

Die 4 Ähnlichkeitssätze im Dreieck

Erinnerung: Was heißt Ähnlichkeit?

Wir hatten den Begriff

(E) Weiteres zur Ähnlichkeit

Wenn eine Figur die maßstäbliche Abbildung einer anderen ist, sind beide ähnlich zueinander.

Dreiecke

Zwei \triangle sind auf jeden Fall ähnlich,

① wenn alle 3 Winkelpaare gleich sind.

② $\frac{a}{b} = \frac{a'}{b'} ; \frac{a}{c} = \frac{a'}{c'} ; \frac{b}{c} = \frac{b'}{c'}$
→ alle Seitenverhältnisse sind gleich.

Drei Winkel oder 3 Seitenverhältnisse zu überprüfen, voll anstrengend. Geht das einfacher?
Es geht! Auf 4 Arten sogar.

| Es gibt 4 Spurenweise Ähnlichkeit.

Dreiecke, die die folgenden Eigenschaften teilen, sind ähnlich:

① 2 Winkel (Innenwinkelsumme)

② 2 Seitenverhältnisse

③ Das Verhältnis der Seiten und der Winkel dazwischen

④ Das Verhältnis der Seiten und den Winkel, der der längeren Seite gegenüber liegt.
⇒ 4 Ähnlichkeitssätze !!

Dies sind also die berühmten 4 Ähnlichkeitssätze im Dreieck.

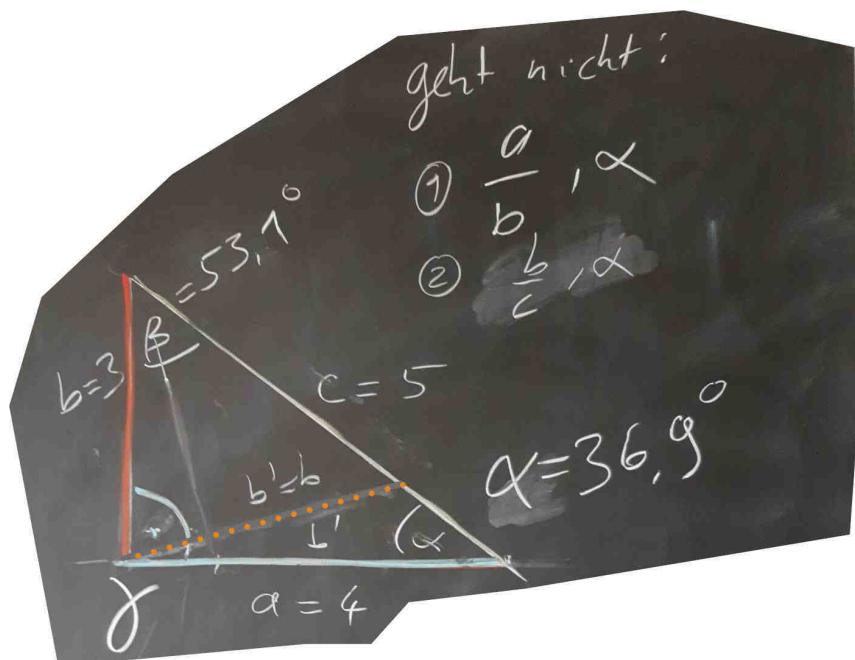
Wieso reichen zwei Seitenverhältnisse aus? Weil man sich das 3. ausrechnen kann. Im folgenden gehen wir davon aus, dass wissen, dass 2 Seitenverhältnisse für 2 Dreiecke bekannt und gleich sind. Wir haben das also so zu lesen, dass a und b Seitenlängen in einem Dreieck sind und a' und b' Seitenlängen in einem anderen Dreieck.

$$\begin{aligned} \textcircled{1} \quad \frac{a}{b} = \frac{a'}{b'} & \quad \frac{a}{c} = \frac{a'}{c'} \cdot \frac{b}{b'} = \frac{a'}{b'} \cdot \frac{b}{c} \\ \textcircled{2} \quad \frac{b}{c} = \frac{b'}{c'} & \quad \textcircled{1} \quad a = \frac{a'}{b'} \cdot b \quad \text{zusammen} \\ b = \left(\frac{b'}{c'}\right) c \cdot \frac{b}{c} & \Rightarrow c = b \frac{c'}{b'} \end{aligned}$$

$$\frac{a}{c} = \frac{a'}{c'}$$

Es folgt also rechts unten: Das 3. Seitenverhältnis ist auch gleich.

Dann hatten wir uns überlegt, wieso der 4. Ähnlichkeitssatz so speziell sein muss: Es reicht nicht aus, ein Seitenverhältnis, zum Beispiel a/b zu haben und im Bild den Winkel α :



Die gestrichelte Linie hat genau die Länge der ursprünglichen Seite b .

Das Dreieck, das aus der gestrichelten Seite, der Seite a und dem Winkel α entsteht, hat genau dasselbe Seitenverhältnis a/b und denselben Winkel α , ist aber offensichtlich ganz und gar nicht ähnlich zum Ausgangsdreieck. Wenn wir aber a/b und einen der beiden Winkel β oder γ kennen, ist solch eine Konstruktion nicht möglich.