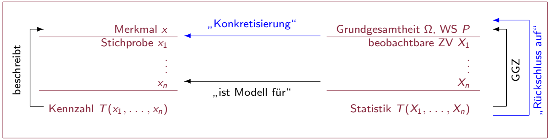
2. Stichprobenverteilungen

- Stichprobenstatistiken/Stichprobenverteilungen
- Transformationen von univariaten Zufallsvariablen
- Transformationsregeln für bivariate Verteilungen
- Funktionen zweier unabhängiger Zufallsvariablen
- Maximum/Minimum unabhängiger Zufallsvariablen
- Übersicht von Verteilungen und Transformationsregeln

2.1 Stichprobenstatistiken/Stichprobenverteilungen



- ↪ Beim Rückschluss von den Daten/Realisierungen auf das Modelll (Ω, P) wird Zufallsvariable (**Stichprobenstatistik**) $T(X_1, \dots, X_n)$ verwendet.
- ↪ Der Rückschluss kann (bei endlichem n) nicht exakt sein.
  - Fehler/Ungenauigkeiten werden mit Wahrscheinlichkeiten bewertet.
  - Die Verteilung von T abhängig vom WS-Modell (Ω, P) wird **Stichprobenverteilung** genannt.
- ↪ Abgrenzung von der **Modellverteilung**: Verteilung(sannahme) der ZV $X_1, \dots, X_n$ (ggf. mit Abhängigkeitsstruktur)

Beispiele für Modellverteilungen

↪ hier: Einstichprobenmodelle (meist) mit u.i.v. Zufallsvariablen $X_1, \ldots, X_n$

- „u.“: $X_1, \ldots, X_n$ sind stochastisch unabhängig, d.h.
  $\forall$ Ereignisse A_i: $P(X_1 \in A_1, \ldots, X_n \in A_n) = P(X_1 \in A_1) \cdots P(X_n \in A_n)$
- „i.“: Die $X_1, \ldots, X_n$ haben dieselbe („identische“) Verteilung, d.h.
  $\forall$ Ereignisse A und $\forall i, j$:$P(X_i \in A) = P(X_j \in A)$

↪ Beispiele diskreter Modelle

- Bernoulli-Ketten: $X_i \sim Bin(1, p)$ (Binomialverteilung)
- Klassierte Merkmale: $X_i \sim M(1, p_1, \ldots, p_K)$ (Multinomialverteilung)
- Wartezeiten: $X_i \sim Geo(p)$ (geometrische Verteilung)
- Ankunftszähler: $X_i \sim Pois(\lambda)$ (Poisson-Verteilung)

↪ Beispiele stetiger Modelle:

- Wartezeiten: $X_i \sim Exp(\lambda)$ (Exponentialverteilung)
- Messfehler: $X_i \sim \mathcal{N}(\mu, \sigma^2)$ (Normalverteilung)
- Einkommen: $X_i \sim Par(\lambda, c)$ (Pareto-Verteilung)

↪ Diese Modellannahmen (inkl. „u.i.v.“) müss(t)en im Einzelfall geprüft werden.

- Hierfür gibt es statistische Tests (Verteilungstests, s.u.)

Beispiele für Stichprobenstatistiken (Einstichprobenfall)

- $\hookrightarrow$ $T(X) = X_1 + \cdots + X_n$ bzw. $T(X) = \bar{X}$ bei Rückschluss auf Erwartungswert, z.B. bei Bernoulli-Ketten, klassierten Merkmale, Wartezeiten, Ankunftszähler
- $\hookrightarrow$ $T(X) = \max(X_1, \ldots, X_n)$ z.B. bei Einkommen
- $\hookrightarrow$ $T(X) = \sum(X_i - \bar{X})^2$ bzw. $T(X) = X_1^2 + \cdots + X_n^2$, z.B. bei Rückschluss auf die Varianz.

Bei Modell-Verteilungen mit mehreren Parametern müssen auch mehrere Stichprobenstatistiken gleichzeitig verwendet werden, z.B.:

- $\hookrightarrow$ Modellverteilung $\mathcal{N}(\mu, \sigma^2)$
  - $\square$ $T_1(X) = \bar{X}$
  - $\square$ $T_2(X) = \frac{1}{n-1} \sum_{i=1}^{n} (X_i - \bar{X})^2$
- $\hookrightarrow$ Modellverteilung $\mathcal{R}(a, b)$ (Rechteckverteilung)
  - $\square$ $T_1(X) = \min(X_1, \ldots, X_n)$
  - $\square$ $T_2(X) = \max(X_1, \ldots, X_n)$
- $\hookrightarrow$ Für die Verfahren der schließenden Statistik wird dann manchmal die gemeinsame Verteilung von T_1, T_2 benötigt.

Ausgangssituation: Zugrunde liegt eine Stichprobe mit n (meist) unabhängigen Zufallsvariablen $X_1, \ldots, X_n$ oder eine ZV X

$\hookrightarrow$ Wie ist $Y = X^2$ oder allgemeiner $Y = X^a$ verteilt? (Stichwort Datentransformation)

$\hookrightarrow$ Wie ist $Y = X_1^2 + \ldots + X_n^2$ verteilt? (Stichwort χ^2-Verteilung)

$\hookrightarrow$ Wie ist generell die Summe von Zufallsvariablen verteilt? (Faltung)

$\hookrightarrow$ Wie ist das Maximum der Zufallsvariablen verteilt? (Ausfall von Netzwerken)

$\hookrightarrow$ Wie ist generell die (gemeinsame) Verteilung der Zufallsvariable(n)

$$Y_1, \ldots, Y_k \text{ mit } Y_k = g_k(X_1, \ldots, X_n)?$$

Wir betrachten hier einige wichtige Spezialfälle:

- □ Univariate Verteilungen: $n = 1$ und $k = 1$
- □ Bivariate Verteilungen: $n = 2$ und $k = 2$
- □ Bivariate Verteilungen: $n = 2$ und $k = 1$

2.2 Transformationen von univariaten Zufallsvariablen

- Die Zufallsvariable X wird über eine Funktion $g(\cdot)$ in die Zufallsvariable Y überführt. Gesucht ist die Dichtefunktion von Y
- spezielle Vorgehensweisen, je nach Verteilungsart
  - diskrete Verteilungen: Bündelung von Wahrscheinlichkeiten, übertragbar auf Zufallsvektoren
  - stetige Verteilungen:
    Substitutionsregel für Integrale $\rightsquigarrow$ Dichtetransformationssatz

Diskreter Fall: Einleitendes Beispiel

Betrachte die diskrete, gleichverteilte ZV X mit Träger $\mathcal{T}_X = \{1, 2, 3, 4, 5\}$ und die transformierte ZV $Y = g(X) := (X - 2)^2$.

Es gilt $\mathcal{T}_Y = \{0, 1, 4, 9\}$ gilt, denn nur diese Werte werden von Y mit positiver W'keit angenommen.

Nun können wir einfach die Vorkommenswahrscheinlichkeiten aufsummieren:

$$
\begin{aligned}
f_Y(0) &= P(Y = 0) = P(X = 2) = 1/5, \\
f_Y(1) &= P(Y = 1) = P(X \in \{1, 3\}) = P(X = 1) + P(X = 3) = 2/5 \\
f_Y(4) &= P(Y = 4) = P(X = 4) = 1/5 \\
f_Y(9) &= P(Y = 9) = P(X = 5) = 1/5
\end{aligned}
$$

Diskreter Fall: Allgemein

Sei X diskrete ZV mit Träger $\mathcal{T}_X$ und Dichte $f_X(x) = P(X = x)$. Sei ferner $Y = g(X)$ univariate Transformation von X. Dann gilt:

$$f_y(y) = P(Y = y) = P(g(X) = y) = \sum_{\substack{x \in \mathcal{T}_X, \\ g(x) = y}} f_X(x).$$

Übung: Betrachte die ZV X mit Träger $\mathcal{T}_X = \{-2, -1, 0, 1, 2\}$ und Dichte $f_X(x) = 1/|\mathcal{T}_X|$. Bestimme die Verteilung von $Y = 2|X| + 1$.

Der Träger von Y ist die Menge $\mathcal{T}_Y = \{1, 3, 5\}$ und wir erhalten für die Dichte:

$$
\begin{aligned}
f_Y(1) &= f_X(0) = P(X = 0) = 1/5 \\
f_Y(3) &= f_X(1) + f_X(-1) = 2/5 \\
f_Y(5) &= f_X(2) + f_X(-2) = 2/5.
\end{aligned}
$$

Stetiger Fall: Idee

Wir gehen nun zum allgemeinen stetigen Fall über. Sei also X stetig verteilt mit Verteilungsfunktion $F_X(x)$. Sei ferner $Y = g(X)$ univariate Transformation von X.

Ansatz:

- $\hookrightarrow$ Bestimme die Verteilungsfunktion $F_Y(y)$ von Y mit Hilfe der bekannten Verteilungsfunktion von X.
- $\hookrightarrow$ Dazu muss die Ungleichung $g(X) \leq y$ so nach X aufgelöst werden, dass die Verteilungsfunktion F_X für die Berechnung der WS $P(g(X) \leq y)$ eingesetzt werden kann.
- $\hookrightarrow$ Die Dichte $f_Y(y)$ ist dann („fast sicher“) die Ableitung von $F_Y(y)$.

Stetiger Fall: Beispiel

Sei $X \sim \mathcal{N}(0,1)$-verteilt, d.h. mit Dichte φ und VF Φ

$$\varphi(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-x^2/2}, \quad \Phi(x) = \int_{-\infty}^{x} \varphi(t)dt$$

Betrachte die Transformation $Y = X^2$ und berechne die Verteilungsfunktion F_Y.

$\hookrightarrow$ Für $y < 0$ ist $F_Y(y) = P(Y \leq y) = P(X^2 \leq y) = 0$ $\qquad (X^2 \geq 0)$

$\hookrightarrow$ Für $y = 0$ ist $F_Y(0) = P(Y \leq 0) = P(X^2 \leq 0) = P(X = 0) = 0$ (X stetig v.)

$\hookrightarrow$ Für $y > 0$ ist:

$$\begin{aligned} F_Y(y) &= P(Y \leq y) = P(X^2 \leq y) = P(-\sqrt{y} \leq X \leq \sqrt{y}) \\ &= P(X \leq \sqrt{y}) - P(X < -\sqrt{y}) \\ &= P(X \leq \sqrt{y}) - P(X \leq -\sqrt{y}) \\ &= P(X \leq \sqrt{y}) - (1 - P(X \leq \sqrt{y})) \\ &= 2\Phi(\sqrt{y}) - 1 \end{aligned}$$

Die Dichte dazu ist dann

$\hookrightarrow$ $f_Y(y) = F_Y'(y) = 2\Phi'(\sqrt{y})\frac{1}{2\sqrt{y}} = \varphi(\sqrt{y})\frac{1}{\sqrt{y}} = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} y^{-\frac{1}{2}} e^{-\frac{y}{2}}$, $y > 0$.

Das ist die Dichte einer so genannten $\chi^2(1)$-Verteilung.

Übung: Es sei X eine stetig auf $[0;1]$ gleichverteilte Zufallsvariable. Berechnen Sie die Verteilung von $Y = -2\ln(X)$.

Für $y > 0$ gilt

$$\begin{aligned} F_Y(y) = P(Y \leq y) = P(-2\ln(X) \leq y) &= P(\ln(X) > -\frac{y}{2}) \\ &= P(X > e^{-y/2}) = \int_{e^{-y/2}}^{1} 1dx \\ &= 1 - e^{-y/2} \end{aligned}$$

Als Dichte ergibt sich nach Ableiten:

$$F_Y'(y) = f_Y(y) = -\left(-\frac{1}{2}\right) e^{-y/2} = \frac{1}{2} e^{-y/2} = \lambda e^{-\lambda y}$$

d.h. die Dichte einer Exponential-Verteilung $Exp(\lambda)$ mit $\lambda = \frac{1}{2}$.

Alternative: Dichtetransformationssatz

Verwendung der Substitutionsregel anstelle der Kettenregel ergibt:

Dichtetransformationssatz

Sei X eine stetige Zufallsvariable mit Dichtefunktion $f_X(\cdot)$ und $\mathcal{T} = \{x : f_X(x) > 0\}$.
Weiter sei $g : \mathcal{T} \to \Omega \subseteq \mathbb{R}$ eine Funktion mit den folgenden Eigenschaften

(i) g ist **bijektiv** (umkehrbar eindeutig) mit Umkehrfunktion $h = g^{-1}$,

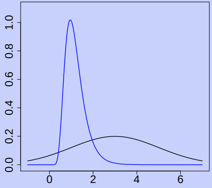
(ii) g und (dann auch!) h sind **stetig differenzierbar** mit $h'(y) \neq 0$ für alle $y \in \Omega$

Dann ist $Y = g(X)$ eine stetige Zufallsvariable mit der Dichte

$$f_Y(y) = f_X(h(y)) \cdot |h'(y)| \cdot \mathbb{1}_\Omega(y)$$

$X \sim \mathcal{N}(\mu, \sigma^2)$, gesucht ist Verteilung von $Y = g(X) = e^X$

$$h = g^{-1}(y) = \ln(y) \text{ sowie } h'(y) = \frac{1}{y}$$



Mit dem Dichtetransformationssatz folgt nun unmittelbar:

$$f_Y(y) = \underbrace{|h'(y)|}_{=1/y} f_X(h(y)) \cdot \mathbb{1}_\Omega(y)$$

$$= \frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma} \cdot \frac{1}{y} \cdot e^{-\frac{(\ln(y)-\mu)^2}{2\sigma^2}} \mathbb{1}_{[0;\infty)}(y)$$

Das ist die Dichte einer Lognormalverteilung (Verwendung: Bedienungs-/Wartezeiten. Alternative zur Normalverteilung, wenn nur positive Werte auftreten können.)

Übung: Es sei X eine stetig auf $[0;1]$ gleichverteilte Zufallsvariable. Berechnen Sie die Verteilung von $Y = -2\ln(X)$ mit Hilfe des Dichtetransformationssatzes.

Die Transformation ist hier $y = g(x) = -2\ln(x)$ mit Wertebereich $[0;\infty)$. Wir erhalten

$$h(y) = e^{-y/2} \text{ und damit } h'(y) = -\frac{1}{2}e^{-y/2} \neq 0.$$

Die Dichte einer $R[0,1]$-Verteilung lautet $f_X(x) = \mathbb{1}_{[0,1]}(x)$. Mit dem Dichtetransformationssatz folgt:

$$f_Y(y) = |h'(y)| f_X(h(y)) \mathbb{1}_{[0;\infty)}(y) = \left| -\frac{e^{-y/2}}{2} \right| \mathbb{1}_{[0,1]}(e^{-y/2})\, \mathbb{1}_{[0;\infty)}(y)$$

$$= \frac{1}{2}e^{-y/2}\mathbb{1}_{[0,\infty)}(y).$$

Auch auf diesem Wege erhalten wir also die Dichte einer Exp$(1/2)$-Verteilung.

Übung: Sei $X \sim \mathcal{N}(\mu, \sigma^2)$. Zeige mit dem Dichtetransformationssatz, dass die lineare Transformation $Z = \frac{X-\mu}{\sigma}$ eine $\mathcal{N}(0,1)$-Verteilung besitzt.

Wir erhalten

$$h(z) = z\sigma + \mu \text{ und } h'(z) = \sigma > 0.$$

Mit $f_Z(z) = f_X(h(z)) \cdot |h'(z)|$ folgt sodann:

$$f_Z(z) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma} \cdot e^{-\frac{1}{2}\left(\frac{(\sigma z+\mu)-\mu}{\sigma}\right)^2} \cdot |\sigma|$$
$$= \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \cdot e^{-\frac{1}{2}z^2}$$

Das ist die aber gerade die Dichte der Standardnormalverteilung, womit die Aussage gezeigt ist. D.h. $Z \sim \mathcal{N}(0,1)$.

2.3 Transformationsregeln für bivariate Verteilungen

↪ Gemeint sind Transformationen

$$(X, Y) \mapsto (U, V) = (g_1(X, Y), g_2(X, Y))$$

bei denen sich X, Y aus U, V „rekonstruieren lassen,z.B.

- □ $(X, Y) \mapsto (X + Y, X - Y)$
- □ $(X, Y) \mapsto (X \cdot Y, X/Y)$

↪ Zu den sich ergebenden bivariaten Verteilungen lassen sich jeweils die Randverteilungen berechnen, z.B.

- □ $(X, Y) \mapsto (U, V) = (X + Y, X - Y) \quad \rightsquigarrow \quad X + Y$ (Summenverteilungen)
- □ $(X, Y) \mapsto (U; V) = (X \cdot Y, X/Y) \quad \rightsquigarrow \quad X/Y$ (z.B. t-Verteilung)

↪ Dabei Beschränkung auf den stetigen Fall

↪ Hilfsmittel: Bivariater Dichtetransformationssatz.

Dichtetransformationssatz (bivariat), Verteilung von $(U, V) = g(X, Y)$

Es sei (X, Y) ein stetig verteilter Zufallsvektor mit gemeinsamer stetiger Dichte $f = f_{X,Y}$ und $\mathcal{T} = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : f(x, y) > 0\}$

Weiter sei $g = (g_1, g_2) : \mathcal{T} \to \Omega \subseteq \mathbb{R}^2$ eine Funktion mit folgenden Eigenschaften:

(i) g ist stetig differenzierbar.

(ii) g ist bijektiv mit Umkehrfunktion $h = (h_1, h_2) : \Omega \to \mathcal{T}$, d.h. insbesondere

$$\left\{ \begin{array}{ccc} u & = & g_1(x, y) \\ v & = & g_2(x, y) \end{array} \right\} \Leftrightarrow \left\{ \begin{array}{ccc} x & = & h_1(u, v) \\ y & = & h_2(u, v) \end{array} \right\} \qquad \forall (x, y) \in \mathcal{T}, \forall (u, v) \in \Omega$$

(iii) h ist differenzierbar, $\mathcal{J}_h(u, v) = \begin{pmatrix} \partial h_1/\partial u & \partial h_1/\partial v \\ \partial h_2/\partial u & \partial h_2/\partial v \end{pmatrix}$ ist invertierbar $\forall (u, v) \in \Omega$

Dann ist $(U, V) = g(X, Y)$ ein stetiger Zufallsvektor mit der Dichte

$$f_{U,V}(u, v) = f_{X,Y}(h(u, v)) \cdot |\det(\mathcal{J}_h(u, v))| \cdot 1_\Omega(u, v)$$

- Bezeichnung: $\mathcal{J}_h(u, v)$ heißt **Jacobi-Matrix** von h in (u, v).
- Transformationssatz übertragbar auf den Fall multivariater Verteilungen

Generisches Beispiel

Gegeben: Zufallsvektor (X, Y) mit stetiger WS-Dichte $f_{X,Y}$. Gesucht: die gemeinsame Verteilung von $(U, V) = (X + Y, X - Y)$. Dazu:

- $\begin{Bmatrix} u = x + y \\ v = x - y \end{Bmatrix}$ nach x, y auflösen: $\Leftrightarrow \begin{Bmatrix} u + v = 2x \\ u - v = 2y \end{Bmatrix} \Leftrightarrow \begin{Bmatrix} x = (u + v)/2 \\ y = (u - v)/2 \end{Bmatrix}$
- Schreibe Lösung als Funktion $h(u, v)$ und berechne die Jacobi-Matrix und den Betrag ihrer Determinante:

  $$h(u, v) = \left(\tfrac{u+v}{2}, \tfrac{u-v}{2}\right),\ \mathcal{J}_h(u, v) = \begin{pmatrix} 1/2 & 1/2 \\ 1/2 & -1/2 \end{pmatrix} \text{ und } |\det \mathcal{J}_h(u, v)| = \tfrac{1}{2}$$
- Wende den Dichtetransformationssatz an: $f_{U,V}(u, v) = f_{X,Y}\left(\frac{u+v}{2}, \frac{u-v}{2}\right) \cdot \frac{1}{2}$

Daraus (z.B.) die Randverteilungen:

- $f_{X+Y}(u) = \int\limits_{-\infty}^{\infty} f_{X,Y}\left(\frac{u+v}{2}, \frac{u-v}{2}\right) \cdot \frac{1}{2} dv \overset{t=\frac{u+v}{2}, dt=\frac{1}{2}dv, u-t=\frac{u-v}{2}}{=} \int\limits_{-\infty}^{\infty} f_{X,Y}(t, u - t) dt$
- $f_{X-Y}(v) = \int\limits_{-\infty}^{\infty} f_{X,Y}\left(\frac{u+v}{2}, \frac{u-v}{2}\right) \cdot \frac{1}{2} du \overset{t=\frac{u-v}{2}, dt=\frac{1}{2}du, v+t=\frac{u+v}{2}}{=} \int\limits_{-\infty}^{\infty} f_{X,Y}(v + t, t) dt$

Randverteilungen insb. wichtig bei st.u. X, Y, d.h. für $f_{X,Y}(x, y) = f_X(x) f_Y(y)$

Übung: Berechnen Sie in der obigen Situation eine Dichte der gemeinsamen Verteilung von $(U, V) = (X + Y, X)$ und daraus eine allgemeine Formel für die Dichte von $X + Y$ bei st.u. X, Y.

Es ist $(u, v) = g(x, y) = (x + y, x)$.
Daraus zunächst die Umkehrfunktion:

- $v = x \Leftrightarrow x = v$
- $u = x + y \Leftrightarrow y = u - x = u - v$

D.h. es ist $h(u, v) = (v, u - v)$. Jakobi-Matrix ist $\mathcal{J}_h = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$

mit $|\det \mathcal{J}_h| = 1$.
Aufgrund der Dichtetransformation ergibt sich die Dichte
$f_{U,V}(u, v) = f_{X,Y}(v, u - v) \cdot 1 = f_{X,Y}(v, u - v)$
Die Randverteilung ergibt sich durch Wegintegrieren der Variable v,d.h.

$$f_{X+Y}(u) = \int_{-\infty}^{\infty} f_{U,V}(u, v)dv = \int_{-\infty}^{\infty} f_{X,Y}(v, u - v)dv = \int_{-\infty}^{\infty} f_X(v)f_Y(u - v)dv$$

Ist das Ziel nur die Berechnung der Verteilung von $X + Y$, so ist dieser Rechenweg etwas einfacher als der Weg über $(X + Y, X - Y)$.

$f_{X,Y}(x,y) = e^{-(x+y)} = e^{-x} \cdot e^{-y},\ x,y \geq 0$ (s.o., X, Y, st.u.)

$\hookrightarrow$ Gesucht: Dichte von $(U,V) = (X+Y, X-Y)$ bzw. $U = X+Y$

$$\hookrightarrow \quad f_{U,V}(u,v) = f_{X,Y}\left(\tfrac{u+v}{2}, \tfrac{u-v}{2}\right) \cdot \tfrac{1}{2}$$

$$= \tfrac{1}{2} \cdot e^{-\left(\frac{u+v}{2} + \frac{u-v}{2}\right)} \cdot 1_{[0;\infty[^2}\left(\tfrac{u+v}{2}, \tfrac{u-v}{2}\right)$$

$$= \tfrac{1}{2} \cdot e^{-u} \cdot 1_{[0;\infty[^2}\left(\tfrac{u+v}{2}, \tfrac{u-v}{2}\right)$$

Umformung der Bedingung $1_{[0;\infty]^2}(\dots) = 1$:
$u+v \geq 0, u-v \geq 0 \Leftrightarrow v \geq -u, v \leq u \Leftrightarrow |v| \leq u \Leftrightarrow |v| \leq u, u \geq 0$

$$= \tfrac{1}{2} e^{-u} \cdot 1_{[0;\infty[}(u) \cdot 1_{[-u;u]}(v)$$

$\hookrightarrow$ Dichte von U ist

$$\begin{aligned} f_U(u) &= \int_{-\infty}^{\infty} f_{U,V}(u,v)dv \\ &= \int_{-\infty}^{\infty} \tfrac{1}{2} e^{-u} \cdot 1_{[0;\infty[}(u) \cdot 1_{[-u;u]}(v)dv \\ &= ue^{-u} 1_{[0;\infty[}(u) \end{aligned}$$

Beachte: U ist Summe zweier st.u. $Exp(1)$-verteilter ZV. (Erlangverteilung)

2.4 Funktionen zweier unabhängiger Zufallsvariablen

- Im Folgenden: X, Y st.u. ZV und eine stetige Funktion $g : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$.
- Gesucht: Die Verteilung von $g(X, Y)$, z.B.
  - $g(X, Y) = X + Y$ (Faltung, engl.: Convolution)
  - $g(X, Y) = XY$
  - $g(X, Y) = X/Y$
  - $g(X, Y) = \max(X, Y)$
  - $g(X, Y) = \min(X, Y)$

↪ Diskreter Fall: X, Y seien st.u.

- ☐ X nehme Werte in $\mathcal{T}_1 = \{x_0, x_1, x_2, \dots\}$ an,
- ☐ Y nehme Werte in $\mathcal{T}_2 = \{y_0, y_1, y_2, \dots\}$ an.

↪ Betrachte eine Funktion $g : \mathcal{T}_1 \times \mathcal{T}_2 \to \mathbb{R}$. Die ZV $Z = g(X, Y)$ nimmt nur Werte der Form $g(x_i, y_j)$, d.h. Werte in der folgenden diskreten Menge an:

$$\mathcal{Z} := g(\mathcal{T}_1 \times \mathcal{T}_2) = \{z \in \mathbb{R} : \exists i, j \in \mathbb{N}_0\, z = g(x_i, y_j)\}$$

↪ Dann hat Z eine diskrete Verteilung mit Dichte (für $z \in \mathcal{Z}$)

$$\begin{aligned} f_Z(z) &= P(Z = z) = P(g(X, Y) = z) = P(\{(X, Y) \in \mathcal{T}_1 \times \mathcal{T}_2 : g(X, Y) = z\}) \\ &= \sum_{(x,y) \in \mathcal{T}_1 \times \mathcal{T}_2} f_{X,Y}(x, y) \cdot 1_{\{z\}}(g(x, y)) = \sum_{i=0}^{\infty} \sum_{j=0}^{\infty} f_{X,Y}(x_i, y_j) \cdot 1_{\{z\}}(g(x_i, y_j)) \\ &\overset{st.u.}{=} \sum_{i=0}^{\infty} \sum_{j=0}^{\infty} f_X(x_i) f_Y(y_j) \cdot 1_{\{z\}}(g(x_i, y_j)) \end{aligned}$$

$P(Z = z)$ ist die Summe all derjenigen Produkt-WS $f_X(x) f_Y(y)$ mit $g(x, y) = z$.

- Jetzt $g(x, y) = x + y$

Faltung von diskreten Zufallsvariablen

- Für st.u. reelle ZV X, Y mit Werten in $\mathcal{T}_1 = \{x_0, x_1, \dots,\}$, $\mathcal{T}_2 = \{y_0, y_1, \dots\}$ ist $Z = X + Y$ diskrete ZV mit Werten in $\mathcal{T} = \{z : \exists i, j \in \mathbb{N}\, z = x_i + y_j\}$ und Dichte

$$f_Z(z) = \sum_{i=0}^{\infty} \sum_{j=0}^{\infty} f_X(x_i) \cdot f_Y(y_j) \cdot 1_{\{z\}}(x_i + y_j). \quad \text{für } z \in \mathcal{T} \qquad (*)$$

- Spezialfall $\mathcal{T}_1 = \mathcal{T}_2 = \mathbb{N}_0$:

$$\begin{aligned} f_Z(z) &= \sum_{i=0}^{\infty} \sum_{j=0}^{\infty} f_X(i) \cdot f_Y(j) \cdot 1_{\{z\}}(i + j) \\ &= \sum_{i=0}^{\infty} \sum_{j=0}^{\infty} f_X(i) \cdot f_Y(j) \cdot 1_{\{j\}}(z - i) \text{ d.h.} \\ f_Z(z) &= \sum_{i=0}^{z} f_X(i) \cdot f_Y(z - i) \quad \text{für } z \in \mathbb{N}_0 \end{aligned}$$

Beispiel: Binomialverteilung

- X, Y st.u., $X \sim Bin(1, p)$, $Y \sim Bin(k, p)$, $\qquad P(Y = j) = \binom{k}{j} p^j (1-p)^{k-j}$
- Für $z = 0$ gilt
  $P(X + Y = 0) = P(X = 0)P(Y = 0) = (1-p)(1-p)^k = (1-p)^{k+1}$
- Für $z = k + 1$ gilt $P(X + Y = k + 1) = P(X = 1, Y = k) = pp^k = p^{k+1}$
- Für $z \in \{1, \dots, k\}$ gilt

$$
\begin{aligned}
P(X + Y = z) &= P(X = 0)P(Y = z) + P(X = 1)P(Y = z - 1) \\
&= (1-p)\binom{k}{z} p^z (1-p)^{k-z} + p\binom{k}{z-1} p^{z-1} (1-p)^{k-(z-1)} \\
&= \left(\binom{k}{z} + \binom{k}{z-1}\right) p^z (1-p)^{(k+1)-z} \\
&= \binom{k+1}{z} p^z (1-p)^{(k+1)-z}
\end{aligned}
$$

- Insgesamt $X + Y \sim Bin(k + 1, p)$

Faltung von Binomialverteilungen (Übungszettel!)

Falls X, Y st.u. mit $X \sim Bin(m, p)$, $Y \sim Bin(k, p)$, dann $X + Y \sim Bin(m + k, p)$

Übung: Es seien X, Y stochastisch unabhängig und $Poi(\lambda)$ bzw. $Poi(\mu)$-verteilt. Zeigen Sie zunächst für $n \in \mathbb{N}_0$: $P(X+Y=n) = \sum_{k=0}^{n} P(X=k)P(Y=n-k)$

$$\begin{aligned} P(X+Y=n) &= P(X=0, Y=n) + P(X=1, Y=n-1) + \cdots + P(X=n, Y=0) \\ &\overset{st.u.}{=} P(X=0)P(Y=n) + \cdots + P(X=n)P(Y=0) \end{aligned}$$

Folgern Sie daraus $P(X+Y=n) = \frac{(\lambda+\mu)^n}{n!} e^{-(\lambda+\mu)}$, d.h. $X+Y \sim Poi(\lambda+\mu)$

$$\begin{aligned} P(X+Y=n) &= \sum_{k=0}^{n} \frac{\lambda^k}{k!} e^{-\lambda} \cdot \frac{\mu^{n-k}}{(n-k)!} e^{-\mu} \\ &= e^{-\lambda} e^{-\mu} \cdot \sum_{k=0}^{n} \frac{1}{k!(n-k)!} \lambda^k \mu^{n-k} \\ &= \frac{e^{-\lambda-\mu}}{n!} \cdot \sum_{k=0}^{n} \frac{n}{k!(n-k)}! \lambda^k \mu^{n-k} \\ &= \frac{e^{-\lambda-\mu}}{n!} \underbrace{\sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} \lambda^k \mu^{n-k}}_{=(\lambda+\mu)^n} = \frac{(\lambda+\mu)^n}{n!} e^{-(\lambda+\mu)} \end{aligned}$$

Dies sind die diskreten Punktwahrscheinlichkeiten einer $Poi(\lambda+\mu)$-Verteilung.

Hilfsmittel: $P(X=k) = \frac{\lambda^k}{k!} e^{-\lambda}$, binomische Formel: $(a+b)^n = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} a^k b^{n-k}$

Summen von stetigen ZVen (Faltungssatz)

Seien X, Y st.u. stetig verteilte Zufallsvariablen und $Z = X + Y$. Dann gilt

$$f_Z(z) = f_{X+Y}(z) = \int_{-\infty}^{\infty} f_X(x) f_Y(z-x) dx = \int_{-\infty}^{\infty} f_X(z-y) f_Y(y) dy$$

Ergibt sich aus dem generischen Beispiel oben, z.B.

$$f_{X+Y}(z) = \int_{-\infty}^{\infty} f_{X,Y}(x, z-x) dx \overset{st.u.}{=} \int_{-\infty}^{\infty} f_X(x) f_Y(z-x) dx$$

Beispiele

Seien X und Y unabhängige exponentialverteilte Zufallvariablen mit den Parametern λ_1 und λ_2, d.h. für $x, y > 0$: $f_X(x) = \lambda_1 e^{-\lambda_1 x}, \quad f_Y(y) = \lambda_2 e^{-\lambda_2 y}$

$$f_{X+Y}(z) = \int_0^z \lambda_1 e^{-\lambda_1 x} \lambda_2 e^{-\lambda_2 (z-x)} dx = \int_0^z \lambda_1 \lambda_2 e^{-\lambda_2 z} e^{-(\lambda_1 - \lambda_2)x} dx, \quad z > 0$$

Dann zwei mögliche Ergebnisse/Verteilungstypen:

- $\lambda_1 \neq \lambda_2$: Hypo-Exponentialverteilung: $f_{X+Y}(z) = \frac{\lambda_1 \lambda_2 (e^{-\lambda_1 z} - e^{-\lambda_2 z})}{\lambda_2 - \lambda_1} 1_{]0;\infty[}(z)$
- $\lambda_1 = \lambda_2 = \lambda$: Erlang(2)-Verteilung: $f_{X+Y}(z) = \lambda^2 z e^{-\lambda z} 1_{]0;\infty[}(z)$

Beide Verteilungen treten als Bedienzeitverteilungen auf (Simulation): Die Gesamt-Bedienzeit besteht dabei aus zwei unabhängigen exponentialverteilten Komponenten (Phasen). Verallgemeinerungen:

- Mehr Phasen, sequentiell (speziell: Erlang(n)-Verteilung)
- Mehr Phasen, Übergänge zwischen Phasen gemäß Matrix von Übergangs-WS.

Übung: Berechnen Sie die Dichte im obigen Beispiel für $\lambda_1 \neq \lambda_2$ und $z > 0$

$$\begin{aligned}
\int_0^z \lambda_1\lambda_2 e^{-\lambda_2 z} e^{-(\lambda_1-\lambda_2)x} dx &= \lambda_1\lambda_2 e^{-\lambda_2 z} \cdot \int_0^z e^{-(\lambda_1-\lambda_2)x} dx \\
&= \lambda_1\lambda_2 e^{-\lambda_2 z} \cdot \left[\frac{-e^{-(\lambda_1-\lambda_2)x}}{\lambda_1-\lambda_2}\right]_0^z \\
&= \lambda_1\lambda_2 e^{-\lambda_2 z} \cdot \left(\frac{-e^{-(\lambda_1-\lambda_2)z}}{\lambda_1-\lambda_2} - \left(\frac{-1}{\lambda_1-\lambda_2}\right)\right) \\
&= \frac{\lambda_1\lambda_2}{\lambda_1-\lambda_2} \cdot \left(-e^{-\lambda_1 z} + e^{-\lambda_2 z}\right) \\
&= \frac{\lambda_1\lambda_2}{\lambda_2-\lambda_1} \cdot \left(e^{-\lambda_1 z} - e^{-\lambda_2 z}\right)
\end{aligned}$$

Übung: Berechnen Sie die Dichte im obigen Beispiel für $\lambda_1 = \lambda_2 = \lambda$ und $z > 0$

$$\begin{aligned}
\int_0^z \lambda_1\lambda_2 e^{-\lambda_2 z} e^{-(\lambda_1-\lambda_2)x} dx &= \int_0^z \lambda\lambda \cdot e^{-\lambda z} dx \\
&= \lambda^2 e^{-\lambda z} \cdot \int_0^1 1 dx \\
&= \lambda^2 e^{-\lambda z} \cdot z
\end{aligned}$$

- $*$-Schreibweise bei st.u. X, Y: Statt $\mathcal{L}(X+Y)$ schreibt man $\mathcal{L}(X) * \mathcal{L}(Y)$

Wichtige Faltungsformeln

- Diskret
  - $Bin(n,p) * Bin(k,p) = Bin(n+k,p)$
    Daraus: Sind $X_1, \dots, X_n$ u.i.v $\sim Bin(1,p)$, dann $X_1 + \dots + X_n \sim Bin(n,p)$.
  - $Poi(\lambda) * Poi(\mu) = Poi(\lambda + \mu)$
- Stetig
  - $\mathcal{N}(\mu_1, \sigma_1^2) * \mathcal{N}(\mu_2, \sigma_1^2) = \mathcal{N}(\mu_1 + \mu_2, \sigma_1^2 + \sigma_2^2)$
  - $Erlang(\lambda, n) * Erlang(\lambda, m) = Erlang(\lambda, n+m)$
    Daraus: Sind $X_1, \dots, X_n$ u.i.v $\sim Exp(\lambda)$, dann $X_1 + \dots + X_n \sim Erlang(\lambda, n)$
  - $\chi^2(n) * \chi^2(m) = \chi^2(n+m)$
    Daraus: Sind $X_1, \dots, X_n$ u.i.v $\sim \mathcal{N}(0,1)$, dann $X_1^2 + \dots + X_n^2 \sim \chi^2(n)$

Die letzten beiden Faltungsformeln sind Spezialfälle der Faltungsformel der Gamma-Verteilung.

2.5 Maximum/Minimum unabhängiger Zufallsvariablen

Sind $X_1, \ldots, X_n$ unabhängige und identisch stetig verteilte Zufallsvariablen mit Dichtefunktion $f_X(\cdot)$ und Verteilungsfunktion $F_X(\cdot)$, dann gilt für das Maximum Y_n und das Minimum Z_n der ZVen:

$$\begin{aligned} f_{Y_n}(y) &= n[F_X(y)]^{n-1} f_X(y), \\ f_{Z_n}(z) &= n[1 - F_X(z)]^{n-1} f_X(z). \end{aligned}$$

Dichten ergeben sich mit Kettenregel durch Ableiten der Verteilungsfunktionen:

- $F_{Y_n}(y) = P(\max(X_1, \ldots, X_n) \leq y) = P(X_1 \leq y, \ldots, X_n \leq y) \overset{uiv}{=} F_X(y)^n$
- $F_{Z_n}(z) = 1 - P(X_1 > z, \ldots, X_n > z) \overset{uiv}{=} 1 - (1 - F_X(z))^n$

Bsp. Systemausfall

System mit n Teilsystemen mit u.i.v. Ausfallzeitpunkten $X_1, \ldots, X_n \sim Exp(\lambda)$

Gesucht ist die Verteilung(sfunktion) des Ausfallzeitpunktes X des Gesamtsystems

a) bei Parallelschaltung, d.h. Ausfall in sämtlichen Teilsystemen. Für $x > 0$:

$$F_X(x) = P(X \leq x) = P(X_1 \leq x, \ldots, X_n \leq x) \overset{uiv}{=} P(X_1 \leq x)^n = (1 - e^{-\lambda x})^n$$

Nach Ableiten: Dichte $f_X(x) = n\lambda e^{-\lambda x}(1 - e^{-\lambda x})^{n-1} 1_{]0;\infty[}(x)$

b) Serienschaltung, d.h. Ausfall in einem Teilsystem. Für $x > 0$:

$$F_X(x) = P(\min(X_i) \leq x) \overset{uiv}{=} 1 - (1 - F_{X_1}(x))^n = 1 - (e^{-\lambda x})^n = 1 - e^{-n\lambda x}$$

ist Verteilungsfunktion einer $Exp(n\lambda)$-Verteilung.

2.6 Übersicht von Verteilungen und Transformationsregeln

Voraussetzung jeweils: $X_1, X_2, \ldots$ sind u.i.v. Zufallsvariablen.

	Verteilung	Träger	Dichte $f(x)$	Wenn $\mathcal{L}(X_i) =$	und $Y =$	dann $\mathcal{L}(Y) =$
diskret	Bernoulli $Bin(1, p)$	$\{0, 1\}$	$p^x(1-p)^{1-x}$		$1_B(X_1)$	$Bin(1, P(X_1 \in B))$
	Binomial $Bin(n, p)$	$\{0, \ldots, n\}$	$\binom{n}{x} p^x(1-p)^{n-x}$	$Bin(k_i, p)$	$X_1 + X_2$	$Bin(k_1 + k_2, p)$
	Geometrisch $Geo(p)$	$\mathbb{N}$	$p(1-p)^{x-1}$	$Bin(1, p)$	$\inf\{i : X_i = 1\}$	$Geo(1, p)$
				$Exp(\lambda)$	$\lfloor X_1 \rfloor + 1$	$Geo(1 - e^{-\lambda})$
	Neg.-Bin. $NBin(r, p)$	$\mathbb{N}_{\geq r}$	$(-1)^x \binom{-r}{x} p^r(1-p)^x$	$Bin(1, p)$	$\inf\{n : \sum_{i=1}^{n} X_i \geq r\}$	$NBin(r, p)$
				$NBin(r_i, p)$	$X_1 + X_2$	$NBin(r_1 + r_2, p)$
	Poisson $Poi(\lambda)$	$\mathbb{N}_0$	$\frac{\lambda^x}{x!} e^{-\lambda}$	$Poi(\lambda_i)$	$X_1 + X_2$	$Poi(\lambda_1 + \lambda_2)$
stetig	Rechteck $Re(a, b)$	$[a; b]$	$\frac{1}{b-a}$	$Re(a, b)$	$c + dX_1,\ d > 0$	$Re(c + da, c + db)$
	Exponential $Exp(\lambda)$	$[0; \infty[$	$\lambda e^{-\lambda x}$	$Re(0, 1)$	$-\frac{\ln(1-X_1)}{\lambda},\ \lambda > 0$	$Exp(\lambda)$
				$Exp(\lambda_i)$	$\min(X_1, X_2)$	$Exp(\lambda_1 + \lambda_2)$
	Normal $\mathcal{N}(\mu, \sigma^2)$	$]-\infty; \infty[$	$\frac{1}{\sqrt{2\pi\sigma^2}} e^{-\frac{(x-\mu)^2}{2\sigma^2}}$	$\mathcal{N}(\mu, \sigma^2)$	$aX_1 + b, a \neq 0$	$\mathcal{N}(a\mu + b, a^2\sigma^2)$
				$\mathcal{N}(\mu_i, \sigma_i^2)$	$X_1 + X_2$	$\mathcal{N}(\mu_1 + \mu_2, \sigma_1^2 + \sigma_2^2)$
	Lognormal $\mathcal{LN}(\mu, \sigma^2)$	$[0; \infty[$	$\frac{1}{\sigma x\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{1}{2}\left(\frac{\ln(x)-\mu}{\sigma}\right)^2}$	$\mathcal{N}(\mu, \sigma^2)$	e^{X_1}	$\mathcal{LN}(\mu, \sigma^2)$
	Gamma $\Gamma(\lambda, c)$	$[0; \infty[$	$\frac{\lambda^c}{\Gamma(c)} x^{c-1} e^{-\lambda x}$	$\Gamma(\lambda, c_i)$	$X_1 + X_2$	$\Gamma(\lambda, c_1 + c_2)$
	Pareto $Par(\lambda, c)$	$[\lambda; \infty[$	$\frac{c}{\lambda} \left(\frac{\lambda}{x}\right)^{c+1}$	$Exp(\mu)$	e^X	$Par(1, \mu)$
	Weibull $Wei(\lambda, c)$	$[0; \infty[$	$\frac{c}{\lambda} \left(\frac{x}{\lambda}\right)^{c-1}$	$Exp(\mu)$	$X^{1/c}$	$Wei(\mu^{1/c}, c)$