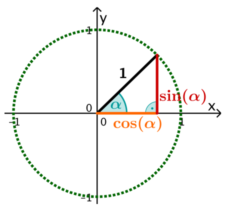
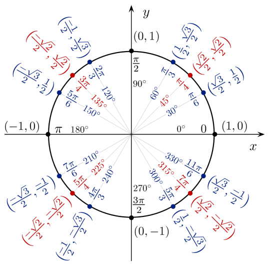
Allgemeines

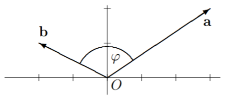




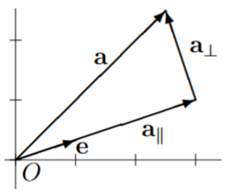
Vektoren

Inneres Produkt / Skalarprodukt

$\mathbb{R}$	$<\vec{a},\vec{b}>=\sum_{i=1}^{n}=a_i b_i$
$\mathbb{C}$	$<\vec{a},\vec{b}>=\sum_{i=1}^{n}=a_i b_i$
Positivität:	$<\vec{a},\vec{b}>\geq 0$
	a = 0 oder b = 0 $\rightarrow\ <\vec{a},\vec{b}>=0$
Symmetrie:	$<\vec{a},\vec{b}>=<\vec{b},\vec{a}>$ für $\mathbb{R}$
	$<\vec{a},\vec{b}>=\overline{<\vec{b},\vec{a}>}$ für $\mathbb{C}$
Linearität:	$<\vec{a},k\vec{b}+h\vec{c}>=k<\vec{a},\vec{b}>+h<\vec{a},$
Normalisierung:	$<\vec{a},\vec{a}>=\vert\vert\vec{a}\vert\vert^2$



Matrix $\mathbb{R}$	$<\vec{a},A\vec{b}>=<A^T\vec{a},\vec{b}>$
Matrix $\mathbb{C}$	$<\vec{a},A\vec{b}>=<\overline{A^T}\vec{a},\vec{b}>$
Orthogonalität:	$<\vec{a},\vec{b}>=0$ man schreibt $\vec{a}\perp\vec{b}$
Parallelität:	$\vec{a}=k\vec{b}$ oder $\vec{b}=k\vec{a}$
Winkel:	$<\vec{a},\vec{b}>=\vert\vert\vec{a}\vert\vert\,\vert\vert\vec{b}\vert\vert\cos(\alpha)$
	$\cos(\alpha)=0\ \alpha=90$ für $\vec{a}\perp\vec{b}$
Pythagoras:	$\vert\vert\vec{a}\vert\vert^2+\vert\vert\vec{b}\vert\vert^2=\vert\vert\vec{a}+\vec{b}\vert\vert^2$ für $\vec{a}\perp\vec{b}$
Zerlegung	$\vec{a}=\vec{a}_\perp+\vec{a}_\parallel$



Einheitsvektor	$\vec{a}_\parallel=<\vec{e},\vec{a}>\vec{e}$
	$\vec{a}_\perp=\vec{a}-<\vec{e},\vec{a}>\vec{e}$
orthogonale Projektion	$\vec{a}_\parallel=\vec{a}_{\vec{b}}=\frac{<\vec{a},\vec{b}>}{\vert\vert\vec{b}\vert\vert^2}\vec{b}$
Cauchy-Schwarz:	$\vert\vert\vec{a}\vert\vert\,\vert\vert\vec{b}\vert\vert\geq<\vec{a},\vec{b}>$
	gleich wenn $\vec{a}\perp\vec{b}$
Einheitsnormalvektor	$\vec{e}=\frac{\vec{u}}{\vert\vert\vec{u}\vert\vert}$

Normalvektor

$\vec{n}=\begin{pmatrix}n_1\\n_2\end{pmatrix}$...Normalvektor, $a=(a_1,a_2)$...Punkt

$$n_1x+n_2y=c$$
$$c=a_1n_1+a_2n_2$$

Hsse'sche Normalform

Normalvektor zum Einheitsnormalvektor mit der Länge 1 gemacht wird, dann ist $|c|$ der Anstand der Geraden vom Ursprung

Kreuzprodukt

Wenn $\vec{a}$ und $\vec{b}$ linear unabhaengig (nicht parallel)
$<(\vec{a}\times\vec{b}),\vec{a}>=0$ bzw. $(\vec{a}\times\vec{b})\perp\vec{b}$
Wenn linear abhängig (parallel)
$\vec{a}=k\vec{b}$ oder $\vec{b}=k\vec{a}$ $\vec{a}\times\vec{b}=0$

$$\vec{a}\times\vec{b}=\begin{pmatrix}a_1\\a_2\\a_3\end{pmatrix}\times\begin{pmatrix}b_1\\b_2\\b_3\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}a_2b_3-a_3b_2\\a_3b_1-a_1b_3\\a_1b_2-a_2b_1\end{pmatrix}$$

Regeln für $\vec{a},\vec{b}\in\mathbb{R}^3$ und *k,h* $\in\mathbb{R}$

$$\vec{a}\times\vec{b}=-\vec{b}\times\vec{a}$$
$$(k\vec{a})\times\vec{b}=k(\vec{a}\times\vec{b})$$
$$(k\vec{a}+h\vec{b})\times\vec{c}=k(\vec{a}\times\vec{c})+h(\vec{b}\times\vec{c})$$
$$\vec{a}\times(k\vec{b}+h\vec{c})=k(\vec{a}\times\vec{b})+h(\vec{a}\times\vec{c})$$
$$||\vec{a}\times\vec{b}||=||\vec{a}||\,||\vec{b}||\sin(\alpha)$$

wobei α der Winkel zwischen $\vec{a}$ und $\vec{b}$ ist

Orthonormalsystem

Orthogonalbasis

wenn $\vec{u}_i$ linear unabhängig und $\vec{u}_i\perp\vec{u}_j$ für $i\neq j$

Orthonormalbasis

$||\vec{u}_i||=1$ für $i=1,2,...,n$

$$\vec{a}=\sum_{i=1}^{n}<\vec{a},\vec{u}_i>\vec{u}_i$$

Orthogonale Transformationen

Matrix

Determinante

Regel von Sarrus

$$det(A)=\begin{vmatrix}a&b&c\\d&e&f\\g&h&i\end{vmatrix}=$$
$$=aei+bfg+cdh-ceg-bdi-afh$$

Matrix transformieren

$$A^{-1}=\frac{1}{\det(A)}\begin{vmatrix}a_{11}&a_{12}&.&a_{1n}\\a_{21}&a_{22}&.&a_{2n}\\.&.&.&.\\a_{n1}&a_{n2}&.&a_{nn}\end{vmatrix}$$

Transponierte

$$A^T_{ij}=A_{ji}$$

symmetrisch - an der Hauptachse gespiegelt

$$A^T=A$$
$$(A^T)^T=A$$

Orthogonale Matrix

Wenn A eine quadratische Matrix ist, dann ist A orthogonal, wenn $A^T=A^{-1}$

Rotationsmatrix im Uhrzeigersinn/gegen Uhrzeigersinn $\mathbb{R}^2$ im $\mathbb{R}^3$

$$R_x(\alpha)=\begin{pmatrix}1&0&0\\0&\cos(\alpha)&\pm\sin(\alpha)\\0&\mp\sin(\alpha)&\cos(\alpha)\end{pmatrix}$$
$$R_y(\alpha)=\begin{pmatrix}\cos(\alpha)&0&\pm\sin(\alpha)\\0&1&0\\\mp\sin(\alpha)&0&\cos(\alpha)\end{pmatrix}$$
$$R_z(\alpha)=\begin{pmatrix}\cos(\alpha)&\mp\sin(\alpha)&0\\\pm\sin(\alpha)&\cos(\alpha)&0\\0&0&1\end{pmatrix}$$

Eigenwerte und Eigenvektoren

Charakteristisches Polynom

$$\chi_A(\lambda)=\det(A-\lambda\mathbb{1})\overset{!}{=}0$$
$$\chi_A(\lambda)=\pm(\lambda-\lambda_1)(\lambda-\lambda_2)...(\lambda-\lambda_n)$$

n...allgebraische Vielfachheit, + bei n gerade, - bei n ungerade

Diagonalisierbarkeit

Wenn $\chi_A(\lambda)=0$ dann ist A diagonalisierbar

Lineare Abbildungen von Matritzen

m x n - Matrix -¿ m Zeilen n Spalten V,W...Vektorräume über $\mathbb{R}$ bzw. $\mathbb{C}$ F:V $\rightarrow$ W heißt linear, wenn

$$f(a\vec{v}+b\vec{u})=af\vec{v}+bf(\vec{u}),\forall\vec{v},\vec{u}\in V,\forall a,b\in\mathbb{R}$$

F:$\mathbb{R}^n\rightarrow\mathbb{R}^m$ kann dargestellt werden in der Form:

$$f(\vec{x})=\begin{pmatrix}x_1\\x_2\\\vdots\\x_n\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}a_{11}x_1+a_{12}x_2+\cdots+a_{1n}x_n\\a_{21}x_1+a_{22}x_2+\cdots+a_{2n}x_n\\\vdots\\\vdots\\a_{m1}x_1+a_{m2}x_2+\cdots+a_{mn}x_n\end{pmatrix}$$

$$=\begin{pmatrix}a_{11}&a_{12}&\cdots&a_{1n}\\a_{21}&a_{22}&\cdots&a_{2n}\\\vdots&\vdots&\ddots&\vdots\\a_{m1}&a_{m2}&\cdots&a_{mn}\end{pmatrix}\begin{pmatrix}x_1\\x_2\\\vdots\\x_n\end{pmatrix}$$
$$f(\vec{x})=A\vec{x}$$

jede Abbildungen $\vec{x}\rightarrow A\vec{x}$ heißt lineare Abbildung

Einheitsmatrix

$$\mathbb{1}=E=\begin{pmatrix}1&0&\cdots&0\\0&1&\cdots&0\\\vdots&\vdots&\ddots&\vdots\\0&0&\cdots&1\end{pmatrix}$$
$$\mathbb{1}A=A\mathbb{1}=A$$
$$AA^{-1}=A^{-1}A=\mathbb{1}$$

Quadratische Gleichungen

$$ax^2+bx+c=0$$
$$x_{1,2}=\frac{-b\pm\sqrt{b^2-4ac}}{2a}$$
$$x_{1,2}=-\frac{p}{2}\pm\frac{q}{2}$$

Hesse Matrix

Felix Erlacher, http://erlacher.org/