

## 7. Zweistichprobentests

- Gauß-Test (Normalverteilung mit bekannten Varianzen)
- $t$ -Test (Normalverteilungen mit unbekannter Varianz)
- Welch-Test
- Approximativer Gauß-Test
- $t$ -Test bei verbundenen Stichproben
- Wilcoxon-Rangsummentest

# Zweistichprobentests

- ↪ Ziehung zweier Stichproben, Analyse möglicher Unterschiede
- ↪ Herkunft der zwei Stichproben
  - aus verschiedenen Grundgesamtheiten, unabh. Stichproben  
z.B. Vergleich des Durchschnittseinkommens von Ärzten und Anwälten
  - zwei unabh. Stichproben aus einer Grundgesamtheit  
z.B. Aufteilung von  $n$  Studenten zufällig auf zwei Gruppen mit verschiedenem Übungskonzept, Vergleich der Leistungen beider Gruppen
  - zwei gebundene Stichproben aus einer Grundgesamtheit  
z.B. WI-Studierende: Abiturnote vs. Bachelornote

## Grundsätzliche Vorgehensweise bei Mittelwerttests:

- ↪ Ziehen zweier Stichproben der Umfänge  $n_1$  und  $n_2$  mit  $\bar{x}_1$  und  $\bar{x}_2$
- ↪ Überprüfung von Hypothesen bzgl. der Differenz  $\mu_1 - \mu_2$  anhand von  $d = \bar{x}_1 - \bar{x}_2$

$$a) H_0 : (\mu_1 - \mu_2) = \delta_0 \quad \text{vs.} \quad H_1 : (\mu_1 - \mu_2) \neq \delta_0$$

$$b) H_0 : (\mu_1 - \mu_2) \geq \delta_0 \quad \text{vs.} \quad H_1 : (\mu_1 - \mu_2) < \delta_0$$

$$c) H_0 : (\mu_1 - \mu_2) \leq \delta_0 \quad \text{vs.} \quad H_1 : (\mu_1 - \mu_2) > \delta_0$$

# 7.1 Gauß-Test (Normalverteilung mit bekannten Varianzen)

Annahme:  $X_1 \sim \mathcal{N}(\mu_1, \sigma_1^2)$ ,  $X_2 \sim \mathcal{N}(\mu_2, \sigma_2^2)$ ,  $\sigma_i^2$  bekannt.

## 1. Hypothesen

- a)  $H_0 : \mu_1 - \mu_2 = \delta_0$  vs.  $H_1 : \mu_1 - \mu_2 \neq \delta_0$
- b)  $H_0 : \mu_1 - \mu_2 \geq \delta_0$  vs.  $H_1 : \mu_1 - \mu_2 < \delta_0$
- c)  $H_0 : \mu_1 - \mu_2 \leq \delta_0$  vs.  $H_1 : \mu_1 - \mu_2 > \delta_0$

## 2. Teststatistik $V$ und Stichprobenverteilung $F_V$

$$V = \frac{\bar{X}_1 - \bar{X}_2 - \delta_0}{\sqrt{\sigma_1^2/n_1 + \sigma_2^2/n_2}} \sim \mathcal{N}(0, 1)$$

## 3. Entscheidungsregel – Gauß-Test

Ablehnung von $H_0$ , falls	a)	$ v  > z_{1-\alpha/2}$	b)	$v < z_\alpha$	c)	$v > z_{1-\alpha}$
$p$ -Wert $p^* =$		$2(1 - \Phi( v ))$		$\Phi(v)$		$1 - \Phi(v)$

## Durchschnittseinkommen von Praktikanten

Stichproben von  $n_1 = 35$  Studenten in Stadt A,  $\bar{x}_1 = 600$

$n_2 = 40$  Studenten in Stadt B,  $\bar{x}_2 = 520$

Annahme:  $X_1 \sim \mathcal{N}(\mu_1, \sigma_1^2)$ ,  $X_2 \sim \mathcal{N}(\mu_2, \sigma_2^2)$ ,  $\sigma_1^2 = 8000$ ,  $\sigma_2^2 = 5000$  (bekannt).

Kann man aus den Daten folgern, dass die Einkommen von Praktikanten in Stadt A höher als in Stadt B sind ( $\alpha = 0.01$ )?

## Durchschnittseinkommen von Praktikanten

Stichproben von  $n_1 = 35$  Studenten in Stadt A,  $\bar{x}_1 = 600$

$n_2 = 40$  Studenten in Stadt B,  $\bar{x}_2 = 520$

Annahme:  $X_1 \sim \mathcal{N}(\mu_1, \sigma_1^2)$ ,  $X_2 \sim \mathcal{N}(\mu_2, \sigma_2^2)$ ,  $\sigma_1^2 = 8000$ ,  $\sigma_2^2 = 5000$  (bekannt).

Kann man aus den Daten folgern, dass die Einkommen von Praktikanten in Stadt A höher als in Stadt B sind ( $\alpha = 0.01$ )?

$\hookrightarrow$  Hypothesen  $H_0 : \mu_1 \leq \mu_2$  vs.  $H_1 : \mu_1 > \mu_2$  (Fall c) mit  $\delta_0 = 0$

## Durchschnittseinkommen von Praktikanten

Stichproben von  $n_1 = 35$  Studenten in Stadt A,  $\bar{x}_1 = 600$

$n_2 = 40$  Studenten in Stadt B,  $\bar{x}_2 = 520$

Annahme:  $X_1 \sim \mathcal{N}(\mu_1, \sigma_1^2)$ ,  $X_2 \sim \mathcal{N}(\mu_2, \sigma_2^2)$ ,  $\sigma_1^2 = 8000$ ,  $\sigma_2^2 = 5000$  (bekannt).

Kann man aus den Daten folgern, dass die Einkommen von Praktikanten in Stadt A höher als in Stadt B sind ( $\alpha = 0.01$ )?

↪ Hypothesen  $H_0 : \mu_1 \leq \mu_2$  vs.  $H_1 : \mu_1 > \mu_2$  (Fall c) mit  $\delta_0 = 0$

↪ Teststatistik  $V = \frac{\bar{X}_1 - \bar{X}_2 - \delta_0}{\sqrt{\sigma_1^2/n_1 + \sigma_2^2/n_2}} = \frac{600 - 520 - 0}{\sqrt{8000/35 + 5000/40}} = \frac{80}{10.177} = 7.86$

## Durchschnittseinkommen von Praktikanten

Stichproben von  $n_1 = 35$  Studenten in Stadt A,  $\bar{x}_1 = 600$

$n_2 = 40$  Studenten in Stadt B,  $\bar{x}_2 = 520$

Annahme:  $X_1 \sim \mathcal{N}(\mu_1, \sigma_1^2)$ ,  $X_2 \sim \mathcal{N}(\mu_2, \sigma_2^2)$ ,  $\sigma_1^2 = 8000$ ,  $\sigma_2^2 = 5000$  (bekannt).

Kann man aus den Daten folgern, dass die Einkommen von Praktikanten in Stadt A höher als in Stadt B sind ( $\alpha = 0.01$ )?

↪ Hypothesen  $H_0 : \mu_1 \leq \mu_2$  vs.  $H_1 : \mu_1 > \mu_2$  (Fall c) mit  $\delta_0 = 0$

↪ Teststatistik  $V = \frac{\bar{X}_1 - \bar{X}_2 - \delta_0}{\sqrt{\sigma_1^2/n_1 + \sigma_2^2/n_2}} = \frac{600 - 520 - 0}{\sqrt{8000/35 + 5000/40}} = \frac{80}{10.177} = 7.86$

↪ Entscheidung:  $v = 7.86 > z_{1-0.01} = z_{0.99} = 2.33$  ( $\alpha = 0.05$ ),  
also wird  $H_0$  abgelehnt.



## Durchschnittseinkommen von Praktikanten

Stichproben von  $n_1 = 35$  Studenten in Stadt A,  $\bar{x}_1 = 600$

$n_2 = 40$  Studenten in Stadt B,  $\bar{x}_2 = 520$

Annahme:  $X_1 \sim \mathcal{N}(\mu_1, \sigma_1^2)$ ,  $X_2 \sim \mathcal{N}(\mu_2, \sigma_2^2)$ ,  $\sigma_1^2 = 8000$ ,  $\sigma_2^2 = 5000$  (bekannt).

Kann man aus den Daten folgern, dass die Einkommen von Praktikanten in Stadt A höher als in Stadt B sind ( $\alpha = 0.01$ )?

↪ Hypothesen  $H_0 : \mu_1 \leq \mu_2$  vs.  $H_1 : \mu_1 > \mu_2$  (Fall c) mit  $\delta_0 = 0$

↪ Teststatistik  $V = \frac{\bar{X}_1 - \bar{X}_2 - \delta_0}{\sqrt{\sigma_1^2/n_1 + \sigma_2^2/n_2}} = \frac{600 - 520 - 0}{\sqrt{8000/35 + 5000/40}} = \frac{80}{10.177} = 7.86$

↪ Entscheidung:  $v = 7.86 > z_{1-0.01} = z_{0.99} = 2.33$  ( $\alpha = 0.05$ ),  
also wird  $H_0$  abgelehnt.

↪  $p^* = (1 - \Phi(7.86)) \approx 0 < 0.01$

## Durchschnittseinkommen von Praktikanten

Stichproben von  $n_1 = 35$  Studenten in Stadt A,  $\bar{x}_1 = 600$

$n_2 = 40$  Studenten in Stadt B,  $\bar{x}_2 = 520$

Annahme:  $X_1 \sim \mathcal{N}(\mu_1, \sigma_1^2)$ ,  $X_2 \sim \mathcal{N}(\mu_2, \sigma_2^2)$ ,  $\sigma_1^2 = 8000$ ,  $\sigma_2^2 = 5000$  (bekannt).

Kann man aus den Daten folgern, dass die Einkommen von Praktikanten in Stadt A höher als in Stadt B sind ( $\alpha = 0.01$ )?

$\hookrightarrow$  Hypothesen  $H_0 : \mu_1 \leq \mu_2$  vs.  $H_1 : \mu_1 > \mu_2$  (Fall c) mit  $\delta_0 = 0$

$\hookrightarrow$  Teststatistik  $V = \frac{\bar{X}_1 - \bar{X}_2 - \delta_0}{\sqrt{\sigma_1^2/n_1 + \sigma_2^2/n_2}} = \frac{600 - 520 - 0}{\sqrt{8000/35 + 5000/40}} = \frac{80}{10.177} = 7.86$

$\hookrightarrow$  Entscheidung:  $v = 7.86 > z_{1-0.01} = z_{0.99} = 2.33$  ( $\alpha = 0.05$ ),  
also wird  $H_0$  abgelehnt.

$\hookrightarrow p^* = (1 - \Phi(7.86)) \approx 0 < 0.01$

Bemerkung: Die Annahme, dass die Varianz bekannt ist (wenn gleichzeitig der Erwartungswert unbekannt ist), ist eher unrealistisch. Für  $n_1, n_2 > 30$  kann die Varianz durch die Stichprobenvarianz ersetzt werden (approx. Gaußtest)

## 7.2 t-Test (Normalverteilungen mit unbekannter Varianz)

Annahme:  $X_1 \sim \mathcal{N}(\mu_1, \sigma^2)$ ,  $X_2 \sim \mathcal{N}(\mu_2, \sigma^2)$ ,  $\sigma^2$  unbekannt.

### 1. Hypothesen

- a)  $H_0 : \mu_1 - \mu_2 = \delta_0$  vs.  $H_1 : \mu_1 - \mu_2 \neq \delta_0$
- b)  $H_0 : \mu_1 - \mu_2 \geq \delta_0$  vs.  $H_1 : \mu_1 - \mu_2 < \delta_0$
- c)  $H_0 : \mu_1 - \mu_2 \leq \delta_0$  vs.  $H_1 : \mu_1 - \mu_2 > \delta_0$

### 2. Teststatistik $V$ und Stichprobenverteilung $F$ für $\mu_1 - \mu_2 = \delta_0$

$$V = \frac{\bar{X}_1 - \bar{X}_2 - \delta_0}{\sqrt{(1/n_1 + 1/n_2) \frac{(n_1-1)S_1^2 + (n_2-1)S_2^2}{n_1+n_2-2}}} \sim t(n) \text{ mit } n = n_1 + n_2 - 2$$

### 3. Entscheidungsregel – t-Test

Abl. von $H_0$ , falls	a) $ v  > t_{1-\alpha/2}(n)$	b) $v < t_\alpha(n)$	c) $v > t_{1-\alpha}(n)$
p-Wert $p^* =$	$2(1 - F( v ))$	$F(v)$	$1 - F(v)$

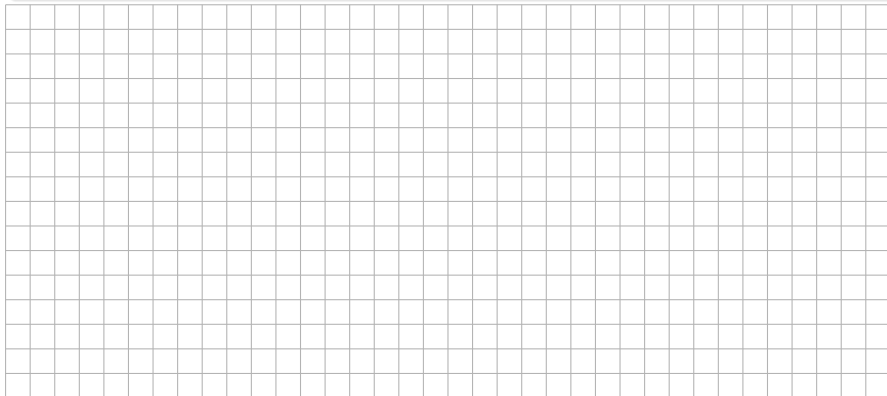
## Durchschnittseinkommen von Praktikanten

Stichproben von  $n_1 = 35$  Studenten in Stadt A,  $\bar{x}_1 = 600$ ,  $s_1 = 100$

$n_2 = 40$  Studenten in Stadt B,  $\bar{x}_2 = 520$ ,  $s_2 = 70$

Annahme:  $X_1 \sim \mathcal{N}(\mu_1, \sigma_1^2)$ ,  $X_2 \sim \mathcal{N}(\mu_2, \sigma_2^2)$ ,  $\sigma_1 = \sigma_2$  unbekannt.

Sind die Durchschnittseinkommen der Studenten beider Städte gleich ( $\alpha = 0.05$ )?



## 7.3 Welch-Test

Annahme:  $X_j \sim F_j$ ,  $n_1, n_2 > 30$ , oder  $X_j \sim \mathcal{N}(\mu_j, \sigma_j^2)$ ,  $\sigma_j^2$  unbekannt.

### 1. Hypothesen

- a)  $H_0 : \mu_1 - \mu_2 = \delta_0$  vs.  $H_1 : \dots \neq \delta_0$     c)  $H_0 : \mu_1 - \mu_2 \leq \delta_0$  vs.  $H_1 : \dots > \delta_0$   
 b)  $H_0 : \mu_1 - \mu_2 \geq \delta_0$  vs.  $H_1 : \dots < \delta_0$

### 2. Teststatistik $V$ und Stichprobenverteilung $F$ für $\mu_1 - \mu_2 = \delta_0$

$$V = \frac{\bar{X}_1 - \bar{X}_2 - \delta_0}{\sqrt{S_1^2/n_1 + S_2^2/n_2}} \stackrel{appr}{\sim} t(k), \quad k = \left\lfloor \frac{S_1^2/n_1 + S_2^2/n_2}{\frac{1}{n_1-1} \left(\frac{S_1^2}{n_1}\right)^2 + \frac{1}{n_2-1} \left(\frac{S_2^2}{n_2}\right)^2} \right\rfloor, \quad S_i^2 = \frac{1}{n_i-1} \sum_{j=1}^{n_i} (X_{ij} - \bar{X}_i)^2$$

### 3. Entscheidungsregel – Welch-Test

Abl. von $H_0$ , falls	a) $ v  > t_{1-\alpha/2}(k)$	b) $v < t_\alpha(k)$	c) $v > t_{1-\alpha}(k)$
$p$ -Wert $p^* =$	$2(1 - F( v ))$	$F(v)$	$1 - F(v)$

Alternativ für  $n_1, n_2 > 30$ : Gauß-Test mit obigem  $V \stackrel{approx.}{\sim} \mathcal{N}(0, 1)$

## 7.4 Approximativer Gauß-Test

Annahme:  $X_{ji} \sim F_j$  für  $i = 1, \dots, n_j$ ,  $j=1, 2$ . Dabei  $n_1, n_2 > 30$

### 1. Hypothesen

- a)  $H_0 : \mu_1 - \mu_2 = \delta_0$  vs.  $H_1 : \dots \neq \delta_0$     c)  $H_0 : \mu_1 - \mu_2 \leq \delta_0$  vs.  $H_1 : \dots > \delta_0$   
 b)  $H_0 : \mu_1 - \mu_2 \geq \delta_0$  vs.  $H_1 : \dots < \delta_0$

### 2. Teststatistik $V$ und Stichprobenverteilung $F$ für $\mu_1 - \mu_2 = \delta_0$

$$V = \frac{\bar{X}_1 - \bar{X}_2 - \delta_0}{\sqrt{S_1^2/n_1 + S_2^2/n_2}} \stackrel{\text{approx}}{\sim} \mathcal{N}(0, 1), \text{ mit } S_i^2 = \frac{1}{n_i-1} \sum_{j=1}^{n_i} (X_{ij} - \bar{X}_i)^2$$

### 3. Entscheidungsregel – approx. Gauß-Test

Ablehnung von $H_0$ , falls	a) $ v  > z_{1-\alpha/2}$	b) $v < z_\alpha$	c) $v > z_{1-\alpha}$
$p$ -Wert $p^* =$	$2(1 - F( v ))$	$F(v)$	$1 - F(v)$

Alternativ: Welch-Test, nichtparametrische Verfahren (z.B. Wilcoxon-Test, s.u.)

## 7.5 t-Test (verb. Stichpr.) $X_{ij} \sim \mathcal{N}(\mu_i, \sigma_i^2), \delta = \mu_2 - \mu_1$

↪ Erhebung  $X_{11}, \dots, X_{1n}, X_{21}, \dots, X_{2n}$  z.B. an denselben Merkmalsträgern

↪ **Differenzentest:** Einstichproben- $t$ -Test auf Differenzen  $D_i = X_{2i} - X_{1i}$

### 1. Hypothesen

a)  $H_0 : \delta = 0$  vs.  $H_1 : \delta \neq 0$

b)  $H_0 : \delta \geq 0$  vs.  $H_1 : \delta < 0$

c)  $H_0 : \delta \leq 0$  vs.  $H_1 : \delta > 0$

### 2. Prüfgröße $V$

$$V = \sqrt{n}\bar{D}/\hat{\sigma}_D \sim t(n-1) \text{ für } \delta = 0$$

mit  $\sigma_D^2 = \text{var}(X_{i2} - X_{i1})$ ,

$$\hat{\sigma}_D^2 = \frac{1}{n-1} \sum_{i=1}^n (D_i - \bar{D})^2$$

### 3. Entscheidung: $H_0$ wird abgelehnt, wenn

a)  $H_0 : \delta = 0: |v| > t_{1-\alpha/2}(n-1)$

$$p^* = 2(1 - F(|v|))$$

b)  $H_0 : \delta \geq 0: v < t_{\alpha}(n-1)$

$$p^* = F(v)$$

c)  $H_0 : \delta \leq 0: v > t_{1-\alpha}(n-1)$

$$p^* = 1 - F(v)$$

↪ Bei beliebig verteilter Grundgesamtheit: approx. Gaußtest ( $V \stackrel{\text{approx.}}{\sim} \mathcal{N}(0,1)$ )

↪ Auch verfügbar: Wilcoxon-Test bei gebundenen Stichproben

Maschine $i$	1	2	3	4	5	6	7	8
Dauer P1 ( $X_{1i}$ )	5.9	5.1	3.1	6.5	5.6	4.9	4.6	4.2
Dauer P2 ( $X_{2i}$ )	5.0	4.0	5.3	6.2	5.1	4.6	7.7	3.9
$D_i = X_{2i} - X_{1i}$	-0.9	-1.1	2.2	-0.3	-0.5	-0.3	3.1	-0.3

Ist Bearbeitungsdauer bei P1 signifikant höher als bei P2, d.h.  $\mu_1 > \mu_2$  ( $\alpha = 0.05$ )?

A large grid of graph paper with 20 columns and 15 rows. The grid is composed of small squares, with a larger square in the top-left corner, likely for a title or drawing. The grid is intended for students to draw a picture related to their writing.



## 7.6 Wilcoxon-Rangsummentest

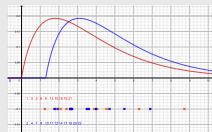
- ↪ die vorangegangenen Tests setzen entweder die Normalverteilung oder einen hinreichend großen Stichprobenumfang voraus
- ↪ nichtparametrische Alternative basierend auf Rängen
- ↪ In R: `wilcox.test (...)`

### Annahmen:

$$X = X_1, \dots, X_{n_1} \stackrel{u.i.v.}{\sim} F, \text{ (stetig)}$$

$$Y = Y_1, \dots, Y_{n_2} \stackrel{u.i.v.}{\sim} G \text{ (stetig)}$$

$$X \text{ und } Y \text{ sind st.u., } F_Y(x) = F_X(x - a)$$



<https://www.geogebra.org/m/khj3n2by>

### Idee:

- ↪ Verteilungsfunktionen von der Form her gleich, u.U. Verschiebung einer VF
- ↪ Gleichheit der Mediane entspricht Gleichheit der Verteilungen. Keine Existenz von Erwartungswerten vorausgesetzt.

## 1. Hypothese: $H_0$

a)  $\text{med}(X) = \text{med}(Y)$       b)  $\text{med}(X) \geq \text{med}(Y)$       c)  $\text{med}(X) \leq \text{med}(Y)$

Unter der Annahme  $F_Y(x) = F_X(x - a)$  ist dies gleichwertig zu

a)  $a = 0$       b)  $a \leq 0$       c)  $a \geq 0$

## 2. Teststatistik:

$$W = \sum_{i=1}^{n_1} \text{rg}(X_i),$$

$$\text{in R: } V = \sum_{i,j} 1_{\{X_i \leq Y_j\}} \stackrel{!}{=} W - \frac{n_1(n_1+1)}{2}$$

↪ Teststatistik basiert auf  $X$ -Rängen der gepoolten Stichprobe  $Z = (X, Y)$ .

↪ Bei Gleichheit der Gruppenmediane wird eine gute Durchmischung von  $Z$  erwartet. Nullverteilung von  $W$  ist dann:

□ für  $n_i \leq 25$ : Wilcoxon-Verteilung (Quantile  $w_\alpha$ ) vertafelt bzw. mit R

□ für  $\max(n_1, n_2) > 25$  approximativ:  $\stackrel{\text{approx.}}{\sim} \mathcal{N}\left(\frac{n_1(n_1+n_2+1)}{2}, \frac{n_1 \cdot n_2(n_1+n_2+1)}{12}\right)$

↪ Wichtig bei der Anwendung: Bindungsfreie Daten (Stetige Verteilungen!)

### 3. Testentscheidung: $H_0$ wird abgelehnt, falls

- a)  $H_0 : \text{med}(X) = \text{med}(Y): w > w_{1-\alpha/2}(n_1, n_2)$  oder  $w < w_{\alpha/2}(n_1, n_2)$
- b)  $H_0 : \text{med}(X) \geq \text{med}(Y): w < w_{\alpha}(n_1, n_2)$
- c)  $H_0 : \text{med}(X) \leq \text{med}(Y): w > w_{1-\alpha}(n_1, n_2)$

$p$ -values für  $\max(n_1, n_2) \leq 25$  (Berechnung von  $F$  z.B. mit R, [pwilcox](#) (...)):

- a)  $p^* = 2 \min(F(w), 1 - F(w - 1))$
- b)  $p^* = F(w)$
- c)  $p^* = 1 - F(w - 1)$

$p$ -values für  $\max(n_1, n_2) > 25$  mit Normalapproximation:  $\tilde{w} = \frac{w - \frac{n_1(n_1+n_2+1)}{2}}{\sqrt{\frac{n_1 n_2 (n_1+n_2+1)}{12}}}$

- a)  $p^* = 2(1 - \Phi(|\tilde{w}|))$
- b)  $p^* = \Phi(\tilde{w})$
- c)  $p^* = 1 - \Phi(\tilde{w})$

Tabelle der  $\alpha$ -Quantile  $w_\alpha$  für  $n_1, n_2 \leq 25$  (mit R berechnet, `qwilcox(...)`):

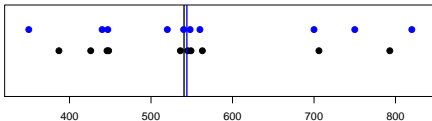
05	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14	15	16	17	18	19	20	21	22	23	24	25	05	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14	15	16	17	18	19	20	21	22	23	24	25			
2	3	3	4	4	4	4	5	5	5	5	6	6	6	6	7	7	7	8	8	8	9	9	9	10	10	2	3	3	3	3	3	4	4	4	4	4	5	5	5	5	6	6	6	6	7	7	7	7	7			
3	6	6	7	8	9	9	10	10	11	12	12	13	14	15	15	16	16	17	18	18	19	20	20	21	21	3	6	6	7	7	8	9	9	10	10	11	11	12	12	13	14	14	15	15	16	16	17	17	17	17	17	
4	10	11	12	13	14	15	16	17	18	19	20	21	22	23	25	26	27	28	29	30	31	32	33	34	34	4	10	11	11	12	13	14	15	16	16	17	18	19	20	21	22	22	23	24	25	26	27	28	28	29		
5	16	17	18	20	21	22	24	25	27	28	29	31	32	34	35	36	38	39	41	42	44	45	46	48	48	5	15	16	17	18	19	21	22	23	24	25	27	28	29	30	31	33	34	35	36	38	39	40	41	43		
6	22	24	25	27	29	30	32	34	36	38	39	41	43	45	47	48	50	52	54	56	58	59	61	63	63	6	21	23	24	25	27	28	30	32	33	35	36	38	39	41	43	44	46	47	49	51	52	54	55	57		
7	29	31	33	35	37	40	42	44	46	48	50	53	55	57	59	62	64	66	68	70	73	75	77	79	79	7	28	30	32	34	35	37	39	41	43	45	47	49	51	53	55	57	59	61	63	65	67	69	71	73		
8	38	40	42	45	47	50	52	55	57	60	63	65	68	70	73	76	78	81	84	86	89	91	94	97	100	8	37	39	41	43	45	47	50	52	54	56	59	61	63	66	68	71	73	75	78	80	82	85	87	90		
9	47	49	52	55	58	61	64	67	70	73	76	82	85	88	91	94	97	100	103	106	109	112	115	118	121	9	46	48	50	53	56	58	61	63	66	69	72	74	77	80	83	85	88	91	94	96	99	102	105	108		
10	57	60	63	67	70	73	76	80	83	87	90	93	97	100	104	107	111	114	118	121	124	128	131	135	136	10	56	59	61	64	67	70	73	76	79	82	85	89	92	95	98	101	104	108	111	114	117	120	123	127		
11	68	72	75	79	83	86	90	94	98	101	105	109	113	117	121	124	128	132	136	140	144	148	152	156	157	11	67	70	73	76	80	83	86	90	93	97	100	104	107	111	114	118	122	125	129	132	136	140	143	147		
12	81	84	88	92	96	100	105	109	113	117	121	126	130	134	139	143	147	151	156	160	164	169	173	177	178	12	80	83	86	90	93	97	101	105	108	112	116	120	124	128	132	136	140	144	148	152	156	160	164	168		
13	94	98	102	107	111	116	120	125	129	134	139	143	148	153	157	162	167	172	176	181	186	190	195	200	203	13	93	96	100	104	108	112	116	120	125	129	133	137	142	146	151	155	159	164	168	172	177	181	186	190		
14	108	113	117	122	127	132	137	142	147	152	157	162	167	172	177	183	188	193	198	203	208	213	219	224	226	14	107	111	115	119	123	128	132	137	142	146	151	156	161	165	170	175	180	184	189	194	199	204	208	213		
15	124	128	133	138	143	148	154	160	165	171	176	182	187	193	198	204	209	215	221	226	232	238	243	249	250	15	122	126	131	135	140	145	150	155	160	165	170	175	180	185	190	195	200	206	211	216	222	227	232	237	242	
16	140	145	151	156	162	167	173	179	185	191	197	202	208	214	220	226	232	238	244	250	256	262	268	274	275	16	138	143	148	152	158	163	168	174	179	184	190	196	201	207	212	218	223	229	235	240	246	252	257	263		
17	157	163	169	174	180	187	193	199	205	211	218	224	231	237	243	250	256	263	269	275	282	288	295	301	307	17	156	160	165	171	176	182	188	193	199	205	211	217	223	229	235	241	247	253	259	265	271	277	283	289		
18	176	181	188	194	200	207	213	220	227	233	240	247	254	260	267	274	281	288	295	302	308	315	322	329	335	18	174	179	184	190	196	202	208	214	220	227	233	239	246	252	258	265	271	278	284	291	297	304	310	317		
19	195	201	208	214	221	228	235	242	249	256	263	271	278	285	292	300	307	314	321	329	336	343	351	358	364	19	193	198	204	210	216	223	229	236	243	249	256	263	269	276	283	290	297	304	310	317	324	331	338	345		
20	215	222	229	236	243	250	258	265	272	280	288	295	303	311	318	326	334	341	349	357	365	372	380	388	395	20	213	219	225	231	238	245	252	259	266	273	280	287	294	301	309	316	323	330	337	344	352	360	367	374		
21	237	243	251	258	266	273	281	289	297	305	313	321	329	337	345	353	362	370	378	386	394	401	419	427	435	21	235	240	247	254	261	268	275	282	290	297	305	312	320	328	335	343	351	358	366	374	382	389	397	405		
22	259	266	274	282	290	299	306	314	322	331	339	348	356	365	373	382	390	399	408	416	425	433	442	451	459	22	257	263	270	277	284	292	300	307	315	323	331	339	347	355	363	371	379	387	395	404	412	420	428	436		
23	282	290	298	306	314	323	331	340	349	358	367	375	384	393	402	411	420	429	438	447	456	465	475	484	493	23	280	286	294	301	309	317	325	333	341	349	357	366	375	383	392	400	409	417	426	434	443	450	459	468		
24	307	314	323	331	340	349	358	367	376	386	395	404	414	423	432	442	451	461	470	480	489	499	508	518	527	24	304	311	318	326	334	343	351	360	368	377	386	395	404	413	422	430	439	448	457	466	475	484	493	502		
25	332	340	349	358	367	376	386	395	405	415	424	434	444	454	463	473	483	493	503	513	523	533	543	553	562	25	329	336	344	353	361	370	379	388	397	406	415	424	433	443	452	461	471	480	489	499	508	518	527	537		
01	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14	15	16	17	18	19	20	21	22	23	24	25	005	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14	15	16	17	18	19	20	21	22	23	24	25			
2	3	3	3	3	3	3	3	3	3	3	3	4	4	4	4	4	4	4	4	4	4	5	5	5	5	2	3	3	3	3	3	3	3	3	3	3	3	3	3	3	3	3	3	3	3	3	3	3				
3	6	6	6	6	6	6	7	7	7	8	8	8	8	8	8	8	9	9	9	9	9	9	10	10	3	6	6	6	6	6	6	6	6	6	6	6	6	6	6	6	6	6	6	6	6	6	6	6				
4	10	10	10	10	11	12	12	13	14	14	15	16	16	17	18	19	20	20	21	22	22	23	24	24	4	10	10	10	10	11	11	12	12	13	13	14	14	15	16	17	17	18	18	19	20	20	21	21	21	21	21	21
5	15	15	16	17	18	19	20	20	21	22	23	24	25	26	27	28	29	30	31	32	33	34	35	36	37	5	15	15	15	16	17	17	18	19	20	21	22	23	23	24	25	26	27	28	29	30	30	31	32	33		
6	21	21	23	24	25	26	28	29	30	31	33	34	35	37	38	40	41	42	44	45	46	48	49	51	52	6	21	21	22	23	24	25	26	27	28	29	31	32	33	34	35	37	38	39	40	41	43	44	45	46		
7	28	29	30	32	33	35	36	38	40	41	43	45	46	48	50	52	53	55	57	59	60	62	64	65	67	7	28	28	29	30	32	33	35	36	38	39	41	42	44	45	47	48	50	51	53	54	56	58	59	61		
8	36	37	39	41	43	44	46	48	50	52	54	57	59	61																																						

### Durchschnittsgehälter von Praktikanten in Stadt 1 und Stadt 2:

$$X = (387, 426, 446, 448, 536, 545, 549, 563, 706)$$

$$Y = (350, 440, 447, 520, 540, 548, 560, 700, 750)$$

Unterscheiden sich die Gehälter ( $\alpha = 0,05$ )?



$$rg(X) = (2, 3, 5, 7, 9, 11, 13, 15, 17),$$

$$rg(Y) = (1, 4, 6, 8, 10, 12, 14, 16, 18)$$

$$H_0 : \quad med(X) = med(Y)$$

$$w = \sum_{i=1}^9 rg(X_i) = 82$$

$$w_{0.025}(9, 9) = 63, w_{1-0.025}(9, 9) = 9 \cdot (9 + 9 + 1) - 63 = 108$$

$\Rightarrow H_0$  kann nicht abgelehnt werden ( $\alpha = 0.05$ ).

### Durchschnittsgehälter von Praktikanten in Stadt 1 und Stadt 2:

$X = (325, 350, 380, 448, 536, 545, 559, 620, 806)$

$Y = (450, 470, 547, 550, 640, 648, 760, 800, 830)$

Sind Absolventengehälter in Stadt 1 geringer als in Stadt 2 ( $\alpha = 0,05$ )?

