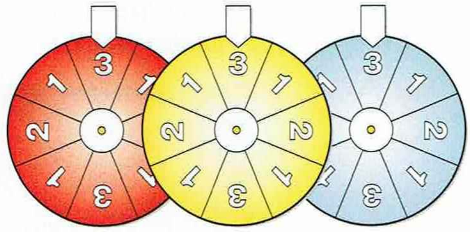
1 Svenja und Sebastian überlegen, wie sie bei Geldspielautomaten die Wahrscheinlichkeiten für die einzelnen Gewinne berechnen können.

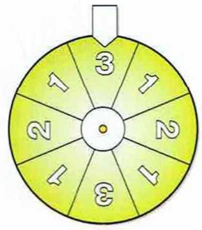
Sie haben dazu ein Modell eines Spielautomaten konstruiert. Das Modell besteht aus drei Glücksrädern, die alle gleich eingeteilt sind. Sie werden unabhängig voneinander gedreht.



Da es für die Berechnung der Wahrscheinlichkeiten keine Rolle spielt, ob ein Glücksrad dreimal hintereinander oder drei Glücksräder gleichzeitig gedreht werden, konzentrieren sie sich zunächst einmal auf ein Glücksrad.

a) Das abgebildete Glücksrad soll einmal gedreht werden. Welche Ergebnisse sind dabei möglich?

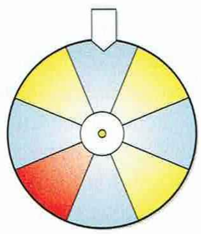
b) Das Glücksrad soll 1000-mal gedreht werden. Welche relativen Häufigkeiten erwartest du für die einzelnen Ergebnisse? Begründe.



Ergebnis: 3
erwartete relative Häufigkeit: $\frac{2}{8} = 0{,}250$

Die erwartete relative Häufigkeit eines Ergebnisses wird Wahrscheinlichkeit P genannt. P kommt von probability (englisch: Wahrscheinlichkeit).

Zufallsexperiment: Drehen eines Glücksrades

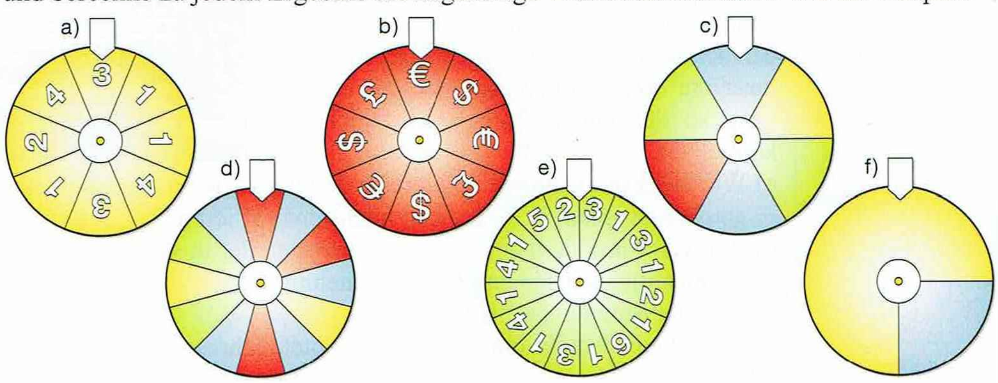


Mögliche Ergebnisse: gelb, blau, rot

Wahrscheinlichkeiten:

Anteil der gelben Kreisausschnitte: $\frac{3}{8}$	$P(\text{gelb}) = \frac{3}{8}$	*Lies:* P von gelb gleich …
Anteil der blauen Kreisausschnitte: $\frac{4}{8}$	$P(\text{blau}) = \frac{4}{8}$	*Lies:* P von blau gleich …
Anteil der roten Kreisausschnitte: $\frac{1}{8}$	$P(\text{rot}) = \frac{1}{8}$	*Lies:* P von rot gleich …

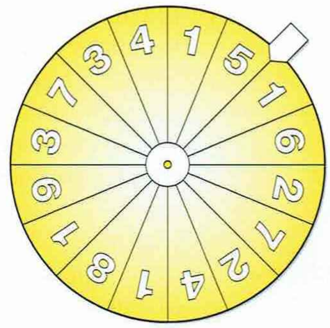
2 Das abgebildete Glücksrad soll einmal gedreht werden. Gib alle möglichen Ergebnisse an und berechne zu jedem Ergebnis die zugehörige Wahrscheinlichkeit P wie im Beispiel.



3 Das abgebildete Glücksrad soll einmal gedreht werden.

a) Gib die Menge S aller möglichen Ergebnisse an.

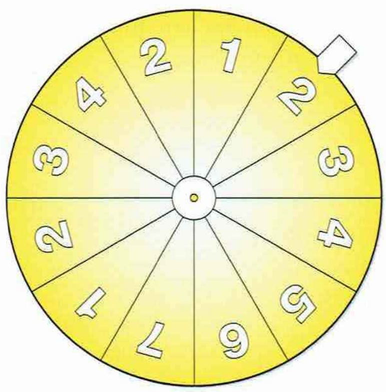
b) Das Ereignis E „Die Gewinnzahl ist kleiner als 4." tritt ein, wenn die Gewinnzahl 1, 2 oder 3 ist.
Das Ereignis E lässt sich auch als Menge von Ergebnissen schreiben: $E = \{1, 2, 3\}$. Gib die folgenden Ereignisse jeweils als Menge an:



E_1: Die Gewinnzahl ist größer als 3.
E_2: Die Gewinnzahl ist ungerade.
E_3: Die Gewinnzahl ist kleiner als 7.
E_4: Die Gewinnzahl ist eine Primzahl.

Die **Ergebnismenge** S ist die Menge aller möglichen Ergebnisse.

4



Das abgebildete Glücksrad soll einmal gedreht werden. Dabei sind sieben unterschiedliche Ergebnisse möglich:
$S = \{1, 2, 3, 4, 5, 6, 7\}$.
Im Beispiel wird die Wahrscheinlichkeit des Ereignisses E berechnet.

E: Die Gewinnzahl ist gerade.
$E = \{2, 4, 6\}$

$P(E) = P(2) + P(4) + P(6) = \frac{3}{12} + \frac{2}{12} + \frac{1}{12}$

$P(E) = \frac{6}{12} = \frac{1}{2}$

Ist das Ereignis gleich der Ergebnismenge S, so tritt es immer ein. Es wird daher **sicheres Ereignis** genannt.

Berechne wie im Beispiel die Wahrscheinlichkeiten der folgenden Ereignisse. Gib zunächst das Ereignis als Menge von Ergebnissen an.

E_1: Die Gewinnzahl ist kleiner als 5.
E_2: Die Gewinnzahl ist größer als 4.
E_3: Die Gewinnzahl ist höchstens 6.
E_4: Die Gewinnzahl ist mindestens 5.
E_5: Die Gewinnzahl ist ungerade.
E_6: Die Gewinnzahl ist kleiner als 8.
E_7: Die Gewinnzahl ist keine Primzahl.
E_8: Die Gewinnzahl ist größer als 9.

Ist das Ereignis gleich der leeren Menge, so kann es nie eintreten. Es wird daher **unmögliches Ereignis** genannt.

5 Ein Glücksrad ist in 24 gleich große Sektoren mit den Zahlen 1 bis 24 eingeteilt. Es soll einmal gedreht werden.
Da alle Ergebnisse gleich wahrscheinlich sind, kannst du wie im Beispiel die Wahrscheinlichkeit eines Ereignisses berechnen, indem du die Anzahl der zugehörigen Ergebnisse bestimmst.

E_1: Die Gewinnzahl ist kleiner als 16.
E_2: Die Gewinnzahl ist mindestens 20.
E_3: Die Gewinnzahl ist durch 5 teilbar.
E_4: Die Gewinnzahl ist höchstens 8.
E_5: Die Gewinnzahl ist mindestens 25.
E_6: Die Gewinnzahl ist kleiner als 30.

E: Die Gewinnzahl ist durch 3 teilbar.
$E = \{3, 6, 9, 12, 15, 18, 21, 24\}$

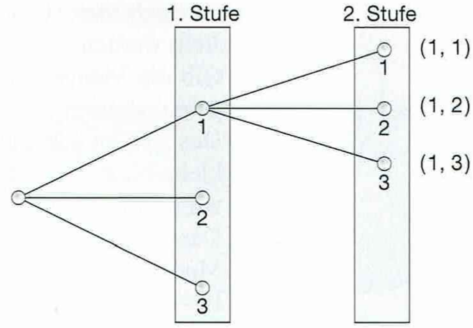
Anzahl der günstigen Ergebnisse: 8
Anzahl aller Ergebnisse: 24

$P(E) = \frac{8}{24} = \frac{1}{3}$

Sind bei einem Zufallsexperiment alle Ergebnisse gleich wahrscheinlich, so beträgt die Wahrscheinlichkeit für jedes Ergebnis E:

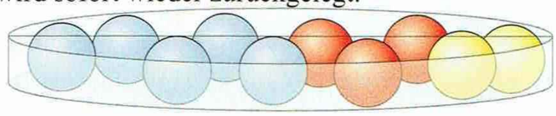
$$P(E) = \frac{\text{Anzahl der günstigen Ergebnisse}}{\text{Anzahl aller Ergebnisse}}$$

1 Ein Glücksrad ist in drei gleich große Sektoren mit den Zahlen 1, 2 und 3 eingeteilt. Es soll zweimal hintereinander gedreht werden. Das Zufallsexperiment wird in zwei Stufen durchgeführt, es wird ein **zweistufiges Zufallsexperiment** genannt.
Übertrage das zugehörige Baumdiagramm in dein Heft und vervollständige es. Gib die Ergebnismenge S an.

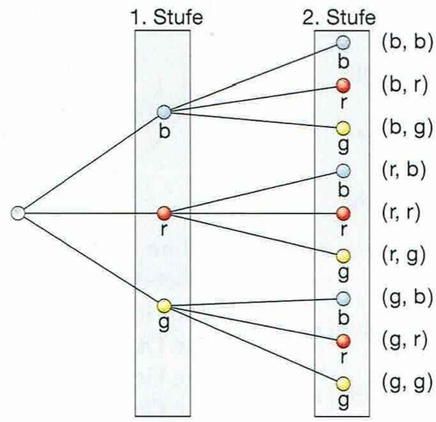


2 So kannst du bei mehrstufigen Zufallsexperimenten mithilfe eines Baumdiagramms die Ergebnismenge S ermitteln:

Zufallsexperiment: Aus der Urne werden nacheinander zwei Kugeln gezogen. Jede gezogene Kugel wird sofort wieder zurückgelegt.



1. Ermittle die Anzahl der Ergebnisse auf der 1. Stufe. Zeichne vom Anfangspunkt aus für jedes Ereignis einen Teilpfad und markiere jeweils einen Endpunkt.
2. Ermittle die Anzahl der Ergebnisse auf der 2. Stufe. Nimm jeden Endpunkt auf der 1. Stufe als Ausgangspunkt für neue Teilpfade. Zeichne für jedes Ergebnis einen Teilpfad mit Endpunkt.
3. Jeder Pfad vom Anfangspunkt bis zu einem Endpunkt der letzten Stufe entspricht einem Ergebnis. Gib die Ergebnismenge S an.

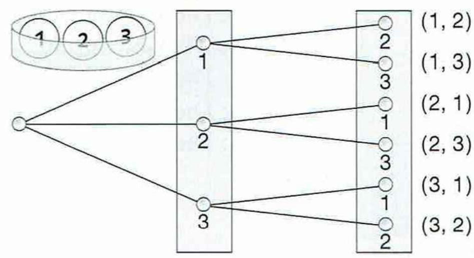


S = {(b; b), (b; r), (b; g), (r; b), (r; r), (r; g), (g; b), (g; r) (g; g)}

Zeichne das Baumdiagramm zu dem Zufallsexperiment. Gib die Ergebnismenge S an.
a) Ein Glücksrad mit den Zahlen 1, 2, 3 und 4 wird zweimal gedreht.
b) Eine Münze wird dreimal nacheinander geworfen.

3 Zeichne das Baumdiagramm und gib die Ergebnismenge S an. Beachte, dass die Anzahl der Teilpfade, die von einem Punkt ausgehen, auf jeder Stufe unterschiedlich ist.
In einer Urne befinden sich vier gleichartige Kugeln, die die Zahlen von 1 bis 4 tragen. Es werden nacheinander zwei Kugeln ohne Zurücklegen gezogen.

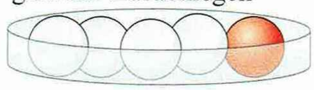
Zufallsexperiment: Ziehen zweier Kugeln **ohne Zurücklegen**

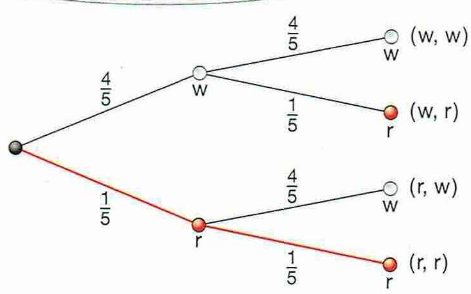


S = {(1; 2), (1; 3), (2; 1), (2; 3), (3, 1), (3; 2)}

4 In einer Urne befinden sich eine rote und vier weiße gleichartige Kugeln. Es werden nacheinander zwei Kugeln gezogen. Jede Kugel wird sofort wieder zurückgelegt. In der Abbildung siehst du, dass in dem zugehörigen Baumdiagramm an jedem Teilpfad die entsprechende Wahrscheinlichkeit eingetragen ist. So kannst du mithilfe des Baumdiagramms die Wahrscheinlichkeit von Ergebnissen bestimmen:

Zufallsexperiment: Ziehen zweier Kugeln mit Zurücklegen





P (r; r) =

Bei einer großen Anzahl von Versuchen erwartest du:

1. Der Anteil der Versuche, bei denen die erste Kugel rot ist, beträgt $\frac{1}{5}$.
2. Bei $\frac{1}{5}$ von diesem Anteil ist auch die zweite Kugel rot.

$\frac{1}{5}$ von $\frac{1}{5}$: $\frac{1}{5} \cdot \frac{1}{5} = \frac{1}{25}$

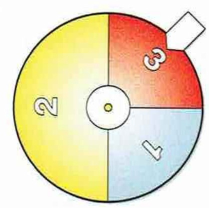
$P(r; r) = \frac{1}{5} \cdot \frac{1}{5} = \frac{1}{25}$

Berechne die Wahrscheinlichkeiten für die übrigen Ergebnisse.

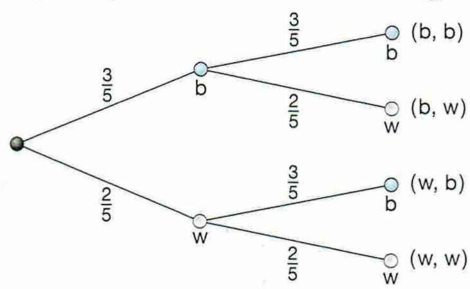
5 Das abgebildete Glücksrad wird zweimal nacheinander gedreht.

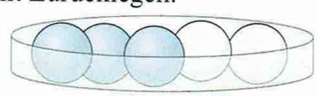
a) Zeichne das zugehörige Baumdiagramm und trage die zu den Teilpfaden gehörigen Wahrscheinlichkeiten ein.

b) Berechne die Wahrscheinlichkeit für jedes Ergebnis.



Zufallsexperiment: Ziehen zweier Kugeln mit Zurücklegen.





$P(b; b) = \frac{3}{5} \cdot \frac{3}{5} = \frac{9}{25}$

$P(b; w) = \frac{3}{5} \cdot \frac{2}{5} = \frac{6}{25}$

$P(w; b) = \frac{2}{5} \cdot \frac{3}{5} = \frac{6}{25}$

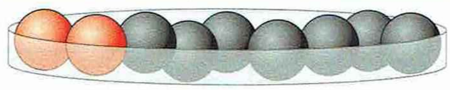
$P(w; w) = \frac{2}{5} \cdot \frac{2}{5} = \frac{4}{25}$

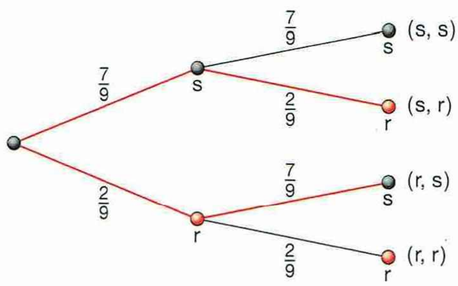
Multiplikationsregel: Die Wahrscheinlichkeit für ein **Ergebnis** (einen Pfad) ist gleich dem Produkt der Wahrscheinlichkeiten längs des Pfades.

6 In einer Urne tragen vier Kugeln die Zahl 1, zwei die Zahl 2 und eine Kugel die Zahl 3. Es werden nacheinander zwei Kugeln mit Zurücklegen gezogen. Zeichne das zugehörige Baumdiagramm, und trage die zu den Teilpfaden gehörigen Wahrscheinlichkeiten ein. Berechne die Wahrscheinlichkeiten für jedes Ergebnis.

7 In einer Urne befinden sich zwei rote und sieben schwarze gleichartige Kugeln. Es werden nacheinander zwei Kugeln mit Zurücklegen gezogen. So kannst du mithilfe des zugehörigen Baumdiagramms die Wahrscheinlichkeit von Ereignissen bestimmen:

Zufallsexperiment: Ziehen zweier Kugeln mit Zurücklegen





Ereignis E_1: Genau eine der gezogenen Kugeln ist schwarz

$E_1 = \{(s; r), (r; s)\}$

$P(s; r) = \frac{7}{9} \cdot \frac{2}{9} = \frac{14}{81}$

$P(r; s) = \frac{2}{9} \cdot \frac{7}{9} = \frac{14}{81}$

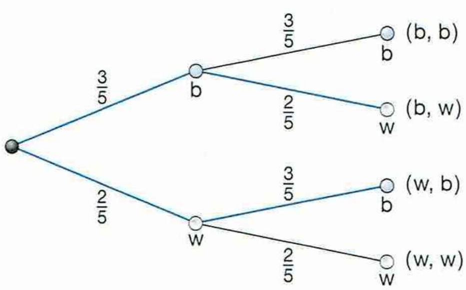
$P(E_1) = \frac{14}{81} + \frac{14}{81} = \frac{28}{81}$

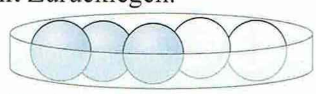
Berechne die Wahrscheinlichkeit der folgenden Ereignisse:
E_2: Genau eine der gezogenen Kugeln ist rot. E_3: Die zweite gezogene Kugel ist rot.
E_4: Mindestens eine der gezogenen Kugeln ist schwarz.

8 In einer Urne befinden sich drei weiße, zwei rote und fünf schwarze gleichartige Kugeln. Es werden nacheinander zwei Kugeln mit Zurücklegen gezogen.

a) Zeichne das zugehörige Baumdiagramm und schreibe an die Teilpfade die entsprechenden Wahrscheinlichkeiten.
b) Gib die Ergebnismenge S an und berechne die Wahrscheinlichkeiten aller Ergebnisse.
c) Berechne die Wahrscheinlichkeit des folgenden Ereignisses: Genau eine gezogene Kugel ist schwarz. (Es werden zwei Kugeln unterschiedlicher Farbe gezogen.)

Zufallsexperiment: Ziehen zweier Kugeln mit Zurücklegen.





Ereignis E: Genau eine der gezogenen Kugeln ist blau.

$E = \{(b; w), (w; b)\}$

$P(b; w) = \frac{3}{5} \cdot \frac{2}{5} = \frac{6}{25}$

$P(w; b) = \frac{2}{5} \cdot \frac{3}{5} = \frac{6}{25}$

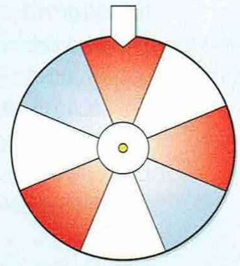
$P(E) = \frac{6}{25} + \frac{6}{25} = \frac{12}{25}$

Additionsregel: Die Wahrscheinlichkeit für ein **Ereignis** ist gleich der Summe der Wahrscheinlichkeiten der zugehörigen Ergebnisse (Pfade).

9 In einer Urne befinden sich vier weiße und sechs rote gleichartige Kugeln. Es werden nacheinander drei Kugeln mit Zurücklegen gezogen.

a) Zeichne das zugehörige Baumdiagramm mit den entsprechenden Wahrscheinlichkeiten.
b) Wie groß ist die Wahrscheinlichkeit dafür, dass genau eine gezogene Kugel rot ist?

Zufallsexperiment:
Das abgebildete Glücksrad wird zweimal gedreht.

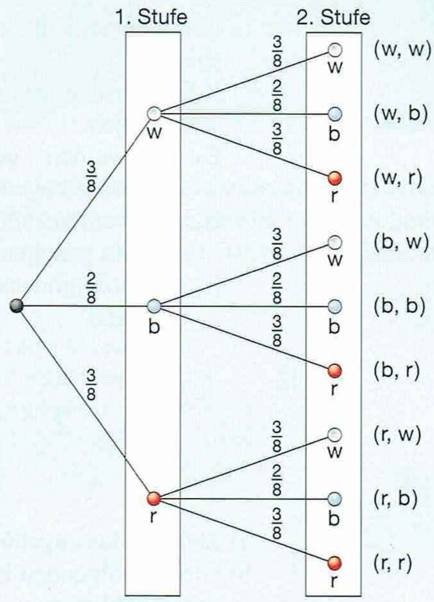


Die **Menge aller möglichen Ergebnisse** wird **Ergebnismenge S** genannt.

S = {(w; w), (w; b), (w; r), (b; w), (b; b), (b; r), (r; w), (r; b), (r; r)}

Bei **mehrstufigen Zufallsexperimenten** kann die Ergebnismenge S mithilfe eines **Baumdiagramms** ermittelt werden.

Jedes Ergebnis entspricht **einem** Pfad im Baumdiagramm.



Multiplikationsregel:
Die Wahrscheinlichkeit für ein Ergebnis (einen Pfad) ist gleich dem Produkt der Wahrscheinlichkeiten längs des Pfades.

Ergebnis: (w; b)

$P(w; b) = \frac{3}{8} \cdot \frac{2}{8} = \frac{6}{64}$

Ein **Ereignis** ist eine Teilmenge der Ergebnismenge S.

Ereignis E: Das zweite Feld ist blau.

E = {(w; b), (b; b), (r; b)}

Additionsregel:
Die Wahrscheinlichkeit für ein Ereignis ist gleich der Summe der Wahrscheinlichkeiten der zugehörigen Ergebnisse (Pfade).

$P(E) = P(w; b) + P(b; b) + P(r; b)$

$= \frac{6}{64} + \frac{4}{64} + \frac{6}{64}$

$= \frac{16}{64}$

Ziehen mit Zurücklegen

1 In einer Urne befinden sich sechs weiße und vier rote gleichartige Kugeln.
Es wird dreimal nacheinander eine Kugel gezogen, die Farbe der Kugel notiert und die Kugel wieder zurückgelegt. Nach jeder Ziehung werden die Kugeln in der Urne neu durchmischt.

a) Übertrage das Baumdiagramm in dein Heft und vervollständige es.

b) Gib die Ergebnismenge S an und berechne die Wahrscheinlichkeiten aller Ergebnisse.

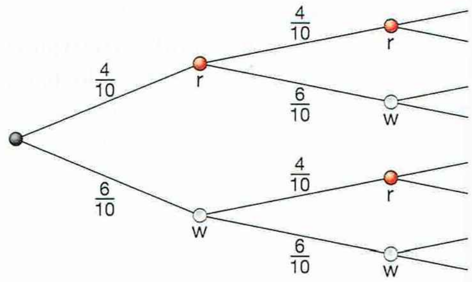
c) Gib die folgenden Ereignisse jeweils als Teilmenge von S an und berechne ihre Wahrscheinlichkeiten wie im Beispiel:

E_1: Es werden genau zwei rote Kugeln gezogen.

E_2: Es werden genau drei weiße Kugeln gezogen.

E_3: Es werden höchstens zwei rote Kugeln gezogen.

E_4: Es wird mindestens eine rote Kugel gezogen.



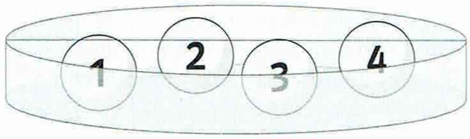
E: Es wird genau eine rote Kugel gezogen.

$E = \{(r, w, w);\ (w, r, w);\ (w, w, r)\}$

$P(E) = \frac{4}{10} \cdot \frac{6}{10} \cdot \frac{6}{10} + \frac{6}{10} \cdot \frac{4}{10} \cdot \frac{6}{10} + \frac{6}{10} \cdot \frac{6}{10} \cdot \frac{4}{10}$

$P(E) = \frac{432}{1000} = 0{,}432$

2



Aus der abgebildeten Urne wird zweimal mit Zurücklegen gezogen. Die erste gezogene Kugel legt die Zehnerziffer, die zweite gezogene Kugel die Einerziffer einer zweistelligen Zahl fest.

a) Zeichne das zugehörige Baumdiagramm und gib die Ergebnismenge S an.

b) Gib die folgenden Ereignisse jeweils als Teilmenge von S an und berechne ihre Wahrscheinlichkeiten.

E_1: Die gezogene Zahl ist kleiner als 30.

E_2: Die gezogene Zahl ist größer als 20.

E_3: Die gezogene Zahl hat zwei gleiche Ziffern.

E_4: Die gezogene Zahl enthält genau einmal die Ziffer 4.

E_5: Die gezogene Zahl ist durch 4 teilbar.

E_6: Die gezogene Zahl ist eine Primzahl.

E_7: Die gezogene Zahl ist kleiner als 11.

E_8: Die gezogene Zahl ist größer als 10.

3 Es gibt Personen, die behaupten, sie könnten Gedanken lesen. Bei einem Test konzentriert sich eine Versuchsperson dreimal nacheinander auf eines der abgebildeten Symbole. Der „Gedankenleser“ schreibt ohne Sichtkontakt mit der Versuchsperson die Symbole der Reihe nach auf. $44\,\% = \frac{44}{100}$

a) Zeichne das zugehörige Baumdiagramm und gib die Ergebnismenge S an.

b) Berechne die Wahrscheinlichkeit dafür, dass die drei Symbole „↑ ✖ ◆“ zufällig richtig geraten werden.

c) Spiele das Zufallsexperiment in Partnerarbeit nach. Lasse dazu deinen Partner zunächst eine Auswahl der drei Symbole der Reihe nach aufschreiben, versuche du dann die Symbole zu erraten und schreibe sie ebenfalls auf.
Mit wie viel Übereinstimmungen kannst du bei 50 Durchführungen des Zufallsexperimentes rechnen? Kannst du auch Gedanken lesen?

4 Ein Würfel wird zweimal nacheinander geworfen. Zeichne das zugehörige Baumdiagramm und berechne die Wahrscheinlichkeiten folgender Ereignisse:

E_1: Die Summe der Augenzahlen ist sechs.
E_2: Die Summe der Augenzahlen ist acht.
E_3: Die Differenz der Augenzahlen ist zwei.
E_4: Die Augenzahlen unterscheiden sich um mindestens zwei.
E_5: Das Produkt der Augenzahlen ist zwölf.
E_6: Es wird Pasch gewürfelt.

5 Auf der Entbindungsstation eines Krankenhauses werden an einem Tag vier Kinder geboren.

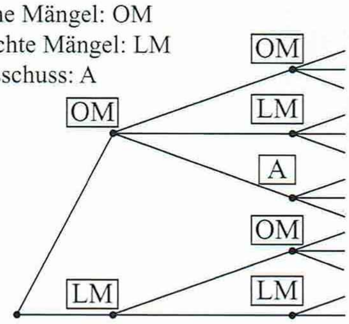
a) Zeichne das zugehörige Baumdiagramm.

b) Wie groß ist die Wahrscheinlichkeit dafür, dass unter den vier Kindern genau zwei (drei, vier) Mädchen sind? Die Wahrscheinlichkeit für die Geburt eines Mädchens ist etwa so groß wie für einen Jungen.

6 Bei der Produktion von Siliciumscheiben für die Herstellung elektronischer Schaltungen ist die Siliciumscheibe nur in 60 % aller Fälle zu gebrauchen. Es werden vier Scheiben überprüft. Wie groß ist die Wahrscheinlichkeit dafür, dass zwei (drei, vier) Scheiben gebrauchsfähig sind?

7 In einer Fabrik für Damenoberbekleidung werden Blusen genäht. Von den hergestellten Blusen sind 80 % ohne Mängel, 18 % haben leichte Mängel und 2 % sind Ausschuss. Der Produktion werden nacheinander drei Blusen entnommen. Bestimme mithilfe des zugehörigen Baumdiagramms die Wahrscheinlichkeit dafür, dass zwei Blusen ohne Mängel sind und die andere Bluse nur leichte Mängel aufweist.

Ohne Mängel: OM
Leichte Mängel: LM
Ausschuss: A



8 Zwei zufällig ausgewählte Europäer werden auf ihre Blutgruppe untersucht. Berechne die Wahrscheinlichkeiten folgender Ereignisse:

$44\,\% = \frac{44}{100} = 0{,}44$

E_1: Beide haben Blutgruppe A (AB, B, 0).
E_2: Eine Person hat Blutgruppe A, die andere Blutgruppe AB (B und 0).
E_3: Beide Personen haben unterschiedliche Blutgruppen.

Verteilung der Blutgruppen in Europa

Blutgruppe A	44 %
Blutgruppe AB	6 %
Blutgruppe B	14 %
Blutgruppe 0	36 %

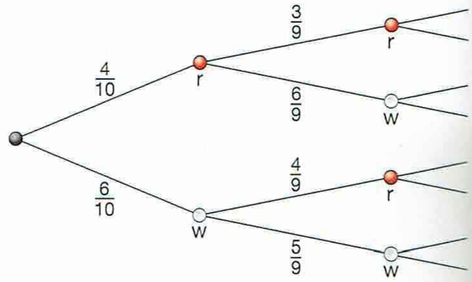
9 Ein neu entwickeltes Medikament wird bei vier zufällig ausgewählten Patienten mit deren Einwilligung angewendet. Das Medikament soll zu 95 % positiv wirken.

a) Berechne die Wahrscheinlichkeit dafür, dass das Medikament bei vier (drei) Patienten positiv wirkt. Gehe dabei davon aus, dass der angegebene Prozentsatz richtig ist.

b) Das Medikament zeigt nur bei zwei Patienten eine positive Wirkung. Wie sollen die Ärzte dieses Ergebnis bewerten?

Ziehen ohne Zurücklegen

1 In einer Urne befinden sich sechs weiße und vier rote gleichartige Kugeln. Es werden nacheinander drei Kugeln gezogen. Die Farbe jeder Kugel wird notiert, die Kugeln werden nicht in die Urne zurückgelegt.



a) Übertrage das Baumdiagramm in dein Heft und vervollständige es. Beachte, dass nach der ersten Ziehung nur noch neun Kugeln in der Urne sind.

b) Gib die Ergebnismenge S an und berechne die Wahrscheinlichkeiten aller Ergebnisse.

c) Gib die folgenden Ereignisse jeweils als Teilmenge von S an und berechne ihre Wahrscheinlichkeiten wie im Beispiel:

E_1: Es werden genau zwei rote Kugeln gezogen.

E_2: Es werden genau drei weiße Kugeln gezogen.

E_3: Es werden höchstens zwei rote Kugeln gezogen.

E_4: Es wird mindestens eine rote Kugel gezogen.

E: Es wird genau eine rote Kugel gezogen.

$E = \{(r, w, w);\ (w, r, w);\ (w, w, r)\}$

$$P(E) = \frac{4}{10} \cdot \frac{6}{9} \cdot \frac{5}{8} + \frac{6}{10} \cdot \frac{4}{9} \cdot \frac{5}{8} + \frac{6}{10} \cdot \frac{5}{9} \cdot \frac{4}{8}$$

$$P(E) = \frac{120}{720} = \frac{1}{6}$$

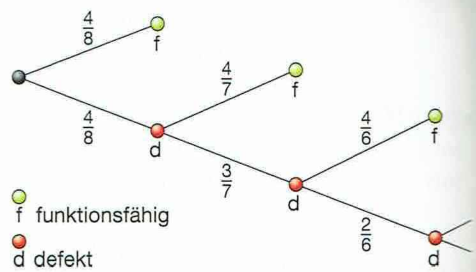
2 Arne, Mirko, Thilo und Serkan machen eine Fahrradtour. Am ersten Tag losen sie aus, welche beiden Jungen die Zelte transportieren müssen.

a) Zeichne das zugehörige Baumdiagramm mit den entsprechenden Wahrscheinlichkeiten.

b) Wie groß ist die Wahrscheinlichkeit dafür, dass Mirko und Arne jeweils ein Zelt transportieren müssen?

3 Unter acht Reisenden befinden sich drei Schmuggler. Drei der Reisenden werden vom Zoll kontrolliert. Bestimme mithilfe des zugehörigen Baumdiagramms die Wahrscheinlichkeit dafür, dass unter den kontrollierten Personen kein (ein) Schmuggler ist.

4 Von acht Glühlampen in einem Karton sind vier defekt. Eine funktionsfähige Glühlampe soll herausgefunden werden.



a) Übertrage das Baumdiagramm in dein Heft und vervollständige es.

b) Berechne die Wahrscheinlichkeit dafür, dass höchstens zwei Glühlampen getestet werden müssen, um eine funktionsfähige zu erhalten.

c) Wie groß ist die Wahrscheinlichkeit dafür, dass höchstens zwei Glühlampen getestet werden müssen, wenn vier von zehn Glühlampen defekt sind?

Du kannst Pfadregeln auch anwe den, ohne Baumdia- gramm zu zeichnen.