

Wurzeln – Rechenregeln und Eigenschaften

Hier die Weiterführung der Intervallschachtelung, um $\sqrt{2}$ zu finden:

<u>E) $\sqrt{2}$: Intervallschachtelung</u>			
Unten	Oben	Intervall	Breite/Länge
• 1	2	$[1; 2]$	1
• 1	$1,5 = \frac{3}{2}$	$[1; 1,5]$	$\frac{1}{2} = 0,5$
• 1,25	1,5	$[1,25; 1,5]$	$0,25 = \frac{1}{4}$
• 1,375	1,5	$[1,375; 1,5]$	$\frac{1}{8} = 0,125$
• 1,375	1,4375	$[1,375; 1,4375]$	$\frac{1}{16}$
⋮			
Wir kommen nie ganz zu $\sqrt{2}$!			

Man kann sich damit zufrieden geben, dass wir in 5 Intervallen nicht bei der Wurzel aus 2 angekommen sind und akzeptieren, was die Bücher sagen, dass es nicht möglich ist, jemals bei $\sqrt{2}$ anzukommen.

Wenn man möchte, kann man aber auch den Beweis nachvollziehen. Wer das möchte, dieses unperfekte Tafelbild aber auf andere Art aufgeschrieben sehen möchte, kann sich im Buch die Seiten 52 und 53 anschauen.

<p><u>E) Kann $\sqrt{2}$ eine rationale Zahl sein?</u></p> <p>wenn ja, dann</p> $\sqrt{2} = \left(\frac{z}{n}\right)^2$ <p>wir quadrieren beide Seiten:</p> $\sqrt{2}^2 = \left(\frac{z}{n}\right)^2$ $2 = \frac{z^2}{n^2} \Rightarrow z^2 = 2 \cdot n^2$ $\sqrt{z^2} = \sqrt{2(n^2)}$ <p>gerade Anzahl Primfaktoren auch $2 \cdot n$ hat eine ungerade Anzahl P.faktoren Diese Gleichung kann also nicht erfüllt werden</p>	$12 = 2 \cdot 6 = 2 \cdot 2 \cdot 3$ 3 dreifach $54 = 2 \cdot 27 = 2 \cdot 3 \cdot 9 = 2 \cdot 3 \cdot 3 \cdot 3$ 3 zweifach $25 = 5 \cdot 5$ 1 zweifach $(54)^2 = (2 \cdot 3 \cdot 3)^2$ $= (2 \cdot 3 \cdot 3 \cdot 3) \cdot (2 \cdot 3 \cdot 3 \cdot 3)$ $= 2 \cdot 3 \cdot 3 \cdot 3 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 3 \cdot 3$ $= \underbrace{2 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 3 \cdot 3 \cdot 3}_{\text{2 Zweie, 6 Dreie}} \cdot 3$ <p>gerade Anzahl Primfaktoren → gilt für jede Quadratzahl!</p>
--	---

Um nachvollziehen zu können, was das zur Folge hat, machen wir uns noch einmal ein paar Eigenschaften von

Brüchen klar:

Die rationalen Zahlen (\mathbb{Q}) sind die Menge der Brüche

- Nicht jeder Bruch kann als endliche Dez.-Zahl geschrieben werden
- \sim kann als periodische Dez. geschrieben werden
- alle Brüche können als endliche oder periodische Dez.-Zahl geschrieben werden.

$\frac{1}{8} = 0,125$ ← endliche Dezimalzahl

$\frac{1}{3} = 0.\bar{3} = 0,333\dots$ → unendliche Dezimalzahl, genauer eine periodische

Das umgekehrte gilt auch: Jede endliche oder periodische Dezimalzahl kann als Bruch geschrieben werden.

Umgekehrt bedeutet das also, dass Zahlen wie $\sqrt{2}$ Zahlen sind, die weder als endliche noch als periodische Dezimalzahlen geschrieben werden können.

Es muss sich also um unendliche, aber *nicht* periodische Dezimalzahlen handeln.

Rechenregeln für Wurzeln

Folgende Rechenregel und folgende **Nichtrechenregel** lässt sich leicht über kleine Beispiele motivieren bzw. widerlegen:

(E) Rechenregeln und Nichtrechenregeln mit Wurzeln (Dos and Don'ts for square roots)

$$\sqrt{16} \cdot \sqrt{9} = 4 \cdot 3 = \boxed{12}$$

$$\sqrt{16 \cdot 9} = \sqrt{144} = \boxed{12}$$

$$\boxed{\sqrt{a \cdot b} = \sqrt{a} \cdot \sqrt{b}} \quad \text{Rechenregel} \quad \text{Do!}$$

$$\sqrt{16} + \sqrt{9} = 4 + 3 = \boxed{7} \quad \text{But X}$$

$$\sqrt{16+9} = \sqrt{25} = \boxed{5}$$

$$\boxed{\sqrt{a+b} \neq \sqrt{a} + \sqrt{b}} \quad \text{Nicht,} \quad \text{Don't!}$$

Für : und - gilt jeweils das analoge.

Diese Regeln zu kennen und mit ihr umgehen zu können, ist für Umformungen recht häufig wichtig und hilfreich.