

Fortgeschrittenenpraktikum

V14 Tomographie - Korrektur

Felix Gläsemann

felix.glaesemann@tu-dortmund.de

Tobias Brützel

tobias.bruetzel@tu-dortmund.de

Durchführung: 04.07.2022

Abgabe: 05.07.2022

TU Dortmund – Fakultät Physik

Inhaltsverzeichnis

1	Zielsetzung	3
2	Theorie	3
2.1	Wechselwirkung von Strahlung mit Materie	3
2.2	Bestimmung der Absorptionskoeffizienten	4
3	Durchführung und Aufbau	5
3.1	Aufbau	5
3.2	Durchführung	6
4	Auswertung	6
4.1	Spektrum mit leerem Würfel	6
4.2	Aluminiumwürfel und Bleiwürfel	7
4.3	Würfel aus diversen Materialien	8
5	Diskussion	10
5.1	Absorptionskoeffizienten der einheitlichen Würfel	10
5.2	Absorptionskoeffizienten des unbekannten Würfel	10
6	Anhang	12
	Literatur	13

1 Zielsetzung

In diesem Versuch soll das Verfahren der Tomographie kennengelernt werden und anschließend mit dieser Methode die Abschwächungskoeffizienten verschiedener Würfel bestimmt werden.

2 Theorie

Wenn Gamma-Strahlung Materie durchdringt wird ein Teil der Strahlung materialabhängig absorbiert und die abgeschwächte Intensität kann gemessen werden. Aus verschiedenen Messungen einer Schicht, die aus unterschiedlichen Richtungen erfolgen, entstehen bei einer Tomographie Projektionen, die schlussendlich zu einem 2D-Bild zusammen gesetzt werden können. Unter einer Projektion versteht man die Durchstrahlung eines Körpers mit einer bestimmten Ausrichtung.

2.1 Wechselwirkung von Strahlung mit Materie

In diesem Versuch wird ^{137}Cs als Strahlungsquelle verwendet. Dies zerfällt zu 94,6% in ^{137}Ba . Dies ist danach im angeregten Zustand. Um in den Grundzustand zu gelangen, entsendet es ein Photon mit der Energie von 661,6 keV [**Anleitung5**]. In Abbildung (1) ist dies dargestellt.

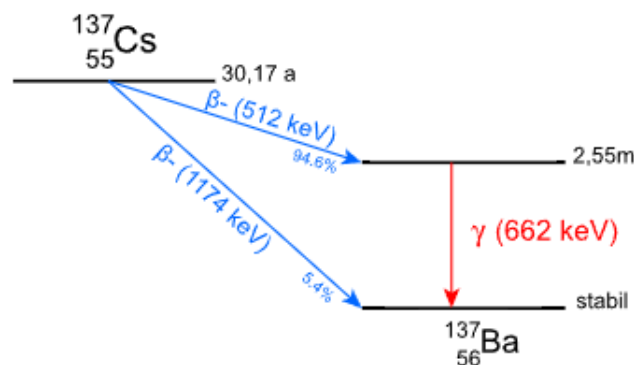


Abbildung 1: Zerfall von ^{137}Cs [2].

Die Absorption der Photonen erfolgt durch drei unterschiedlichen Effekte. Diese sind der Photo-Effekt, der Compton-Effekt und die Paarbildung.

- Beim Photoeffekt trifft ein Photon auf ein Hüllenelektron und gibt dabei seine Energie E vollständig an das Elektron ab. Dieses wird daraufhin aus der Hülle gelöst. Die Bedingung für den Effekt ist, dass die Energie des Photons größer ist als die Bindungsenergie des Elektron, also $E > E_{\text{Bindung}}$.

- Beim Compton-Effekt werden die einfallenden Photonen inelastisch an Elektronen gestreut. Im Gegensatz zum Photoeffekt wird dabei nur ein Teil der Energie abgegeben.
- Bei der Paarbildung zerfällt das Photon unter Einfluss des Coulomb-Feldes des Atomkerns in ein Elektron und ein Positron. Dabei muss die Energie des Photons aufgrund der Energieerhaltung mindestens $E = 1,02 \text{ MeV}$ betragen, dies entspricht der Ruhemasse von zwei Elektronen.

Die drei Fälle unterscheiden sich in ihrer Häufigkeit im Verhältnis zur Energie. Während der Photo-Effekt bei Energien bis 100 keV dominiert, tritt der Compton-Effekt von 100 keV bis 1 MeV auf. Die Paarbildung ist der stärkste Effekt ab einer Energie $E = 1 \text{ MeV}$. Die Intensität nach dem Durchqueren des Materials kann über das Absorptionsgesetz beschrieben werden, als:

$$I = I_0 \exp \left(\sum_i \mu_i d_i \right) \quad (1)$$

Dabei ist I die gemessene Intensität nach Durchquerung von Materie, I_0 die Anfangsintensität, μ_i der Absorptionskoeffizient, sowie d_i die Dicke des i-ten Materials. Ein Spektrum der ^{137}Cs Strahlung besteht im niedrigen Energiebereich aus Rückstreuung, das nachfolgende Minimum ist die sogenannte Compton-Kante. Der darauffolgende Peak ist der Photo-Peak. In Abbildung (2) ist das Gammaspektrum von ^{137}Cs dargestellt.

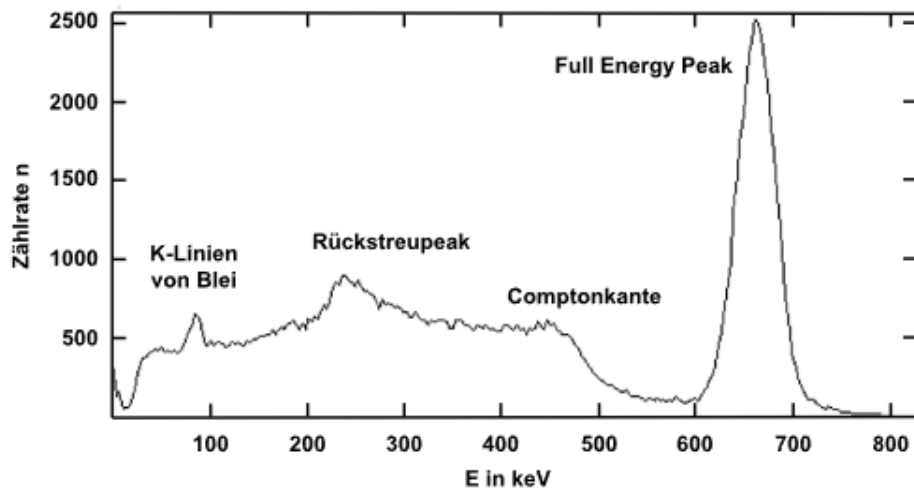


Abbildung 2: Gammaspektrum von ^{137}Cs [2].

2.2 Bestimmung der Absorptionskoeffizienten

Durch Umstellung der Gleichung (1) folgt:

$$\sum_i \mu_i d_i = \ln \left(\frac{I_0}{I} \right) \quad (2)$$

Durch Zusammenfassen aller Dicken d_i in eine Geometriematrix A , aller Absorptionskoeffizienten μ in einen Vektor $\vec{\mu}$ und dem Vektor \vec{I} , der alle Verhältnisse zwischen I und I_0 enthält, ergibt sich:

$$A\vec{\mu} = \vec{I} \quad (3)$$

Um das Gleichungssystem zu lösen und den Fehler so klein wie möglich zu halten, muss das Gleichungssystem überbestimmt sein, weiter wird die Methode der kleinsten Quadrate genutzt. Daraus folgt:

$$WA\vec{\mu} = W\vec{I} \quad (4)$$

Mit der Gewichtungsmatrix $W = V[\vec{I}]^{-1}$, wobei V die Unsicherheit angibt, ergibt sich:

$$\vec{\mu} = (A^TWA)^{-1} (A^TW\vec{I}) \quad (5)$$

Die Unsicherheiten sind gegeben durch:

$$V[\mu] = (A^TWA)^{-1} \quad (6)$$

3 Durchführung und Aufbau

3.1 Aufbau

In Abbildung (3) ist der Aufbau des Versuches dargestellt.

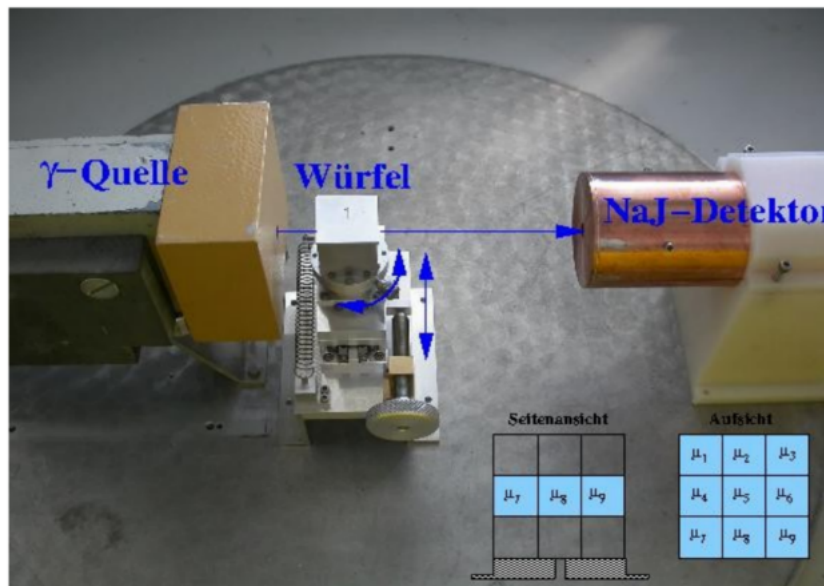


Abbildung 3: Versuchsaufbau bestehend aus Szintillator, γ -Quelle und Plattform für die Würfel [1, S. 2].

Wie in Abbildung (3) zu sehen wird die mittlere Schicht des jeweiligen Würfels untersucht. Diese besteht wiederum aus neun Elementarwürfeln. Die Strahlungsquelle ist zusätzlich mit Bleiblöcken abgeschirmt, um die Strahlung auf den Würfel zu fokussieren. Außerdem sind um den gesamten Aufbau ebenfalls Bleiblöcke aufgebaut, die den Experimentierenden vor Strahlung schützen sollen. In den Strahlengang zwischen γ -Quelle und Szintillator befindet sich ein Podest, welches zur Justierung der Würfel für die verschiedenen Projektionen verwendet wird.

Szintillator und Photomultiplier (PM) dienen zusammen als Detektor. Im Gegensatz zu einem organischen Szintillator, der sich durch seine gute Zeitauflösung auszeichnet, wird in diesem Versuch ein anorganischer Szintillator verwendet, der eine wesentlich bessere Energieauflösung besitzt. Die γ -Strahlung dringt in den Szintillator ein und regt Elektronen an, welche dann Aktivator-Zentren innerhalb des verwendeten Kristalls anregen. Nachdem diese angeregt wurden, fallen sie unter Aussendung eines Photons wieder in den Grundzustand zurück. Das dadurch entstandene Licht wird nun wiederum vom PM in ein elektrisches Signal umgewandelt. Die Amplitude dieses Signals ist proportional zur Energie des Lichts und wird mit einem Multichannel Analyzer (MCA) histogrammiert. Am Computer, der ebenfalls zum Aufbau des Versuches gehört, kann die Messung graphisch ausgelesen werden.

3.2 Durchführung

Als erstes wird zur Bestimmung der Intensität I_0 die leere Aluminiumhülle in den Strahlengang gestellt und ein Spektrum wird aufgenommen, dabei wird die Projektion

2 verwendet (siehe Zeile 2 der Geometriematrix in Gleichung (11)). Es werden die Würfel, die nur aus Aluminium bzw. nur aus Blei bestehen, vermessen. Dabei werden vier Messungen vorgenommen, die jeweils eine andere Weglänge haben. Als letztes wird nun der Würfel aus unbekanntem Material vermessen, hier müssen im Gegensatz zu den anderen Würfeln zwölf Messungen durchgeführt werden. Dabei werden nacheinander die Projektionen aus der Geometriematrix in Gleichung (11) verwendet.

4 Auswertung

In diesem Abschnitt werden nun die Messungen der verschiedenen Würfel ausgewertet und die linearen Abschwächungskoeffizienten bestimmt. Alle erstellten Grafiken und Rechnungen werden mit Python [4] durchgeführt. Um zu Gewährleisten, dass der statistische Poissonfehler unterhalb von 3% liegt, wird folgende Formel benutzt:

$$\frac{1}{\sqrt{N}} < 0,03 \quad (7)$$

Daraus folgt, dass ab einer Countzahl $N > 1112$ der statistische Fehler unterhalb von 3% liegt.

4.1 Spektrum mit leerem Würfel

Zunächst wird eine Messung durchgeführt, in der sich ein leerer Aluminiumwürfel im Strahlengang befindet. Dabei ergibt sich das Spektrum in Abbildung (4).

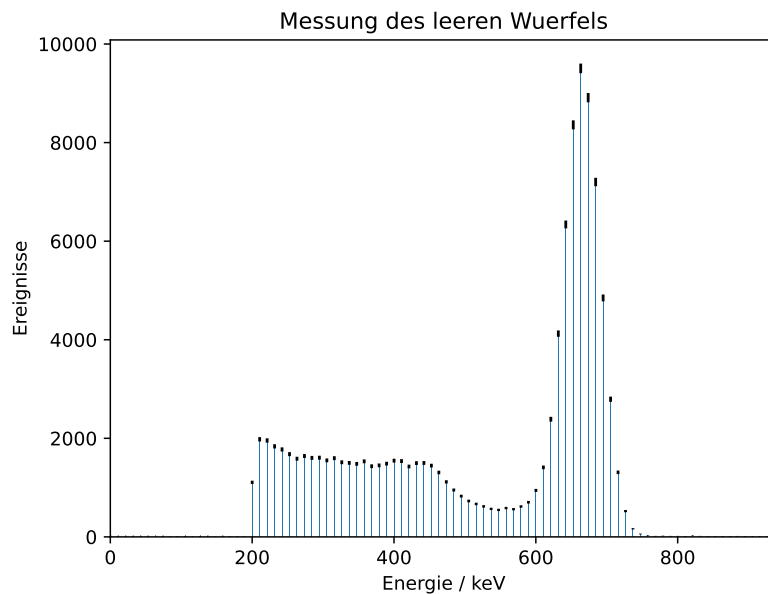


Abbildung 4: Aufgenommenes Spektrum mit der Aluminiumhülle.

Ebenfalls wird aus dieser Messung die für die anderen Würfel verwendete Zählrate I_0 bestimmt. In $t_{\text{mess}} = 300 \text{ s}$ werden dabei $N = 49361$ Impulse aufgezeichnet. Daraus ergibt sich die Zählrate zu $I_0 = 164,5 \pm 0,7 \frac{\text{Counts}}{\text{s}}$.

4.2 Aluminiumwürfel und Bleiwürfel

Für die Würfel aus einheitlichem Material werden vier verschiedene Weglängen gemessen, da mehr Projektionen nicht benötigt werden. Da der Würfel nur aus einem Material besteht, können die Werte der verschiedenen Projektionen für \vec{I} für gleiche Weglängen verwendet werden.

Weiter kann die Geometriematrix A aufgrund des einheitlichen Materials durch einen Vektor dargestellt werden, in dem die einzelnen Komponenten für gleiche Wegstrecken aufsummiert werden. Damit folgt für die Würfel:

$$A = \begin{pmatrix} 3 \\ 3\sqrt{2} \\ 2\sqrt{2} \\ \sqrt{2} \end{pmatrix}. \quad (8)$$

Für den Aluminiumwürfel ergibt sich \vec{I}_{Alu} und $\vec{\tilde{I}}_{\text{Alu}}$ zu:

$$\vec{I}_{\text{Alu}} = \begin{pmatrix} 140,9 \pm 0,7 \\ 136,4 \pm 0,7 \\ 143,8 \pm 0,7 \\ 152,8 \pm 0,7 \end{pmatrix} \frac{\text{Counts}}{\text{s}} \quad \vec{\tilde{I}}_{\text{Alu}} = \begin{pmatrix} 0,16 \pm 0,08 \\ 0,19 \pm 0,08 \\ 0,14 \pm 0,08 \\ 0,07 \pm 0,08 \end{pmatrix} \quad (9)$$

Für den Bleiwürfel ergibt sich \vec{I}_{Blei} und $\vec{\tilde{I}}_{\text{Blei}}$ zu:

$$\vec{I}_{\text{Blei}} = \begin{pmatrix} 5,1 \pm 0,1 \\ 2,21 \pm 0,09 \\ 8,9 \pm 0,2 \\ 49,7 \pm 0,4 \end{pmatrix} \frac{\text{Counts}}{\text{s}} \quad \vec{\tilde{I}}_{\text{Blei}} = \begin{pmatrix} 3,5 \pm 0,4 \\ 4,3 \pm 0,7 \\ 2,9 \pm 0,3 \\ 1,2 \pm 0,1 \end{pmatrix} \quad (10)$$

Die Methode der kleinsten Quadrate liefert zusammen mit Gleichung (6) die Absorptionskoeffizienten und deren Unsicherheiten für die jeweiligen Materialien. In Tabelle 1 sind die Ergebnisse für beide Würfel angegeben.

Tabelle 1: Ergebnisse für die Bestimmung der Absorptionskoeffizienten von den Würfeln 2 und 3.

Würfelnummer	$\mu [1/\text{cm}]$	Material
2	$0,04 \pm 0,01$	Aluminium
3	$0,98 \pm 0,06$	Blei

4.3 Würfel aus diversen Materialien

In diesem Teil wird nun der Würfel, der aus verschiedenen Materialien zusammengesetzt ist untersucht. Im Gegensatz zu den Würfeln aus einheitlichem Material werden hier zwölf Projektionen zur Vermessung verwendet. Damit ergibt sich für die Geometriematrix A_2 :

$$A_2 = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & \sqrt{2} & 0 & \sqrt{2} & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \sqrt{2} & 0 & \sqrt{2} & 0 & \sqrt{2} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \sqrt{2} & 0 & \sqrt{2} & 0 \\ 0 & \sqrt{2} & 0 & 0 & 0 & \sqrt{2} & 0 & 0 & 0 \\ \sqrt{2} & 0 & 0 & 0 & \sqrt{2} & 0 & 0 & 0 & \sqrt{2} \\ 0 & 0 & 0 & \sqrt{2} & 0 & 0 & 0 & \sqrt{2} & 0 \end{pmatrix} \quad (11)$$

Die Spalten der Matrix geben dabei jeweils die Position des Würfels an (siehe Abbildung (3)). Weiter gilt für den Projektionsvektor \vec{I}_{div} und sowie für $\vec{\tilde{I}}_{\text{div}}$:

$$\vec{I}_{\text{div}} = \begin{pmatrix} 49,3 \pm 0,4 \\ 46,5 \pm 0,4 \\ 44,4 \pm 0,4 \\ 115,7 \pm 0,6 \\ 5,9 \pm 0,1 \\ 128,3 \pm 0,7 \\ 32,8 \pm 0,3 \\ 27,6 \pm 0,3 \\ 39,7 \pm 0,4 \\ 40,3 \pm 0,4 \\ 28,8 \pm 0,7 \\ 49,8 \pm 0,4 \end{pmatrix} \quad \frac{\text{Counts}}{\text{s}} \quad \vec{\tilde{I}}_{\text{div}} = \begin{pmatrix} 1,2 \pm 0,1 \\ 1,3 \pm 0,1 \\ 1,3 \pm 0,2 \\ 0,35 \pm 0,09 \\ 3,3 \pm 0,4 \\ 0,25 \pm 0,09 \\ 1,6 \pm 0,2 \\ 1,8 \pm 0,2 \\ 1,4 \pm 0,2 \\ 1,4 \pm 0,2 \\ 1,7 \pm 0,2 \\ 1,2 \pm 0,1 \end{pmatrix} \quad (12)$$

Die Methode der kleinsten Quadrate liefert für die Absorptionskoeffizienten die Ergebnisse in Tabelle 2:

Tabelle 2: Ergebnisse für die Bestimmung der Absorptionskoeffizienten des unbekannten Würfels.

Position des Würfels	μ [1/cm]	Vermutetes Material
1	$0,08 \pm 0,09$	Delrin
2	$1,04 \pm 0,08$	Blei
3	$0,03 \pm 0,09$	Delrin
4	$0,04 \pm 0,07$	Delrin
5	$1,06 \pm 0,08$	Blei
6	$0,07 \pm 0,07$	Delrin
7	$0,22 \pm 0,09$	Aluminium
8	$0,88 \pm 0,07$	Blei
9	$0,14 \pm 0,09$	Delrin

5 Diskussion

5.1 Absorptionskoeffizienten der einheitlichen Würfel

Für die Würfel die nur aus einem Material bestehen, sind für Aluminium ein Wert von $\mu = (0,04 \pm 0,01)$ 1/cm und für Blei ein Wert von $\mu = (0,98 \pm 0,06)$ 1/cm bestimmt worden. Vergleicht man diese mit den Literaturwerten für die beiden Materialien (siehe Tabelle 3) ergibt sich für Aluminium eine Abweichung von 80,3% und für Blei eine Abweichung von 21%. Es gibt einige Fehlerquellen, die die Messung beeinflussen. Eine ist die manuelle Ausrichtung der Würfel im Strahlengang, da nur per Auge justiert wurde, ist es schwierig die angegebenen Projektionen genau zu treffen. Gerade bei den Diagonalprojektionen war es schwierig den Würfel optimal zu justieren, da es keine wirklichen Hilfen zur Orientierung gab. Weiter ist die Strahlungsquelle nicht ideal, dass heißt der Strahl hat in der Realität eine endliche Ausdehnung und ist nicht punktförmig.

Für den Bleiwürfel ist die Abweichung deutlich niedriger, die hier auftretenden Abweichungen lassen sich wieder durch die oben genannten Fehlerquellen erklären.

Tabelle 3: Literaturwerte für die verschiedenen Materialien [3] entnommen bei 661,6 keV.

Material	μ_{Lit} [1/cm]
Delrin	0,1251
Blei	1,2501
Aluminium	0,2016
Messing	0,6125
Eisen	0,5776

Die Dichten zur Berechnung der Literaturwerte sind gegeben für Delrin $\rho_{\text{Del}} = 1420 \text{ kg/m}^3$ [Anleitung7], für Blei $\rho_{\text{Blei}} = 11\,350 \text{ kg/m}^3$, für Eisen $\rho_{\text{Eisen}} = 7860 \text{ kg/m}^3$, für den

Kupferanteil des Messing $\rho_{\text{Kupfer}} = 8920 \text{ kg/m}^3$ [Anleitung10], für Aluminium $\rho_{\text{Alu}} = 2700 \text{ kg/m}^3$ [Anleitung4] und für den Zinkanteil des Messing $\rho_{\text{Zink}} = 7140 \text{ kg/m}^3$ [Bild2].

5.2 Absorptionskoeffizienten des unbekannten Würfels

In Tabelle 2 sind die Abschwächungskoeffizienten aufgelistet die für den unbekannten Würfel bestimmt worden sind. Ebenfalls sind dort schon erste Vermutungen für das jeweilige Material angestellt worden. Aus der Anleitung ist bekannt, dass Delrin, Blei, Messing, Eisen und Aluminium die möglichen Materialien sein können. In Tabelle 3 sind die Literaturwerte für alle möglichen Materialien aufgelistet. Es ergeben sich die folgenden Abweichungen:

Tabelle 4: Vergleich der Ergebnisse für die Bestimmung der Absorptionskoeffizienten des unbekannten Würfels mit den Literaturwerten.

Position des Würfels	μ [1/cm]	Vermutetes Material	Abweichung [%]
1	$0,08 \pm 0,09$	Delrin	36
2	$1,04 \pm 0,08$	Blei	16,8
3	$0,03 \pm 0,09$	Delrin	76
4	$0,04 \pm 0,07$	Delrin	68
5	$1,06 \pm 0,08$	Blei	15,2
6	$0,07 \pm 0,07$	Delrin	44
7	$0,22 \pm 0,09$	Aluminium	8,4
8	$0,88 \pm 0,07$	Blei	29,6
9	$0,14 \pm 0,09$	Delrin	12

Für die Würfel 3,4 und 6 sind die Werte ebenfalls zu niedrig um einem Material eindeutig zugeordnet zu werden, daher wird dort Delrin vermutet, da dies unter den angegebenen Materialien den kleinsten Abschwächungskoeffizienten besitzt. Desweiteren sind alle Abweichungen bis auf die von Würfel 7 im zweistelligen Bereich. Daher sind die aufgestellten Vermutungen keinesfalls belegt.

Insgesamt lässt sich sagen, dass es durchaus möglich ist mithilfe von Tomographie Aufschluss über die Zusammensetzung gewisser Materialien zu erhalten, allerdings sollten dafür deutlich mehr Messreihen aufgenommen werden um Fehler wie die ungenaue Datenaufnahme durch das Analyseprogramm zu minimieren. Eine weitere Möglichkeit zur Verbesserung der Messung wäre eine Optimierung der Justierung der Würfel in Betracht zu ziehen.

6 Anhang

Würfel I $C = 4881 \pm 375 \text{ €} \approx 300 \text{ €}$					
	I_2	Projektil	Costs	€/s	Minimierung
Würfel 2	I_2		4220 ± 258	300	Strecke 3m
	I_8		40972 ± 275	300	350 cm
	I_9		43722 ± 204	300	250 cm
	I_{13}		45839 ± 259	300	150 cm
Würfel 3	I_2	Projektil	Costs	€/s	Minimierung
	I_2		1526 ± 57	300	3m
	I_8		664 ± 57	300	350
	I_9		2640 ± 67	300	250
	I_{13}		14705 ± 157	300	150
Würfel 4	I_1	Projektil	Costs	€/s	Strecke / m
	I_1		149288 ± 154	300	3
	I_2		139499 ± 149	300	3
	I_3		13312 ± 158	300	3
	I_4		34700 ± 256	300	3
	I_5		17931 ± 51	300	3
	I_6		3883 ± 272	300	3
	I_7		9855 ± 110	300	250
	I_8		802 ± 123	300	350
	I_9		11919 ± 144	300	250
	I_{10}		12070 ± 150	300	250
	I_{11}		8685 ± 125	300	350
	I_{12}		14859 ± 138	300	250

Abbildung 5: Aufgenommene Messwerte

Literatur

- [1] TU Dortmund. *V14 - Tomographie*. URL: https://moodle.tu-dortmund.de/pluginfile.php/2014184/mod_resource/content/2/V14.pdf (besucht am 05.07.2022).
- [2] Leifi-Physik. URL: <https://www.leifiphysik.de/kern-teilchenphysik/radioaktivitaet-fortfuehrung/versuche/gammaspektrum-von-cs-137> (besucht am 05.07.2022).
- [3] NIST. URL: <https://physics.nist.gov/PhysRefData/Xcom/html/xcom1.html> (besucht am 05.07.2022).
- [4] Python. URL: <https://www.python.org> (besucht am 23.06.2022).