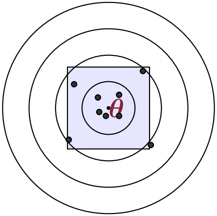
5. Intervall- und Bereichsschätzer

- Intervallschätzung
- Konstruktionsprinzip für Konfidenzintervalle
- Konfidenzintervalle für Erwartungswert
- Konfidenzintervall für die Varianz
- Zusammenfassung

5.1 Intervallschätzung

Bisher: Verwendung von Stichprobenergebnissen zur **Punkt**schätzung $\hat{\theta}$ eines unbekannten Parameters θ (bzw. einer unbek. Kennzahl) der Grundgesamtheit.



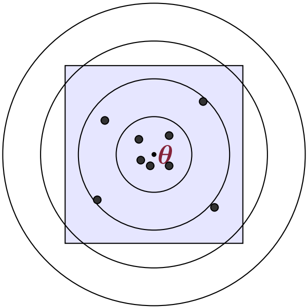
↪ **Folgerung:** Schätzwert $\hat{\theta}$ und geschätzter Parameter θ stimmen (so gut wie) nie überein!

↪ **Jetzt:** Angabe eines **Schätzintervals** $[G_u, G_o]$ in dem sich der unbekannte Parameter θ mit (kontrollierbarer) *Überdeckungswahrscheinlichkeit* $(1 - \alpha)$, $\alpha \in (0, 1)$ befindet.[1]

Mit dem Parameter $\alpha \in (0, 1)$ – der sogenannten Irrtumswahrscheinlichkeit – kontrollieren wir die Größe des Intervals. Intuitiv:

$\hookrightarrow$ Je größer α (je kleiner die vorgegebene Überdeckungswahrscheinlichkeit) ist, desto kleiner darf das Intervall sein.

$\hookrightarrow$ Je kleiner α (je größer die vorgegebene Überdeckungswahrscheinlichkeit) ist, desto größer muss das Intervall sein.



Zweiseitiges $(1-\alpha)$-Konfidenzintervall

Ein (zweiseitiges) $(1-\alpha)$-Konfidenzintervall (KI) $[G_u, G_o]$ zur Irrtumswahrscheinlichkeit $\alpha \in (0,1)$, wird gebildet aus Schätzstatistiken

$$G_u = g_u(X_1, \ldots, X_n) \text{ und } G_o = g_o(X_1, \ldots, X_n)$$

wenn folgende Voraussetzungen erfüllt sind

$$P(G_u \leq G_o) = 1 \text{ und } P(\theta \in [G_u; G_o]) \geq 1-\alpha.$$

Einseitige $(1-\alpha)$-Konfidenzintervalle

Ein **einseitiges** $(1-\alpha)$-**Konfidenzintervall** $]-\infty; G_o]$ liegt vor, wenn

$$P(\theta \leq G_o) \geq 1-\alpha$$

Ein **einseitiges** $(1-\alpha)$-**Konfidenzintervall** $[G_u; \infty[$ liegt vor, wenn

$$P(\theta \geq G_u) \geq 1-\alpha$$

Ein paar Anmerkungen:

$\hookrightarrow$ Die Intervallgrenzen sind Zufallsvariablen $G_{u/o} = g_{u/o}(X_1, \ldots, X_n)$, die von den Stichprobenvariablen abhängen.

$\hookrightarrow$ Die Schreibweisen der Ereignisse suggerieren, dass θ die ZV ist, zu der eine WS berechnet wird. Tatsächlich handelt es sich um folgende Ereignisse:

- $\{\theta \in [G_u, G_o]\} = \{\omega \in \Omega : G_u(\omega) \leq \theta, G_o(\omega) \geq \theta\}$
- $\{\theta \leq G_o\} = \{\omega \in \Omega : G_o(\omega) \geq \theta\}$
- $\{\theta \geq G_u\} = \{\omega \in \Omega : G_u(\omega) \leq \theta\}$

$\hookrightarrow$ Die Überdeckungs-WS $1 - \alpha$ ist eine (vorgegebene) Eigenschaft des konkreten Schätzverfahrens. Mit Mindest-WS $1 - \alpha$ wird ein Intervall (z.B. $[g_u(x_1, \ldots, x_n),\ g_o(x_1, \ldots, x_n)]$) generiert, das den wahren Wert θ überdeckt.

$\hookrightarrow$ Im stetigen Modellen für die Grundgesamtheit wird das KI so angesetzt, dass die Mindest-WS $1 - \alpha$ exakt eingehalten wird.

$\hookrightarrow$ Zweiseitige KI werden oftmals symmetrisch angesetzt, d.h. $P(\theta > G_o) \leq \frac{\alpha}{2}$, $P(\theta < G_u) \leq \frac{\alpha}{2}$ (im stetigen Fall: „$= \frac{\alpha}{2}$“).

5.2 Konstruktionsprinzip für Konfidenzintervalle

1. Bestimme einen **Punktschätzer** $T_n = T(X_1, \ldots, X_n)$ für θ (z. B. mittels ML, MM, ...).
2. Lege das (zweiseitige) Konfidenzintervall fest mit

$$G_u = T_n - t \cdot A_n \text{ und } G_o = T_n + t \cdot A_n$$

   wobei $t > 0$ und $A_n = a(X_1, \ldots, X_n) > 0$ eine geeignete Statistik ist.

   Es gilt $\theta \in [T_n - t \cdot A_n\ ;\ T_n + t \cdot A_n] \quad \Leftrightarrow \quad -t \leq \frac{T_n - \theta}{A_n} \leq t$

3. Wähle $t > 0$ derart, dass gilt $P_\theta \left(-t \leq \frac{T_n - \theta}{A_n} \leq t \right) \overset{!}{=} 1 - \alpha \quad$ (bzw. $\overset{!}{\approx} 1 - \alpha$)

Typische Wahl für A_n: Schätzer für den Standardfehler von T_n, so dass der Bruch (zumindest approximativ) eine Standardisierung von T_n darstellt.

Übung: Zeigen Sie, dass gilt:

$$\theta \in [T_n - t \cdot A_n \; ; \; T_n + t \cdot A_n] \quad \Leftrightarrow \quad -t \leq \frac{T_n - \theta}{A_n} \leq t$$

Wir formen schrittweise um. Beachten Sie, dass sich das Ungleichungszeichen bei Multiplikation einer Ungleichung mit -1 umkehrt, bei Addition bzw. Subtraktion eines Terms auf beiden Seiten hingegen nicht verändert:

$$\begin{aligned}
\theta \in [T_n - t \cdot A_n \; ; \; T_n + t \cdot A_n] &\Leftrightarrow \theta \geq T_n - t \cdot A_n \quad \wedge \quad \theta \leq T_n + t \cdot A_n \\
&\Leftrightarrow \theta \geq T_n - t \cdot A_n \quad \wedge \quad \theta \leq T_n + t \cdot A_n \\
&\Leftrightarrow \theta - T_n \geq -t \cdot A_n \quad \wedge \quad \theta - T_n \leq t \cdot A_n \\
&\Leftrightarrow T_n - \theta \leq t \cdot A_n \quad \wedge \quad T_n - \theta \geq -t \cdot A_n \\
&\Leftrightarrow \frac{T_n - \theta}{A_n} \leq t \quad \wedge \quad \frac{T_n - \theta}{A_n} \geq -t \\
&\Leftrightarrow \frac{T_n - \theta}{A_n} \leq t \quad \wedge \quad -t \leq \frac{T_n - \theta}{A_n} \\
&\Leftrightarrow -t \leq \frac{T_n - \theta}{A_n} \leq t
\end{aligned}$$

Festlegung der Größen t, A_n im KI $[T_n - t \cdot A_n\ ,\ T_n + t \cdot A_n]$

$\hookrightarrow$ $t > 0$ ist (meist) $(1 - \frac{\alpha}{2})$-Quantil einer symmetrischen „Standardverteilung“ (oft approximiert durch Anwendung des zentralen Grenzwertsatzes).

$\hookrightarrow$ A_n ist (meist konsistenter) Schätzer für den Standardfehler $\sqrt{var(T_n)}$ (wird als empirischer Standardfehler bzw. ebenfalls als Standardfehler bezeichnet).

$\hookrightarrow$ In Ausnahmefällen ist A_n zufallsunabhängig (KI mit fester Breite).

Analog bei einseitigen KI oder unsymmetrischen Intervallgrenzen.

- Fall „linksseitig unbeschränkt“: $]-\infty; G_o]$ mit $G_o = T_n + t \cdot A_n$
- Erläuterung: Die Schätzung T_n für θ muss nach oben etwas ausgeweitet werden, um θ mit ausreichender WS zu „überdecken“.
- $P(G_o \geq \theta) = 1 - \alpha$, d.h. $P(T_n + t \cdot A_n \geq \theta) = 1 - \alpha$
- Es gilt $T_n + t \cdot A_n \geq \theta \Leftrightarrow T_n - \theta \geq -t \cdot A_n \Leftrightarrow \frac{T_n - \theta}{A_n} \geq -t$.
- Also wird gefordert: $P(\frac{T_n - \theta}{A_n} \geq -t) \stackrel{!}{=} 1 - \alpha$
- Bei stetigen Modellen ist das i.d.R. gleichwertig zu $P(\frac{T_n - \theta}{A_n} \leq -t) \stackrel{!}{=} \alpha$
- $-t$ ist also das α-Quantil der Stichprobenverteilung von $\frac{T_n - \theta}{A_n}$, welche meist approximativ nicht mehr von θ abhängt (ZGS).

Übung: Wie lautet der entsprechende Ansatz für ein rechtsseitig unbeschränktes $(1-\alpha)$-Konfidenzintervall $[G_n; \infty[$

- Fall „rechtsseitig unbeschränkt“: $]G_u; \infty[$ mit $G_u = T_n - t \cdot A_n$
- Erläuterung: Die Schätzung T_n für θ muss nach unten etwas ausgeweitet werden, um θ mit ausreichender WS zu „überdecken“.
- $P(G_u \leq \theta) = 1 - \alpha$, d.h. $P(T_n - t \cdot A_n \leq \theta) = 1 - \alpha$
- Es gilt $T_n - t \cdot A_n \leq \theta \Leftrightarrow T_n - \theta \leq t \cdot A_n \Leftrightarrow \frac{T_n - \theta}{A_n} \leq t$.
- Also wird gefordert: $P(\frac{T_n - \theta}{A_n} \leq t) \stackrel{!}{=} 1 - \alpha$
- t ist also das $(1-\alpha)$-Quantil der Stichprobenverteilung von $\frac{T_n - \theta}{A_n}$, welche meist (wenigstens approximativ, ZGS) nicht mehr von θ abhängt.

5.3 Konfidenzintervalle für den Erwartungswert

Seien $X_1, \ldots, X_n \overset{u.i.v}{\sim} \mathcal{N}(\mu, \sigma^2)$. Gesucht ist ein (zweiseitiges) Konfidenzintervall für den Erwartungswert μ.

Erster Fall: σ ist bekannt

Ein bekannter Punktschätzer für μ ist das arithmetische Mittel $T_n = \bar{X}$. Es gilt:

$$X_1 + \cdots + X_n \sim \mathcal{N}(n\mu, n\sigma^2) \Rightarrow \bar{X} = \frac{X_1 + \cdots + X_n}{n} \sim \mathcal{N}(\mu, \sigma^2/n)$$

$$\Rightarrow \quad \frac{\bar{X} - \mu}{\sigma/\sqrt{n}} \sim \mathcal{N}(0,1) \quad (\star)$$

$(\star)$ enthält den unbekannten Parameter μ; die Verteilung von $(\star)$ ist unabhängig von μ.

Das KI kann in der Form $[T_n - t \cdot A_n; T_n + t \cdot A_n]$ mit $T_n = \bar{X}$ und $A_n = \sigma/\sqrt{n}$ gewählt werden. Seine Breite ist dann zufallsunabhängig $2t \cdot \sigma/\sqrt{n}$.

Zur Festlegung von t in $[T_n - t \cdot A_n; T_n + t \cdot A_n]$:

$\hookrightarrow$ Es gilt

$$1 - \alpha \overset{!}{=} P(\bar{X} - t\sigma/\sqrt{n} \leq \mu \leq \bar{X} + t\sigma/\sqrt{n}) \quad = \quad P\left(-t \leq \frac{\bar{X} - \mu}{\sigma/\sqrt{n}} \leq t\right)$$

$$= \Phi(t) - \Phi(-t) = 2\Phi(t) - 1$$

$\hookrightarrow$ Dabei gilt $2\Phi(t) - 1 = 1 - \alpha \Leftrightarrow \Phi(t) = 1 - \alpha/2$

Zweiseitiges KI für μ, wenn σ^2 bekannt

$$[G_u; G_o] = \left[\bar{X} - z_{1-\alpha/2} \cdot \frac{\sigma}{\sqrt{n}} \; ; \; \bar{X} + z_{1-\alpha/2} \cdot \frac{\sigma}{\sqrt{n}}\right]$$

mit $z_{1-\alpha/2}$, d.h. dem $(1 - \alpha/2)$-Quantil der Standardnormalverteilung.

z.B. mit R und $\alpha = 0.01 \rightarrow z_{1-\alpha/2} = z_{0.995} = 2.575 \quad \rightarrow$ `qnorm(0.995)`

$\hookrightarrow$ Bestimme die Breite $b_{\mathrm{KI}} = G_o - G_u$ des Konfidenzintervalls

$$[G_u\ ;\ G_o] = \left[\bar{X} - z_{1-\alpha/2} \cdot \frac{\sigma}{\sqrt{n}}\ ;\ \bar{X} + z_{1-\alpha/2} \cdot \frac{\sigma}{\sqrt{n}}\right]$$

$\hookrightarrow$ Was passiert, wenn wir α klein oder groß machen? Was passiert, wenn wir den Stichprobenumfang n gegen unendlich laufen lassen?

$$\begin{aligned} b_{\mathrm{KI}} = G_o - G_u &= \bar{X} + z_{1-\alpha/2} \cdot \frac{\sigma}{\sqrt{n}} - \left(\bar{X} - z_{1-\alpha/2} \cdot \frac{\sigma}{\sqrt{n}}\right) \\ &= 2 \cdot z_{1-\alpha/2} \cdot \frac{\sigma}{\sqrt{n}}. \end{aligned}$$

$\hookrightarrow$ Effekt von α (bei festem n) .

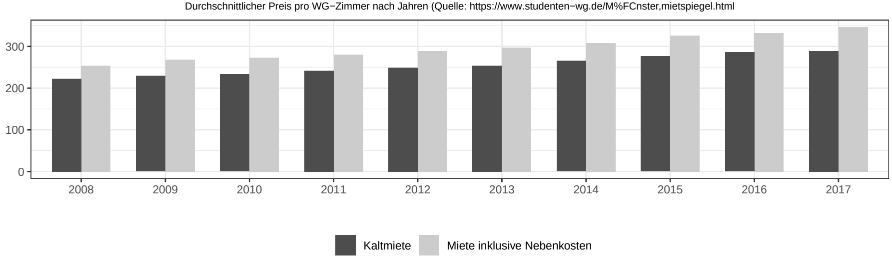
- α klein $\Rightarrow$ Breite nimmt zu
- α groß $\Rightarrow$ Breite nimmt ab.

$\hookrightarrow$ Bei konstantem α nimmt die Breite für wachsendes n ab, d.h.

$$\lim_{n\to\infty} 2 \cdot z_{1-\alpha/2} \cdot \frac{\sigma}{\sqrt{n}} = 2 \cdot z_{1-\alpha/2} \cdot \sigma \lim_{n\to\infty} \frac{1}{\sqrt{n}} = 0.$$

Fiktives Zahlenbeispiel zur Monatsmiete von Studenten in MS

- $\hookrightarrow$ n=144, $\bar{X}$=300
- $\hookrightarrow$ Annahme: $X_1, \ldots, X_n \overset{u.i.v}{\sim} \mathcal{N}(\mu, \sigma^2)$. Annahme: $\sigma = 100$ ist bekannt (?).
- $\hookrightarrow$ ges.: Zweiseitiges Konfidenzintervall für μ, $\alpha = 0.05$



Übung: Bestimmen Sie das zweiseitige Konfidenzintervall für μ ($\alpha = 0.05$) gegeben $n = 144$, $\bar{X} = 300$, $\sigma = 100$.

$$\begin{aligned}
\bar{X} - z_{1-0.05/2} \cdot \frac{\sigma}{\sqrt{n}} &\leq \mu \leq \bar{X} + z_{1-0.05/2} \cdot \frac{\sigma}{\sqrt{n}} \\
300 - 1.96 \cdot \frac{100}{12} &\leq \mu \leq 300 + 1.96 \cdot \frac{100}{12} \\
283.67 &\leq \mu \leq 316.33
\end{aligned}$$

Übung: Wie groß müsste n mindestens sein, um zu einem Signifikanzniveau $\alpha = 0.05$ ein zweiseitiges Konfidenzintervall für μ max. Breite 20 zu erhalten?

Breite ist $B = 2t\sigma/\sqrt{n}$ mit $t \approx 1.96$

$B \leq 20 \Leftrightarrow 20\sqrt{n} \geq 2t\sigma \Leftrightarrow n \geq (2t\sigma/20)^2 = (2 \cdot 1.96 \cdot 100/20)^2 \approx 384.16$

Übung: Verifizieren Sie Ihr Ergebnis, indem Sie zunächst das entsprechende Konfidenzintervall und anschließend dessen Breite ermitteln.

$$\begin{aligned}
300 - 1.96 \cdot \frac{100}{\sqrt{385}} &\leq \mu \leq 300 + 1.96 \cdot \frac{100}{\sqrt{385}} \\
290.01 &\leq \mu \leq 309.99
\end{aligned}$$

$$\Longrightarrow \quad \text{Breite des KIs:} \quad B = 309.99 - 290.01 = 19.98$$

Einseitiges Konfidenzintervall $[G_u; \infty[$ für μ bei bekanntem σ^2

$\hookrightarrow$ Analog zum Vorgehen im zweiseitigen Fall:

$$1 - \alpha = P\left(\frac{\bar{X} - \mu}{\sigma/\sqrt{n}} \ \leq \ z_{1-\alpha}\right) = P\left(\mu \ \geq \ \bar{X} - z_{1-\alpha} \cdot \frac{\sigma}{\sqrt{n}}\right)$$

$\hookrightarrow$ Also $G_u = \bar{X} - z_{1-\alpha} \cdot \frac{\sigma}{\sqrt{n}}$

$\hookrightarrow$ Analog mit oberer Grenze: $KI = \left]-\infty\ ;\ \bar{X} + z_{1-\alpha} \cdot \frac{\sigma}{\sqrt{n}}\right]$

Beispiel: Monatsmieten von Studenten in Münster

- $\hookrightarrow$ n=144, $\bar{X}$=300, Annahme: $X_1, \ldots, X_n \overset{u.i.v}{\sim} \mathcal{N}(\mu, 100^2)$.
- $\hookrightarrow$ ges.: Einseitiges oberes Konfidenzintervall für μ, $\alpha \in \{0.01, 0.05, 0.10\}$

- $\hookrightarrow$ Für allgemeines α: $-\infty < \mu \leq \bar{X} + z_{1-\alpha} \cdot \frac{\sigma}{\sqrt{n}} = 300 + z_{1-\alpha} \cdot \frac{100}{\sqrt{144}}$
- $\hookrightarrow$ $z_{0.99} \approx 2.326$, $z_{0.05} \approx 1.645$, $z_{0.9} \approx 1.282$
- $\hookrightarrow$ Für $\alpha = 0.01$: $-\infty < \mu \leq 300 + 2.326 \cdot \frac{100}{\sqrt{144}} = 319.38$
- $\hookrightarrow$ Für $\alpha = 0.05$: $-\infty < \mu \leq 300 + 1.645 \cdot \frac{100}{\sqrt{144}} = 313.71$
- $\hookrightarrow$ Für $\alpha = 0.1$: $-\infty < \mu \leq 300 + 1.282 \cdot \frac{100}{\sqrt{144}} = 310.68$
- $\hookrightarrow$ Beachte wiederum: Je größer α, desto kleiner die vorgegebene Überdeckungs-WS, desto kleiner das KI.

$X_1, \ldots, X_n \overset{u.i.v}{\sim} \mathcal{N}(\mu, \sigma^2)$. Wir suchen erneut Konfidenzintervallschätzung für μ.

Zweiter Fall: σ ist <u>un</u>bekannt

Konstruktion einer Zufallsvariablen, die den wahren Parameter enthält, mit bekannter Verteilung, die unabhängig ist vom unbekannten Parameter.

$$(\star\star) \quad \frac{\bar{X} - \mu}{S/\sqrt{n}} = \frac{\bar{X} - \mu}{S} \cdot \sqrt{n} \sim t_{n-1} \text{ mit } S = \sqrt{\frac{\sum_{i=1}^{n}(X_i - \bar{X})^2}{n-1}}$$

↪ **Beachte**: Der Ausdruck unterscheidet sich von jenem bei bekannter Varianz σ^2 nur durch die Ersetzung eben jener Varianz durch die Schätzung S^2.

↪ Das Konfidenzintervall ist dann von der Form

$$[G_u\,;\; G_o] \quad = \quad [T_n - t \cdot S/\sqrt{n}\,;\; T_n + t \cdot S/\sqrt{n}]$$

mit einem geeigneten Wert $t > 0$ und zufallsabhängiger Breite $B = 2tS/\sqrt{n}$.

↪ Für die Bestimmung von t muss die Verteilung $(\star\star)$ verwendet werden, dazu zwei Exkurse:

Exkurs 1: χ^2-Verteilung

Seien $X_1, \ldots, X_n \overset{u.i.v.}{\sim} \mathcal{N}(0,1)$. Dann heißt die Verteilung der Zufallsvariablen

$$Z := X_1^2 + \ldots + X_n^2$$

Chi-Quadrat Verteilung mit n **Freiheitsgraden**, Symbol χ^2_n.

- $\hookrightarrow$ Ihre Dichte lässt sich durch Faltung bestimmen

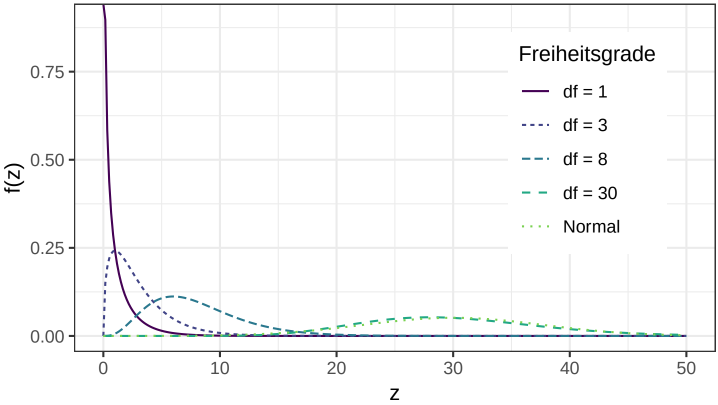
$$f_n(z) = \begin{cases} \frac{z^{n/2-1} \cdot e^{-z/2}}{2^{n/2} \cdot \Gamma(n/2)} & \text{, falls } z > 0 \\ 0 & \text{, falls } z \leq 0 \end{cases} \text{ mit } \Gamma(t) = \int_0^\infty x^{t-1} \cdot e^{-x} dx$$

- $\hookrightarrow$ Momente: $E(Z) = n$ und $var(Z) = 2n$
- $\hookrightarrow$ Dichte, Verteilungs-, Quantilfunktion mit R: `dchisq()`, `pchisq()`, `qchisq()`

Für $X_1, \ldots, X_n \overset{u.i.v.}{\sim} \mathcal{N}(\mu, \sigma^2)$ gilt: $T = \sum_{i=1}^n (X_i - \bar{X})^2 / \sigma^2$ ist χ^2_{n-1}-verteilt.

Heuristik für $\mu = 0, \sigma = 1$: $Z = \underbrace{\sum_{i=1}^n X_i^2}_{\sim\chi^2_n} = \underbrace{\sum_{i=1}^n (X_i - \bar{X})^2}_{\sim\chi^2_{n-1}} + \underbrace{n\bar{X}^2}_{\sim\chi^2_1} = T + (\underbrace{\sqrt{n}\bar{X}}_{\sim\mathcal{N}(0,1)})^2$

Dichte der χ^2-Verteilung - Visualisierung



$\hookrightarrow$ für kleine n linkssteil

$\hookrightarrow$ für $n > 100$ Normalverteilungsapproximation: $Z \overset{approx.}{\sim} \mathcal{N}(n, 2n)$

Exkurs 2: t-Verteilung

Seien X und Z unabhängig, $X \sim \mathcal{N}(0,1), Z \sim \chi^2_n$. Die Verteilung der ZV

$$T := \frac{X}{\sqrt{Z/n}}$$

heißt t-**Verteilung mit** n **Freiheitsgraden**, Symbol: t_n

$\hookrightarrow$ Die Dichte berechnet sich z.B. mit dem Dichtetransformationssatz aus der gemeinsamen Dichte der Zufallsvariablen $X\sqrt{Z}$ und $X/\sqrt{Z}$

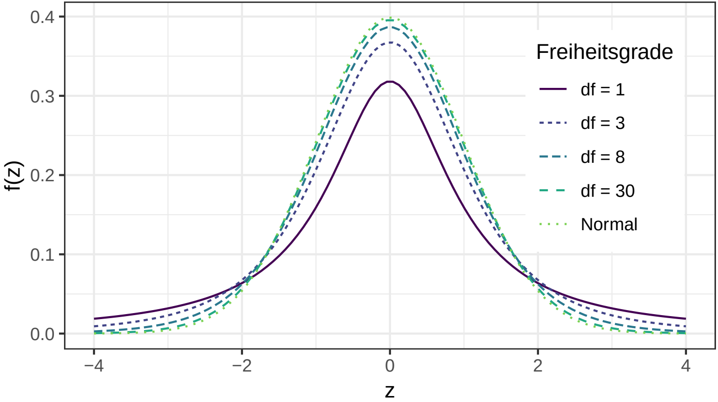
$$f(t) = \frac{\Gamma\left(\frac{n+1}{2}\right)}{\sqrt{n \cdot \pi} \cdot \Gamma\left(\frac{n}{2}\right)} \left(1 + \frac{t^2}{n}\right)^{-\frac{n+1}{2}}$$

$\hookrightarrow$ $E(T) = 0$ und $var(T) = \frac{n}{n-2}$ (für $n \geq 3$)

$\hookrightarrow$ Dichte, Verteilungs- und Quantilfunktion mit R: `dt( ...)`, `pt(...)`, `qt(...)`

Für $X_1, \dots, X_n \overset{u.i.v.}{\sim} \mathcal{N}(\mu, \sigma^2)$ sind $\bar{X}$ und S st.u. und es gilt $\frac{\bar{X}-\mu}{S/\sqrt{n}} \sim t_{n-1}$.

Dichte der *t*-Verteilung - Visualisierung



$\hookrightarrow$ schwerere Ränder im Vergleich zur Normalverteilung

$\hookrightarrow$ für $n \to \infty$ Konvergenz zur Normalverteilung, ab $n = 30$ Approximation gut

$X_1, \ldots, X_n \overset{u.i.v}{\sim} \mathcal{N}(\mu, \sigma^2)$. Wir suchen erneut Konfidenzintervallschätzung für μ, diesmal aber für unbekanntes σ
Aufgrund der Exkurse gilt:

$$\begin{aligned}
1-\alpha &= P\left(-t_{1-\alpha/2;\, n-1} \ \leq\ \frac{\bar{X}-\mu}{S/\sqrt{n}} \ \leq\ t_{1-\alpha/2;\, n-1}\right) \\
&= P\left(-t_{1-\alpha/2;\, n-1} \cdot \frac{S}{\sqrt{n}} \ \leq\ \bar{X}-\mu \ \leq\ t_{1-\alpha/2;\, n-1} \cdot \frac{S}{\sqrt{n}}\right) \\
&= P\left(\bar{X} - t_{1-\alpha/2;\, n-1} \cdot \frac{S}{\sqrt{n}} \ \leq\ \mu \ \leq\ \bar{X} + t_{1-\alpha/2;\, n-1} \cdot \frac{S}{\sqrt{n}}\right)
\end{aligned}$$

Somit lautet das zugehörige Konfidenzintervall:

$$\left[\bar{X} - t_{1-\alpha/2;\, n-1} \cdot \frac{S}{\sqrt{n}}, \bar{X} + t_{1-\alpha/2;\, n-1} \cdot \frac{S}{\sqrt{n}}\right]$$

mit $b_{\mathrm{KI}} = 2 \cdot t_{1-\alpha/2;\, n-1} \cdot \frac{S}{\sqrt{n}}$

Approximative Konfidenzintervalle für μ

Bei **beliebiger Verteilung der Grundgesamtheit** lassen sich die Verteilungen von

$$(\star) \quad \frac{\bar{X}-\mu}{\sigma}\cdot\sqrt{n} \text{ und } (\star\star) \quad \frac{\bar{X}-\mu}{S}\cdot\sqrt{n}$$

für großes n („Faustregel" $n > 30$) durch die Standardnormalverteilung approximieren!

Wir erhalten für bekanntes σ^2

$$\left[\bar{X} - z_{1-\alpha/2}\cdot\frac{\sigma}{\sqrt{n}},\ \bar{X} + z_{1-\alpha/2}\cdot\frac{\sigma}{\sqrt{n}}\right]$$

und für unbekanntes σ^2

$$\left[\bar{X} - z_{1-\alpha/2}\cdot\frac{S}{\sqrt{n}},\ \bar{X} + z_{1-\alpha/2}\cdot\frac{S}{\sqrt{n}}\right]$$

Übung: (Anteilswertschätzung) $X_1, \ldots, X_n$ seien u.i.v. $Bin(1, p)$-verteilt. Bestimmen Sie ein approximatives zweiseitiges $(1-\alpha)$-Konfidenzintervall für p auf Grundlage des Schätzers $\bar{X}$.

1. Stellen Sie das KI mit dem Ansatz ($\star\star$) der vorigen Folie dar.

$\sqrt{n}(\bar{X} - \mu)/S$ ist approximativ $\mathcal{N}(0,1)$ verteilt, dabei gilt $\mu = p$.
Das KI für p ist also

$$\left[\bar{X} - z_{1-\alpha/2} \cdot \frac{S}{\sqrt{n}}, \ \bar{X} + z_{1-\alpha/2} \cdot \frac{S}{\sqrt{n}}\right]$$

2. Führen Sie S (bzw. zunächst $(n-1)S^2$) auf $\bar{X}$ zurück und vereinfachen Sie die Ausdrücke im KI so weit wie möglich. Hinweis: $X_i = X_i^2$ (warum?)

$\hookrightarrow$ $(n-1)S^2 = \sum(X_i - \bar{X})^2 = \sum X_i^2 - n\bar{X}^2$ (Steiner'scher Verschiebungssatz)

$\hookrightarrow$ $\sum X_i^2 = \sum X_i = n\bar{X}$, denn $X_i \in \{0,1\}$ (f.s.)

$\hookrightarrow$ Also $(n-1)S^2 = n\bar{X} - n\bar{X}^2 = n\bar{X}(1-\bar{X})$

$\hookrightarrow$ Also $S = \sqrt{\frac{n}{n-1}\bar{X}(1-\bar{X})}$

$\hookrightarrow$ $\bar{X} \pm z_{1-\alpha/2} \cdot \frac{S}{\sqrt{n}} = \bar{X} \pm z_{1-\alpha/2} \cdot \frac{\sqrt{\frac{n}{n-1}\bar{X}(1-\bar{X})}}{\sqrt{n}} = \bar{X} \pm z_{1-\alpha/2} \cdot \sqrt{\frac{1}{n-1}\bar{X}(1-\bar{X})}$

5.4 Konfidenzintervall für die Varianz

- ↪ Seien $X_1, \ldots, X_n \overset{u.i.v}{\sim} \mathcal{N}(\mu, \sigma^2)$. Wir suchen jetzt eine Konfidenzintervallschätzung für σ^2, dabei sei μ unbekannt.
- ↪ Nach Exkurs 1 gilt: $\frac{n-1}{\sigma^2} \cdot S^2 \sim \chi^2_{n-1}$, d.h. mit dem α-Quantil q_α zu χ^2_{n-1}

$$
\begin{aligned}
1 - \alpha &= P\left(q_{\alpha/2} \leq \frac{n-1}{\sigma^2} \cdot S^2 \leq q_{1-\alpha/2} \right) \\
&= P\left(\frac{q_{\alpha/2}}{(n-1) \cdot S^2} \leq \frac{1}{\sigma^2} \leq \frac{q_{1-\alpha/2}}{(n-1) \cdot S^2} \right) \\
&= P\left(\frac{(n-1) \cdot S^2}{q_{1-\alpha/2}} \leq \sigma^2 \leq \frac{(n-1) \cdot S^2}{q_{\alpha/2}} \right)
\end{aligned}
$$

Ein zweiseitiges $(1 - \alpha)$-KI für σ^2 ist $\left[\frac{(n-1) \cdot S^2}{q_{1-\alpha/2}} \; ; \; \frac{(n-1) \cdot S^2}{q_{\alpha/2}} \right]$

5.5 Zusammenfassung

- ↪ Schätzer T_n für eine unbekannte Kennzahl θ einer Grundgesamtheit treffen (fast) nie den tatsächlichen Wert von θ, allenfalls approximativ oder unverfälscht mit geringem Standardfehler.
- ↪ $(1-\alpha)$-Konfidenzintervalle für θ überdecken den tatsächlichen Wert von θ mit (approximativer) Wahrscheinlichkeit $1-\alpha$, geben also eine „statistische" Genauigkeit der (ursprünglichen) Schätzung.
- ↪ Zweiseitige Konfidenzintervalle für θ ergeben sich oft aus dem Ansatz

$$P(-t \le (T_n - \theta)/A_n \le t) \overset{!}{=} 1 - \alpha$$

  wobei t approximativ Quantil einer Standardverteilung ist, und Auflösung der beiden Ungleichungen nach θ.
- ↪ Die Breite eines $(1-\alpha)$-KI ist abhängig von α und n, i.d.R. ist sie auch stichprobenabhängig.
- ↪ Ausblick: Es bestehen enge Zusammenhänge zwischen KI und statistischen Tests (siehe nächstes Kapitel).