Bist du fit für dieses Kapitel?

Eingangstest S. 202

Wir untersuchen Glücksräder

Reicht 50-mal Drehen für die Erprobung aus?

1 Die Schülerinnen und Schüler wollen das von ihnen gebaute Glücksrad ausprobieren.

Dazu wird das Glücksrad zunächst 50-mal gedreht.
Moritz hat die Ergebnisse in einer Strichliste festgehalten.

Strichliste

1	𝍸 IIII
2	IIII
3	𝍸 II
4	𝍸 I
5	III
6	𝍸 𝍸
7	𝍸
8	𝍸 I

Anna trägt die absolute Häufigkeit für das Ergebnis „Der Zeiger zeigt auf die 1" in eine Häufigkeitstabelle ein.
Sie berechnet auch die relative Häufigkeit.

Ergebnis:	1
absolute Häufigkeit:	9
Gesamtzahl der Versuche:	50
relative Häufigkeit:	$\frac{9}{50} = 0{,}18$

relative Häufigkeit: $\frac{9}{50} = 0{,}18$
relative Häufigkeit in Prozent: 18 %

a) Lege eine vollständige Häufigkeitstabelle an. Bestimme die relativen Häufigkeiten.
b) Berechne auch die Summe der relativen Häufigkeiten. Was stellst du fest?

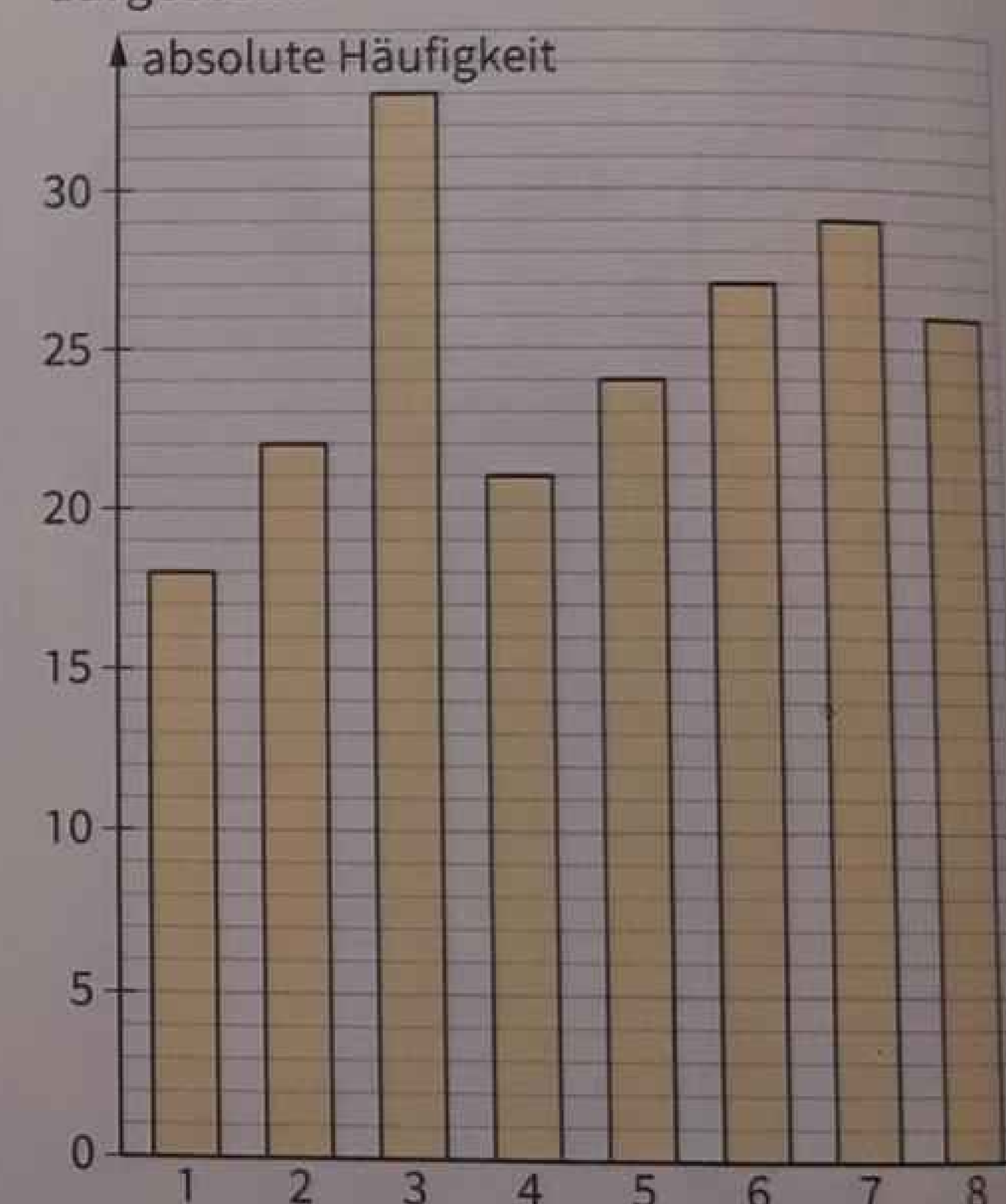
Häufigkeitstabelle

Ergebnis	absolute Häufigkeit	relative Häufigkeit
1	9	0,18
2	■	■
3	■	■

2 Lena hat das Glücksrad 50-mal gedreht und dabei nur die Farben der einzelnen Kreisausschnitte festgehalten.
Lege eine Häufigkeitstabelle an und trage die zugehörigen absoluten und relativen Häufigkeiten ein. Bestimme auch die Summen.

grün	𝍸 𝍸 II
gelb	𝍸 𝍸 𝍸 I
blau	𝍸 𝍸
rot	𝍸 𝍸 II

3 Das Glücksrad wurde insgesamt 200-mal gedreht. Johannes hat die absoluten Häufigkeiten der einzelnen Ergebnisse in einem Säulendiagramm dargestellt.



a) Lege eine Häufigkeitstabelle an. Berechne auch die relativen Häufigkeiten.
b) Gib die relativen Häufigkeiten auch in Prozent an.

4 Bei den 200 Drehungen des Glücksrades zeigte der Zeiger 27-mal auf den blauen Kreisausschnitt, 47-mal auf einen grünen, 51-mal auf einen roten und 75-mal auf einen gelben Kreisausschnitt.
a) Gib die relativen Häufigkeiten der einzelnen Ergebnisse als Bruch, Dezimalzahl und in Prozent an.
b) Stelle die relativen Häufigkeiten in einem Säulendiagramm dar.

6 In einer Lostrommel befinden sich 180 Nieten, 19 Gewinne und ein Hauptgewinn.
Berechne die Wahrscheinlichkeiten für alle möglichen Ergebnisse.

7 In der Klasse 8 b wird ausgelost, welche Schülerin oder welcher Schüler sich an der Reinigung des Schulgebäudes beteiligt. Unter den 28 Schülerinnen und Schülern befinden sich 13 Mädchen.
a) Wie groß ist die Wahrscheinlichkeit, dass Tobias aus der 8 b ausgelost wird?
b) Wie groß ist die Wahrscheinlichkeit, dass ein Junge (ein Mädchen) an dieser Reinigungsaktion teilnimmt? Gib die Wahrscheinlichkeit als Bruch und als Dezimalzahl an. Runde auf zwei Nachkommastellen.

8 In der Klasse 8 a kommen 12 Schülerinnen und Schüler mit dem Fahrrad zur Schule, 11 benutzen öffentliche Verkehrsmittel, 6 gehen zu Fuß.
Wie groß ist die Wahrscheinlichkeit, dass ein zufällig ausgewähltes Mitglied der Klasse mit dem Fahrrad kommt (zu Fuß geht, öffentliche Verkehrsmittel benutzt)? Gib die Wahrscheinlichkeit als Bruch und als Dezimalzahl an. Runde auf zwei Nachkommastellen.

9 Berechne bei den folgenden Zufallsexperimenten die Wahrscheinlichkeit für jedes Ergebnis. Gib die Wahrscheinlichkeit auch in Prozent an. Runde auf zwei Nachkommastellen.
a) In einer Urne befinden sich 49 gleichartige Kugeln, die die Zahlen von 1 bis 49 tragen. Es wird einmal gezogen.
b) Aus einem Kartenspiel mit 32 Karten wird eine Karte gezogen.
c) Aus einer Klasse mit 14 Mädchen und 13 Jungen wird eine Person zufällig ausgewählt.
d) Ein Glücksrad mit 16 gleichgroßen Feldern, die die Zahlen von 1 bis 16 tragen, wird einmal gedreht.
e) Ein Würfel mit drei roten, zwei blauen und einer grünen Seitenfläche wird einmal geworfen.
f) Aus einer Lostrommel mit 190 Nieten und 10 Gewinnen wird ein Los gezogen.

Zufallsexperiment

Ziehen einer Kugel

Ergebnisse:
1; 2; 3; 4; 5

Wahrscheinlichkeit für jedes Ergebnis:

$P(1) = P(2) = P(3) = P(4) = P(5) = \frac{1}{5} = 0{,}2 = 20\,\%$

Sind bei einem Zufallsexperiment alle Ergebnisse gleichwahrscheinlich, so beträgt die Wahrscheinlichkeit für jedes Ergebnis:

$$\textbf{P (Ergebnis)} = \frac{1}{\text{Anzahl aller Ergebnisse}}$$

Solche Zufallsexperimente werden **Laplace-Experimente** genannt.

Pierre Simon Laplace (1749–1827): französischer Mathematiker und Astronom

Recherchiere im Internet über Laplace.

10 In einer Urne befinden sich 50 gleichartige Kugeln, die gelb, blau oder rot gefärbt sind. Für die Wahrscheinlichkeit, mit der eine Kugel bestimmter Farbe gezogen wird, soll gelten: P (gelb) = 0,24, P (blau) = 0,64 und P (rot) = 0,12. Wie viele blaue (rote) Kugeln sind in der Urne?

P (gelb) = 0,24

Anteil der gelben Kugeln: 0,24

0,24 von 50 Kugeln: $0{,}24 \cdot 50 = 12$

Es sind 12 gelbe Kugeln in der Urne.

1 Jasmin will feststellen, wie viele Ergebnisse folgendes Zufallsexperiment hat: Sie nimmt mit geschlossenen Augen nacheinander zwei Kugeln aus dem Gefäß und schreibt die zugehörigen Ziffern auf. Dann legt sie beide Kugeln zurück, mischt alles gut durch und nimmt erneut zwei Kugeln.

1. Ziehung: 3, 2

2. Ziehung: 2, 2

Welche anderen möglichen Ergebnisse kann Jasmin bei weiteren Ziehungen erhalten?

2 Gib alle möglichen Ergebnisse des Zufallsexperiments an.

a) Eine Münze wird zweimal geworfen.
b) Die erste Lottozahl wird gezogen.
c) Ein Glücksrad (10 Ziffern) wird einmal gedreht.
d) Die Blutgruppe einer zufällig ausgewählten Person wird bestimmt.
e) Eine zufällig ausgewählte Person wird nach ihrem Lebensalter (in Jahren) gefragt.
f) Aus einer Urne mit roten, blauen und schwarzen Kugeln werden nacheinander zwei Kugeln gezogen.

3 Aus einem Spiel mit 32 Karten wird eine Karte gezogen.

Das Ereignis E „Die gezogene Karte ist ein Bube" tritt ein, wenn der Karo-Bube, der Herz-Bube, der Pik-Bube oder der Kreuz-Bube gezogen wird.

E: Die gezogene Karte ist ein Bube.

Das Ereignis E lässt sich auch als Menge von Ergebnissen schreiben:

E = {Karo-Bube, Herz-Bube, Pik-Bube, Kreuz-Bube}

Gib das folgende Ereignis als Menge an:
Die gezogene Karte ist

a) ein rotes Bild,
b) eine Pik-Karte,
c) eine schwarze Acht,
d) das Kreuz-As,
e) eine Dame oder ein Bube,
f) kein Bild.

Zufallsexperiment: Ziehen einer Kugel

S = {1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9, 10, 11, 12}

E_1: Die gezogene Zahl ist durch 4 teilbar. E_1 = {4, 8, 12}
E_2: Die gezogene Zahl ist durch 7 teilbar. E_2 = {7}

Die **Menge aller möglichen Ergebnisse** eines Zufallsexperiments heißt **Ergebnismenge S.**

Ein **Ereignis** ist eine **Teilmenge** der Ergebnismenge S.

4 Aus der abgebildeten Urne wird eine Kugel gezogen.

Gib wie im Beispiel jedes Ereignis als Menge von Ergebnissen an.

E_1: Die gezogene Zahl ist ungerade.
$E_1 = \{1, 3, 5, 7\}$

E_2: Die gezogene Zahl ist gerade.
E_3: Die gezogene Zahl ist größer als 4.
E_4: Die gezogene Zahl ist kleiner als 5.
E_5: Die gezogene Zahl ist größer als 5.
E_6: Die gezogene Zahl ist größer als 2 und kleiner als 6.

5 Ein Würfel wird einmal geworfen. Dabei kann es nicht passieren, dass die gewürfelte Augenzahl größer ist als 6. Das bedeutet, dass das Ereignis „E1: Die Augenzahl ist größer als 6.“ nicht eintreten kann. Die zugehörige Menge ist die leere Menge.
Gib das folgende Ereignis als Menge an.
E_4: Die Augenzahl ist höchstens 5.
E_5: Die Augenzahl ist mindestens 3.
E_6: Die Augenzahl ist durch 2 teilbar.
E_7: Die Augenzahl ist durch 7 teilbar.
E_8: Die Augenzahl ist kleiner als 10.
E_9: Die Augenzahl ist mindestens 1.
E_{10}: Die Augenzahl ist durch 3 teilbar.
E_{11}: Die Augenzahl ist mindestens 6.

E1: Die Augenzahl ist größer als 6.
$E_1 = \{\ \}$

E_2: Die Augenzahl ist höchstens 4.
$E_2 = \{1, 2, 3, 4\}$

E_3: Die Augenzahl ist mindestens 4.
$E_3 = \{4, 5, 6\}$

Ein Ereignis E, das nie eintreten kann, ist gleich der leeren Menge.
Es wird daher **unmögliches Ereignis** genannt. $\mathbf{E = \{\ \}}$

Ein Ereignis E, das immer eintrifft, ist gleich der Ergebnismenge S.
Es wird daher **sicheres Ereignis** genannt. $\mathbf{E = S}$

6 In einer Urne befinden sich dreißig gleichartige Kugeln, die die Zahlen von 1 bis 30 tragen. Eine Kugel wird gezogen. Gib das Ereignis als Menge an.
E_1: Die Zahl ist durch 3 teilbar.
E_2: Die Zahl ist durch 5 teilbar.
E_3: Die Zahl ist durch 27 teilbar.
E_4: Die Zahl ist durch 39 teilbar.
E_5: Die Zahl ist durch 3 oder 5 teilbar.
E_6: Die Zahl ist durch 3 und 5 teilbar.
E_7: Die Zahl ist nicht durch 77 teilbar.
E_8: Die Zahl ist eine Primzahl.

7 Die Teilnehmer an einer internationalen Tagung kommen aus Italien, Frankreich, Großbritannien, der Bundesrepublik Deutschland, den USA, der Türkei, Spanien, Ägypten, Brasilien, Polen und China. Ein Teilnehmer wird zufällig ausgewählt. Gib das folgende Ereignis als Menge an.
E_1: Der Teilnehmer ist Europäer.
E_2: Der Teilnehmer kommt aus Afrika.
E_3: Der Teilnehmer kommt aus Asien.
E_4: Der Teilnehmer kommt aus der EU.
E_5: Der Teilnehmer ist kein Europäer.

8 In einer Urne befinden sich zwanzig gleichartige Kugeln, die die Zahlen von 1 bis 20 tragen. Eine Kugel wird gezogen. Beschreibe das angegebene Ereignis wie im Beispiel durch eine Aussage. Es sind mehrere Aussagen möglich.

$E_1 = \{1, 2, 3, 4, 5\}$

E_1: Die gezogene Zahl ist höchstens 5.
E_1: Die gezogene Zahl ist kleiner als 6.

$E_2 = \{4, 12, 16, 20\}$
$E_3 = \{1, 3, 5, 7, 9, 11, 13, 15, 17, 19\}$
$E_4 = \{1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8\}$
$E_5 = \{2, 3, 5, 7, 11, 13, 17, 19\}$
$E_6 = \{\ \}$
$E_7 = \{15\}$
$E_8 = \{14, 15, 16, 17, 18, 19, 20\}$

Bei wie vielen zweistelligen Zahlen ist die Zehnerziffer größer als die Einerziffer?

1 In der Schule werden 250 zufällig ausgewählte Schülerinnen und Schüler nach der Anzahl ihrer Geschwister befragt. Das Ergebnis der Befragung wurde in der abgebildeten Häufigkeitstabelle zusammengefasst.

Anzahl der Geschwister	absolute Häufigkeit	relative Häufigkeit
0	103	0,412
1	128	0,512
2	12	0,048
3	5	0,020
4 und mehr	2	0,008
Summe	250	1,000

a) Wie viele der befragten Schülerinnen und Schüler haben zwei oder weniger Geschwister?
b) Berechne die relative Häufigkeit für zwei oder weniger Geschwister. Es gibt zwei Lösungswege.
c) Wie groß ist die Wahrscheinlichkeit, dass eine zufällig ausgewählte Schülerin oder ein zufällig ausgewählter Schüler zwei oder weniger Geschwister hat?

Zufallsexperiment: Das Glücksrad wird einmal gedreht.

E: Die Gewinnzahl ist kleiner als 4.

$E = \{1, 2, 3\}$

$P(E) = P(1) + P(2) + P(3)$

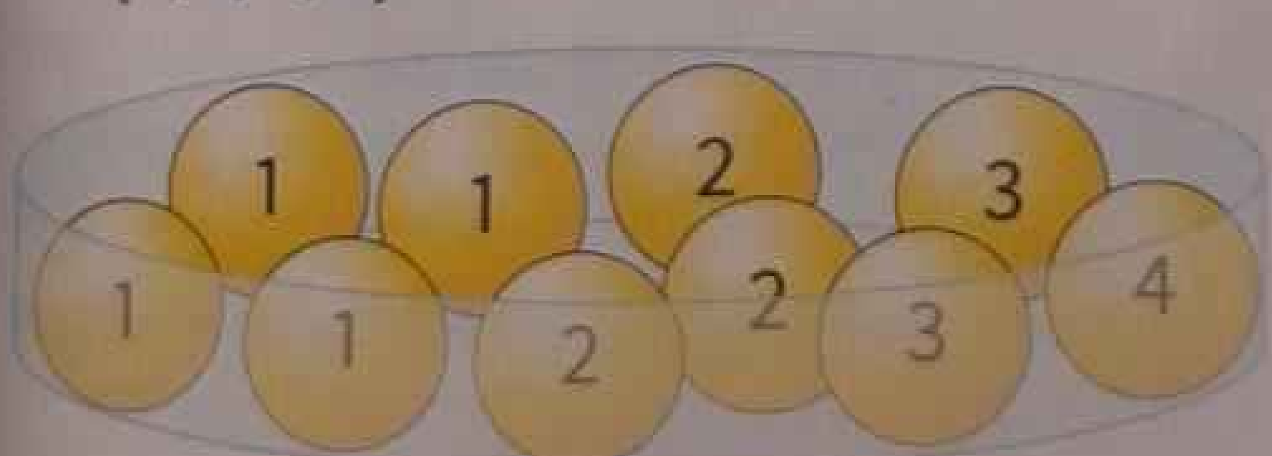
$P(E) = \frac{2}{8} + \frac{3}{8} + \frac{2}{8}$

$P(E) = \frac{7}{8} = 0{,}875 = 87{,}5\,\%$

$S = \{1, 2, 3, 4\}$

Du berechnest die Wahrscheinlichkeit eines Ereignisses, indem du die Wahrscheinlichkeiten der zugehörigen Ergebnisse addierst.

2 Aus der abgebildeten Urne wird eine Kugel gezogen. Dabei sind vier unterschiedliche Ergebnisse möglich: $S = \{1, 2, 3, 4\}$.



E_1: Die gezogene Zahl ist gerade.
$E_1 = \{2, 4\}$

$P(E_1) = P(2) + P(4)$

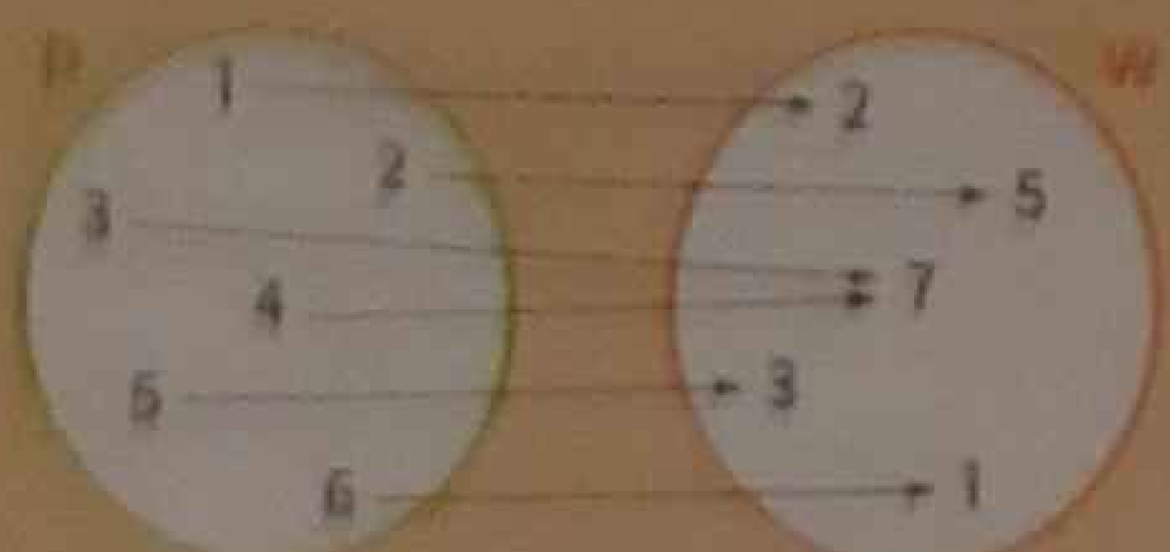
$P(E_1) = \frac{3}{10} + \frac{1}{10} = \frac{4}{10} = 0{,}4 = 40\,\%$

Berechne die Wahrscheinlichkeit des folgenden Ereignisses.
E_2: Die gezogene Zahl ist ungerade.
E_3: Die gezogene Zahl ist größer als 1.
E_4: Die gezogene Zahl ist höchstens 3.
E_5: Die gezogene Zahl ist mindestens 4.

3 In einer Urne befinden sich 27 gleichartige Kugeln, auf denen je ein Buchstabe des Wortes „Wahrscheinlichkeitsrechnung“ steht. Eine Kugel wird gezogen.
a) Gib die Ergebnismenge S an und berechne die Wahrscheinlichkeit für jedes Ergebnis.
b) Gib das Ereignis „Der gezogene Buchstabe ist ein Vokal.“ als Menge von Ergebnissen an und berechne seine Wahrscheinlichkeit.

4 Bei einem Angelspiel können Fische oder Gegenstände geangelt werden. In dem Kasten, der den Teich darstellt, befinden sich Plastikfiguren für fünf Karpfen, drei Forellen, zwei Hechte, zwei Schuhe und einen Regenschirm. Es soll einmal geangelt werden.
a) Gib die Ergebnismenge S an und berechne die Wahrscheinlichkeit für jedes Ergebnis.
b) Gib das Ereignis „Es wird ein Fisch geangelt.“ als Teilmenge von S an und berechne seine Wahrscheinlichkeit.
c) Gib das Ereignis „Es wird kein Fisch geangelt.“ als Teilmenge von S an und berechne seine Wahrscheinlichkeit.
d) Vergleiche die berechneten Wahrscheinlichkeiten. Was fällt dir auf?

Note → Anzahl der Arbeiten



Graph der Funktion

Bei der Darstellung von Funktionen im Koordinatensystem ist es üblich, die Elemente des Definitionsbereichs ($x \in D$) auf der x-Achse und die Elemente des Wertebereichs ($y \in W$) auf der y-Achse einzutragen.
Für die Darstellung einer Funktion im Koordinatensystem gilt: Auf jeder Parallelen zur y-Achse liegt höchstens ein Punkt.

1 Zeichne den Graphen der Funktion.

a) **Stückzahl → Preis**

Stückzahl	1	2	3	4	5
Preis (€)	0,80	1,60	2,40	3,20	4,00

Stückzahl	6	7	8	9	10
Preis (€)	4,80	5,60	6,40	7,20	8,00

(x-Achse: 1 cm ≙ 1; y-Achse: 1 cm ≙ 1 €)

b) **Tageszeit → Temperatur**

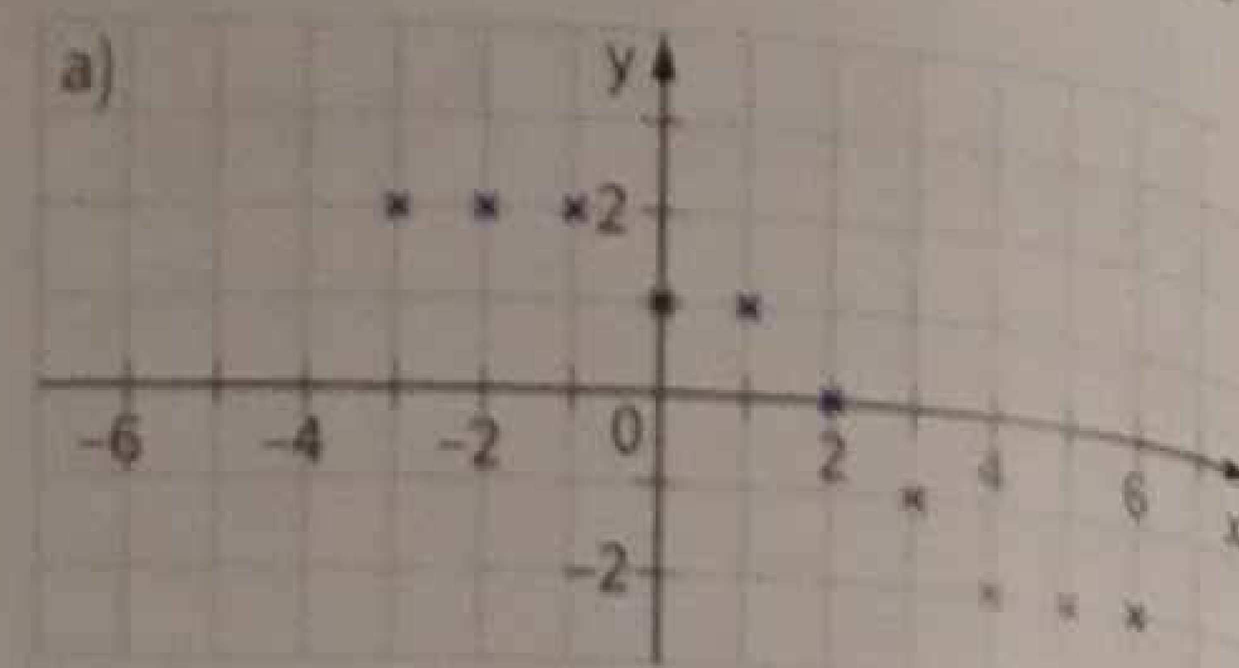
Zeit (h)	2	4	6	8	10	12
Temperatur (°C)	−4	−6	−6	−4	0	4

Zeit (h)	14	16	18	20	22	24
Temperatur (°C)	8	6	2	0	−2	−3

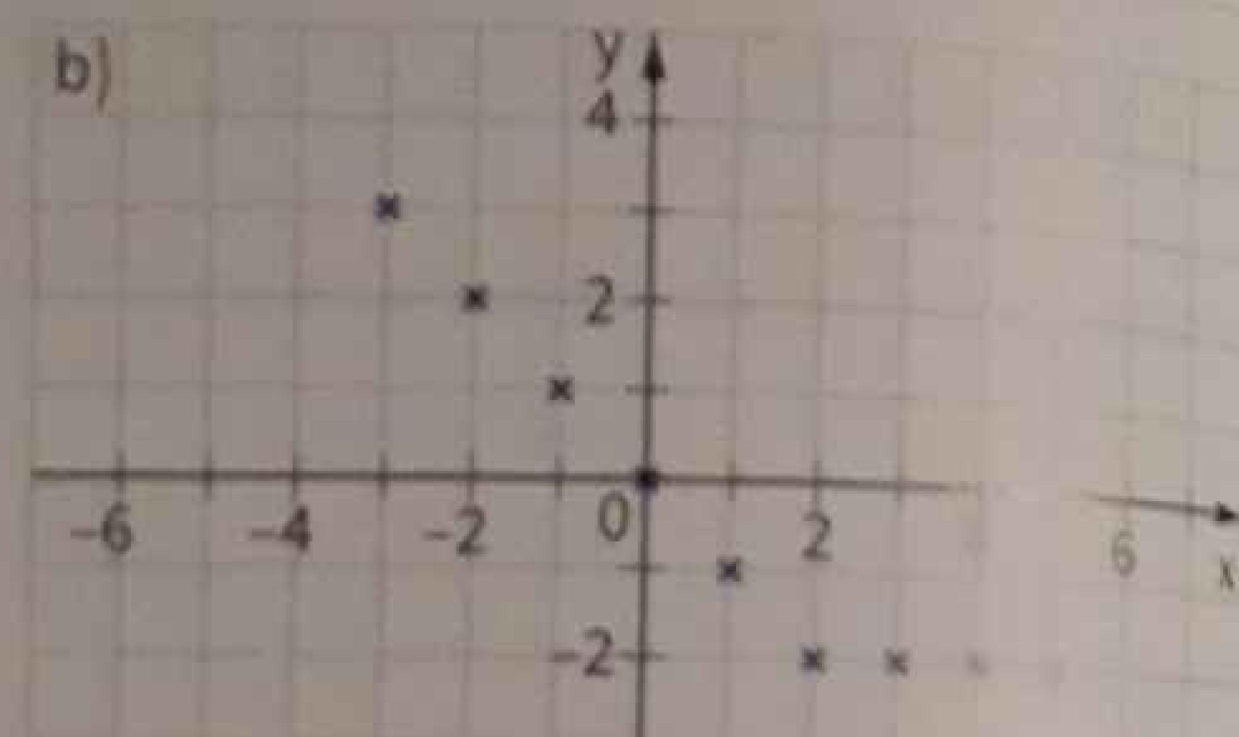
(x-Achse: 1 cm ≙ 2 h; y-Achse: 1 cm ≙ 2°)

2 Bestimme anhand des Funktionsgraphen den Definitions- und den Wertebereich.

a)

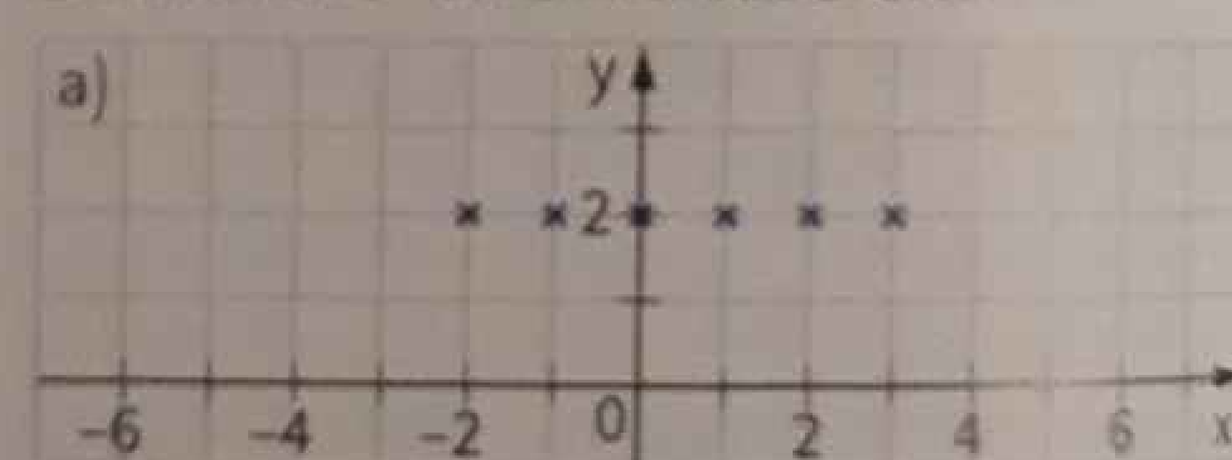


b)

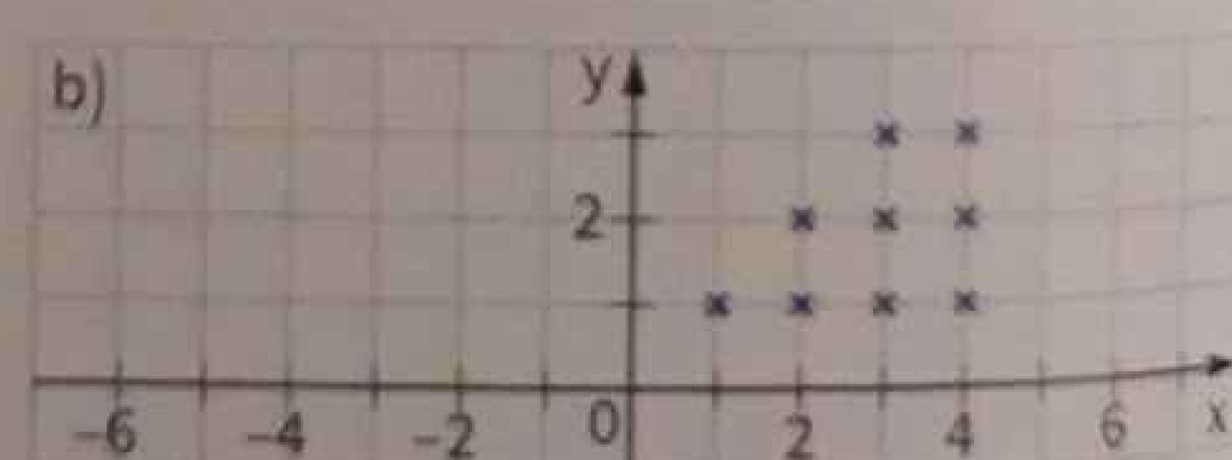


3 Handelt es sich bei dem Graphen um einen Funktionsgraphen? Begründe. Gib im Falle eines Funktionsgraphen Definitions- und Wertebereich an.

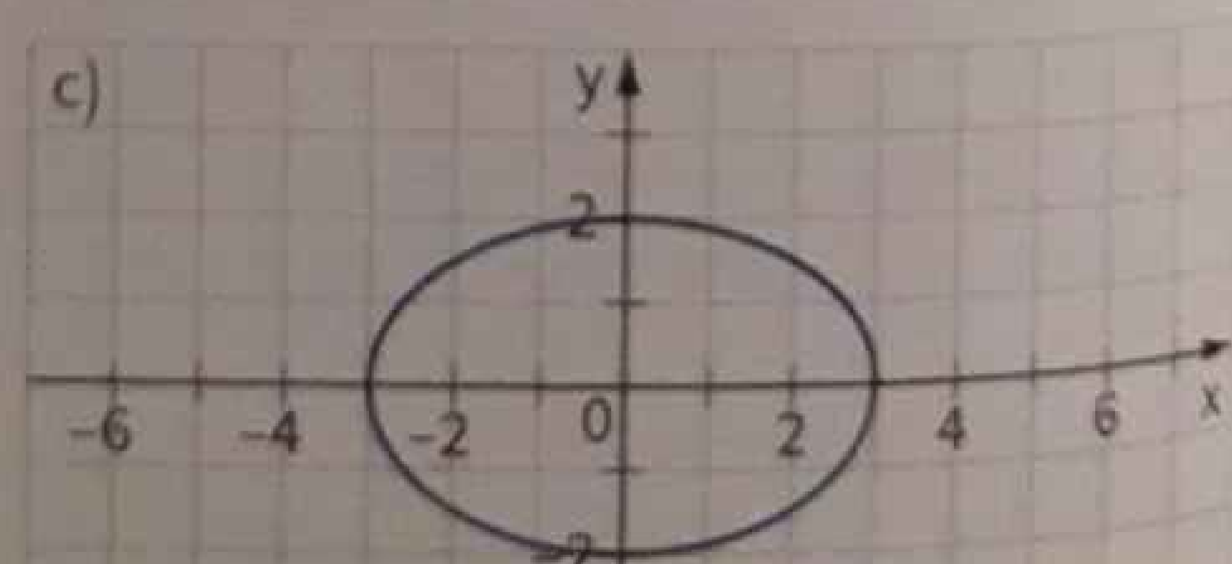
a)



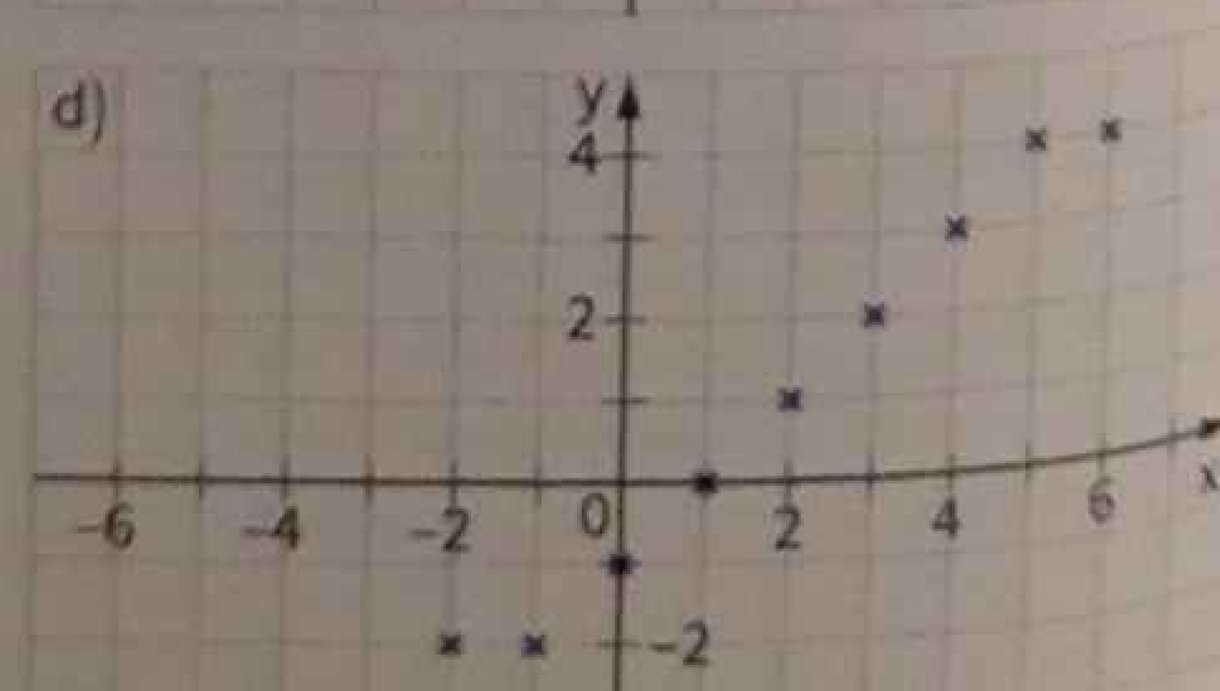
b)



c)



d)



1 Im Beispiel wird die Vorschrift, nach der einem Element x des Definitionsbereichs ein Element y des Wertebereichs zugeordnet wird, mit Worten (einem Term) beschrieben.

x	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
y	3	6	9	12	15	18	21	24	27	30

Jeder Zahl wird das Dreifache zugeordnet: $x \longrightarrow 3x$

Gib zu der angegebenen Wertetabelle die Zordnungsvorschrift in Worten (mit einem Term) an.

x	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11
y	5	10	15	20	25	30	35	40	45	50	55

2 Gib die Zuordnungsvorschrift mithilfe des Funktionsterms an.

Jeder Zahl wird das Sechsfache, vermindert um 5, zugeordnet:

das Sechsfache der Zahl:	$6x$
vermindert um 5:	-5
Funktionsterm:	$6x-5$
Zuordnungsvorschrift: $x \longrightarrow$	$6x-5$

a) Jeder Zahl wird das Siebenfache (Zwölffache) zugeordnet.
b) Jeder Zahl wird das Vierfache, vermindert um 2 (das Siebenfache, vermindert um 9) zugeordnet.

3 Durch die Wertetabelle ist eine Funktion gegeben. Die Zuordnungsvorschrift kann auch mithilfe einer Funktionsgleichung angegeben werden.

x	1	2	3	4	5	6
y	3	5	7	9	11	13

$x \longrightarrow 2x+1$

Funktionsgleichung: $y = 2x + 1$

Gib die Funktionsgleichung an.

x	1	2	3	4	5	6	7
y	4	7	10	13	16	19	22

Zuordnungsvorschriften für Funktionen lassen sich häufig mithilfe von **Funktionsgleichungen** angeben.
Um Funktionen unterscheiden zu können, werden sie mit kleinen Buchstaben bezeichnet.

Funktionsgleichungen:

f: $y = 2{,}5x$
oder $f(x) = 2{,}5x$ (lies: f von x gleich 2,5x)

g: $y = 2x - 4$
oder $g(x) = 2x - 4$

Die Funktion f ordnet der Zahl 4 die Zahl 10 zu. Der **Funktionswert** an der Stelle 4 ist 10.

Funktionswert:
$f(4) = 10$ lies: f von 4 gleich 10

4 Berechne die Funktionswerte.
a) $f(x) = 5x - 7$; $f(2)$, $f(4)$, $f(-5)$, $f(-110)$
b) g: $y = 5{,}9x$; $g(3)$, $g(6)$, $g(-12)$, $g(0{,}5)$
c) $f(x) = -x$; $f(0)$, $f(-4)$, $f(0{,}7)$, $f(-1{,}4)$
d) g: $y = x^2$; $g(-8)$, $g(0{,}4)$, $g(2{,}1)$, $g(1{,}5)$
e) $f(x) = 0{,}5x - 4$; $f(0)$, $f(-2)$, $f(3{,}5)$, $f(-1)$

5 Gib für die folgenden Zuordnungen die Funktionsgleichung an.
Vervollständige anschließend die abgebildete Wertetabelle in deinem Heft.

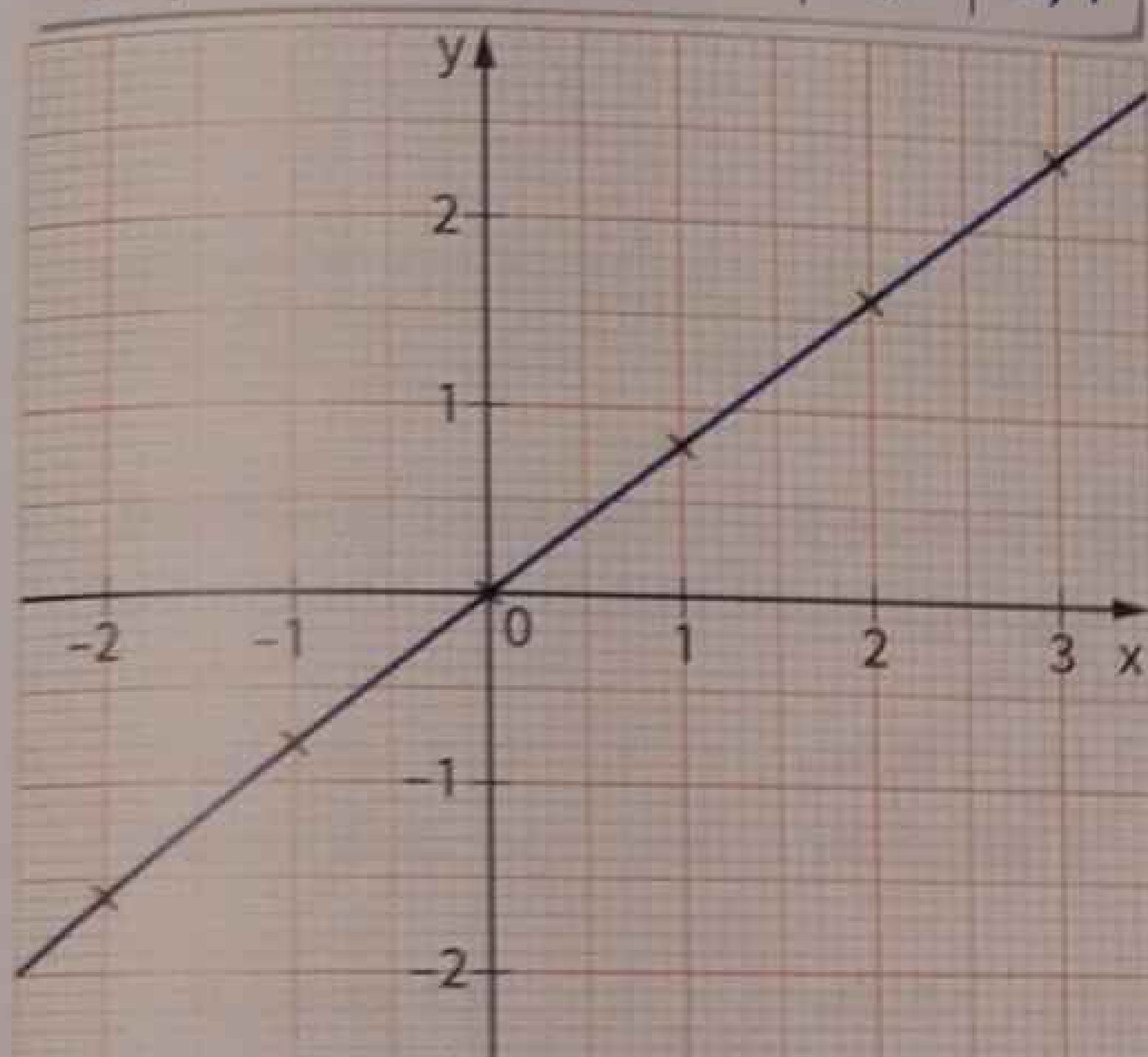
x	−3	−2	−1	0	1	2	3	4	5	6	7
f(x)	■	■	■	■	■	■	■	■	■	■	■

a) Jeder Zahl wird das Achtfache (Dreizehnfache) zugeordnet.
b) Jeder Zahl wird das Sechsfache, vermindert um 3 (das Vierfache, vermindert um 11), zugeordnet.
c) Jeder Zahl wird das Doppelte, vermehrt um 1,8 (Neunfache, vermehrt um 4,2), zugeordnet.
d) Jeder Zahl wird ihr Quadrat, vermehrt um 1, zugeordnet.
e) Jeder Zahl wird ihre Hälfte, vermehrt um 6, zugeordnet.

1 a) Im Koordinatensystem siehst du einen Ausschnitt des Graphen der Funktion f mit dem Definitionsbereich $D = \mathbb{Q}$. Auch dieser Ausschnitt wird als Funktionsgraph bezeichnet.
Warum kannst du den Funktionsgraphen nicht vollständig zeichnen?

f : y = 0,8x

x	−2	−1	0	1	2	3
y	−1,6	−0,8	0	0,8	1,6	2,4



b) Zeichne die Graphen folgender Funktionen in ein Koordinatensystem:
g: $y = 2x$; $D = \mathbb{Q}$ h: $y = 3x$; $D = \mathbb{Q}$.
Gibt es bei g und h gemeinsame Wertepaare?

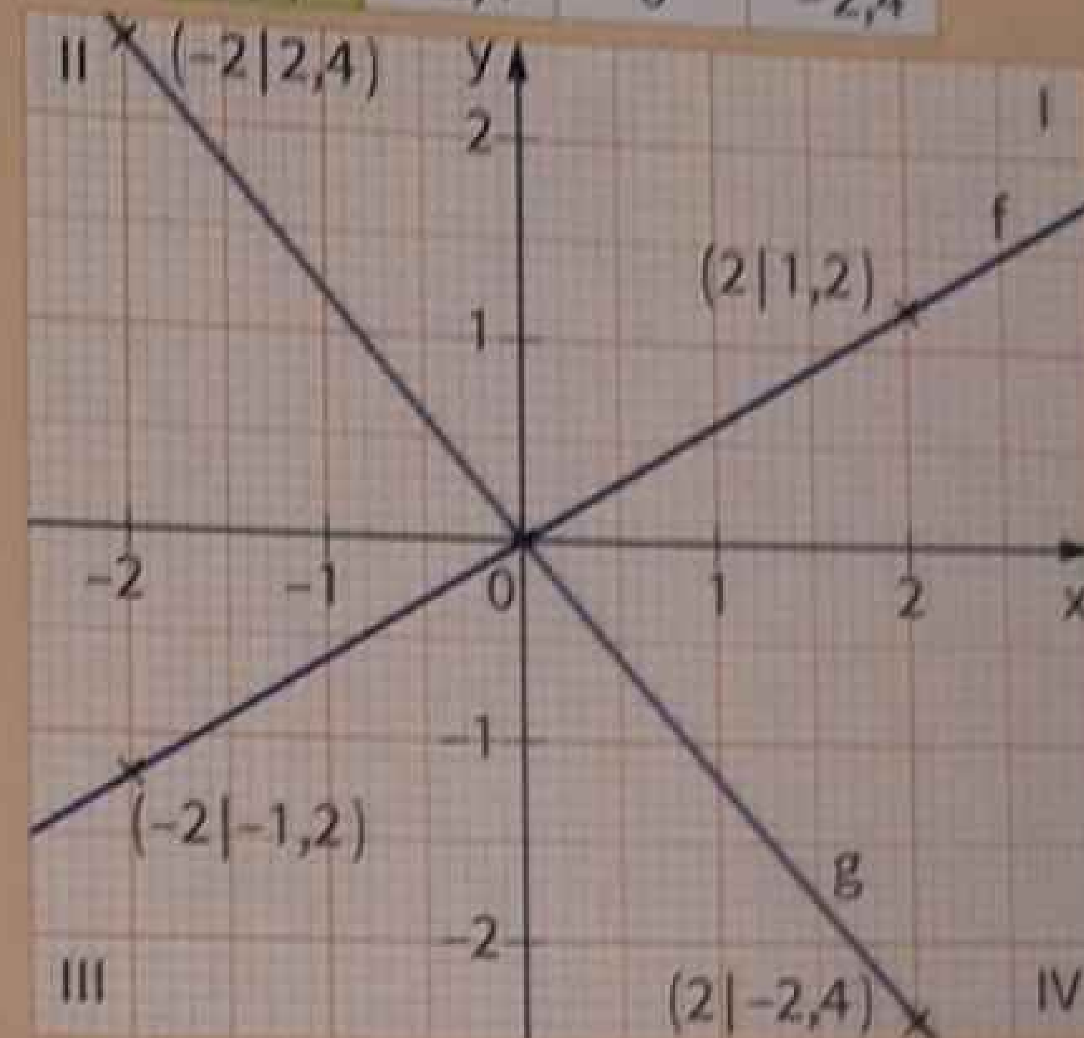
2 Die Funktion f hat die Funktionsgleichung $y = 2{,}5\,x$ ($D = \mathbb{Q}$).
Zeichne den Funktionsgraphen. Überlege zunächst, wie viele Wertepaare du brauchst, um den Graphen von f zeichnen zu können.

3 Die folgenden Funktionen haben eine Funktionsgleichung der Form $y = mx$.
f: $y = 0{,}5x$; g: $y = -0{,}5x$;
h: $y = 1{,}5x$; k: $y = -1{,}5x$;
$D = \mathbb{Q}$
a) Zeichne die Graphen der Funktionen in ein Koordinatensystem.
b) Wie verläuft der Funktionsgraph, wenn der Faktor m vor x größer (kleiner) als Null ist?

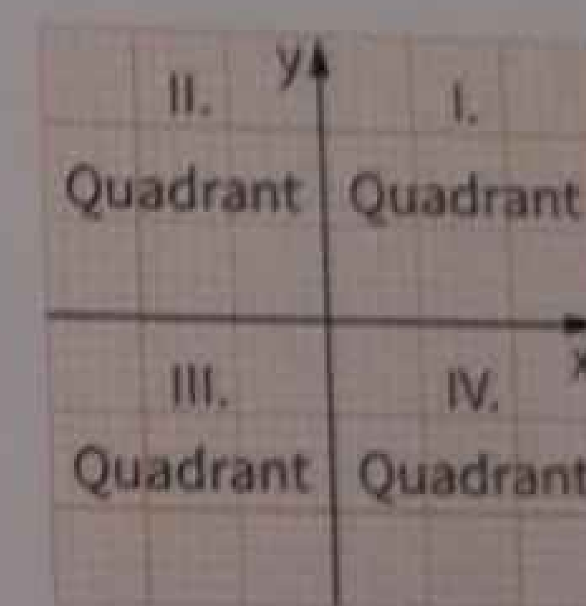
Funktionen mit der Funktionsgleichung y = mx

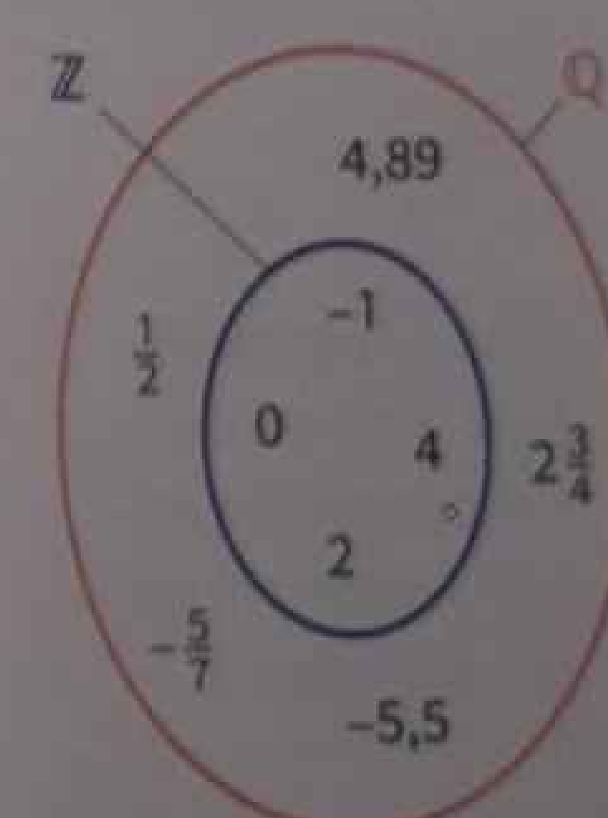
f : $y = 0{,}6x$; $m = 0{,}6$
g : $y = -1{,}2x$; $m = -1{,}2$

x	−2	0	2
f(x)	−1,2	0	1,2
g(x)	2,4	0	−2,4



Für die Funktionen mit der Funktionsgleichung $y = mx$ und dem Definitionsbereich $D = \mathbb{Q}$ gilt:
Die Funktionsgraphen sind **Geraden** durch den **Ursprung.** Für **m > 0** verläuft die Gerade durch den **I. und III. Quadranten,** für **m < 0** durch den **II. und IV. Quadranten.**
Wird der Definitionsbereich einer Funktion nicht angegeben, so vereinbaren wir: **D = Q.**





4 Zeichne die Graphen der zugehörigen Funktionen in dasselbe Koordinatensystem. Zeichne die Graphen so, dass sie jeweils in zwei Quadranten zu sehen sind.
a) f: $y = 4x$ b) g: $y = -2x$
c) h: $y = 1{,}8x$ d) k: $y = -x$

5 a) Betrachte die Wertetabelle der Funktion f mit der Gleichung $y = 3x$.
Vergleiche: f(2) mit f(3), f(3) mit f(4), f(−4) mit f(−3), f(−2) mit f(−1). Was fällt dir auf?

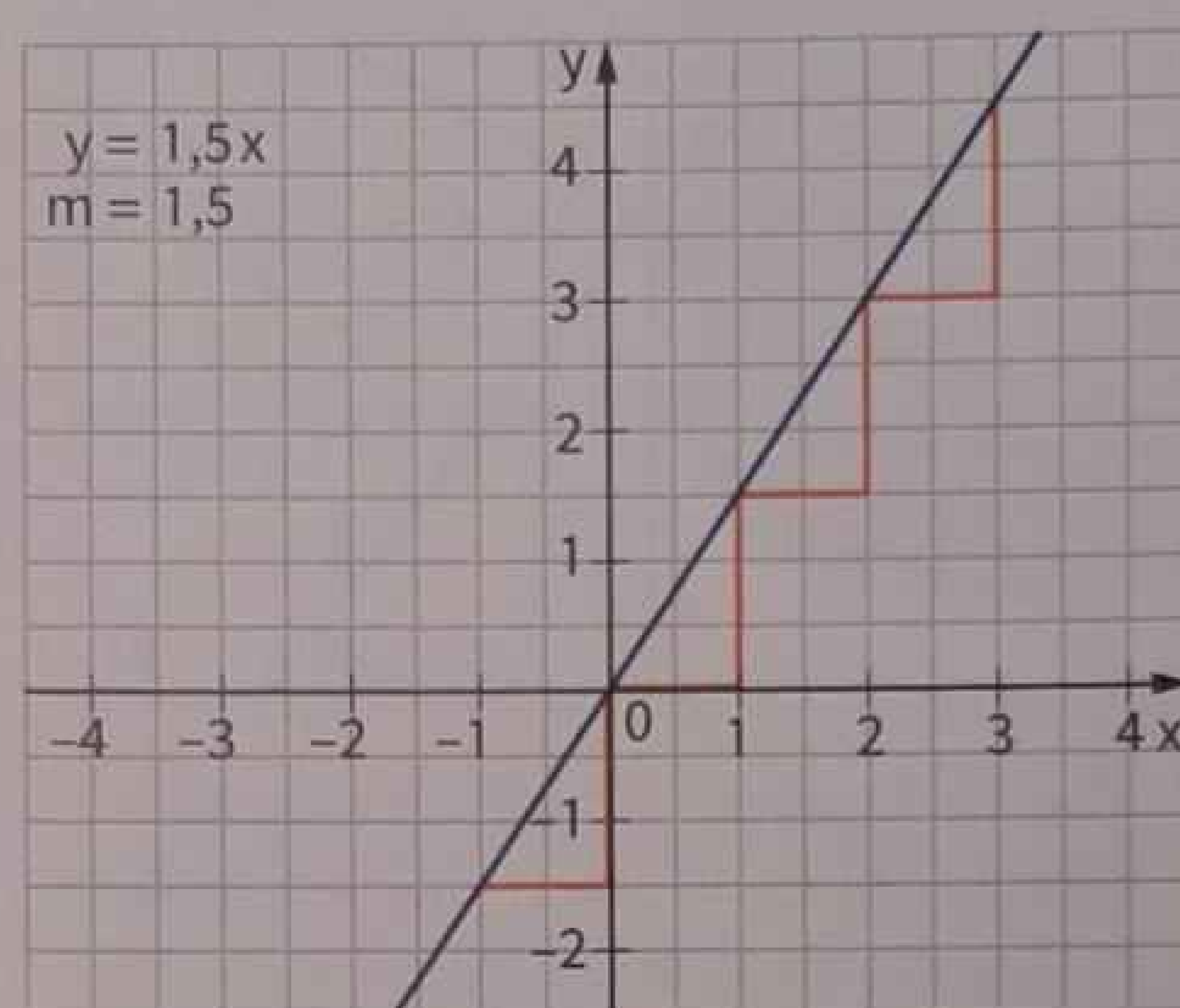
x	−4	−3	−2	−1	0	1	2	3	4
f(x)	−12	−9	−6	−3	0	3	6	9	12

b) Vergleiche f(15,4) mit f(16,4).

1 a) Die Funktion f hat die Funktionsgleichung y = 5x. Vervollständige die Wertetabelle in deinem Heft.

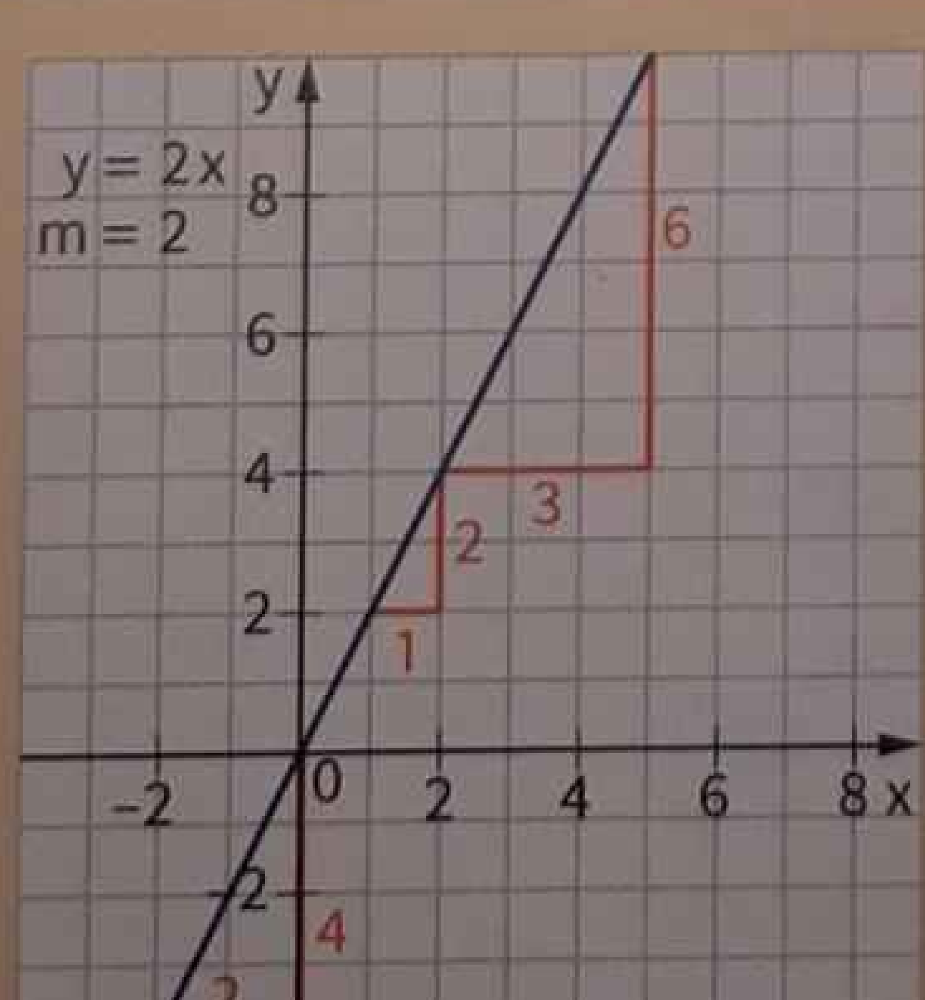
x	−4	−3	−2	−1	0	1	2	3	4	5
y	■	■	■	■	■	■	■	■	■	■

b) Wie verändern sich jeweils die Funktionswerte, wenn der x-Wert um 1 (2, 3, 4) größer wird?



2 a) Die eingezeichneten Dreiecke heißen **Steigungsdreiecke.**
Gib jeweils die Längen der Dreieckseiten in x-Richtung und in y-Richtung an (in Längeneinheiten).
b) Übertrage das Koordinatensystem mit dem Graphen in dein Heft. Zeichne Steigungsdreiecke mit einer Seitenlänge von 2 Längeneinheiten in x-Richtung.
Wie lang ist jeweils die Dreieckseite in y-Richtung?

Eine Längeneinheit im Koordinatensystem ist der Abstand zwischen 0 und 1.



Steigungsdreiecke
Funktionsgleichung: y = 2x

Längeneinh. in x-Richtung	Längeneinh. in y-Richtung
1	$\boxed{2} \cdot 1 = 2$
2	$\boxed{2} \cdot 2 = 4$
3	$\boxed{2} \cdot 3 = 6$

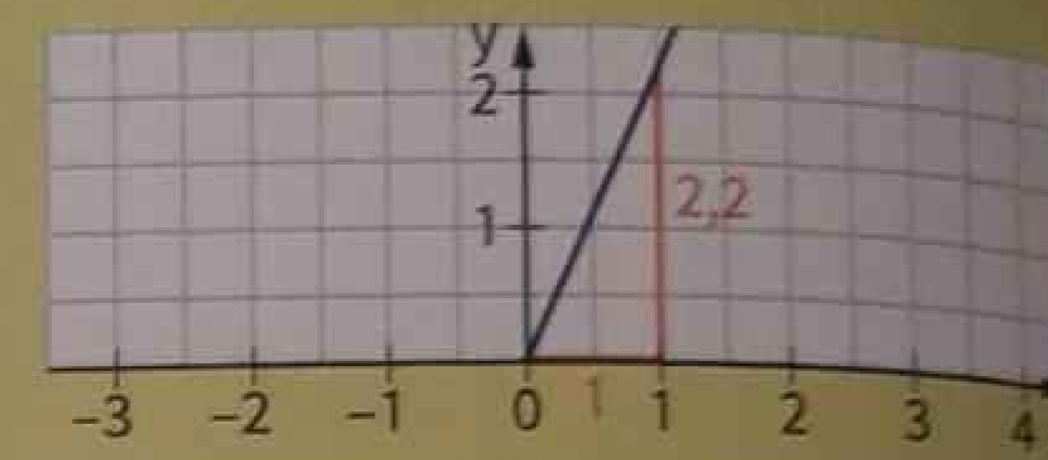
$\boxed{2}$ gibt die **Steigung m** der Geraden an: **m = 2.**

Bei einer Funktion mit dem Funktionsterm mx gibt m die Steigung der Geraden an.

So kannst du bei einer positiven Steigung (m > 0) den Funktionsgraphen mithilfe eines Steigungsdreiecks zeichnen:

y = 2,2x; m = 2,2

Gehe vom Ursprung (0|0) aus 1 Längeneinheit nach rechts, dann 2,2 Längeneinheiten nach oben.



3 Zeichne die Graphen mithilfe von Steigungsdreiecken in ein Koordinatensystem.

a) f(x) = 3,5x
g(x) = 1,8x

b) f: y = 1x
g: y = 4,5x

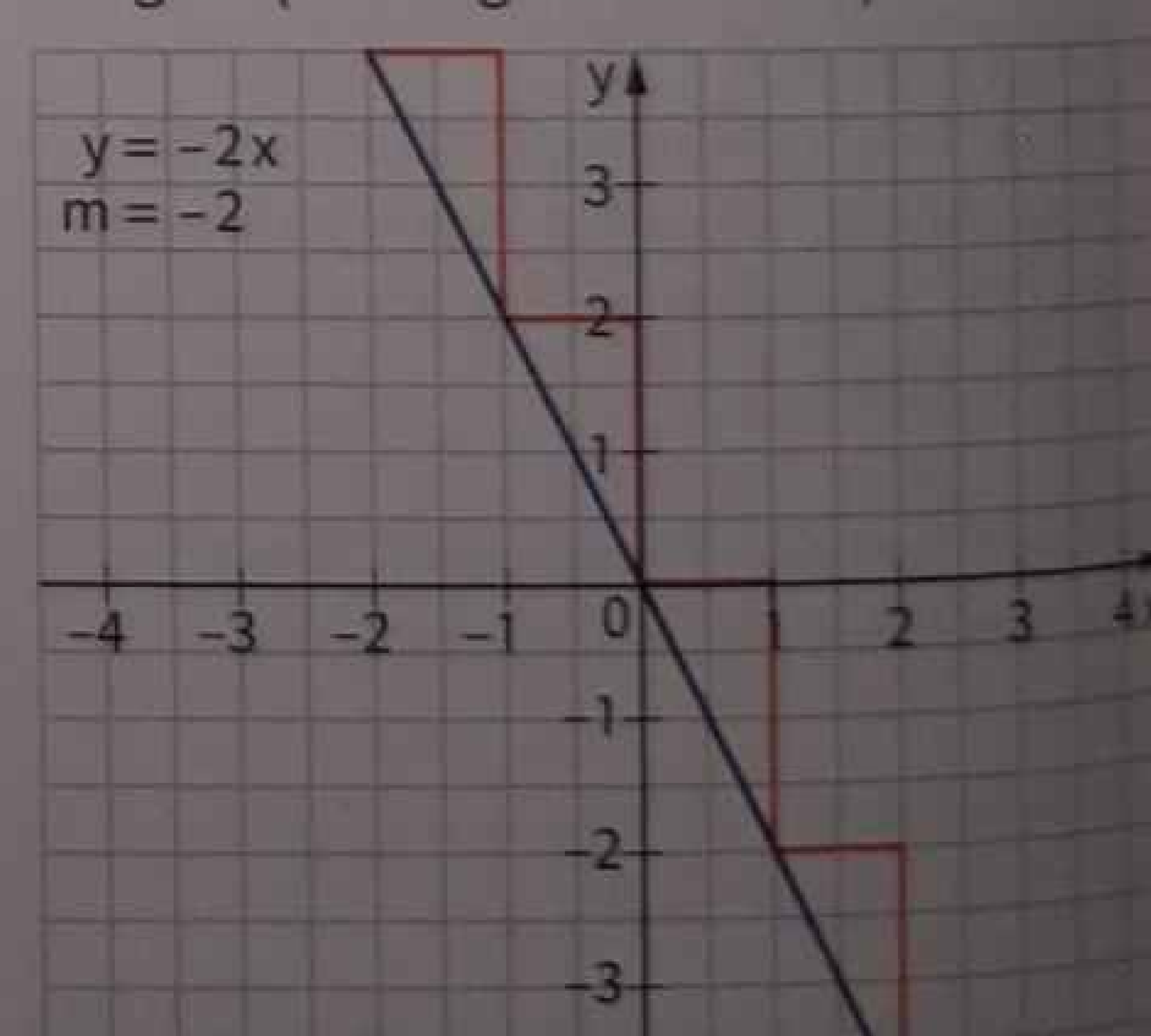
c) f(x) = 1,7x
g(x) = 3,3x

d) f: y = 2,8x
g: y = 4,6x

e) f(x) = 1,3x
g(x) = 4,7x

f) f: y = 0,8x
g: y = 1,3x

4 a) Gib jeweils die Längen der Dreieckseiten in x-Richtung und in y-Richtung an (in Längeneinheiten).

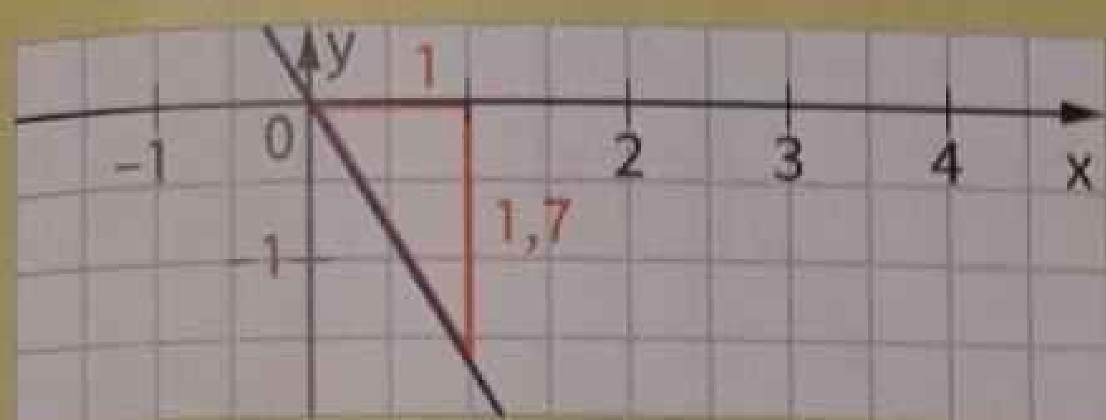


b) Übertrage das Koordinatensystem mit dem Graphen in dein Heft. Zeichne Steigungsdreiecke mit einer Seitenlänge von 2 Längeneinheiten in x-Richtung.
Wie lang ist jeweils die Dreieckseite in y-Richtung?

So kannst du bei einer negativen Steigung ($m < 0$) den Funktionsgraphen mithilfe eines Steigungsdreiecks zeichnen:

$$y = -1{,}7x; \quad m = -1{,}7$$

Gehe vom Ursprung (0|0) aus 1 Längeneinheit nach rechts, dann 1,7 Längeneinheiten nach unten.



5 Zeichne die Funktionsgraphen mithilfe von Steigungsdreiecken in ein Koordinatensystem.

a) $f(x) = -3x$
$g(x) = -1{,}5x$

b) f: $y = -4x$
g: $y = -3{,}5x$

c) $f(x) = -2{,}5x$
$g(x) = -4{,}0x$

d) f: $y = -5x$
g: $y = -6{,}5x$

e) $f(x) = 2{,}7x$
$g(x) = -4{,}1x$
$h(x) = -2{,}3x$

f) f: $y = -3{,}1x$
g: $y = 2{,}8x$
h: $y = 1{,}6x$

6 Oft ist es sinnvoll, größere Steigungsdreiecke zu zeichnen.

$f(x) = 0{,}4x$; $m = 0{,}4$
Steigungsdreiecke der Funktion f:

1 Längeneinheit nach rechts
0,4 Längeneinheiten nach oben

2 Längeneinheiten nach rechts
$2 \cdot 0{,}4 = 0{,}8$ Längeneinheiten nach oben

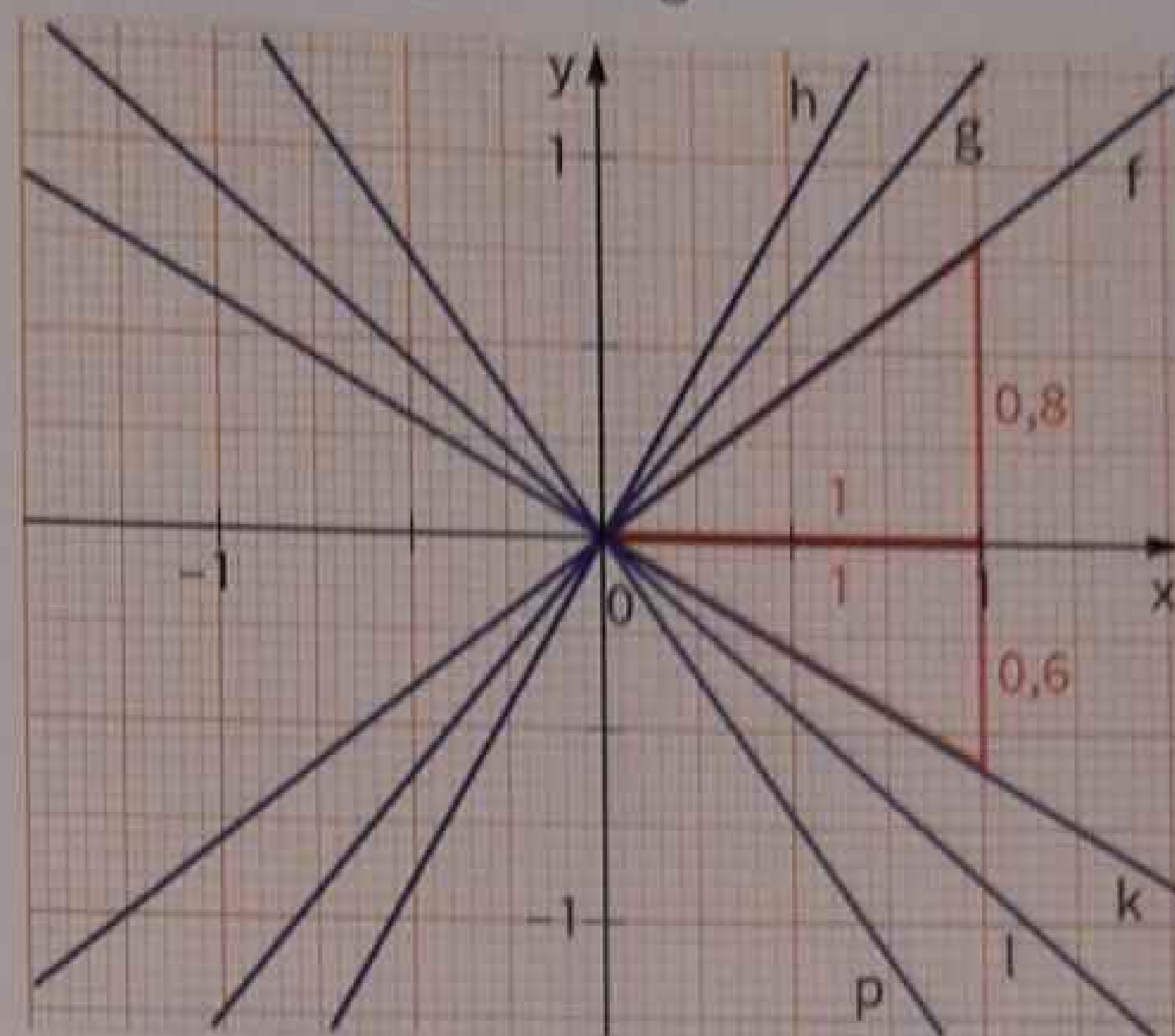
5 Längeneinheiten nach rechts
$5 \cdot 0{,}4 = 2$ Längeneinheiten nach oben

Berechne jeweils die Seitenlängen eines geeigneten Steigungsdreiecks und zeichne mit seiner Hilfe den Funktionsgraphen.

a) $f(x) = 0{,}5x$
$g(x) = -0{,}4x$

b) f: $y = 0{,}25x$
g: $y = -0{,}2x$

7 Lies aus dem Koordinatensystem die Steigungen der Geraden ab. Gib jeweils die Funktionsgleichung an.



Steigungsdreieck der Funktion f:

1 Längeneinheit nach rechts

0,8 Längeneinheiten nach oben ($m > 0$)

$m = 0{,}8$

Funktionsgleichung von f: $y = 0{,}8x$

Steigungsdreieck der Funktion k:

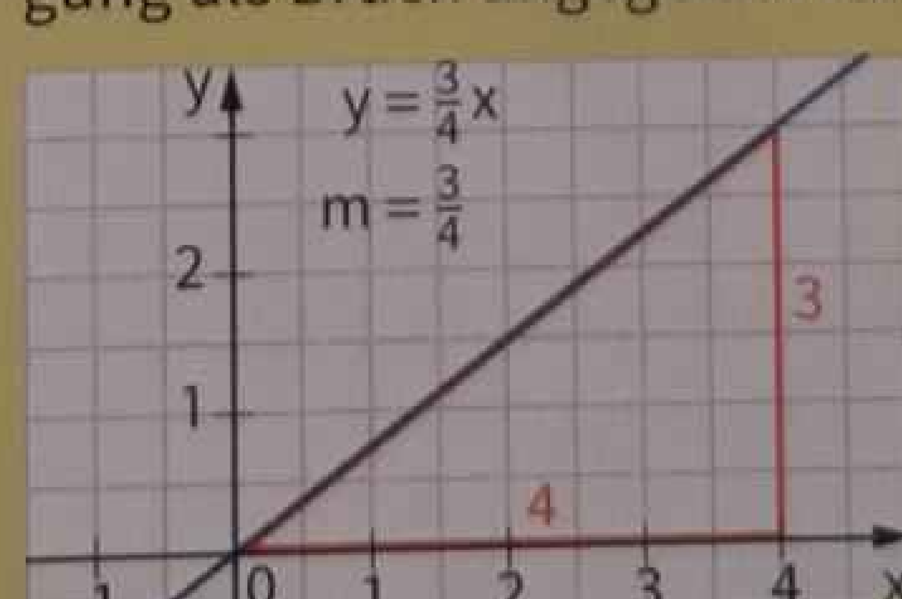
1 Längeneinheit nach rechts

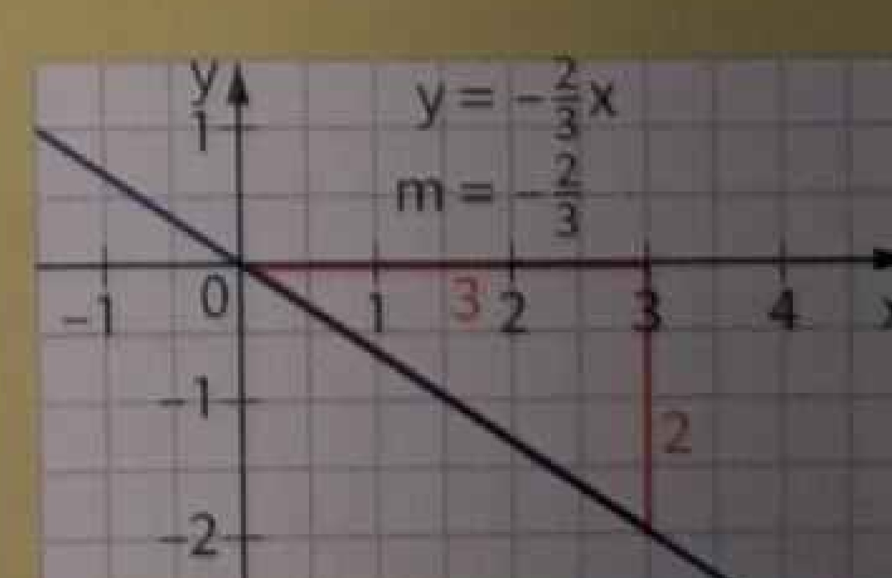
0,6 Längeneinheiten nach unten ($m < 0$)

$m = -0{,}6$

Funktionsgleichung von k: $y = -0{,}6x$

So kannst du ein Steigungsdreieck zeichnen, wenn die Steigung als Bruch angegeben ist:





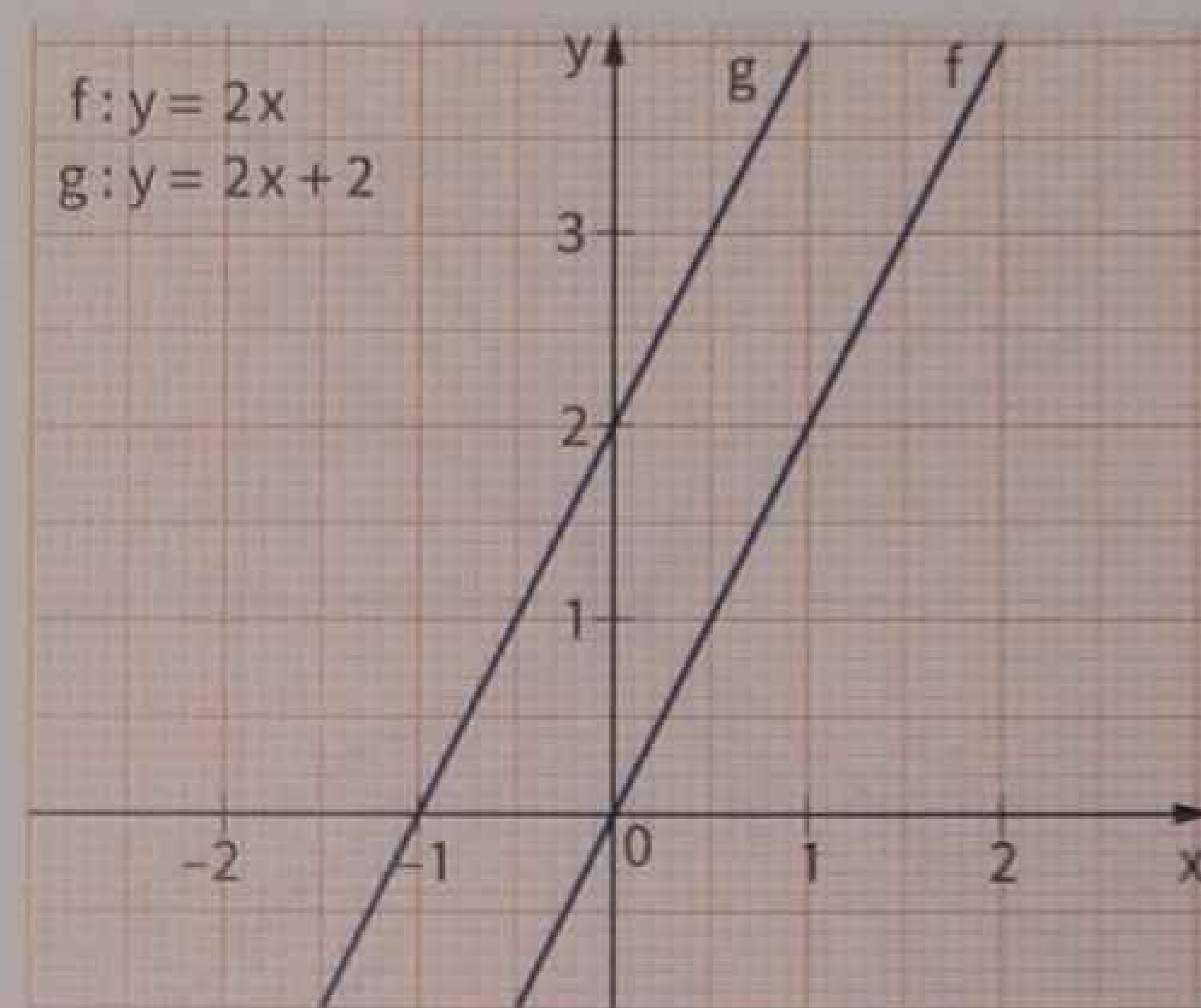
Der Nenner gibt an, wie viele Längeneinheiten du nach rechts gehen musst. Der Zähler gibt an, wie viele Längeneinheiten du bei einer positiven Steigung ($m > 0$) nach oben, bei einer negativen Steigung ($m < 0$) nach unten gehen musst.

8 Zeichne die Funktionsgraphen.

a) $y = \frac{3}{5}x$ b) $y = \frac{4}{7}x$ c) $y = -\frac{3}{2}x$

Lineare Funktionen der Form $y = mx + n$

1 Im Koordinatensystem siehst du die Graphen der Funktionen f und g.



a) Beschreibe die Lage der beiden Graphen zueinander.
b) Übertrage die Graphen in dein Heft und bestimme jeweils die Steigung.

2 Die Funktionen h und k haben die Funktionsgleichungen $h(x) = 2{,}5\,x$ und $k(x) = 2{,}5x - 2$.
a) Übertrage die Wertetabelle in dein Heft und vervollständige sie. Berechne dazu zunächst die Funktionswerte von h. Vergleiche die Funktionswerte von h und k miteinander.

x	−4	−3	−2	−1	0	1	2	3	4	5
h(x)	■	■	■	■	■	■	■	■	■	■
k(x)	■	■	■	■	■	■	■	■	■	■

b) Zeichne die beiden Funktionsgraphen in ein Koordinatensystem. Was stellst du fest?

3 a) Zeichne die Graphen folgender Funktionen in ein Koordinatensystem:
f: $y = 2x - 4$; g: $y = 1{,}5x - 3$;
h: $y = 2x + 2$; k: $y = 3x - 3$.
b) Wo schneiden die Funktionsgraphen jeweils die y-Achse?

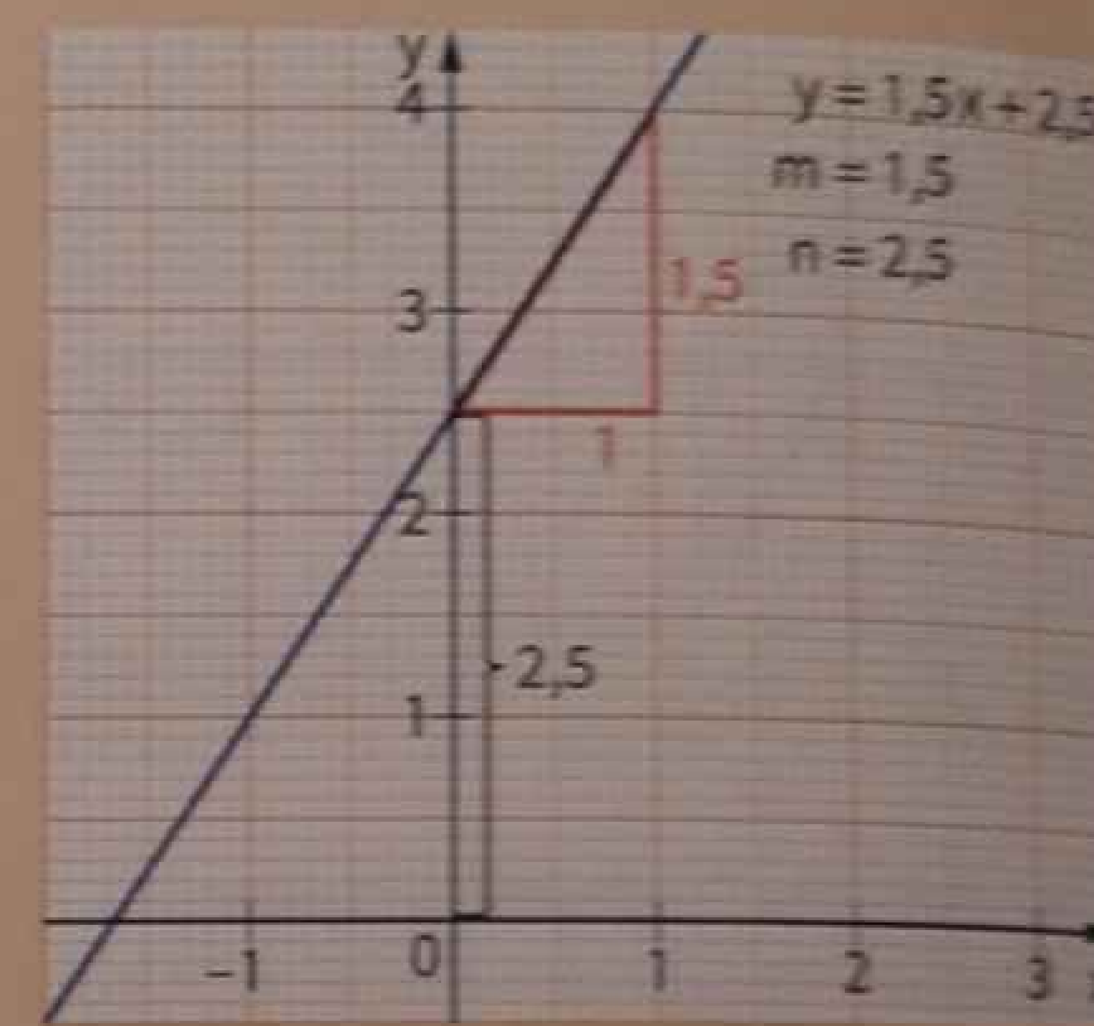
4 Gib die Koordinaten des Schnittpunkts der Geraden mit der y-Achse an.

a) $y = 2x + 3$ b) $y = x + 2$
c) $y = 1{,}5x - 3$ d) $y = -2x + 3$
e) $y = -x - 2$ f) $y = 2x + 0{,}5$
g) $y = -2x - 3$ h) $y = -1{,}5x - 3$
i) $y = -x + 2$ k) $y = -2x + 3$

Du erhältst die y-Koordinate des Schnittpunktes mit der y-Achse, wenn du für x den Wert 0 einsetzt.

Funktionsgleichung von f:
$y = 1{,}5x + 2{,}5$

x	−1	0	1
y	1	2,5	4



1,5 gibt die Steigung der Geraden an.
$m = 1{,}5$

2,5 ist die Koordinate des Schnittpunktes mit der y-Achse und heißt **y-Achsenabschnitt.**
$n = 2{,}5$

Funktionen mit der Funktionsgleichung $y = mx + n$ heißen **lineare Funktionen.** Ihre Funktionsgraphen sind Geraden.
Dabei gibt m die Steigung und n den y-Achsenabschnitt an; m und n können beliebige rationale Zahlen sein ($m, n \in \mathbb{Q}$).

Für $n = 0$ ergibt sich die Form $y = mx$.

5 Prüfe, ob es sich jeweils um die Funktionsgleichung einer linearen Funktion handelt. Gib die Steigung m und den y-Achsenabschnitt n an.

a) f: $y = 3x + 4$
g: $y = 5x + 3$
h: $y = 4x - 7$

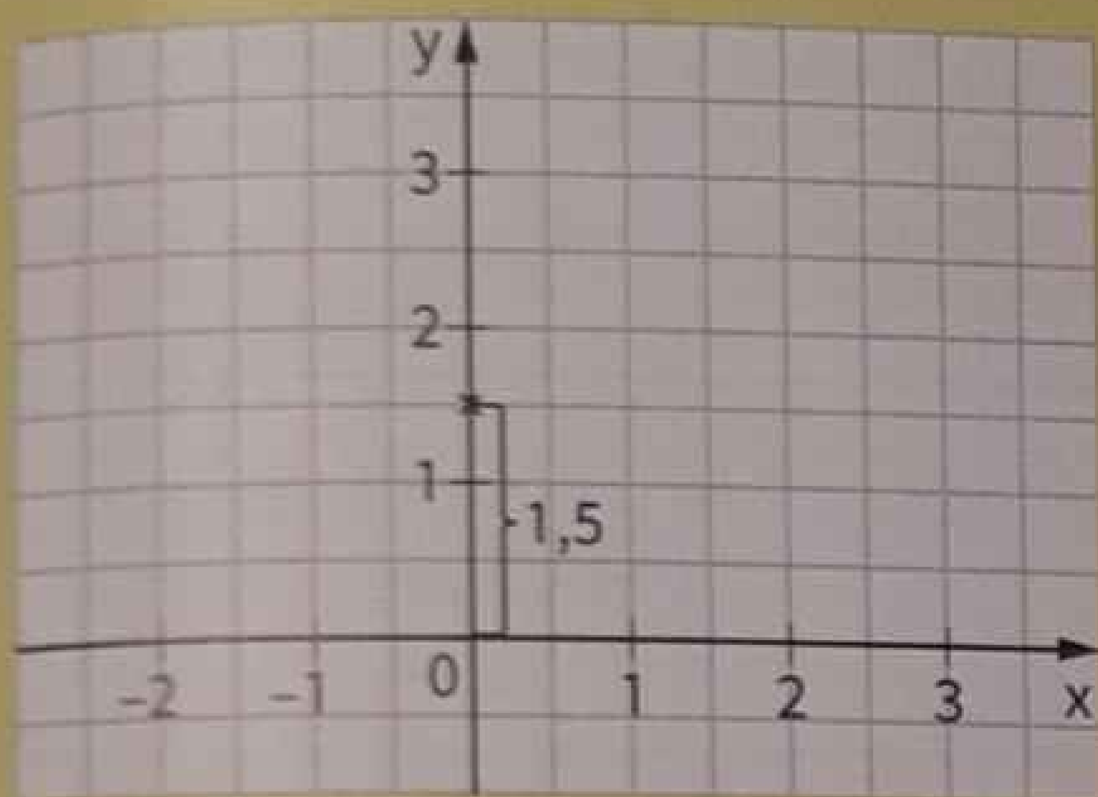
b) f: $y = -2x + 3$
g: $y = -3x - 4$
h: $y = 1{,}5x - 8$

c) f: $y = -4{,}2x$
g: $y = 0{,}2x + 1{,}8$
h: $y = x$

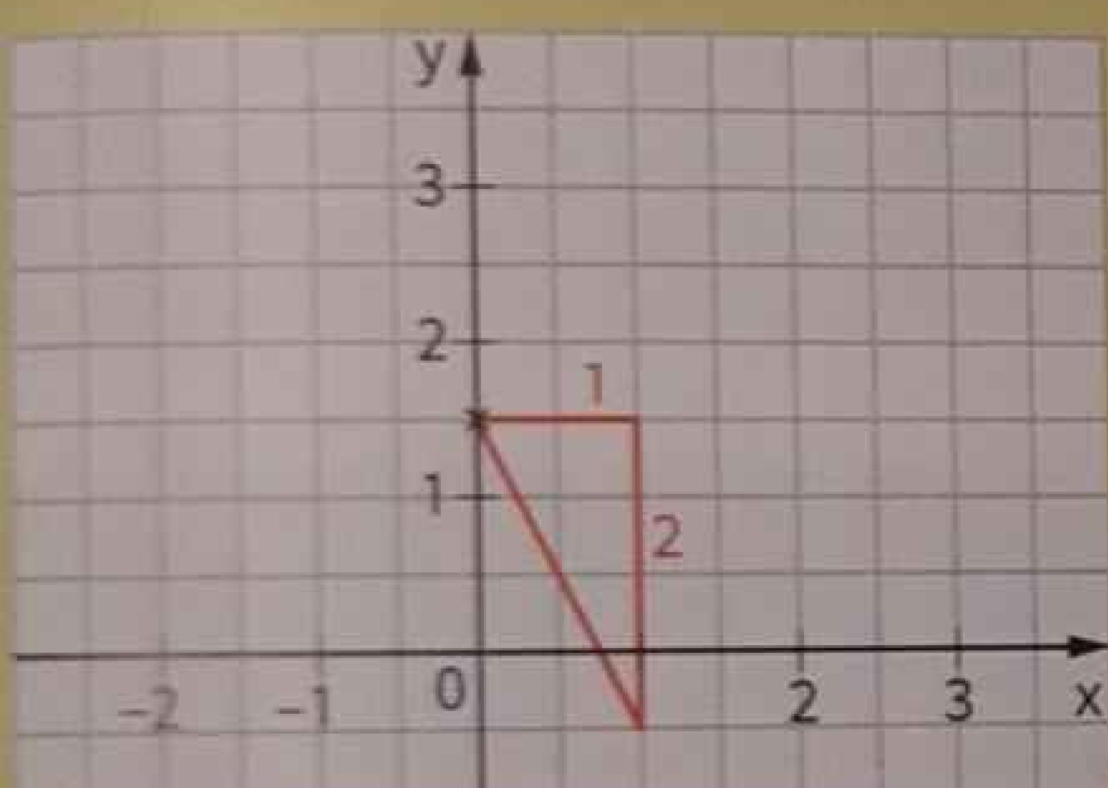
d) f: $y = 3$
g: $y = -\frac{1}{2}$
h: $y = 3x + 4$

Lineare Funktionen der Form $y = mx + n$

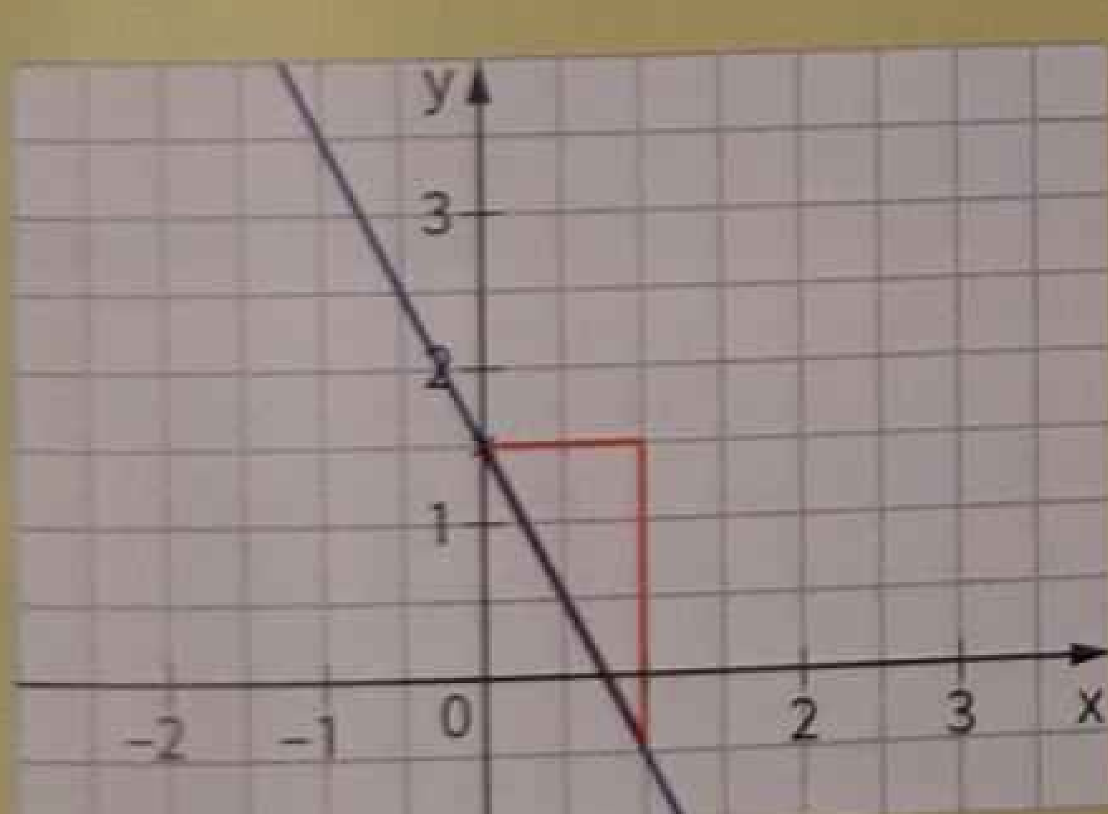
So kannst du den Graphen der linearen Funktion f mithilfe des y-Achsenabschnitts n und der Steigung m zeichnen: $f(x) = -2x + 1{,}5$



1. Markiere den y-Achsenabschnitt $n = 1{,}5$.



2. Zeichne das Steigungsdreieck zu $m = -2$.



3. Zeichne den Funktionsgraphen.

6 Zeichne die Funktionsgraphen wie im Beispiel in ein Koordinatensystem.

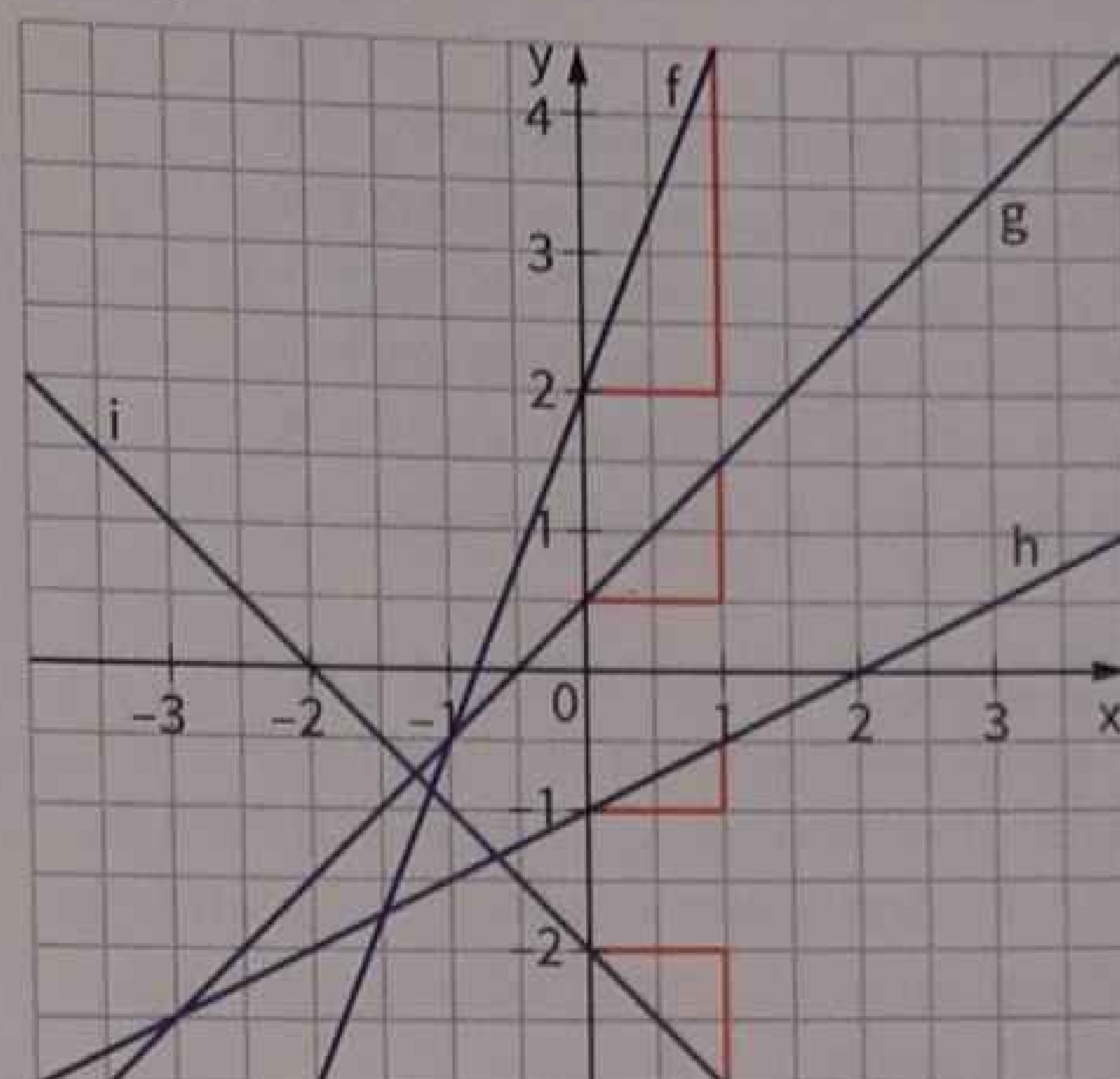
a) f: $y = -2x + 5$
g: $y = -2x + 3$
h: $y = -2x + 1$

b) f: $y = 1{,}5x - 4$
g: $y = 1{,}5x - 1$
h: $y = 1{,}5x + 1$

c) f: $y = 3x - 4$
g: $y = 3x + 1$
h: $y = -1x + 6$

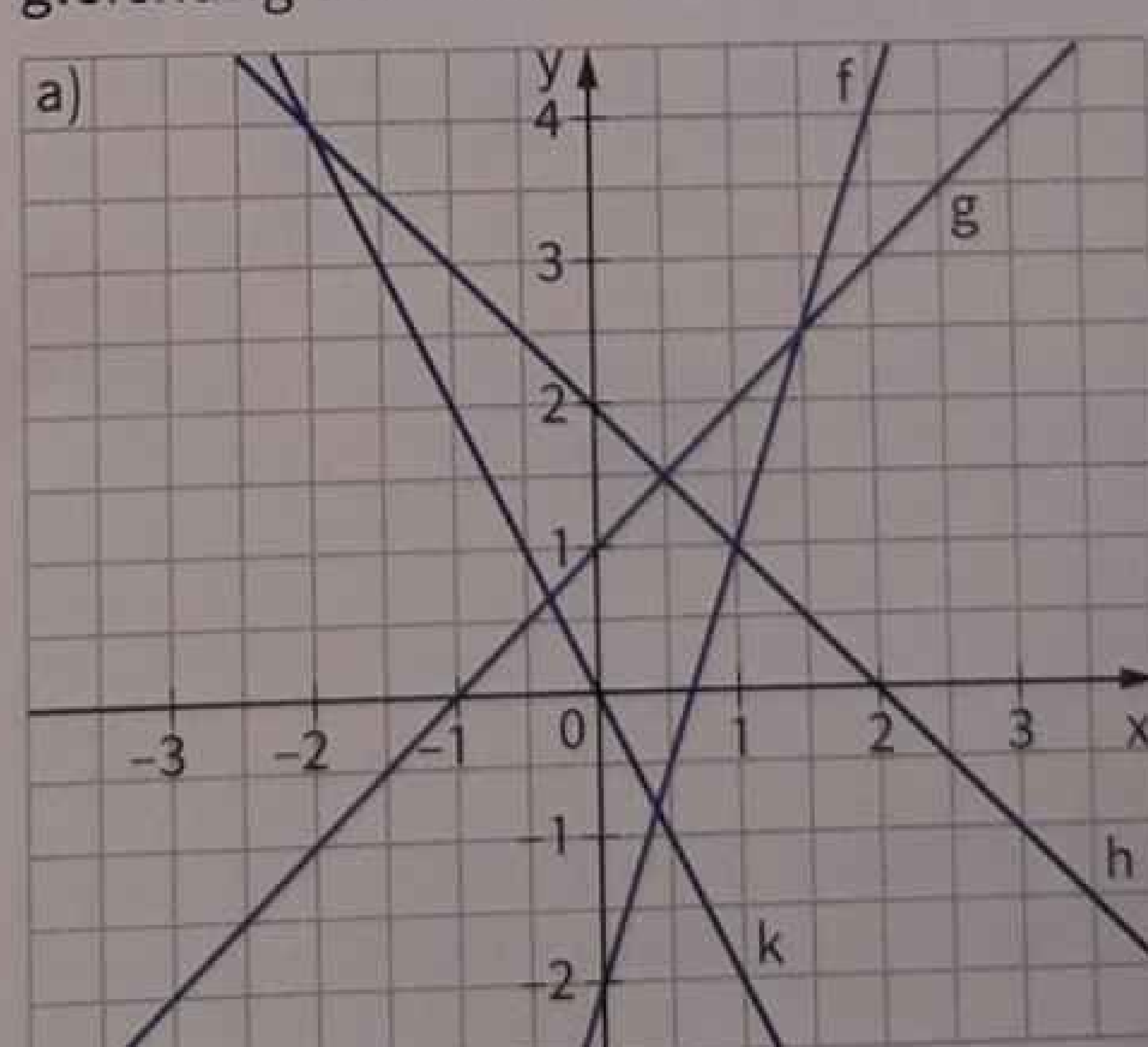
d) f: $y = -1x - 2{,}5$
g: $y = 1x + 4{,}5$
h: $y = 2x - 1$

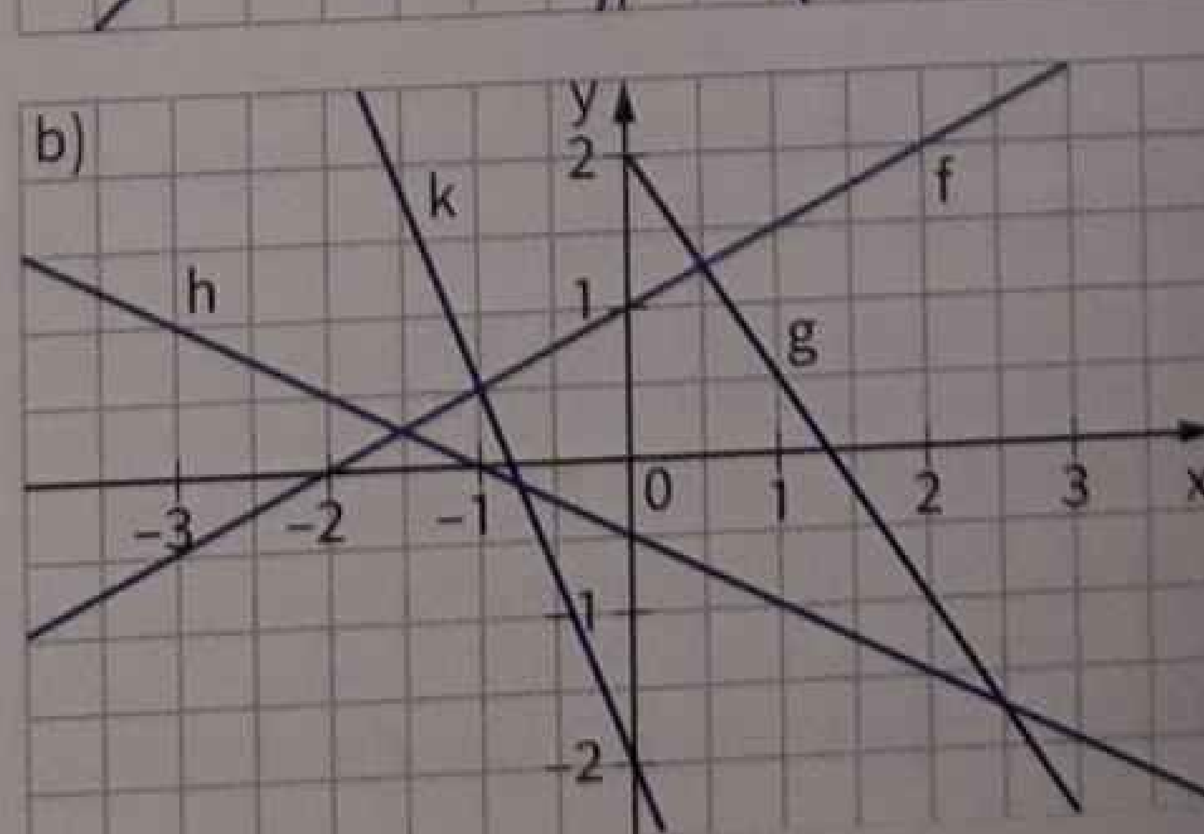
7 Lies aus dem Koordinatensystem jeweils den y-Achsenabschnitt n und die Steigung m ab. Gib die Funktionsgleichung an.



Funktion f
y-Achsenabschnitt: $n = 2$
Steigung: $m = 2{,}5$
Funktionsgleichung von f: $y = 2{,}5x + 2$

8 Lies aus dem Koordinatensystem jeweils den y-Achsenabschnitt n und die Steigung m ab. Gib dann die Funktionsgleichung der Funktion an.





9 Zeichne den Funktionsgraphen in ein Koordinatensystem. Bestimme anhand des Funktionsgraphen zu dem angegebenen Funktionswert den zugehörigen x-Wert.

a) $y = 3x - 1$; Funktionswert: 5
b) $y = 2x - 4$; Funktionswert: 4
c) $y = x + 2{,}5$; Funktionswert: $-1{,}5$
d) $y = -2x - 1$; Funktionswert: 2,5
e) $y = 4x - 7$; Funktionswert: 3
f) $y = -5x + 8$; Funktionswert: -2

10 Trage die Punkte P und Q in ein Koordinatensystem ein und zeichne anschließend die Gerade durch P und Q. Lies den y-Achsenabschnitt n und die Steigung m ab und gib die zugehörige Funktionsgleichung an.

a) $P(6\,|\,-1)$; $Q(-4\,|\,4)$
b) $P(2\,|\,7)$; $Q(-5\,|\,0)$
c) $P(2\,|\,-5)$; $Q(-3\,|\,5)$
d) $P(-5\,|\,-6{,}5)$; $Q(6\,|\,-1)$
e) $P(3\,|\,-2{,}5)$; $Q(-1\,|\,5{,}5)$
f) $P(4\,|\,3)$; $Q(-4\,|\,1)$

11 In dem Beispiel wird überprüft, ob die Punkte $P(6\,|\,-9)$ und $Q(-4\,|\,25)$ auf dem Funktionsgraphen von f liegen.

Funktionsgleichung:	$f(x) = -3{,}5x + 11$	$f(x) = -3{,}5x + 11$
Punkt:		$P(6\,|\,-9)$ $Q(-4\,|\,25)$
Berechnen des Funktionswertes:	$f(6) = -3{,}5 \cdot 6 + 11$ $f(6) = -10$	$f(-4) = -3{,}5 \cdot (-4) + 11$ $f(-4) = 25$
Vergleichen mit der y-Koordinate:	$-9 = -10$ f	$25 = 25$ w
Ergebnis:	P liegt nicht auf dem Graphen.	Q liegt auf dem Graphen.

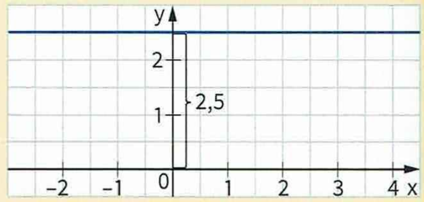
Überprüfe, ob die Punkte auf dem Funktionsgraphen von f liegen.

a) $f(x) = -6{,}5x + 24$; $P(2\,|\,11)$; $Q(-4\,|\,6)$
b) $f(x) = 4{,}5x - 19$; $P(-4\,|\,-1)$; $Q(12\,|\,35)$
c) $f(x) = \frac{2}{3}x - 6$; $P(18\,|\,6)$; $Q(-21\,|\,20)$
d) $f(x) = -\frac{4}{5}x + 1{,}4$; $P(3\,|\,2)$; $Q(-9\,|\,8{,}8)$

Konstante Funktionen sind besondere lineare Funktionen.

g: $y = 2{,}5$
$y = 0 \cdot x + 2{,}5$; $m = 0$

x	−2	−1	0	1	2
y	2,5	2,5	2,5	2,5	2,5

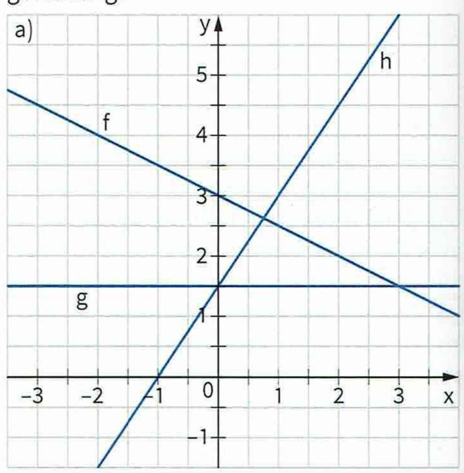


Eine konstante Funktion ist eine lineare Funktion mit der Steigung m = 0.
Ihr Funktionsgraph ist eine Parallele zur x-Achse.

12 Zeichne den Graphen der folgenden Funktion.

a) $f(x) = 4{,}6$
b) g: $y = 2{,}8$
c) $h(x) = -3{,}4$
d) f: $y = -0{,}8$
e) $g(x) = 0$
f) f: $y = \frac{3}{4}$

13 Überprüfe, ob der Punkt P auf dem Graphen der im Koordinatensystem dargestellten Funktion liegt.
Bestimme dazu zunächst die Funktionsgleichung.



a) f; $P(-5\,|\,10)$
b) g; $P(56\,|\,1{,}5)$
c) h; $P(3\,|\,7{,}5)$

Modellieren Lineare Funktionen

Sachaufgabe zu linearen Funktionen

Ein Gefäß soll mit Wasser gefüllt werden. Der Wasserstand zu Beginn des Füllvorgangs beträgt 12 cm. Durch das zufließende Wasser erhöht sich der Wasserstand pro Minute um 5 cm.

So kannst du beim Modellieren mit linearen Funktionen vorgehen:

1. Überlege zunächst, welche Größen einander zugeordnet werden.

Der Zeitdauer x (min) wird der Wasserstand y (cm) zugeordnet.
Zeitdauer (min) ⟶ Wasserstand (cm)

2. Bestimme den y-Achsenabschnitt. Welchen Wert nimmt y an, wenn $x = 0$?

Zum Zeitpunkt $x = 0$ beträgt der Wasserstand 12 cm. $n = 12$

3. Bestimme die Steigung. Wie verändert sich y, wenn x um 1 größer wird?

Pro Minute steigt der Wasserstand um 5 cm. $m = 5$

4. Gib die Gleichung der linearen Funktion an.

$y = 5x + 12$

1 Die Grundgebühr für eine Taxifahrt in Berlin beträgt 2,50 €, der Preis für einen zurückgelegten Kilometer 1,60 € (ohne Haltezeiten).
a) Begründe, dass man die Gesamtkosten für eine Taxifahrt y (€) mithilfe der folgenden Funktionsgleichung berechnen kann: $y = 1{,}6x + 2{,}50$.
Was gibt dabei x an? Was ist die Bedeutung von 1,6 und 2,50?
b) Wie viel Euro kostet eine 8 km (6,5 km) lange Fahrt?
c) Zeichne den Graphen der Funktion in ein Koordinatensystem.
d) Wie weit kann ein Fahrgast für 18,50 € fahren? Ermittle anhand des Graphen.

2 Für den Urlaub wollen Marcos Eltern ein Wohnmobil leihen.


Camp 480

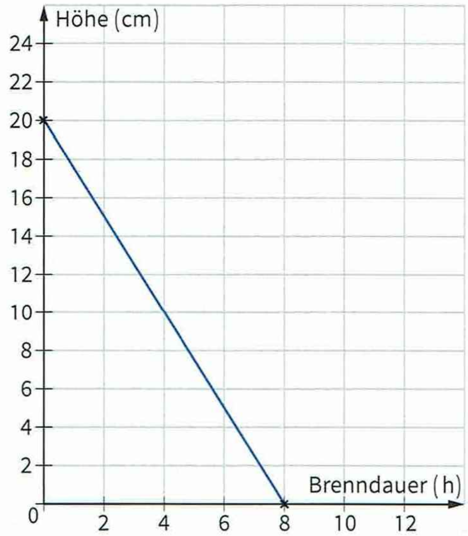

Van 500

Typ	Servicepauschale (€)	Tagespreis (€)
Camp 480	100	85
Van 500	120	95

a) Berechne die Kosten für eine Mietdauer von 7 (10) Tagen für jedes Fahrzeug.
b) Bestimme für jeden Typ die Gleichung der Funktion, die der Anzahl der Miettage (x) die Kosten (y) zuordnet. Zeichne die zwei zugehörigen Funktionsgraphen in ein Koordinatensystem.
c) Ermittle anhand der Graphen, wie viele Tage die Familie die Wohnmobile jeweils mieten kann, wenn sie dafür höchstens 1400 € ausgeben will.

Die Aufgaben auf dieser und der nächsten Seite kannst du auch in Partner- oder Gruppenarbeit bearbeiten.

3 Im Koordinatensystem wird der Graph der Funktion „Brenndauer → Höhe der Kerze“ dargestellt.



a) Bestimme anhand des Graphen die Höhe der Kerze zu Beginn des Brennvorgangs.
b) Wie viel Zentimeter brennt die Kerze pro Stunde ab?
c) Begründe, warum die zugehörige Funktionsgleichung wie folgt lautet:

$$y = -2{,}5x + 20.$$

4 Ein Getreidesilo ist mit 800 m^3 Getreide gefüllt. Pro Tag werden 50 m^3 Getreide zur Mühle transportiert.
a) Die Zuordnung „Zeit (d) → Getreidemenge (m^3)“ ist eine lineare Funktion. Gib die Funktionsgleichung an (Zeit: x, Getreidemenge: y).
b) Zeichne den Funktionsgraphen.

5 Der abgebildete Dieselgenerator verbraucht bei voller Belastung pro Stunde 4 Liter Kraftstoff. Im Tank befinden sich noch 60 *l* Kraftstoff.

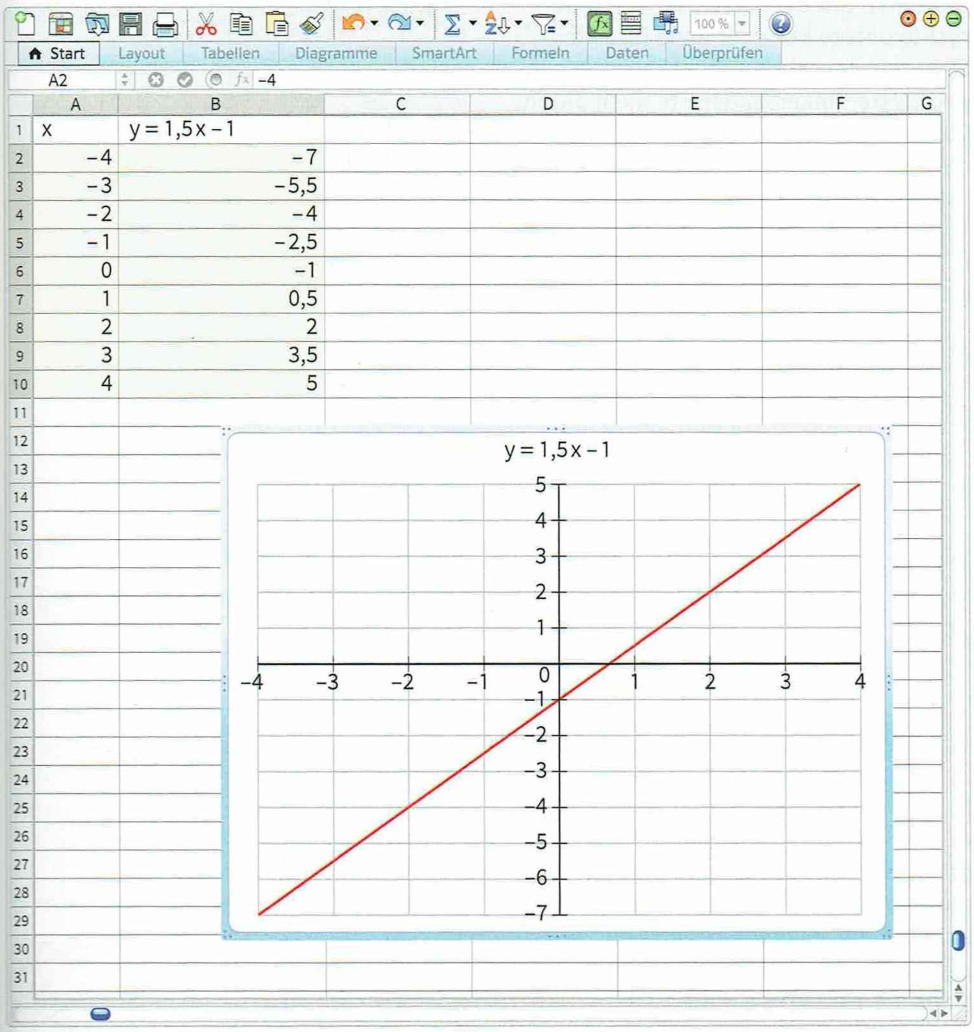
a) Begründe, dass man den Tankinhalt y (*l*) in Abhängigkeit von der Betriebsdauer x (h) mithilfe der folgenden Funktionsgleichung berechnen kann:
$y = -4x + 60$.
b) Zeichne den Graphen der Funktion in ein Koordinatensystem (x-Achse: 1 cm = 1 h, y-Achse: 1 cm = 5 *l*).
c) Ermittle anhand des Graphen, wie viele Stunden der Generator mit diesem Tankinhalt betrieben werden kann.
d) Wie verändert sich der Graph der Funktion, wenn der Tankinhalt auf 100 *l* erhöht wird (der Verbrauch pro Betriebsstunde auf 3 *l* gesenkt wird)?

6 Ein Schwimmbecken soll mit Wasser gefüllt werden. 5 000 Liter Wasser sind bereits eingefüllt. Pro Minute kommen 200 Liter dazu.

a) Gib die Funktionsgleichung an (Zeit (min): x; Anzahl Liter: y).
b) Wie viel Liter Wasser befinden sich nach einer Stunde im Becken?
c) Das Becken fasst 60 000 Liter. Wie lange dauert der Füllvorgang?

Arbeiten mit dem Computer: Lineare Funktionen

1 Lara und Till möchten die Graphen linearer Funktionen mithilfe eines Tabellenkalkulationsprogramms zeichnen. Dazu hat Lara eine Wertetabelle der Funktion f mit der Funktionsgleichung $y = 1{,}5x - 1$ auf ein Tabellenblatt geschrieben. Sie hat dann die Tabelle markiert und den Graphen erstellt. Dazu hat sie im Menü „Einfügen" den Diagrammtyp „Punkt" gewählt. Die einzutragenden Punkte können hier direkt durch eine Linie verbunden werden.



	A	B
1	x	y = 1,5x – 1
2	–4	–7
3	–3	–5,5
4	–2	–4
5	–1	–2,5
6	0	–1
7	1	0,5
8	2	2
9	3	3,5
10	4	5

a) Beschreibe das erstellte Diagramm. Wenn die Gerade in einem Koordinatensystem mit gleich eingeteilten Achsen gezeichnet wird, erhält man eine andere Darstellung als hier auf dem Tabellenblatt. Begründe den Unterschied.

b) Schreibe die abgebildete Tabelle ebenfalls auf ein Tabellenblatt. Ergänze sie um drei Zeilen. Erzeuge anschließend den Graphen.

c) Die Funktion g hat die Funktionsgleichung $y = -1{,}8x + 0{,}6$. Lege eine Wertetabelle mit x-Werten zwischen –5 und 5 an (Schrittweite 1). Trage die Tabelle auf einem neuen Tabellenblatt ein und erstelle den Graphen.

d) Gestalte das Diagramm neu, indem du mithilfe der Diagrammtools im Menü „Layout" die Zeichnungsfläche (die Vertikalachse, die Horizontalachse) veränderst.

Lineare Funktionen kompakt

Eine **Funktion** ist eine **eindeutige Zuordnung.** Jedem Element des **Definitionsbereichs (D)** wird genau ein Element des **Wertebereichs (W)** zugeordnet. Beide Elemente bilden ein Wertepaar.

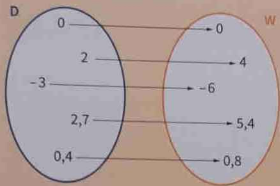
Zuordnungsvorschrift: Jeder Zahl $x \in D$ wird das Doppelte zugeordnet.

Wertetabelle

x	y
0	0
2	4
−3	−6
2,7	5,4
0,4	0,8

Wertepaar (2,7 | 5,4)

Pfeildiagramm



Zuordnungsvorschriften für Funktionen lassen sich häufig mithilfe von **Funktionsgleichungen** angeben.

Zuordnungsvorschrift: Jeder Zahl x wird das Doppelte zugeordnet.

Funktionsgleichung: f: $y = 2x$ oder $f(x) = 2x$

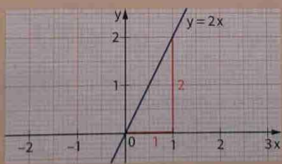
Funktionswert an der Stelle 2,7: $f(2{,}7) = 5{,}4$ lies: f von 2,7 gleich 5,4

Wird der Definitionsbereich einer Funktion nicht angegeben, so gilt $D = \mathbb{Q}$.

Funktionen mit der **Funktionsgleichung y = mx** sind besondere lineare Funktionen. Die **Funktionsgraphen** sind **Geraden** durch den **Ursprung. m** gibt die **Steigung** der Geraden an.

Funktionsgleichung: $y = 2x$

Steigung: $m = 2$



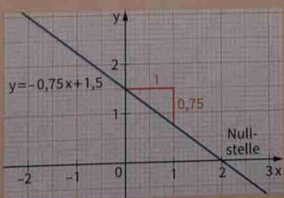
$y = mx$

Funktionen mit der **Funktionsgleichung y = mx + n** heißen **lineare Funktionen.** Ihre **Funktionsgraphen** sind **Geraden. m** gibt die **Steigung** der Geraden und **n** den **y-Achsenabschnitt** an.

Funktionsgleichung: $y = -0{,}75x + 1{,}5$

Steigung: $m = -0{,}75$

y-Achsenabschnitt: $n = 1{,}5$



$y = mx + n$

Üben und Vertiefen

1 Zeichne den Graphen der Funktion in ein Koordinatensystem ($D = \mathbb{Q}$).
Lege dazu zunächst eine Wertetabelle mit mindestens sechs Werten an.

a) $y = 2{,}6x$ b) $y = -4{,}1x$

c) $y = \frac{2}{5}x$ d) $y = -\frac{1}{4}x$

2 Überprüfe wie im Beispiel, ob die Punkte auf dem Funktionsgraphen von f liegen.

$f(x) = 4{,}5x$	$f(x) = 4{,}5x$
$P(4 \mid 18)$	$Q(-2 \mid -8)$
$f(4) = 4{,}5 \cdot 4$	$f(-2) = 4{,}5 \cdot (-2)$
$f(4) = 18$	$f(-2) = -9$
$18 = 18$ w	$-9 = -8$ f
P liegt auf dem Graphen.	Q liegt nicht auf dem Graphen.

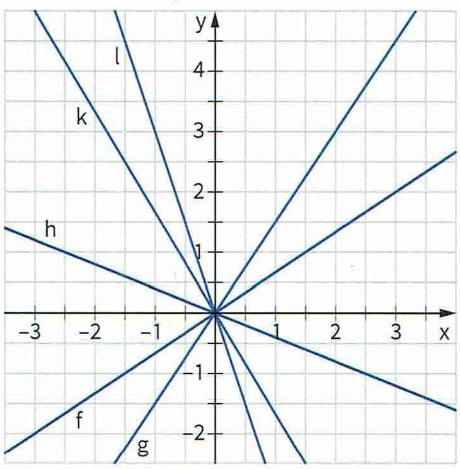
a) $f(x) = 2{,}5x$; $P(4 \mid 12)$; $Q(-2 \mid -5)$
b) $f(x) = -3{,}5x$; $P(-6 \mid 21)$; $Q(4 \mid -14)$
c) $f(x) = \frac{4}{5}x$; $P(-10 \mid -8)$; $Q(4 \mid 3{,}6)$
d) $f(x) = -\frac{2}{3}x$; $P(-6 \mid 4)$; $Q(9 \mid -7)$

3 Zeichne den Graphen der Funktion ohne Wertetabelle in ein Koordinatensystem ($D = \mathbb{Q}$).

a) $y = 2{,}7x$ b) $y = -1{,}7x$

c) $y = \frac{2}{7}x$ d) $y = -\frac{3}{5}x$

4 Bestimme die Funktionsgleichung zu jedem im Koordinatensystem eingezeichneten Graphen.



5 Zeichne den Graphen der Funktion in ein Koordinatensystem ($D = \mathbb{Q}$). Lege dazu zunächst eine Wertetabelle mit mindestens sechs Werten an.

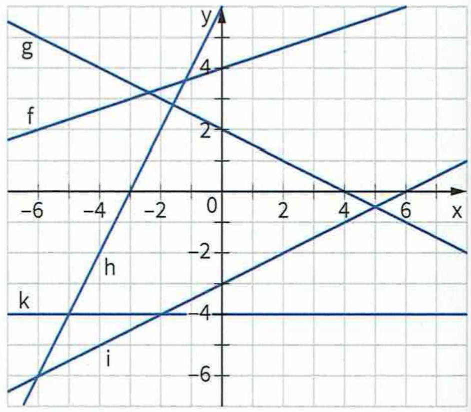
a) $y = 2{,}6x + 1$ b) $y = -4{,}1x + 2$
c) $y = 0{,}7x - 3$ d) $y = -0{,}3x - 0{,}6$

6 Zeichne den Graphen der Funktion ohne Wertetabelle in ein Koordinatensystem ($D = \mathbb{Q}$). Bestimme dann die Nullstelle der Funktion.

a) $y = 2{,}5x - 5$ b) $y = -1{,}5x + 6$

c) $y = 0{,}5x + 2{,}5$ d) $y = -\frac{3}{4}x + 4$

7 Bestimme die Funktionsgleichungen der im Koordinatensystem eingezeichneten Graphen.



8 Zeichne die Gerade durch die angegebenen Punkte P und Q. Bestimme dann die zugehörige Funktionsgleichung.

a) $P(2 \mid 3)$; $Q(6 \mid 5)$ b) $P(1 \mid 9)$; $Q(6 \mid 4)$
c) $P(-2 \mid 8)$; $Q(4 \mid -4)$ d) $P(-4 \mid 3)$; $Q(6 \mid -2)$

9 Berechne den zum y-Wert zugehörigen x-Wert wie im Beispiel.

$$y = f(x) = 26$$
$$f(x) = 3x + 2$$
$$3x + 2 = 26 \quad \mid -2$$
$$3x = 24 \quad \mid :3$$
$$x = 8$$

a) $f(x) = 1{,}5x - 4$; $y = 5$
b) $f(x) = 2{,}5x + 7$; $y = 27$
c) $f(x) = 0{,}5x - 7$; $y = -5$

Erdgaspreise

1 Die Kosten für das gelieferte Gas setzen sich aus einem Grundpreis und einem verbrauchsabhängigen Preis zusammen.

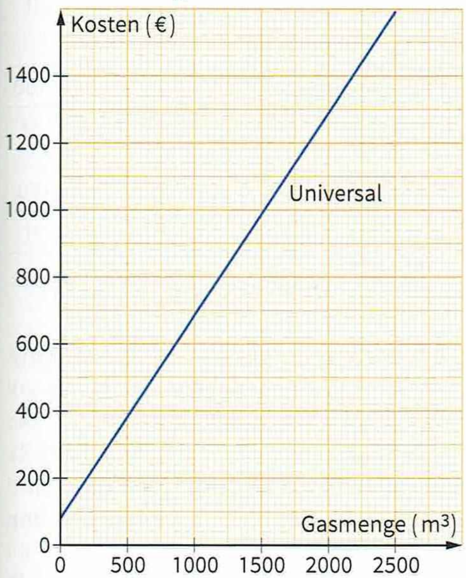
Stadtwerke

Gas-Abrechnung

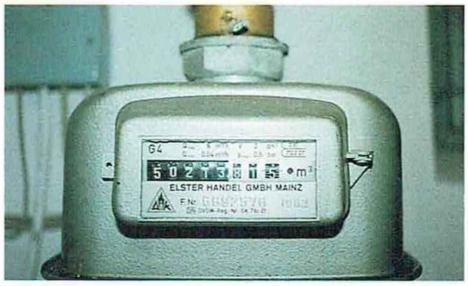
Tarif:	Universal
Verbrauch:	2 950 m^3
Preis pro m^3 (einschließlich 19 % Umsatzsteuer):	0,605 €
Verbrauchspreis:	2 950 · 0,605 € = 1 784,75 €
jährlicher Grundpreis (einschließlich 19 % Umsatzsteuer):	80,25 €
Gesamtpreis:	**1 865,00 €**

a) Überprüfe die Rechnung.
b) Im Koordinatensystem ist der Graph der Funktion „Gasmenge → Gesamtkosten“ dargestellt (gerundete Werte). Wo kannst du im Koordinatensystem den jährlichen Grundpreis ablesen?

Gasmenge ⟶ Gesamtkosten



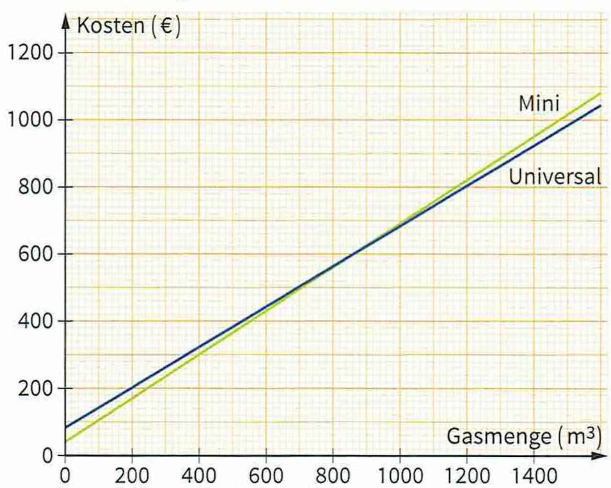
c) Ermittle anhand des Graphen die Gesamtkosten bei einem Jahresverbrauch von 1 000 m^3 (1 500 m^3; 2 000 m^3; 2 500 m^3) Gas.



2 a) Bestimme für den Tarif „Universal“ die Gleichung der Funktion, mit der du die Gesamtkosten y (€) in Abhängigkeit vom Jahresverbrauch x (m^3) berechnen kannst.
b) Überprüfe deine Ergebnisse aus Aufgabe 1c mithilfe der zugehörigen Rechnungen.
c) Stelle den Graphen der Funktion in einem Koordinatensystem dar. Runde dazu die Gesamtkosten auf volle Zehnerbeträge.

3 Die Stadtwerke bieten für Haushalte, die weniger Gas verbrauchen, den Tarif „Mini“ an. Der jährliche Grundpreis beträgt hier einschließlich der Mehrwertsteuer 40 €, der Preis pro Kubikmeter 0,650 €.

Gasmenge ⟶ Gesamtkosten



a) Bestimme auch für den Tarif „Mini“ die Funktionsgleichung und stelle die Funktion grafisch dar.
b) Ab welchem Jahresverbrauch ist der Tarif „Universal“ günstiger?

Die Aufgaben auf dieser und den zwei folgenden Seiten kann man als drei Lernstationen betrachten. Dabei ist die dritte Aufgabe jeweils eine Zusatzaufgabe. Beachte dazu die Hinweise auf Seite 225.

1 Die Kosten für Wasser und Abwasser werden von der Gemeinde festgesetzt. 1 m^3 Wasser kostet einschließlich Schmutzwassergebühr und ohne Zählergebühren 4,47 €.

Pro-Kopf-Verbrauch in Liter pro Tag

Zweck	Liter
Toilettenspülung	42
Baden, Duschen	39
Wäsche waschen	18
Kochen, Trinken	4
Geschirr spülen	8
Körperpflege	8
Putzen	4
Blumen, Garten, Auto	9

Lara und Till berechnen die täglichen Kosten für Baden und Duschen in einem Vier-Personen-Haushalt. Sie runden die Kosten auf zwei Nachkommastellen.

$4 \cdot 39\ l = 156\ l$
$156\ l = 0{,}156\ m^3$ Wasser kosten
$4{,}47\ € \cdot 0{,}156 \approx 0{,}70\ €$.

a) Berechne die Wasserkosten für Baden und Duschen in einem Vier-Personen-Haushalt für eine Woche (einen Monat, ein Jahr).
b) Bestimme die Gleichung der Funktion, die der Zeitdauer x (Tage) die Kosten y (€) zuordnet.
c) Zeichne den Graphen der Funktion.
d) Bestimme jeweils die Gleichungen der Funktion „Zeitdauer → Kosten" für die anderen genannten Zwecke.

Stadtwerke

Wasser-Abrechnung

Frischwasser:
Verbrauch: 134 m^3
Preis pro m^3 (einschließlich 7 % Umsatzsteuer): 1,93 €
Verbrauchspreis:
$134\ m^3 \cdot 1{,}93\ €/m^3 = 258{,}62\ €$

jährlicher Grundpreis (einschließlich 7 % Umsatzsteuer): 65,64 €

Gesamtpreis Frischwasser: **324,26 €**

Schmutzwasser:
Preis pro m^3: 2,54 €
Verbrauch: 134 m^3
$134\ m^3 \cdot 2{,}54\ €/m^3 =$ **340,36 €**

2 a) Überprüfe mithilfe der Angaben in der Abrechnung den Preis für einen Kubikmeter Wasser aus Aufgabe 1.
b) Bestimme die Gleichung der Funktion, die der Wassermenge x (m^3) die Gesamtkosten y (€) zuordnet.
Übertrage die Wertetabelle in dein Heft und vervollständige sie.

Wassermenge (m^3)	20	40	60	80	100
Kosten (€)	■	■	■	■	■

Wassermenge (m^3)	120	140	160	180
Kosten (€)	■	■	■	■

c) Zeichne den Graphen der Funktion.

3 In einer anderen Gemeinde beträgt der Jahresgrundpreis 50 € und der Verbrauchspreis pro Kubikmeter 5 € (jeweils einschließlich Umsatzsteuer).
a) Bestimme die Gleichung zur Berechnung der Gesamtkosten und zeichne den zugehörigen Graphen.
b) Wo schneidet die Gerade die y-Achse? Wodurch wird die Steigung der Geraden bestimmt?
c) Welche Gemeinde hat die günstigeren Preise? Begründe deine Meinung.

Kosten bei Pkws

1 Familie Bauer möchte ein neues Auto anschaffen. Anhand von Prospekten, Versicherungsunterlagen und Steuertabellen überlegen sie, welcher Pkw für sie geeignet sein könnte.
Die Anschaffungskosten sind bei beiden Autos gleich. Frau Bauer gefällt der geringe Kraftstoffverbrauch des Dieselfahrzeugs besonders gut. Ihr Sohn Oliver hat für verschieden lange Strecken die Kosten für den Dieselkraftstoff berechnet.

Polo Diesel	
zurückgelegte Strecke (km)	Kosten (€)
100	5,21
2 000	104,12
4 000	208,24
6 000	312,36
8 000	416,48
10 000	520,60
14 000	728,84
18 000	937,08
22 000	1 145,32

a) Berechne die Kosten für den Dieselkraftstoff bei einer zurückgelegten Strecke von 5000 km (15 000 km, 20 000 km, 25 000 km).
b) Lege eine entsprechende Tabelle an und berechne die Kosten für das Fahrzeug, das Super verbraucht.
c) In den Tabellen werden jeder zurückgelegten Strecke die Kosten zugeordnet. Zeichne die Graphen beider Zuordnungen in ein Koordinatensystem (x-Achse: 1 cm ≙ 1000 km; y-Achse: 1 cm ≙ 100 €).

2 Herr Bauer hat sich nach den Versicherungsbeiträgen erkundigt, die seine Familie im Jahr für den Polo Diesel bzw. den Polo Automatik zahlen müsste. Seine Tochter Kathrin berücksichtigt bei einer erneuten Berechnung der Kosten auch die Kfz-Steuer.

Kosten für Dieselkraftstoff
bei 10 000 km pro Jahr: 520,60 €
bei 18 000 km pro Jahr: 937,08 €

Jährliche Gesamtkosten
bei 10 000 km: 832 € + 520,60 €
bei 18 000 km: 832 € + 937,08 €

a) Berechne für das Dieselfahrzeug auch die Kosten bei einer Fahrstrecke von 12 000 km (15 000 km, 20 000 km) pro Jahr.
b) Bestimme die Gleichung der Funktion, die der zurückgelegten Strecke x (in km) die Gesamtkosten y (in €) zuordnet. Zeichne den Graphen der Funktion.

3 a) Berechne auch für den Polo Automatik die Kosten bei einer jährlich zurückgelegten Strecke von 10 000 km (12 000 km, 15 000 km, 20 000 km).
b) Bestimme die Gleichung der Funktion, die der zurückgelegten Strecke x (in km) die Gesamtkosten y (in €) zuordnet und zeichne den Graphen in dasselbe Koordinatensystem.
c) Welches der Fahrzeuge ist bei 4 000 km (8 000 km) pro Jahr günstiger?
d) Was gibt der Schnittpunkt beider Geraden an?

Diesel:
1 Liter 1,37 €

Benzin:
1 Liter 1,50 €

Polo Diesel: jährliche Kosten

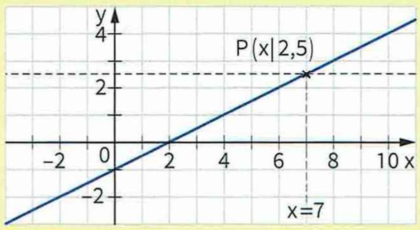
Feste Kosten
Kfz-Steuer:
122 € pro Jahr
Kfz-Versicherung:
710 € pro Jahr

Polo Automatik: jährliche Kosten

Feste Kosten
Kfz-Steuer:
82 € pro Jahr
Kfz-Versicherung:
610 € pro Jahr

1 Im Beispiel wird die fehlende x-Koordinate des Punktes P, der auf dem Graphen der angegebenen linearen Funktion liegt, bestimmt. Dazu wird zunächst der Graph gezeichnet und dann die fehlende Koordinate abgelesen. Anschließend werden zur Probe die beiden Koordinaten von P in die Funktionsgleichung eingesetzt.

P (x | 2,5); y = 0,5x − 1



P (7 | 2,5)
y = 0,5x − 1
2,5 = 0,5 · 7 − 1
2,5 = 2,5 ✓

Verfahre wie im Beispiel.
a) $y = 3x - 4$; P (x | 5)
b) $y = -2x + 1$; P (x | 0)
c) $y = 1{,}5x - 2$; P (x | −5)
d) $y = -0{,}5x + 4$; P (x | 0)

2 Im Beispiel wird die fehlende x-Koordinate des Punktes P auf dem Graphen von f berechnet.

P (x | 39); f(x) = −3x + 6

Die Koordinaten des Punktes P müssen die Funktionsgleichung erfüllen.

f(x) = −3x + 6 f(x) = 39

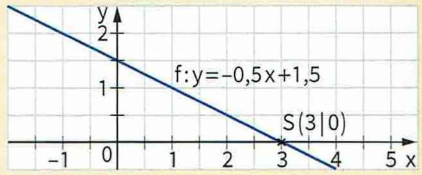
$-3x + 6 = 39 \quad |-6$
$-3x = 33 \quad |:(-3)$
$x = -11$

f(−11) = 39 P(−11 | 39)

Der Funktionswert y = 39 wird an der Stelle x = −11 angenommen.

Berechne die x-Koordinate von P.
a) P (x | −9); $f(x) = -1{,}5x - 3$
b) P (x | 4); $f(x) = 2{,}5x + 9$
c) P (x | 0); $f(x) = 0{,}8x - 2{,}4$

3 Zeichne den Graphen der angegebenen linearen Funktion. Bestimme anhand des Graphen die Stelle x, an der der Graph die x-Achse schneidet.
a) $y = -0{,}5x + 4$ b) $y = 2x - 4$
c) $y = 0{,}5x - 3$ d) $y = -2{,}5x - 5$
e) $y = 1{,}5x - 4{,}5$ f) $y = -1{,}5x + 6$
g) $y = -2x - 5$ h) $y = -3x - 7{,}5$



Der Schnittpunkt S des Funktionsgraphen einer linearen Funktion f mit der x-Achse hat die y-Koordinate **0: S (x | 0).** Es gilt die Gleichung:
f (x) = 0

f(x) = −0,5x + 1,5 S(3 | 0)

f(3) = −0,5 · 3 + 1,5
f(3) = 0

Nullstelle von f: x = 3

Die **x-Koordinate** von S wird **Nullstelle** der Funktion f genannt.

4 Berechne die Nullstelle wie im Beispiel.

f(x) = −0,5 + 1,6

f(x) = 0
$-0{,}5x + 1{,}6 = 0 \quad |-1{,}6$
$-0{,}5x = -1{,}6 \quad |:(-0{,}5)$
$x = 3{,}2$

Nullstelle von f: x = 3,2

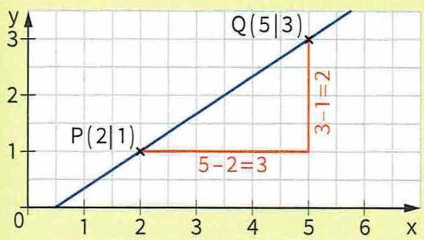
a) $f(x) = 2x - 8{,}4$ b) $f(x) = 5x + 19$
c) $f(x) = -4x - 17$ d) $f(x) = \frac{2}{3}x + 2{,}4$
e) $f(x) = -\frac{2}{3}x - 8$ f) $f(x) = -\frac{7}{8}x - 16$

5 Gibt es lineare Funktionen, die keine Nullstelle (unendlich viele Nullstellen) haben? Begründe deine Antwort.

Funktionsgleichung berechnen

1 Eine Gerade mit positiver Steigung m verläuft durch die Punkte P und Q. Berechne wie im Beispiel die Steigung mithilfe der Koordinaten von P und Q.

Punkte: P (2 | 1); Q (5 | 3)

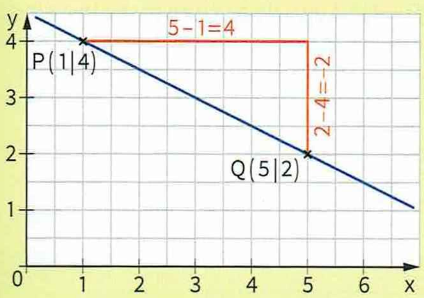


$m = \frac{3-1}{5-2} = \frac{2}{3}$

a) P (1 | 2); Q (5 | 4) b) P (2 | 0); Q (4 | 3)
c) P (2 | 1); Q (7 | 9) d) P (−2 | −1); Q (3 | 5)

2 Eine Gerade mit negativer Steigung m verläuft durch die Punkte P und Q. Berechne wie im Beispiel die Steigung mithilfe der Koordinaten von P und Q. Entscheide dich für einen Lösungsweg.

Punkte: P (1 | 4); Q (5 | 2)



$m = \frac{2-4}{5-1} = \frac{-2}{4} = -0{,}5$

$m = \frac{4-2}{1-5} = \frac{2}{-4} = -0{,}5$

a) P (2 | 6); Q (4 | 3) b) P (1 | 7); Q (5 | 2)
c) P (−1 | 4); Q (3 | 1) d) P (−2 | 5); Q (2 | −4)

Für die Steigung einer Geraden durch die Punkte P $(x_1 | y_1)$ und Q $(x_2 | y_2)$ gilt allgemein (für $x_1 \neq x_2$):

$$m = \frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1}$$

So kannst du die Funktionsgleichung der Geraden berechnen, die durch die Punkte P und Q geht:
P (−2 | 3); Q (3 | 1)

1. Berechne die Steigung m aus den Koordinaten der Punkte P und Q.

$$m = \frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1} = \frac{1-3}{3-(-2)} = \frac{-2}{5} = -0{,}4$$

2. Berechne den y-Achsenabschnitt n. Setze dazu die Koordinaten von P (oder Q) sowie die Steigung m in die Funktionsgleichung f (x) = mx + n ein.

$f(-2) = -0{,}4 \cdot (-2) + n$ und $f(-2) = 3$

$$\begin{aligned} -0{,}4 \cdot (-2) + n &= 3 \\ -0{,}8 + n &= 3 \quad | -0{,}8 \\ n &= 2{,}2 \end{aligned}$$

3. Setze die Werte für m und n in die Funktionsgleichung f (x) = mx + n ein.

$$f(x) = -0{,}4x + 2{,}2$$

3 Berechne die Funktionsgleichung der Geraden durch P und Q.
a) P (−1 | 6); Q (1 | 2)
b) P (−2 | 4); Q (4 | 1)
c) P (−2 | 1); Q (2 | −5)
d) P (−2 | −1); Q (8 | −5)
e) P (3 | 9); Q (5 | 14)
f) P (2 | 1); Q (−3 | −7)

4 Überprüfe durch Rechnung, ob die Punkte P, Q und R auf einer Geraden liegen. Berechne dazu zunächst die Funktionsgleichung der Geraden, die durch zwei der drei Punkte geht.
Überprüfe dann, ob die Koordinaten des dritten Punktes die Funktionsgleichung erfüllen,
a) P (2 | 2); Q (5 | 11); R (−1 | −7)
b) P (0 | 3); Q (4 | 13); R (52 | 133)
c) P (−3 | 14); Q (2 | 9); R (4 | 6)
d) P (−4 | 22); Q (0 | −2); R (3 | −20)
e) P (5 | −1); Q (1 | −3); R (−1 | −3)
f) P (7 | −3); Q (−1 | 9); R (3 | 3)