358	367	376	386	395	405	415	424	434	444	454	463	473	483	493	503	513	523	533	543	553

.025	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14	15	16	17	18	19	20	21	22	23	24	25
2	3	3	3	3	3	3	4	4	4	4	5	5	5	5	5	6	6	6	6	7	7	7	7	7
3	6	6	6	7	8	8	9	9	10	10	11	11	12	12	13	13	14	14	15	15	16	16	17	17
4	10	10	11	12	13	14	15	15	16	17	18	19	20	21	22	22	23	24	25	26	27	28	28	29
5	15	16	17	18	19	21	22	23	24	25	27	28	29	30	31	33	34	35	36	38	39	40	41	43
6	21	23	24	25	27	28	30	32	33	35	36	38	39	41	43	44	46	47	49	51	52	54	55	57
7	28	30	32	34	35	37	39	41	43	45	47	49	51	53	55	57	59	61	63	65	67	69	71	73
8	37	39	41	43	45	47	50	52	54	56	59	61	63	66	68	71	73	75	78	80	82	85	87	90
9	46	48	50	53	56	58	61	63	66	69	72	74	77	80	83	85	88	91	94	96	99	102	105	108
10	56	59	61	64	67	70	73	76	79	82	85	89	92	95	98	101	104	108	111	114	117	120	123	127
11	67	70	73	76	80	83	86	90	93	97	100	104	107	111	114	118	122	125	129	132	136	140	143	147
12	80	83	86	90	93	97	101	105	108	112	116	120	124	128	132	136	140	144	148	152	156	160	164	168
13	93	96	100	104	108	112	116	120	125	129	133	137	142	146	151	155	159	164	168	172	177	181	186	190
14	107	111	115	119	123	128	132	137	142	146	151	156	161	165	170	175	180	184	189	194	199	204	208	213
15	122	126	131	135	140	145	150	155	160	165	170	175	180	185	191	196	201	206	211	217	222	227	232	238
16	138	143	148	152	158	163	168	174	179	184	190	196	201	207	212	218	223	229	235	240	246	252	257	263
17	156	160	165	171	176	182	188	193	199	205	211	217	223	229	235	241	247	253	259	265	271	277	283	289
18	174	179	184	190	196	202	208	214	220	227	233	239	246	252	258	265	271	278	284	291	297	304	310	317
19	193	198	204	210	216	223	229	236	243	249	256	263	269	276	283	290	297	304	310	317	324	331	338	345
20	213	219	225	231	238	245	252	259	266	273	280	287	294	301	309	316	323	330	338	345	352	360	367	374
21	235	240	247	254	261	268	275	282	290	297	305	312	320	328	335	343	351	358	366	374	382	389	397	405
22	257	263	270	277	284	292	299	307	315	323	331	339	347	355	363	371	379	387	395	404	412	420	428	436
23	280	286	294	301	309	317	325	333	341	350	358	366	375	383	392	400	409	417	426	434	443	452	460	469
24	304	311	318	326	334	343	351	360	368	377	386	395	403	412	421	430	439	448	457	466	475	484	493	502
25	329	336	344	353	361	370	379	388	397	406	415	424	433	443	452	461	471	480	489	499	508	518	527	537

.01	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14	15	16	17	18	19	20	21	22	23	24	25
2	3	3	3	3	3	3	3	3	3	3	3	4	4	4	4	4	4	5	5	5	5	5	5	5
3	6	6	6	6	6	7	7	8	8	8	9	9	9	10	10	11	11	11	12	12	12	13	13	14
4	10	10	10	11	12	12	13	14	14	15	16	16	17	18	18	19	20	20	21	22	22	23	24	24
5	15	15	16	17	18	19	20	21	22	23	24	25	26	27	28	29	30	31	32	33	34	35	36	37
6	21	21	23	24	25	26	28	29	30	31	33	34	35	37	38	40	41	42	44	45	46	48	49	51
7	28	29	30	32	33	35	36	38	40	41	43	45	46	48	50	52	53	55	57	59	60	62	64	65
8	36	37	39	41	43	44	46	48	50	52	54	57	59	61	63	65	67	69	71	73	75	77	79	82
9	45	47	49	51	53	55	57	60	62	64	67	69	72	74	77	79	82	84	86	89	91	94	96	99
10	55	57	59	62	64	67	69	72	75	78	80	83	86	89	92	94	97	100	103	106	109	111	114	117
11	66	68	71	74	76	79	82	85	89	92	95	98	101	104	108	111	114	117	120	124	127	130	133	137
12	78	81	84	87	90	93	96	100	103	107	110	114	117	121	125	128	132	135	139	143	146	150	154	157
13	92	94	97	101	104	108	112	115	119	123	127	131	135	139	143	147	151	155	159	163	167	171	175	179
14	106	108	112	116	119	123	128	132	136	140	144	149	153	157	162	166	171	175	179	184	188	193	197	201
15	121	124	128	132	136	140	145	149	154	158	163	168	172	177	182	187	191	196	201	206	211	215	220	225
16	137	140	144	149	153	158	163	168	173	178	183	188	193	198	203	208	213	219	224	229	234	239	245	250
17	154	158	162	167	172	177	182	187	192	198	203	209	214	220	225	231	236	242	247	253	259	264	270	276
18	172	176	181	186	191	196	202	208	213	219	225	231	237	242	248	254	260	266	272	278	284	290	296	302
19	192	195	200	206	211	217	223	229	235	241	247	254	260	266	273	279	285	292	298	304	311	317	324	330
20	212	216	221	227	233	239	245	251	258	264	271	278	284	291	298	304	311	318	325	332	338	345	352	359
21	233	237	243	249	255	262	268	275	282	289	296	303	310	317	324	331	338	345	353	360	367	374	382	389
22	255	259	265	272	278	285	292	299	307	314	321	329	336	344	351	359	366	374	381	389	397	404	412	420
23	278	283	289	296	303	310	317	325	332	340	348	356	364	371	379	387	395	403	411	419	427	435	444	452
24	302	307	314	321	328	336	343	351	359	367	376	384	392	400	409	417	425	434	442	451	459	468	476	485
25	327	333	339	347	355	362	371	379	387	396	404	413	421	430	439	448	456	465	474	483	492	501	510	518

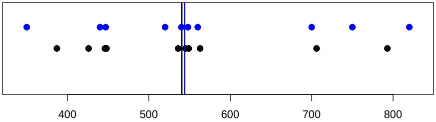
.005	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14	15	16	17	18	19	20	21	22	23	24	25
2	3	3	3	3	3	3	3	3	3	3	3	3	3	3	3	3	3	4	4	4	4	4	4	4
3	6	6	6	6	6	6	6	7	7	7	8	8	8	9	9	9	9	10	10	10	11	11	11	12
4	10	10	10	10	11	11	12	12	13	13	14	14	15	16	16	17	17	18	19	19	20	20	21	21
5	15	15	15	16	17	17	18	19	20	21	22	23	23	24	25	26	27	28	29	30	30	31	32	33
6	21	21	22	23	24	25	26	27	28	29	31	32	33	34	35	37	38	39	40	41	43	44	45	46
7	28	28	29	30	32	33	35	36	38	39	41	42	44	45	47	48	50	51	53	54	56	58	59	61
8	36	36	38	39	41	43	44	46	48	50	52	54	55	57	59	61	63	65	67	69	71	72	74	76
9	45	46	47	49	51	53	55	57	59	62	64	66	68	70	73	75	77	79	82	84	86	89	91	93
10	55	56	58	60	62	65	67	69	72	74	77	80	82	85	87	90	93	95	98	100	103	106	108	111
11	66	67	69	72	74	77	80	83	85	88	91	94	97	100	103	106	109	112	115	118	121	124	127	130
12	78	80	82	85	88	91	94	97	100	103	106	110	113	116	120	123	126	130	133	137	140	143	147	150
13	91	93	95	99	102	105	109	112	116	119	123	126	130	134	137	141	145	149	152	156	160	164	167	171
14	105	107	110	113	117	121	124	128	132	136	140	144	148	152	156	160	164	169	173	177	181	185	189	193
15	120	123	126	129	133	137	141	145	150	154	158	163	167	172	176	181	185	190	194	199	203	208	212	217
16	136	139	142	146	150	155	159	164	168	173	178	182	187	192	197	202	207	211	216	221	226	231	236	241
17	153	156	160	164	169	173	178	183	188	193	198	203	208	214	219	224	229	235	240	245	250	256	261	266
18	171	174	178	183	188	193	198	203	209	214	219	225	230	236	242	247	253	259	264	270	276	281	287	293
19	191	194	198	203	208	213	219	224	230	236	242	248	254	260	265	272	278	284	290	296	302	308	314	320
20	211	214	219	224	229	235	241	247	253	259	265	271	278	284	290	297	303	310	316	323	329	336	342	349
21	232	235	240	246	251	257	264	270	276	283	290	296	303	310	316	323	330	337	344	350	357	364	371	378
22	254	258	263	268	275	281	288	294	301	308	315	322	329	336	343	350	358	365	372	379	387	394	401	409
23	277	281	286	292	299	306	312	320	327	334	341	349	356	364	371	379	386	394	402	409	417	425	432	440
24	301	305	311	317	324	331	338	346	353	361	369	376	384	392	400	408	416	424	432	440	448	456	465	473
25	326	331	336	343	350	358	365	373	381	389	397	405	413	422	430	438	447	455	464	472	481	489	498	506

Dabei: $w_{1-\alpha}(n_1 = n, n_2 = m) = n_1(n_1 + n_2 + 1) - w_\alpha(n_1, n_2)$

Durchschnittsgehälter von Praktikanten in Stadt 1 und Stadt 2:

$$X = (387, 426, 446, 448, 536, 545, 549, 563, 706)$$
$$Y = (350, 440, 447, 520, 540, 548, 560, 700, 750)$$

Unterscheiden sich die Gehälter ($\alpha = 0,05$)?



$rg(X) = (2, 3, 5, 7, 9, 11, 13, 15, 17)$, $rg(Y) = (1, 4, 6, 8, 10, 12, 14, 16, 18)$

$$H_0 : \quad med(X) = med(Y)$$
$$w = \sum_{i=1}^{9} rg(X_i) = 82$$
$$w_{0.025}(9,9) = 63, w_{1-0.025}(9,9) = 9 \cdot (9+9+1) - 63 = 108$$

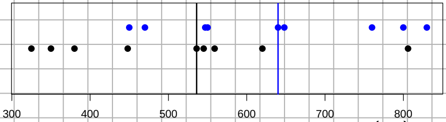
$\Rightarrow H_0$ kann nicht abgelehnt werden ($\alpha = 0.05$).

Durchschnittsgehälter von Praktikanten in Stadt 1 und Stadt 2:

$$X = (325, 350, 380, 448, 536, 545, 559, 620, 806)$$
$$Y = (450, 470, 547, 550, 640, 648, 760, 800, 830)$$

Sind Absolventengehälter in Stadt 1 geringer als in Stadt 2 ($\alpha = 0,05$)?

$rg(X) = (1, 2, 3, 4, 7, 8, 11, 12, 17)$, $rg(Y) = (5, 6, 9, 10, 13, 14, 15, 16, 18)$



$$H_0 : \quad med(X) \geq med(Y)$$

$$w = \sum_{i=1}^{9} rg(X_i) = 65 < w_{0.05}(9, 9) = 67$$

$\Rightarrow$ H_0 wird abgelehnt ($\alpha = 0.05$).