Oplossing vraag 1 - Poolcoördinaten

Bepaal de buigpunten van de poolkromme beschreven door $r = \dfrac{2}{\cos(2\,\theta)}$.

Het tekenverloop van $\dfrac{1}{r} + \left(\dfrac{1}{r}\right)'' = \dfrac{\cos(2\,\theta)}{2} - \dfrac{4\,\cos(2\,\theta)}{2} = -\dfrac{3}{2}\,\cos(2\,\theta)$ toont dat er zich tekenwisselingen voordoen voor de θ −waarden= $\frac{\pi}{4} + k\frac{\pi}{2}$ met k een geheel getal.
Rekening houdend met het domein van de functie, zijn er geen buigpunten.

θ		$-\frac{3\pi}{4}$		$-\frac{\pi}{4}$		$\frac{\pi}{4}$		$\frac{3\pi}{4}$	
$\frac{1}{r} + \left(\frac{1}{r}\right)''$	$-$	0	$+$	0	$-$	0	$+$	0	$-$

Oplossing vraag 2 - Poolcoördinaten

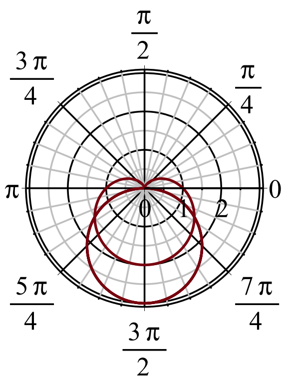
Schets de krommen $K_1 : r = 1 - \sin\theta$ en $K_2 : r = -3\,\sin\theta$. Stel de uitdrukkingen voor r aan elkaar gelijk om de snijpunten te vinden.

K_1 Alle waarden voor θ zorgen voor $r \geq 0$. Er is symmetrie rond de rechte door de pool die loodrecht staat op de poolas, want $r(\theta) = r(\pi - \theta)$ langs K_1. De periode is $2\,\pi$. We bekijken dan ook $\theta \in [0,\, 2\,\pi]$. De voerstraal is maximaal 2. Dit doet zich voor als $\theta = -\frac{\pi}{2}$. De voerstraal is 0 voor $\theta = \frac{\pi}{2}$. De kromme K_1 snijdt de poolas als $r = 1$.

K_2 De vergelijking van K_2 zetten we om naar cartesische coördinaten:

$$\begin{aligned} r = -3\,\sin\theta \quad &\Leftrightarrow \quad r^2 = -3\,r\,\sin\theta \\ &\Leftrightarrow \quad x^2 + y^2 = -3\,y \\ &\Leftrightarrow \quad x^2 + (y + \frac{3}{2})^2 = (\frac{3}{2})^2 \end{aligned}$$

Hierin herkennen we een cirkel met middelpunt $(0,\, \frac{3}{2})$ en straal $\frac{3}{2}$ voor K_2.



De snijpunten van K_1 en K_2 kunnen gevonden worden door de uitdrukkingen voor r aan elkaar gelijk te stellen: $1 - \sin\theta = -3\,\sin\theta \Leftrightarrow \sin\theta = -\frac{1}{2}$. Gezien het domein van beide krommen zijn er snijpunten voor $\theta = -\frac{\pi}{6} + 2\,k\,\pi$ of $\theta = \frac{7\pi}{6} + 2\,k\,\pi$ (k een geheel getal). De bijhorende voerstraal is telkens $\frac{3}{2}$.

De omzettingsformules $\begin{cases} x = r\,\cos\theta \\ y = r\,\sin\theta \end{cases}$ om $(r,\,\theta)$ om te buigen naar $(x,\,y)$-waarden leiden ons naar de snijpunten $(x,\,y) = (\frac{3\sqrt{3}}{4},\, -\frac{3}{4})$ en $(x,\,y) = (-\frac{3\sqrt{3}}{4},\, -\frac{3}{4})$.

Oplossing vraag 3 - Poolcoordinaten

We berekenen eerst de snijpunten van de poolkrommen : als $r = \sin\theta$ en $r = \cos 2\theta$ dan moet $\sin\theta = \cos 2\theta$, m.a.w. $\sin\theta = \sin(\frac{\pi}{2} - 2\theta)$. Dit is het geval voor twee families van θ-waarden :

$$\begin{array}{ll} \theta = \frac{\pi}{2} - 2\,\theta + 2\,k\,\pi & \Rightarrow \ \theta = \frac{\pi}{6} + k\,\frac{2\,\pi}{3} \\ \theta = \pi - \frac{\pi}{2} + 2\,\theta + 2\,k\,\pi & \Rightarrow \ \theta = -\frac{\pi}{2} + 2\,k\,\pi \end{array}$$

met k een geheel getal.
Aangezien het domein van $r = \sin\theta$ gelijk is aan $\bigcup_{k\in Z}[2\,k\,\pi,\ \pi + 2\,k\,\pi]$ en het domein van $r = \cos 2\,\theta$ gelijk is aan $\bigcup_{k\in Z}[-\frac{\pi}{4} + k\,\pi,\ \frac{\pi}{4} + k\,\pi]$, houden we voor $\theta \in [0,\ 2\,\pi]$ enkel $\theta = \frac{\pi}{6}$ en $\theta = \frac{5\,\pi}{6}$ over als poolhoeken waarvoor zich een snijpunt voordoet.
In elk van de snijpunten is de hoek ϕ tussen de twee krommen ook de hoek tussen de raaklijnen aan de krommen. De gezochte hoek is dan het verschil van de hoeken ϕ_1 en ϕ_2 waarbij ϕ_i de hoek is tussen de gemeenschappelijke voerstraal r in het snijpunt en de raaklijn aan K_i. Uit $\mathrm{tg}\phi_i = \frac{r_i}{r_i'}$ $(i = 1,\ 2)$, $r_1 = \sin\theta$ en $r_2 = \cos 2\theta$ volgt $r_1' = \cos\theta$ en $r_2' = -2\,\sin 2\theta$.
In $\theta = \frac{\pi}{6}$ is derhalve

$$\mathrm{tg}\phi_1 = \frac{r_1}{r_1'} = \frac{\sin\pi/6}{\cos\pi/6} = \frac{\sqrt{3}}{3}$$

en is

$$\mathrm{tg}\phi_2 = \frac{r_2}{r_2'} = -\frac{\cos 2\,\pi/6}{2\,\sin 2\,\pi/6} = -\frac{\sqrt{3}}{6}$$

Hiermee wordt

$$\mathrm{tg}\phi = \mathrm{tg}(\phi_1 - \phi_2) = \frac{\mathrm{tg}\phi_1 - \mathrm{tg}\phi_2}{1 + \mathrm{tg}\phi_1\,\mathrm{tg}\phi_2} = \frac{\frac{\sqrt{3}}{3} + \frac{\sqrt{3}}{6}}{1 - \frac{\sqrt{3}}{3}\,\frac{\sqrt{3}}{6}} = \frac{3\,\sqrt{3}}{5}$$

dus is $\phi = \mathrm{Bgtg}\left(\frac{3\,\sqrt{3}}{5}\right)$
Om symmetrieredenen is het resultaat voor $\theta = \frac{5\,\pi}{6}$ hetzelfde.
Voor de pool : $r_1 = 0$ voor $\theta = 0$ (of $\theta = \pi$) en $r_2 = 0$ voor $\theta = \frac{\pi}{4}$ (of $\theta = -\frac{\pi}{4}$) zodat de hoek tussen de raaklijnen in de pool $\frac{\pi}{4}$ is.
