Abgabe SMD A Blatt 01

von Celina Kortmann, Felix Göke und Erich Wagner

In [ ]:
```
import numpy as np
import matplotlib.pyplot as plt
```

Blatt 1

Exercise 1 - Numerical Stability

Consider the functions
(a) $f(x) = (x^3 + 1/3) - (x^3 - 1/3)$
(b) $g(x) = ((3 + x^3/3) - (3 - x^3/3))/x^3$.
Determine empirically for which ranges of x (roughly) the numerical result

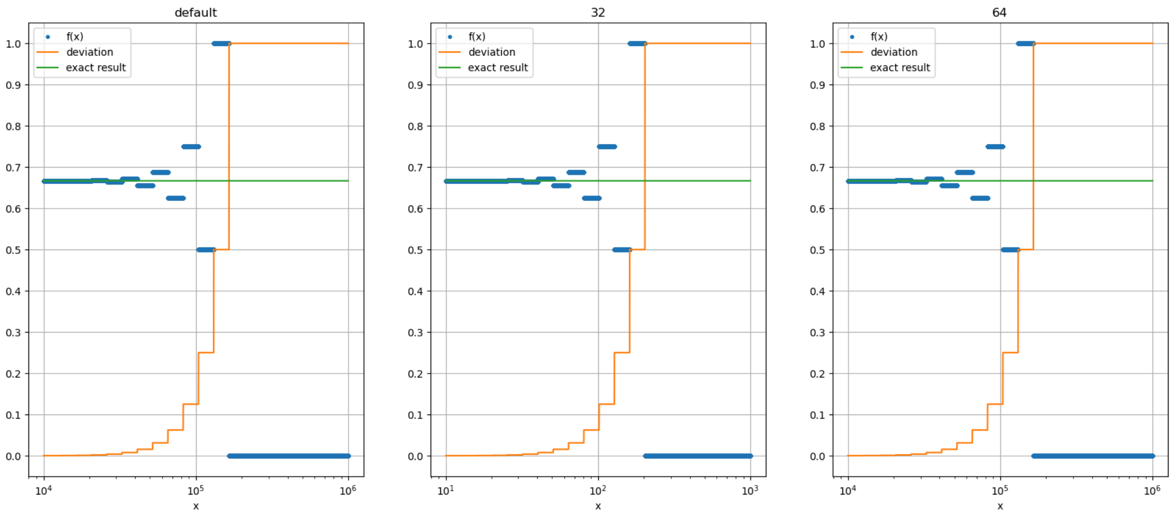
- deviates from the algebraic by more than 1%,
- is equal to zero

The algebraic result is: $f(x) = g(x) = \frac{2}{3}$

In [ ]:
```
f = lambda x: (x**3+1/3)-(x**3-1/3) #kurze anonyme funktion
g = lambda x: ((3+x**3/3)-(3-x**3/3))/x**3
exact = 2/3

x_size=10000
x_a,x_b, f_x, err_f ,g_x, err_g= {},{},{},{},{},{} #arrays um ergebnisse zu spei
x_a['default'] = np.logspace(4,6,x_size) #erzeugt ein Array mit 10.000 Werten im
x_a['32'] = np.logspace(1, 3, x_size, dtype='float32')
x_a['64'] = np.logspace(4, 6, x_size, dtype='float64')
x_b['default'] = np.logspace(-6,-4,x_size)
x_b['32'] = np.logspace(-3, -1, x_size, dtype='float32')
x_b['64'] = np.logspace(-6, -4, x_size, dtype='float64')

for key in x_a: f_x[key]=f(x_a[key]) #wendet f() auf das Array an und speichert
for key in x_a: err_f[key]=np.abs(exact-f_x[key])/exact # Berechnet die relative
for key in x_b: g_x[key]=g(x_b[key])
for key in x_b: err_g[key]=np.abs(exact-g_x[key])/exact
```

In [ ]:
```
plt.subplots(1,3,figsize=(20,8))

i=1
for key in x_a:
    plt.subplot(1,3,i)
    plt.xscale('log')
    plt.yticks(np.arange(0.0,1.1,0.1))
    plt.xlabel('x')
    plt.title(key)

    plt.plot(x_a[key],f_x[key],'.',label='f(x)')
    plt.plot(x_a[key], err_f[key],'-', label='deviation')
```

```
    plt.plot(x_a[key],np.full_like(x_a[key], exact),'-', label='exact result')

    plt.grid(which='major')
    plt.legend()
    i += 1
```



In [ ]:
```
for key in x_a:
    print(f'precision for: {key}')
    print(f'    last x with a deviate under 1%: x={x_a[key][err_f[key]<0.01][-1]
    print(f'    first x for f(x)=0: x={x_a[key][f_x[key]==0][0]:.3e}')
```

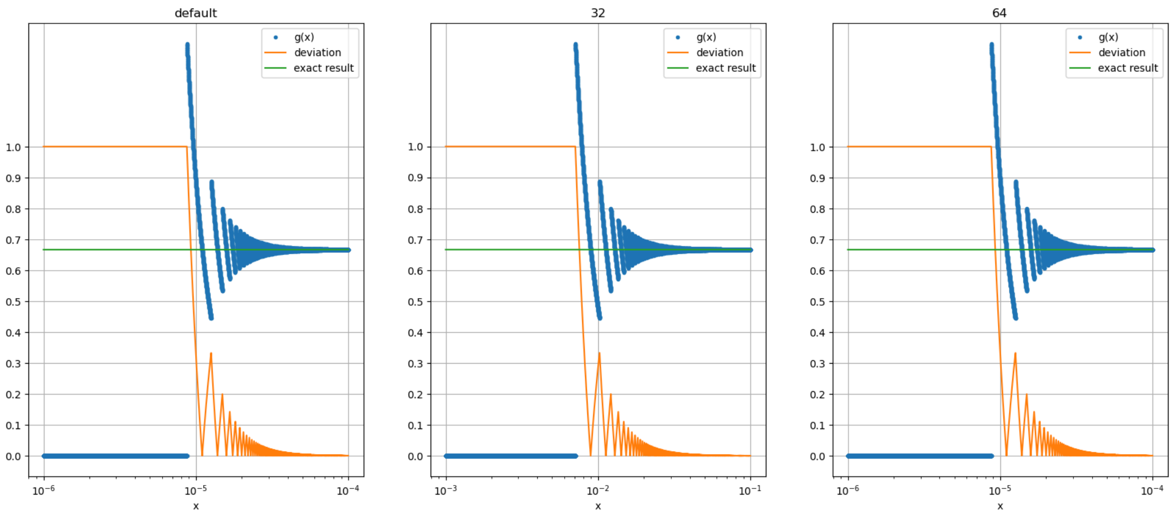
```
precision for: default
    last x with a deviate under 1%: x=4.127e+04
    first x for f(x)=0: x=1.652e+05
precision for: 32
    last x with a deviate under 1%: x=5.078e+01
    first x for f(x)=0: x=2.032e+02
precision for: 64
    last x with a deviate under 1%: x=4.127e+04
    first x for f(x)=0: x=1.652e+05
```

Ergebnis für f(x)

Dtype | Abweichung < 1% | Bereich für $f(x) = 0$ ------|-----------------|------------------- -- default | $|x| < 4.1 \cdot 10^4$ | $|x| > 1.7 \cdot 10^5$ float32 | $|x| < 5.1 \cdot 10^1$ | $|x| > 2.0 \cdot 10^2$ float64 | $|x| < 4.1 \cdot 10^4$ | $|x| > 1.7 \cdot 10^5$

In [ ]:
```
plt.subplots(1,3,figsize=(20,8))

i=1
for key in x_b:
    plt.subplot(1,3,i)
    plt.xscale('log')
    plt.yticks(np.arange(0.0,1.1,0.1))
    plt.xlabel('x')
    plt.title(key)

    plt.plot(x_b[key],g_x[key],'.',label='g(x)')
    plt.plot(x_b[key], err_g[key],'-', label='deviation')
    plt.plot(x_b[key],np.full_like(x_b[key], exact),'-', label='exact result')

    plt.grid(which='major')
```

```
    plt.legend()
    i += 1
```



In [ ]:
```
for key in x_b:
    print(f'precision for: {key}')
    print(f'    last x with a deviate under 1%: x={x_b[key][err_g[key]<0.01][0]:
    print(f'    first x for f(x)=0: x={x_b[key][g_x[key]==0][-1]:.3e}')
```

```
precision for: default
    last x with a deviate under 1%: x=1.097e-05
    first x for f(x)=0: x=8.732e-06
precision for: 32
    last x with a deviate under 1%: x=8.914e-03
    first x for f(x)=0: x=7.097e-03
precision for: 64
    last x with a deviate under 1%: x=1.097e-05
    first x for f(x)=0: x=8.732e-06
```

Ergebnis für g(x)

Dtype | Abweichung < 1% | Bereich für $g(x) = 0$ ------|-----------------|--------------------- default | $|x| > 1.1 \cdot 10^{-5}$ | $|x| < 8.7 \cdot 10^{-6}$ float32 | $|x| > 8.9 \cdot 10^{-3}$ | $|x| < 7.1 \cdot 10^{-3}$ float64 | $|x| > 1.1 \cdot 10^{-5}$ | $|x| < 8.7 \cdot 10^{-6}$

Exercise 2: Numerical Stability and Condition

The expression $f(E, \Theta)$ represents a summand of the differential cross section for the reaction $e^- e^+ \to \gamma\gamma$

$$f(E, \Theta) = \frac{2 + \sin^2 \Theta}{1 - \beta^2 \cos^2 \Theta},$$

with

$$\beta = \sqrt{1 - \gamma^{-2}}, \gamma = \frac{E}{m}, m = 511 keV.$$

(a) Die Funktion wird um Singularitäten numerisch instabil. Wir betrachten demnach

$$0 \approx 1 - \beta^2 \cos^2 \Theta$$

mit $E = 50\text{GeV}$ ist $\beta \approx 1$. Somit wird die Funktion für $\cos^2\Theta \approx 1$ numerisch instabil.

(b) Hinweise: $1 - \beta^2 = \frac{1}{\gamma^2}$ und $1 = \sin^2\Theta + \cos^2\Theta$

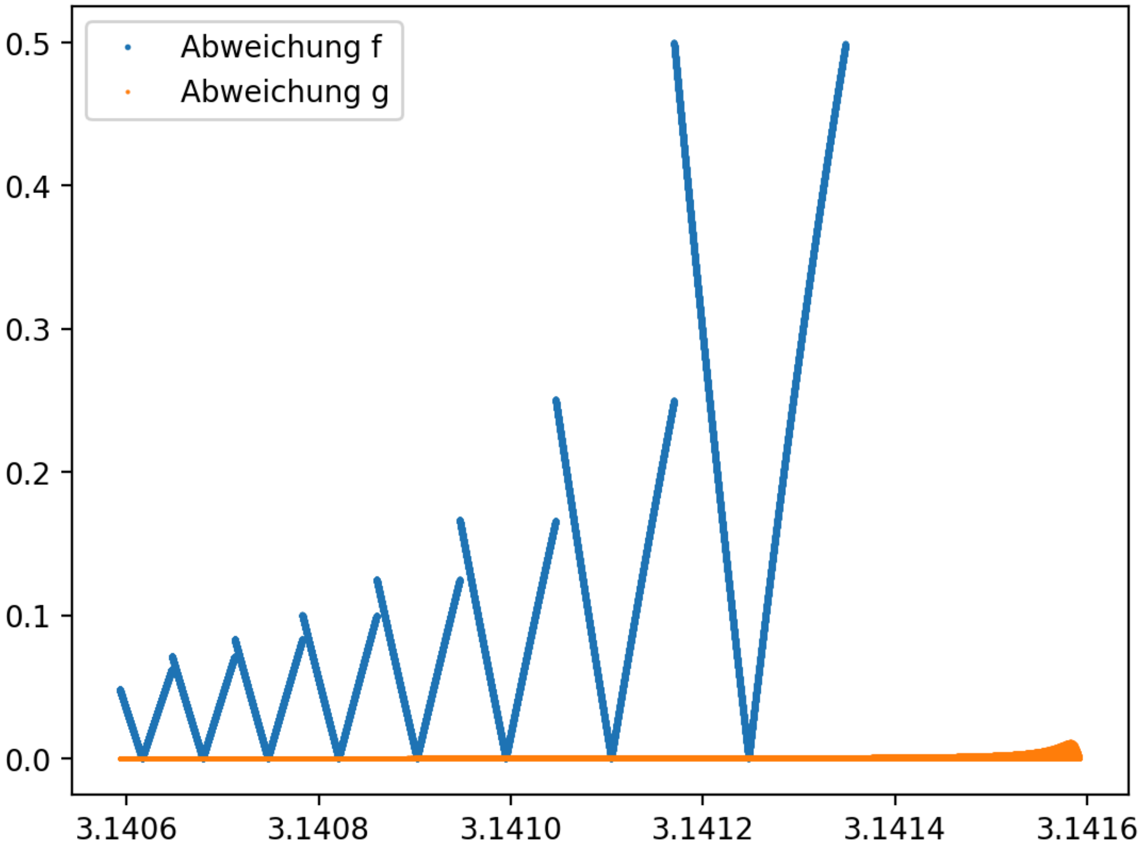
$$\begin{aligned} f(E,\Theta) &= \frac{2+\sin^2\Theta}{1-\beta^2\cos^2\Theta} && (1)\\ &= \frac{2+\sin^2\Theta}{1-\beta^2+\beta^2\sin^2\Theta} && (2)\\ &= \frac{\frac{2}{sin^2\Theta}+1}{\gamma^{-2}(\sin^{-2}-1)+1} = g(\Theta) && (3)\end{aligned}$$

In [ ]:
```
E= 50*10**9 #eV
m=511*10**3 #eV
gamma=E/m
b=np.sqrt(1-gamma**(-2))

f= lambda theta,b: (2+np.sin(theta)**2)/(1-b**2*np.cos(theta)**2)
g= lambda theta, gamma: (2/np.sin(theta)**2 +1)/(1/gamma**2*(1/np.sin(theta)**2-

theta_size=100000
d_theta=10**(-3)
theta_min=np.pi-d_theta
theta_max=np.pi
theta_32=np.linspace(theta_min,theta_max, theta_size, dtype='float32')
theta_64=np.linspace(theta_min,theta_max, theta_size, dtype='float64')

f_64=f(theta_64,b)
f_32=f(theta_32,b)
g_64=g(theta_64, gamma)
g_32=g(theta_32, gamma)
```

```
/tmp/ipykernel_148512/615126554.py:6: RuntimeWarning: divide by zero encountered
in divide
  f= lambda theta,b: (2+np.sin(theta)**2)/(1-b**2*np.cos(theta)**2)
```

In [ ]:
```
plt.figure(dpi=200)
plt.plot(theta_64, np.abs(f_64-f_32)/f_64,'.',markersize=2, label='Abweichung f'
plt.plot(theta_64, np.abs(g_64-g_32)/g_64, '.',markersize=1, label='Abweichung g
plt.legend()
```

Out[ ]: `<matplotlib.legend.Legend at 0x7f8da54d95e0>`



Man sieht, dass die Abweichungen von f deutlich größer sind, als die von g. Daraus kann man erkennen, dass g die stabilere Funktion ist. Außerdem kann die Abweichung von f in der Nähe von π nicht angezeigt werden, da dort ein Fehler ausgegeben wird (divide by zero).

(d) Konditionszahl bestimmen in Abhängigkeit von Θ

$$\begin{aligned} K &= \left|\Theta\frac{f'(\Theta)}{f(\Theta)}\right| && (4)\\ &= \left|-\frac{2\Theta\sin\Theta\cos\Theta(3\beta^2-1)}{(1-\beta^2\cos^2\Theta)(2+\sin^2\Theta)}\right| && (5)\end{aligned}$$

mit

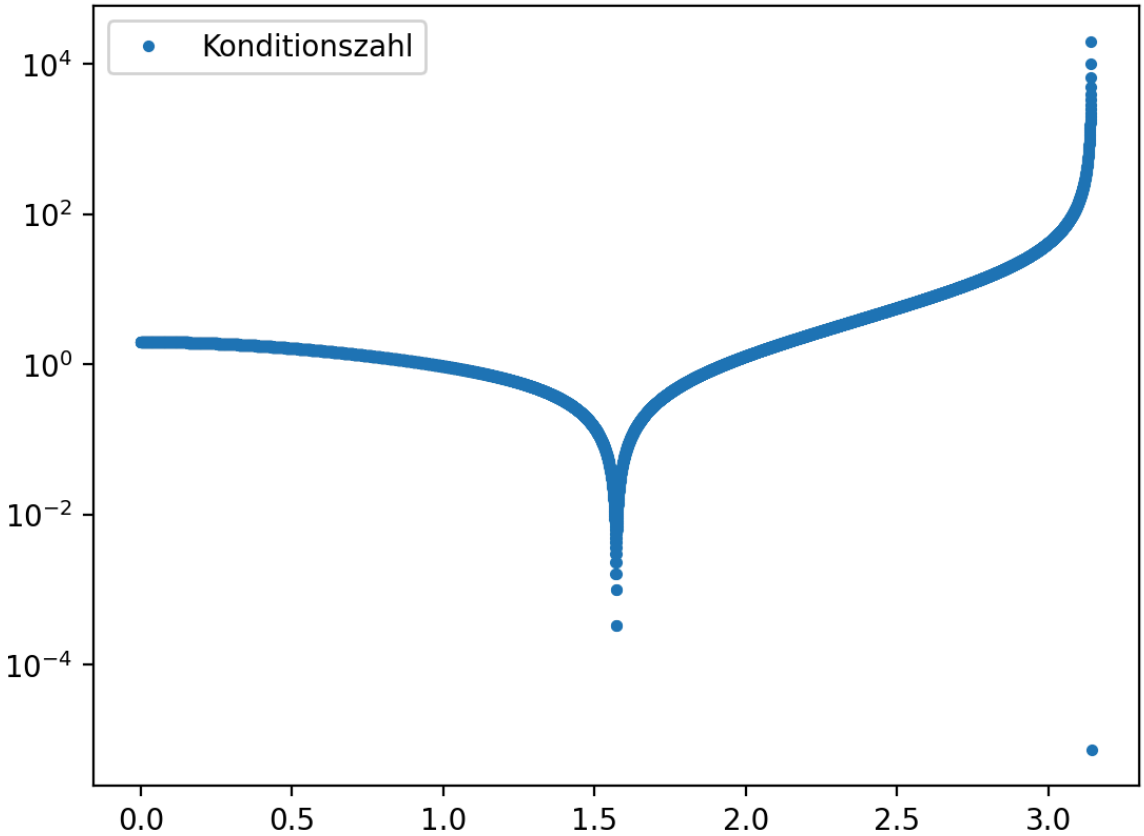
$$f'(\Theta) = -\frac{2\sin\Theta\cos\Theta(3\beta^2)-1}{(1-\beta^2\cos^2\Theta)^2}$$

(e)

In [ ]:
```
K=lambda b,t :np.abs(2*t*np.sin(t)*np.cos(t)*(3*b**3-1)/((1-b**2*np.cos(t)**2)*(

E= 50*10**9 #eV
m=511*10**3 #eV
gamma=E/m
b=np.sqrt(1-gamma**(-2))

t_size=10000
t=np.linspace(0,np.pi,t_size)
```

In [ ]:
```
plt.figure(dpi=200)
plt.plot(t,K(b,t),'.' ,label='Konditionszahl')
plt.yscale('log')
plt.legend()
```

Out[ ]: <matplotlib.legend.Legend at 0x7f8daddbcd10>



Die Konditionszahl ist um π deutlich schlechter als um 0. Die Funktion ist um $\Theta = (2k+1) * \pi$ schlecht konditioniert und gut um den den Bereich $\Theta = (2k+1) * \pi/2$

(f) Stabilität ist die Abweichung der numerischen Ergebnisse von der algebraischen Lösung durch Rundungsfehler während Kondition die Abweichung des Ergebnisses bei einem Fehler der Eingangsdaten ohne Rundungsfehler ist.