Wurzeln

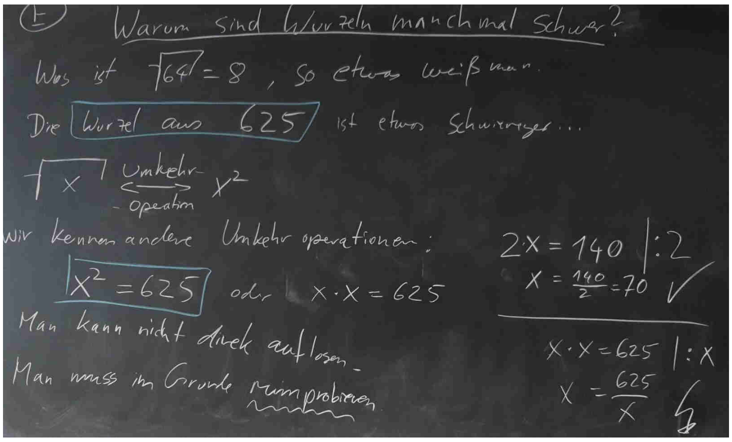
Auch heute fehlt ein Slide. Es ging schlicht um die Definition, was eine Wurzel eigentlich ist.

Bottom line: Das Wurzelziehen kehrt das Quadrieren um („$\sqrt{a}$ ist die Zahl, die mit sich selbst multipliziert (=quadriert) a ergibt“). Die Wurzel von 25 ist 5, genau weil $5 \cdot 5 = 25$. Das ist alles.

Also

$$\sqrt{a}^2 = a$$
$$\sqrt{a^2} = a$$

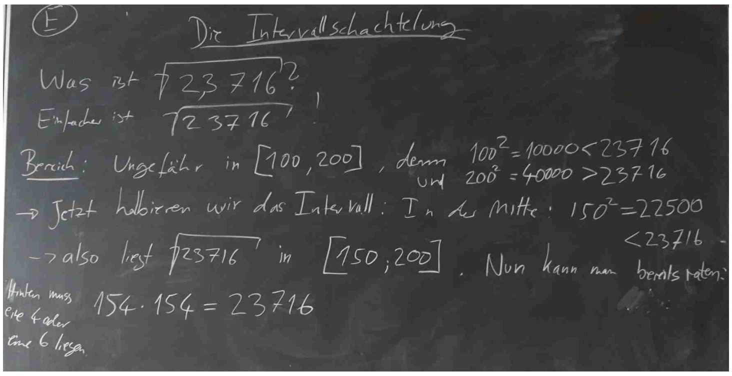
Das gilt für alle positiven Zahlen a. Man muss nur ein bisschen mit dem Vorzeichen aufpassen: Wurzeln sind immer positiv. Aber $-3 \cdot -3 = 9$. Also ist $\sqrt{(-3)^2} = 3$. Also nicht die Zahl, von der wir ausgegangen sind, sondern ihr negatives.



Zusammengefasst: Quadrieren ist einfach. Das Quadrieren wieder rückgängig zu machen ist schwer.

Das ist nicht überall so: Multiplizieren ist einfach. Dividieren aber ist auch einfach, zumindest gibt es Verfahren, die einen immer direkt zum Ziel bringen.

Wurzelziehen läuft immer darauf hinaus, dass man das Ergebnis auswendig kennt oder man herumprobieren muss. Herumprobieren kann man allerdings intelligenter oder nicht so intelligent. Was wir als nächstes machen ist leicht verständlich und wenigstens so halb intelligent.

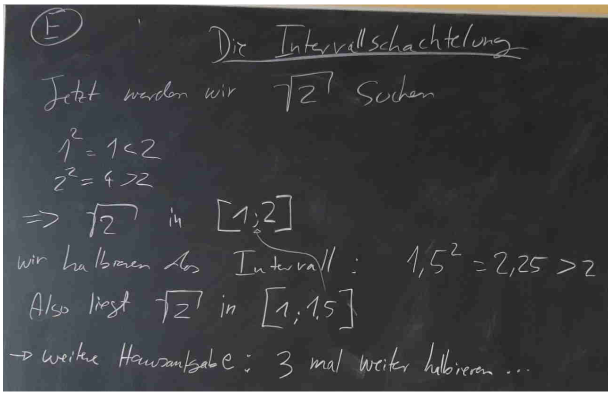


Das ging in der Praxis sogar schneller als geplant, aber man kann offensichtlich auf diese Art beliebig große Wurzeln finden: Man findet zwei Zahlen, so dass das Quadrat der einen zu klein ist und das der anderen zu groß ist. Irgendwo dazwischen muss die gesuchte Wurzel liegen.

Nun halbiert man das Intervall. Ist das Quadrat dieses Mittelwertes größer als die Zahl, deren Wurzel man ziehen möchte, dann macht man mit der unteren Hälfte des Intervalls weiter, sonst mit der oberen.

Auf diese Art kann man die wahre Zahl immer weiter einklemmen. Gibt es eine rationale Zahl als Lösung, findet man sie so.

Nun probieren wir dasselbe mit 2 aus:



Fortsetzung folgt...