2. Exersice Sheet

von Celina Kortmann, Felix Göke und Erich Wagner

Exersice 3 - Dice

You roll two dice, one red and one blue. What is the probability that
(a) the sum of pips is 9?
Es gibt insgesamt 4 Möglichkeiten, wie die Augenzahl der beiden Würfel 9 ergeben kann. Es gibt die Kombination (3,6) und (4,5) und jeweils andersrum. Da die Wahrscheinlichkeiten unabhängig voneinander sind (der rote Würfel beeinflusst den blauen nicht und andersrum) gilt: $P(A \wedge B) = P(A) \cdot P(B)$. Außerdem verwenden wir das 3. Kolmogorov-Axiom.

$$\begin{aligned}
P(W_r + W_b = 9) &= P(W_r = 3 \wedge W_b = 6) + P(W_r = 6 \wedge W_b = 3) \\
&+ P(W_r = 4 \wedge W_b = 5) + P(W_r = 5 \wedge W_b = 4) \\
&= 2 \cdot P(W_r = 3 \wedge W_b = 6) + 2 \cdot P(W_r = 4 \wedge W_b = 5) \\
&= 2 \cdot P(W_r = 3) \cdot P(W_b = 6) + 2 \cdot P(W_r = 4) \cdot P(W_b = 5) \\
&= 2 \cdot \frac{1}{6} \cdot \frac{1}{6} + 2 \cdot \frac{1}{6} \cdot \frac{1}{6} \\
&= \frac{4}{36} = \frac{1}{9}
\end{aligned}$$

(b) the sum of pips is 9 or larger?
Jetzt müssen wir außerdem die Wahrscheinlichkeit dafür betrachten, dass die Augenzahl 10, 11 oder 12 ist und dann die Summe bilden. Für $W_{ges} = 12$ gibt es 1 Möglichkeit, für $W_{ges} = 11$ gibt es 2 Möglichkeiten. Für $W_{ges} = 10$ gibt es 3 Möglichkeiten.

$$\begin{aligned}
P(W_r + W_b \geq 9) =& P(W_r + W_b = 9) + P(W_r + W_b = 10) + P(W_r + W_b = 11) + P(\mathrm{I} \\
&= \frac{4}{36} + \frac{3}{36} + \frac{2}{36} + \frac{1}{36} \\
&= \frac{10}{36}
\end{aligned}$$

(c) one dice shows 4 and the other 5 pips?

$$\begin{aligned}
P((W_r = 4 \wedge W_b = 5) \vee (W_r = 5 \wedge W_b = 4)) &= P(W_r = 4 \wedge W_b = 5) + P(W_r = 5 \wedge \\
&= P(W_r = 4) \cdot P(W_b = 5) + P(W_r = 5 \\
&= \frac{1}{6} \cdot \frac{1}{6} + \frac{1}{6} \cdot \frac{1}{6} \\
&= \frac{2}{36} \\
&= \frac{1}{18}
\end{aligned}$$

(d) the red dice shows 4 and the blue dice 5 pips?

$$\begin{aligned} P(W_r = 4 \wedge W_b = 5) &= P(W_r = 4) \cdot P(W_b = 5) \\ &= \frac{1}{6} \cdot \frac{1}{6} \\ &= \frac{1}{36} \end{aligned}$$

Your roll the dice so that the blue dice rolls behind an object so that you cant see it first. The red dice shows a 4. After you have seen this, what is the prabability that
(e) the sum of pips is nine?
Wenn wir wissen, dass der rote Würfel eine 4 zeigt, dann suchen wir nach der Wahrscheinlichkeit, dass der blaue Würfel eine 5 zeigt, damit die Gesamtaugenzahl 9 ist. Da die Wahrscheinlichkeiten unabhängig voneinander sind, folgt:

$$P(W_b = 5 | W_r = 4) = P(W_b = 5) = \frac{1}{6}$$

(f) the sum of pips is 9 or larger?

$$\begin{aligned} P(W_b \geq 5 | W_r = 4) &= P(W_b \geq 5) \\ &= P(W_b = 5 \vee W_b = 6) \\ &= P(W_b = 5) + P(W_b = 6) \\ &= \frac{1}{6} + \frac{1}{6} \\ &= \frac{2}{6} \\ &= \frac{1}{3} \end{aligned}$$

(g) the red dice shows 4 and the blue dice 5 pips?
This is the same as (e), weil $W_b = 5$ gleichbedeutend mit einer Gesamtaugenzahl von 9 ist, mit dem Wissen, dass der rote Würfel eine 4 zeigt, was unsere Annahme für die Aufgabenteile (e), (f) und (g) ist.

Exercise 4 - Maxwell velocity distribution

The probability density of the magnitude of the velocity v of the molecules in an ideal gas at the absolute temperature T is given by

$$f(v) = N \cdot \exp\left(-\frac{mv^2}{2k_B T}\right) \cdot 4\pi v^2,$$

where m is the molecular mass, k_B is the Boltzmann constant, and N is the normalization constant.

Zunächst muss die Teilchenzahl bestimmt werden, als Funktion von m und T. Es gilt:

$$\int_0^\infty f(v) dv = 1,$$

da die sichere Wahrscheinlichkeit 1 sein muss. Aus dieser Normierungsbedingung ergibt sich für N in drei Dimensionen:

$$N = \left(\frac{m}{2\pi k_B T}\right)^{3/2}$$

Für die Maxwellverteilung gilt somit $$ f(v)=4\pi \left(\frac{m}{2 \pi k_B T}\right)^{3/2}\cdot \exp \left(-\frac{m v^2}{2k_B T} \right) \cdot v^2

(a) How big is the most probable velocity v_m?
Die Geschwindigkeit mit der größten Wahrscheinlichkeit ist das Maximum der Maxwellverteilung und folgt somit aus der Gleichung $df(v)/dv = 0$. Bevor diese Rechnung durchgeführt wird, führen wir die Variable $a = \frac{m}{2k_BT}$ ein, damit ergibt sich:

$$\begin{aligned}
0 &= \frac{d}{dv}\left(\frac{4}{\sqrt{\pi}} \cdot a^{3/2} \cdot \exp(-av^2) \cdot v^2\right) \\
&= \frac{4}{\sqrt{\pi}} \cdot a^{3/2} \frac{d}{dv}\left(\exp(-av^2) \cdot v^2\right) \\
&= \frac{4}{\sqrt{\pi}} \cdot a^{3/2} \left(-2av \exp(-av^2)v^2 + 2v \exp(-av^2)\right) \\
&= \frac{4}{\sqrt{\pi}} \cdot a^{3/2} \cdot \exp(-av^2)(1 - av^2) \cdot 2v
\end{aligned}$$

Also ist das Maximum erreicht für $v_m = \sqrt{1/a} = \sqrt{\frac{2k_BT}{m}}$.

Die Funktion kann nun umgeschrieben werden zu:

$$f(v) = \frac{4}{\sqrt{\pi}} \cdot \frac{v^2}{v_m^3} \exp\left(-\frac{v^2}{v_m^2}\right)$$

(b) How big is the mean of the velocity \braket$v$?

$$\begin{aligned}
\text{\braket}v = \int_0^\infty f(v) v dv &= \frac{4}{\sqrt{\pi}} v_m^{-3} \int_0^\infty \exp(-\frac{v^2}{v_m^2}) v^3 dv \\
&= \frac{4}{\sqrt{\pi}} v_m^{-3} \cdot \frac{1}{2}\Gamma(2) \cdot (v_m^2)^2 \\
&= \frac{2}{\sqrt{\pi}} v_m
\end{aligned}$$

(c) How big is the median of the velocity $v_{0.5}$?
Gesucht ist

$$\begin{aligned}
F(v_{0.5}) &= \int_{-\infty}^{v_{0.5}} f(v) dv = 0.5 \\
0 &= \operatorname{erf}(\beta) - \frac{2}{\sqrt{\pi}} \cdot \beta \cdot \exp\left(-\beta^2\right) - 0.5
\end{aligned}$$

mit $\beta = v_{0.5}/v_m$.

In [ ]:
```
import numpy as np
import matplotlib.pyplot as plt
import scipy as sc
from scipy import special
from scipy import optimize
import matplotlib_inline
matplotlib_inline.backend_inline.set_matplotlib_formats('png','pdf')
def f(x):
    return special.erf(x) -2/np.sqrt(np.pi)*x*np.exp(-x**2)- 1/2
```

In [ ]:
```
median=sc.optimize.root_scalar(f, x0=0, x1=1).root
print(f'Der Median der Geschwindigkeitsverteilung ist {median:.3f} mal v_m')
```

```
Der Median der Geschwindigkeitsverteilung ist 1.088 mal v_m
```

Somit ist der Median der Geschwindigkeit $v_{0.5} \approx 1.088 \cdot v_m$.

(d) How big is the full width at half height of the distribution (v_{FWHM})?
Die halbe Höhe entspricht $f(v) = 0.5 \cdot f(v_m)$.

$$0.5 \cdot f(v_m) = \frac{2}{\sqrt{\pi}} v_m^{-3} \exp(-\frac{v_m^2}{v_m^2}) v_m^2 = \frac{2}{\sqrt{\pi} v_m} \exp(-1)$$

Daraus folgt:

$$0 = \frac{4}{\sqrt{\pi}} v_m^{-3} \exp(-\frac{v_w^2}{v_m^2}) v_w^2 - \frac{2}{\sqrt{\pi} v_m} \exp(-1)$$
$$\Rightarrow 0 = 2\gamma^2 \exp(-\gamma^2) - \exp(-1)$$

mit $\gamma = v_w / v_m$.

In [ ]:
```
def g(x):
    return (2*x**2*np.exp(-(x)**2)-np.exp(-1))

v_w1=sc.optimize.root_scalar(g, x0=0, x1=1.1).root
v_w2=sc.optimize.root_scalar(g, x0=1, x1=2).root
print(f'Die linke Punkt ist {v_w1:.3f} mal v_m')
print(f'Der rechte Punkt ist {v_w2:.3f} mal v_m')
print(f'Daraus ergibt sich eine breite von {(v_w2-v_w1):.3f} mal v_m')
```

```
Die linke Punkt ist 0.482 mal v_m
Der rechte Punkt ist 1.637 mal v_m
Daraus ergibt sich eine breite von 1.155 mal v_m
```

(e) How big is the standard deviation of the velocity σ_v?
Die Standardabweichung ist die Wurzel aus der Varianz, welcehe sich durch

$$\text{Var}(V) = E[V^2] - E[V]^2 = \sigma^2(V)$$

berechnen lässt. Der Erwartungswert ist $E[V] = \text{\braket} v = \frac{2}{\sqrt{\pi}} v_m$. Somit muss noch $E[V^2]$ berechnet werden.

$$
\begin{aligned}
E[V^2] &= \frac{4}{\sqrt{\pi} v_m^3} \int_0^\infty v^4 \exp(-\frac{v^2}{v_m^2}) dv \\
&= \frac{4}{\sqrt{\pi} v_m^3} \cdot \frac{1}{2} \frac{\Gamma(2+1/2)}{(v_m^{-2})^{2+1/2}} \\
&= \frac{4}{\sqrt{\pi} v_m^3} \cdot \frac{1}{2} \cdot \frac{3}{4} \sqrt{\pi} v_m^5 \\
&= \frac{3}{2} v_m^2
\end{aligned}
$$

Somit ergibt sich für die Standardabweichung:

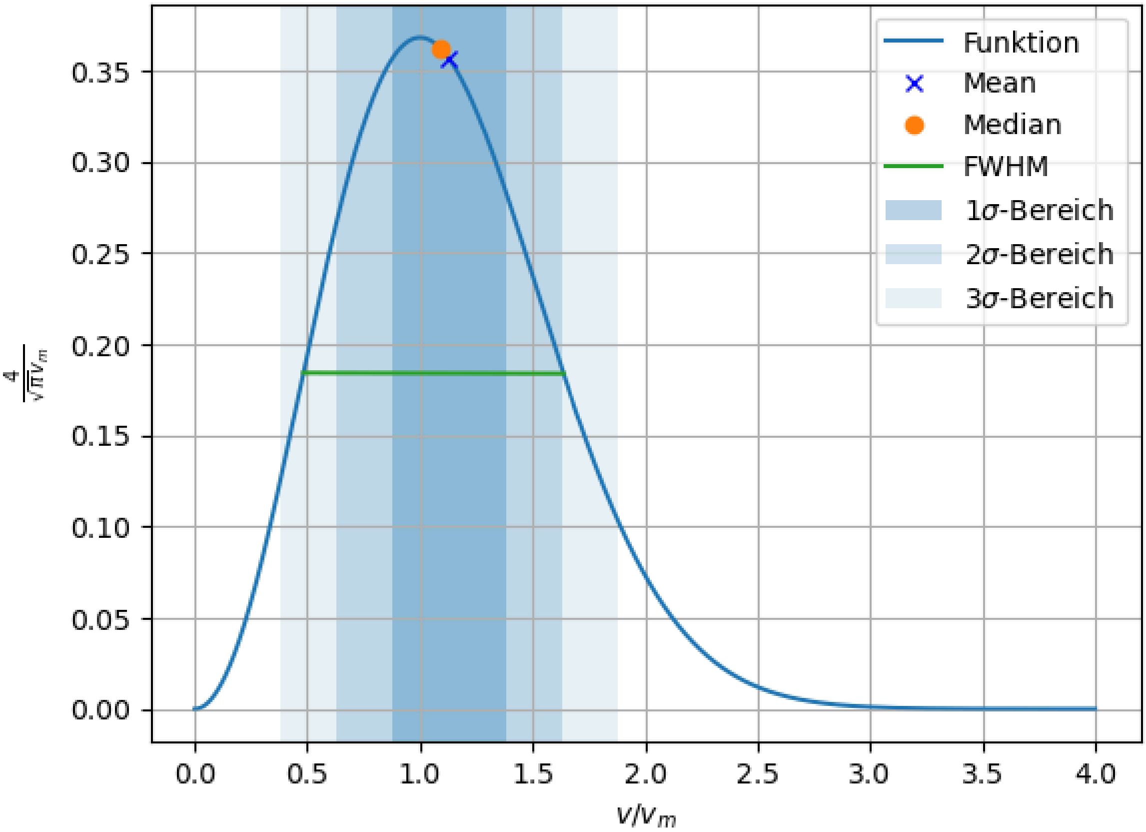
$$
\begin{aligned}
\Rightarrow \sigma^2 &= \frac{3}{2} v_m^2 - v_m^2 = \frac{1}{2} v_m^2 \\
\Rightarrow \sigma &= \frac{1}{4} v_m
\end{aligned}
$$

In [ ]:

```
#Darstellung der Ergebnisse:
def F(x):
    return x**2*np.exp(-x**2)

v_mean=2/np.sqrt(np.pi)
v_median=1.088
v_w1=0.482
v_w2=1.637
sigma=1/4

x=np.linspace(0,4,1000)
plt.plot(x,F(x), label='Funktion')
plt.plot(v_mean,F(v_mean), 'xb',label='Mean')
plt.plot(v_median, F(v_median), 'o', label='Median')
plt.plot([v_w1,v_w2], [F(v_w1), F(v_w2)], '-', label='FWHM')
#plt.plot(v_mean-sigma, F(v_mean-sigma),'o', label=r'$-\sigma$')
#plt.plot(v_mean+sigma, F(v_mean+sigma),'o', label=r'$+\sigma$')
plt.axvspan(v_mean-sigma, v_mean+sigma, alpha=0.3,label=r'$1 \sigma$-Bereich')
plt.axvspan(v_mean-2*sigma, v_mean+2*sigma, alpha=0.2,label=r'$2 \sigma$-Bereich
plt.axvspan(v_mean-3*sigma, v_mean+3*sigma, alpha=0.1,label=r'$3 \sigma$-Bereich
plt.xlabel(r'$v/v_m$')
plt.ylabel(r'$\frac{4}{\sqrt{\pi}v_m}$')
plt.legend(loc='best')
plt.grid(True)                          # grid style
```


Funktion
Mean
Median
FWHM
1σ-Bereich
2σ-Bereich
3σ-Bereich
0.35
0.30
0.25
0.20
0.15
0.10
0.05
0.00
0.0
0.5
1.0
1.5
2.0
2.5
3.0
3.5
4.0
v/v_m