Vektoren

Inneres Produkt / Skalarprodukt

$\mathbb{R}$ $\quad < \vec{a}, \vec{b} >= \sum_{i=1}^{n} = a_i b_i$

$\mathbb{C}$ $\quad < \vec{a}, \vec{b} >= \sum_{i=1}^{n} = a_i b_i$

Positivität: $< \vec{a}, \vec{b} > \geq 0$

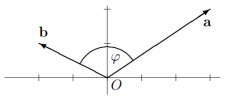
a $= 0$ oder b $= 0 \rightarrow < \vec{a}, \vec{b} >= 0$

Symmetrie: $< \vec{a}, \vec{b} >=< \vec{b}, \vec{a} >$ für $\mathbb{R}$

$< \vec{a}, \vec{b} >= \overline{< \vec{b}, \vec{a} >}$ für $\mathbb{C}$

Linearität: $< \vec{a}, k\vec{b} + h\vec{c} >= k < \vec{a}, \vec{b} > +h < \vec{a}, \vec{c}$

Normalisierung: $< \vec{a}, \vec{a} >= ||\vec{a}||^2$



Matrix $\mathbb{R}$ $\quad < \vec{a}, A\vec{b} >=< A^T \vec{a}, \vec{b} >$

Matrix $\mathbb{C}$ $\quad < \vec{a}, A\vec{b} >=< \overline{A^T} \vec{a}, \vec{b} >$

Orthogonalität: $< \vec{a}, \vec{b} >= 0$ man schreibt $\vec{a} \perp \vec{b}$

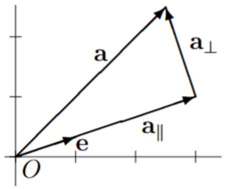
Parallelität: $\vec{a} = k\vec{b}$ oder $\vec{b} = k\vec{a}$

Winkel: $< \vec{a}, \vec{b} >= ||\vec{a}|| ||\vec{b}|| \cos(\alpha)$

$\cos(\alpha) = 0$ $\alpha = 90$ für $\vec{a} \perp \vec{b}$

Pythagoras: $||\vec{a}||^2 + ||\vec{b}||^2 = ||\vec{a} + \vec{b}||^2$ für $\vec{a} \perp \vec{b}$

Zerlegung $\vec{a} = \vec{a}_\perp + \vec{a}_\parallel$



Einheitsvektor $\vec{a}_\parallel =< \vec{e}, \vec{a} > \vec{e}$

$\vec{a}_\perp = \vec{a}- < \vec{e}, \vec{a} > \vec{e}$

Cauchy-Schwarz: $||\vec{a}|| ||\vec{b}|| \geq < \vec{a}, \vec{b} >$

gleich wenn $\vec{a} \perp \vec{b}$

Einheitsnormalvektor $||\vec{n_0}|| = \frac{\vec{n}}{||\vec{n}||}$

Normalvektor

$\vec{n} = \begin{pmatrix} n_1 \\ n_2 \end{pmatrix}$...Normalvektor, $a = (a_1, a_2)$...Punkt

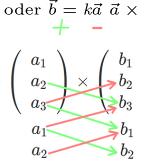
$$n_1 x + n_2 y = c$$
$$c = a_1 n_1 + a_2 n_2$$

Hsse'sche Normalform

Normalvektor zum Einheitsnormalvektor mit der Länge 1 gemacht wird, dann ist $|c|$ der Anstand der Geraden vom Ursprung

Kreuzprodukt

Wenn $\vec{a}$ und $\vec{b}$ linear unabhaengig (nicht parallel)
$< (\vec{a} \times \vec{b}), \vec{a} >= 0$ bzw. $(\vec{a} \times \vec{b}) \perp \vec{b}$
Wenn linear abhängig (parallel)
$\vec{a} = k\vec{b}$ oder $\vec{b} = k\vec{a}$ $\vec{a} \times \vec{b} = 0$



$$\vec{a} \times \vec{b} = \begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \\ a_3 \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \\ b_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a_2 b_3 - a_3 b_2 \\ a_3 b_1 - a_1 b_3 \\ a_1 b_2 - a_2 b_1 \end{pmatrix}$$

Regeln für $\vec{a}, \vec{b} \in \mathbb{R}^3$ und $k,h \in \mathbb{R}$

$$\vec{a} \times \vec{b} = -\vec{b} \times \vec{a}$$
$$(k\vec{a}) \times \vec{b} = k(\vec{a} \times \vec{b})$$
$$(k\vec{a} + h\vec{b}) \times \vec{c} = k(\vec{a} \times \vec{c}) + h(\vec{b} \times \vec{c})$$
$$\vec{a} \times (k\vec{b} + h\vec{c}) = k(\vec{a} \times \vec{b}) + h(\vec{a} \times \vec{c})$$
$$||\vec{a} \times \vec{b}|| = ||\vec{a}|| ||\vec{b}|| \sin(\alpha)$$

wobei α der Winkel zwischen $\vec{a}$ und $\vec{b}$ ist

Orthogonalentwicklung

$$< \vec{a}, \vec{b} >= \frac{< \vec{a}, \vec{b} >}{||\vec{b}||^2} \vec{b}$$

Wenn $||b|| = 1$, dann ist das Ergebnis

$$< \vec{a}, \vec{b} >=< \vec{a}, \vec{b} > \vec{b}$$

$$< \vec{a}_\perp, \vec{b} >= 0$$

Matrix

Lineare Abbildungen von Matritzen

m x n - Matrix -¿ m Zeilen n Spalten V,W...Vektorräume über $\mathbb{R}$ bzw. $\mathbb{C}$ F:V $\rightarrow$ W heißt linear, wenn

$$f(a\vec{v} + b\vec{u}) = af\vec{v} + bf(\vec{u}), \forall \vec{v}, \vec{u} \in V, \forall a, b \in \mathbb{R}$$

F:$\mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^m$ kann dargestellt werden in der Form:

$$f(\vec{x}) = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \cdots + a_{1n}x_n \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \cdots + a_{2n}x_n \\ \vdots \\ \vdots \\ a_{m1}x_1 + a_{m2}x_2 + \cdots + a_{mn}x_n \end{pmatrix}$$

$$= \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \cdots & a_{mn} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix}$$

$$f(\vec{x}) = A\vec{x}$$

jede Abbildungen $\vec{x} \rightarrow A\vec{x}$ heißt lineare Abbildung

Matrix transformieren

Um eine Matrix zu transformieren

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \cdots & a_{mn} \end{pmatrix}$$

Einheitsmatrix

$$\mathbb{1} = E = \begin{pmatrix} 1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 1 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & 1 \end{pmatrix}$$

$$\mathbb{1}A = A\mathbb{1} = A$$

$$AA^{-1} = A^{-1}A = \mathbb{1}$$

Quadratische Gleichungen

$$ax^2 + bx + c = 0$$

$$x_{1,2} = \frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}$$

Felix Erlacher, http://erlacher.org/