Lösung zu Aufgabe 7

Die Loglikelihood-Funktion lautet

$$\begin{aligned}\log L(x,p) = \log L(x_1,\ldots,x_N,p) &= \log \prod_{n=1}^{N} (1-p)^{x_n-1} p \\ &= N\log(p) + \sum_{n=1}^{N} (x_n-1)\log(1-p)\end{aligned}$$

Ableitung nach p:

$$\begin{aligned}\frac{\partial}{\partial p}\log(L(x,p)) &= \frac{N}{p} - \sum_{n=1}^{N}\frac{x_n-1}{1-p} \\ &= \frac{N}{p} - \frac{N\left(\bar{X}_N-1\right)}{1-p} \\ &= \frac{N(1-p)-Np(\bar{X}_N-1)}{p(1-p)} \\ &= \frac{N(1-p\bar{X}_N)}{p(1-p)}\end{aligned}$$

Die zweite Ableitung:

$$\begin{aligned}\frac{\partial^2}{\partial p^2}\log(L(x,p)) &= \frac{\partial}{\partial p}\left(\frac{N}{p} - \frac{N\left(\bar{X}_N-1\right)}{1-p}\right) \\ &= -\frac{N}{p^2} - \frac{N\left(\bar{X}_N-1\right)}{(1-p)^2} \\ &= <0\end{aligned}$$

Die Loglikelihhood-Funktion ist also streng konkav. Ihr Maximum liegt deshalb in einer Nullstelle der ersten Ableitung:

$$\begin{aligned}\frac{\partial}{\partial p}\log(L(x,p)) = 0 \quad &\Leftrightarrow \quad \frac{N(1-p\bar{X}_N)}{p(1-p)} = 0 \\ &\Leftrightarrow \quad p = \frac{1}{\bar{X}_N}\end{aligned}$$

Der ML-Schätzer ist also $\hat{p}_{ML} = \dfrac{1}{\bar{X}_N}$.

Lösung zu Aufgabe 8

a) Die Likelihood-Funktion lautet

$$L(x,y,p) = p(1-p)^{x-1}\cdot\binom{x}{y}p^y(1-p)^{x-y} = \binom{x}{y}p^{y+1}(1-p)^{2x-y-1}$$

Die Log-Likelihood lautet daher

$$\ln(L(x,y,p)) = \ln(\tbinom{x}{y}p^{y+1}(1-p)^{2x-y-1}) = \ln(\tbinom{x}{y})+(y+1)\ln(p)+(2x-y-1)\ln(1-p)$$

und hat die Ableitung

$$
\begin{aligned}
\frac{\partial}{\partial p}\ln(L(x,y,p)) &= \frac{y+1}{p} - \frac{2x-y-1}{1-p} \\
&= \frac{(1-p)(y+1)-p(2x-y-1)}{p(1-p)} \\
&= \frac{y+1-p(2x-y-1+y+1)}{p(1-p)} \\
&= \frac{y+1-p\cdot 2x}{p(1-p)}
\end{aligned}
$$

Notwendig für ein globales Maximum ist, dass diese Ableitung gleich Null ist, d.h. dass gilt $y+1-p\cdot 2x = 0 \Leftrightarrow p = \frac{y+1}{2x}$. Hinreichend für ein globales Maximum ist, dass die Ableitungsfunktion im berechneten kritischen Punkt ihren einzigen Vorzeichenwechsel hat, dies ist hier aber der Fall. Daher lautet der ML-Schätzer

$$
\hat{p}_{ML}(X,Y) = \frac{Y+1}{2X}
$$

b) Berechne den Erwartungswert (Bei Erwartungstreue müsste sich p ergeben)

$$
\begin{aligned}
E(\frac{Y+1}{2X}) &= \sum_{x=1}^{\infty}\sum_{y=0}^{x} \frac{y+1}{2x} p(1-p)^{x-1}\binom{x}{y} p^y(1-p)^{x-y} \\
&= \sum_{x=1}^{\infty} \frac{1}{2x} p(1-p)^{x-1} \sum_{y=0}^{x}(y+1)\binom{x}{y} p^y(1-p)^{x-y} \\
&= \sum_{x=1}^{\infty} \frac{1}{2x} p(1-p)^{x-1}(xp+1) \\
&= \sum_{x=1}^{\infty} (\frac{p}{2}+\frac{1}{2x}) p(1-p)^{x-1} \\
&= \sum_{x=1}^{\infty} \frac{p}{2} p(1-p)^{x-1} + \sum_{x=1}^{\infty} \frac{1}{2x} p(1-p)^{x-1} \\
&= \frac{p}{2} + \frac{p}{2(1-p)} \sum_{x=1}^{\infty} \frac{1}{x}(1-p)^x \\
&= \frac{p}{2} + \frac{p}{2(1-p)}(-\ln(1-(1-p))) \\
&= \frac{p}{2}(1-\frac{\ln(p)}{1-p})
\end{aligned}
$$

Dieser Wert ist nicht p, daher ist der Schätzer auch nicht erwartungstreu. Dazu ein letztes Argument: Wäre der Ausdruck p, so bedeutete dies $1-\ln(p)/(1-p) = 2$, also $\ln(p)/(1-p) = -1$, also $\ln(p) = p-1$, was sicherlich falsch ist.

Lösung zu Aufgabe 9

a) Die Likelihood-Funktion lautet (o.E. für $x_i > 0$)

$$\begin{aligned}
L(x_1, \ldots, x_n; \theta) &= \prod_{i=1}^{n} \frac{2x_i}{\theta^2} \mathbb{1}_{[0;\theta]}(x_i) \\
&= \prod_{i=1}^{n} \frac{2x_i}{\theta^2} \mathbb{1}_{[x_i;\infty[}(\theta) \\
&= \left(\frac{2}{\theta^2}\right)^n \cdot \prod_{i=1}^{n} x_i \cdot \mathbb{1}_{[x_i;\infty[}(\theta) \\
&= \frac{2^n}{\theta^{2n}} \mathbb{1}_{[\max(x_1,\ldots,x_n);\infty[}(\theta)
\end{aligned}$$

In der dritten Zeile ist $\prod_{i=1}^n x_i$ ein konstanter Faktor größer 0, da in Theta maximiert wird. Der Ausdruck in der letzten Zeile ist für $\theta \in [\max(x_1, \ldots, x_n); \infty[$, streng monoton fallend und > 0 und für $\theta < \max(x_1, \ldots, x_n)$ gleich Null. Daher liegt in $\theta = \max(x_1, \ldots, x_n)$ ein globales Maximum vor.

Der ML-Schätzer ist also $\hat{\theta}_{ML} = \max(X_1, \ldots, X_n)$

b) Der Schätzer wird durch Gleichsetzen des arithmetischen Mittels $\bar{X}_n$ mit dem Erwartungswert und Auflösen der Gleichung ermittelt:

$$\bar{X}_n = \frac{2\theta}{3} \Leftrightarrow \theta = \frac{3}{2}\bar{X}_n$$

Der MM-Schätzer ist daher $\hat{\theta}_{MM} = \frac{3}{2}\bar{X}_n$