1. [Knobelaufgabe (über Klassenarbeitsniveau)] Betrachte das lineare Gleichungssystem

$$\begin{aligned} y =& m_1 x + n_1 \\ y =& m_2 x + n_2 \end{aligned}$$

- Bestimme die x-Koordinate des Schnittpunkts. Du wirst einen Ausdruck bekommen, der von beiden ms und ns abhängt.
- Bestimme die y-Koordinate des Schnittpunktes. Setze dazu dieses x in beide Gleichungen ein und überprüfe, dass sich jeweils dasselbe ergibt.

Lösung:
Wir setzen gleich und lösen auf

$$\begin{aligned} m_1 x + n_1 =& m_2 x + n_2 \quad \Big| - n_1 \\ m_1 x =& m_2 x + n_2 - n_1 \quad \Big| - m_2 x \\ m_1 x - m_2 x =& n_2 - n_1 \\ x \cdot (m_1 - m_2) =& n_2 - n_1 \quad \Big| : (m_1 - m_2) \\ x =& \frac{n_2 - n_1}{m_1 - m_2} \end{aligned}$$

Wir sehen, dass wir keine Lösung bekommen, wenn die Achsenabschnitte ungleich sind, die Steigungen aber gleich. Dann würden wir durch Null teilen, was ja bekanntlich nicht geht. Wir sehen auch, dass wir für sehr ähnliche Steigungen m_1 und m_2 sehr große (positive oder negative) x-Werte bekommen: Dann laufen die Geraden nur ganz sacht aufeinander zu und schneiden sich erst weit vom Ursprung entfernt.

Ein weiterer Punkt: Es sollte egal sein, welches m wir 1 und welches wir 2 nennen. Was passiert, wenn wir die Indices 1 und 2 vertauschen? Versuchens wir aus:

$$\begin{aligned} x =& \frac{n_1 - n_2}{m_2 - m_1} \\ =& \frac{-(n_2 - n_1)}{-(m_1 - m_2)} \\ =& \frac{n_2 - n_1}{m_1 - m_2} \end{aligned}$$

Der letzte Schritt, weil $-1/-1 = 1$. Wir bekommen also in der Tat wieder dasselbe.

Nun setzen wir in die 1. Gleichung ein:

$$
\begin{aligned}
y =& m_1 x + n_1 \\
=& m_1 \cdot \frac{n_2 - n_1}{m_1 - m_2} + n_1 \\
=& \frac{m_1(n_2 - n_1)}{m_1 - m_2} + \frac{n_1(m_1 - m_2)}{m_1 - m_2} \\
=& \frac{m_1(n_2 - n_1) + n_1(m_1 - m_2)}{m_1 - m_2} \\
=& \frac{m_1 n_2 - \cancel{m_1 n_1} + \cancel{n_1 m_1} - n_1 m_2}{m_1 - m_2} = \frac{n_2 m_1 - n_1 m_2}{m_1 - m_2}
\end{aligned}
$$

Setzen wir in die 2. Gleichung ein, müssten wir ja dasselbe bekommen:

$$
\begin{aligned}
y =& m_2 x + n_2 \\
=& m_2 \cdot \frac{n_2 - n_1}{m_1 - m_2} + n_2 \\
=& \frac{m_2(n_2 - n_1)}{m_1 - m_2} + \frac{n_2(m_1 - m_2)}{m_1 - m_2} \\
=& \frac{m_2(n_2 - n_1) + n_2(m_1 - m_2)}{m_1 - m_2} \\
=& \frac{\cancel{m_2 n_2} - m_2 n_1 + n_2 m_1 - \cancel{n_2 m_2}}{m_1 - m_2} = \frac{n_2 m_1 - n_1 m_2}{m_1 - m_2}
\end{aligned}
$$

Tada.