

## Irrationale Zahlen

es Quadrats  
 $\text{cm}^2$ , 29  $\text{cm}^2$ ).  
anderfolgen-  
legt die Maßzah-  
uadrats?

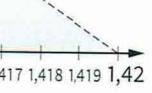
e du für die Zah-  
em Komma

2, ...

2,6 ...

ste Nachkom-  
an.

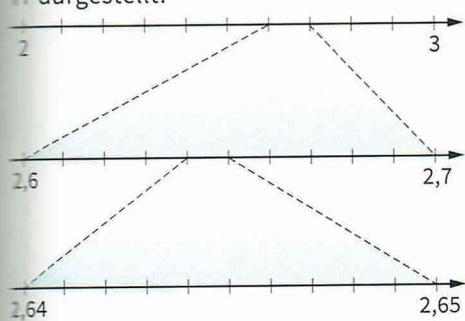
stelle bestimmt  
die einzelnen



größeren Inter-  
alle wird  
halten wir

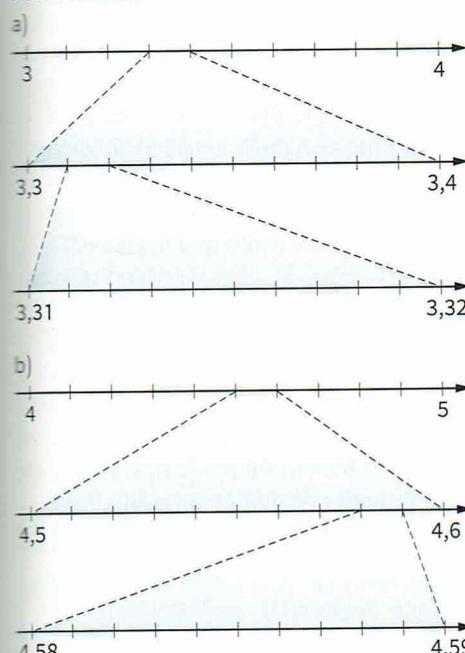
espiel ist

- 5** In der Zeichnung sind die ersten drei Schritte einer Intervallschachtelung für  $\sqrt{7}$  dargestellt.



- a) Gib die drei dargestellten Intervalle an.  
b) Bestimme das vierte Intervall dieser Intervallschachtelung.  
c) Begründe, dass  $\sqrt{7}$  in jedem dieser Intervalle liegt.

- 6** Angegeben sind die ersten drei Schritte einer Intervallschachtelung für die Quadratwurzel einer natürlichen Zahl. Bestimme die natürliche Zahl.



- |              |             |
|--------------|-------------|
| c) [4; 5]    | d) [4; 5]   |
| [4,3; 4,4]   | [4,7; 4,8]  |
| [4,35; 4,36] | [4,79; 4,8] |
- 
- |                |                |
|----------------|----------------|
| e) [10; 11]    | f) [14; 15]    |
| [10,7; 10,8]   | [14,5; 14,6]   |
| [10,72; 10,73] | [14,52; 14,53] |

- 7** a) Für  $\sqrt{3}$  zeigt der Taschenrechner die Zahl 1,732050808 an. Begründe mithilfe der dargestellten Rechnung, dass diese Zahl nicht der genaue Wert für  $\sqrt{3}$  ist.

$$1,732050808 \cdot 1,732050808$$

1732050808

12124355656

5196152424

3464101616

8660254040

13856406464

13856406464

3,000000001493452864

- b) Gib die Zahl 1,732050808 in deinen Taschenrechner ein und quadriere sie. Wasstellst du fest?

- c) Ein weiterer Taschenrechner zeigt das folgende Ergebnis an:

$$\sqrt{3} = 1,732050807569$$

Wie lautet die letzte Ziffer, wenn du das Ergebnis quadrierst?



Die meisten Quadratwurzeln sind Zahlen, die nicht als endliche oder periodische Dezimalzahlen geschrieben werden können. Solche Zahlen heißen **irrationale Zahlen**.

Für irrationale Zahlen können Näherungswerte bestimmt werden, deren Genauigkeit schrittweise verbessert werden kann.

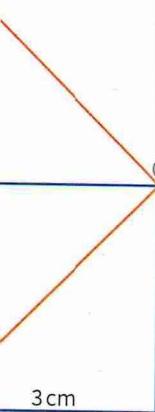
$$\sqrt{2} = 1,414213562 \dots$$

$$\sqrt{5} = 2,236067977 \dots$$

Die rationalen und die irrationalen Zahlen bilden zusammen die **reellen Zahlen**. Die Menge aller reellen Zahlen wird mit  $\mathbb{R}$  bezeichnet.

## Rationale und irrationale Zahlen

Das blaue Quadrat  $\overline{AC}$  gezeichnet mit ACEF konstruiert.



des Quadrats  
die Seitenlänge  
ist.

gilt für  $\sqrt{18}$  die  
im ist diese  
Seitenlänge  
Dezimalzahl  
nach dem  
Maßzahl der  
Quadrats sein?

rat ABCD mit  
diagonale  $\overline{AC}$

die  $\overline{AC}$  mithilfe

unge der Streichlinien

mithilfe einer  
Dezimalzahl  
die Länge der  
nicht angeben.

- 3** Welche Quadratwurzeln sind rationale Zahlen, welche sind irrationale Zahlen?

$\sqrt{11}$	$\sqrt{81}$	$\sqrt{9}$
$\sqrt{12}$	$\sqrt{48}$	$\sqrt{49}$
$\sqrt{0,25}$	$\sqrt{0,5}$	$\sqrt{2,25}$
$\sqrt{1,25}$		$\sqrt{6,25}$
$\sqrt{10}$	$\sqrt{1}$	$\sqrt{100}$
$\sqrt{0,09}$		$\sqrt{0,1}$
		$\sqrt{0,9}$

- 4** Setze < oder > ein.

a) $\sqrt{32} \quad <$ 6	b) $\sqrt{120} \quad >$ 11
$\sqrt{84} \quad <$ 9	$\sqrt{145} \quad <$ 12
$\sqrt{53} \quad <$ 7	$\sqrt{170} \quad <$ 13
c) $\sqrt{200} \quad <$ 14	d) $\sqrt{905} \quad <$ 30
$\sqrt{250} \quad <$ 16	$\sqrt{395} \quad <$ 20
$\sqrt{222} \quad <$ 15	$\sqrt{1000} \quad <$ 31

- 5** Gib an, welche Zahl am nächsten liegt

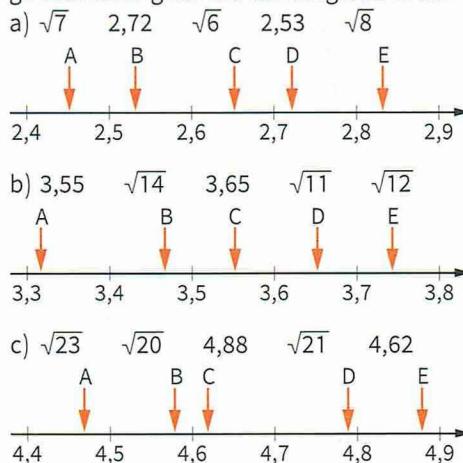
a) bei $\sqrt{85}$ : 8    9    10    11
b) bei $\sqrt{110}$ : 9    10    11    12
c) bei $\sqrt{56}$ : 6,5    7    7,5    8
d) bei $\sqrt{133}$ : 11    11,5    12    12,5
e) bei $\sqrt{97}$ : 9,2    9,4    9,6    9,8
f) bei $\sqrt{50}$ : 6,8    7,1    7,4    7,7

Überprüfe dein Ergebnis mit dem Taschenrechner.

- 6** Gib wie im Beispiel die beiden aufeinander folgenden natürlichen Zahlen an, zwischen denen die Quadratwurzel liegt. Überlege zunächst, zwischen welchen Quadratzahlen der Radikand liegt.

$\square < \sqrt{78} < \square$	a) $\sqrt{89}$ $\sqrt{42}$
64 < 78 < 81	b) $\sqrt{31}$ $\sqrt{67}$
$8^2 < 78 < 9^2$	c) $\sqrt{150}$ $\sqrt{200}$
8 < $\sqrt{78}$ < 9	

- 5** Ordne jeder reellen Zahl die zugehörige Markierung auf der Zahlengeraden zu.



- 6** a) Gib drei irrationale Quadratwurzeln an, die zwischen 5 und 6 liegen.  
b) Bestimme alle irrationalen Quadratwurzeln, die zwischen 3 und 4 liegen.  
c) Wie viele irrationale Quadratwurzeln liegen zwischen 6 und 7?

- 7** a) Gib drei rationale Zahlen an,  
  - die kleiner als  $\sqrt{2}$  sind.
  - die zwischen 2 und  $\sqrt{5}$  liegen.
  - die zwischen  $-\sqrt{2}$  und  $-\sqrt{3}$  liegen.
b) Gib drei irrationale Zahlen an,  
  - die kleiner als -6 sind.
  - die größer als  $\sqrt{2}$  sind.
  - die zwischen -10 und -11 liegen.

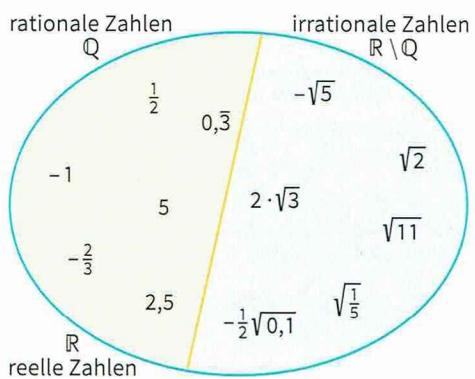
- 8** a) Ein Rechteck ist 18 cm lang und 8 cm breit (16 cm lang und 5 cm breit, 2,7 m lang und 1,2 m breit, 2,4 m lang und 1,5 m breit).

Bestimme die Seitenlänge des Quadrats, das den gleichen Flächeninhalt wie das Rechteck hat. Gib dabei an, ob die Maßzahl der Seitenlänge eine rationale oder eine irrationale Zahl ist.

- b) Gib die Länge und die Breite eines Rechtecks so an, dass das flächengleiche Quadrat eine Seitenlänge mit irrationaler (rationaler) Maßzahl hat.

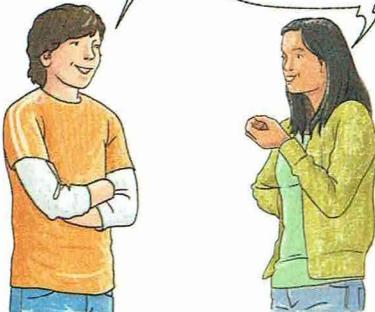
## Rationale und irrationale Zahlen

**9** Die Menge der reellen Zahlen besteht aus den rationalen und den irrationalen Zahlen.



Welche Aussagen sind wahr, welche sind falsch?

- Alle Brüche sind rationale Zahlen. ✓
- Alle negativen Zahlen sind irrationale Zahlen. ✗
- Alle reellen Zahlen sind rationale Zahlen. ✗
- Alle irrationalen Zahlen sind reelle Zahlen. ✓
- Alle unendlichen Dezimalzahlen sind irrationale Zahlen. ✗
- Alle Dezimalzahlen sind reelle Zahlen. ✓



**10** Überlege, ob die Dezimalzahl eine rationale oder eine irrationale Zahl darstellen kann.

- 0,27272727272727272...
- 1,4142135623730950488...
- 0,1538461538461538461...
- 1,26829268292682926829...
- 0,1001000100001000001...
- 0,2040608010012014016...

**11** Welche Zahlen sind rational, welche irrational?

$\sqrt{0,36} + \sqrt{2,25}$	$7 \cdot \sqrt{3}$
$\sqrt{5} + \sqrt{4}$	$5 \cdot \sqrt{5}$
$7 \cdot \sqrt{16}$	$\sqrt{6,25} - \sqrt{4,84}$
$1 + \sqrt{2}$	$4 - \sqrt{5}$
$6 \cdot \sqrt{9}$	$8 : \sqrt{2}$
$9 \cdot \sqrt{6}$	$8 : \sqrt{4}$
$\sqrt{0,9} + \sqrt{0,4}$	$\sqrt{1,96} + \sqrt{1,69}$
$3 + \sqrt{0,25}$	$\sqrt{2} \cdot \sqrt{2}$
$\sqrt{16} : 3$	$\sqrt{15} : 3$
$\sqrt{36} : 9$	$\sqrt{18} : 2$
	$\sqrt{9} : 36$

$$\sqrt{0,36} + \sqrt{2,25} = 0,6 + 1,5 = 2,1$$

$\sqrt{0,36} + \sqrt{2,25}$  ist eine rationale Zahl.

$$7 \cdot \sqrt{3} = 7 \cdot 1,73205\dots = 12,12435\dots$$

$7 \cdot \sqrt{3}$  ist eine irrationale Zahl.

Vervollständige die Tabelle im Heft.

rationale Zahlen	irrationale Zahlen
$\sqrt{0,36} + \sqrt{2,25}$	$7 \cdot \sqrt{3}$



# Rechnen mit Quadratwurzeln

**1** Berechne und vergleiche die Ergebnisse. Was stellst du fest?

$$\begin{array}{l} \sqrt{16} + \sqrt{9} \\ \text{und} \\ \sqrt{16+9} \end{array}$$

$$\begin{array}{l} \sqrt{36} + \sqrt{64} \\ \text{und} \\ \sqrt{36+64} \end{array}$$

$$\begin{array}{l} \sqrt{169} - \sqrt{25} \\ \text{und} \\ \sqrt{169-25} \end{array}$$

$$\begin{array}{l} \sqrt{289} - \sqrt{64} \\ \text{und} \\ \sqrt{289-64} \end{array}$$

$$\begin{array}{l} \sqrt{16} \cdot \sqrt{9} \\ \text{und} \\ \sqrt{16 \cdot 9} \end{array}$$

$$\begin{array}{l} \sqrt{81} \cdot \sqrt{4} \\ \text{und} \\ \sqrt{81 \cdot 4} \end{array}$$

$$\begin{array}{l} \sqrt{100} : \sqrt{4} \\ \text{und} \\ \sqrt{100 : 4} \end{array}$$

$$\begin{array}{l} \sqrt{225} : \sqrt{9} \\ \text{und} \\ \sqrt{225 : 9} \end{array}$$

Für zwei verschiedene positive reelle Zahlen  $a$  und  $b$  gilt:

$$\begin{aligned} \sqrt{a} + \sqrt{b} &\neq \sqrt{a+b} \\ \sqrt{a} - \sqrt{b} &\neq \sqrt{a-b} \end{aligned}$$

Für alle positiven reellen Zahlen  $a$  und  $b$  gilt:

$$\begin{aligned} \sqrt{a} \cdot \sqrt{b} &= \sqrt{a \cdot b} \\ \sqrt{a} : \sqrt{b} &= \sqrt{a : b} \end{aligned}$$

Das Produkt von zwei Quadratwurzeln kann man zu einer Wurzel zusammenfassen, ...

den Quotienten auch, ...

die Summe oder die Differenz von zwei Quadratwurzeln aber nicht.



**3** Welche Fehler hat Fabian gemacht?

$$\textcircled{1} \quad \sqrt{16} + \sqrt{9} = \sqrt{25} = 5$$

$$\textcircled{2} \quad \sqrt{100} - \sqrt{36} = \sqrt{64} = 8$$

$$\textcircled{3} \quad \sqrt{2} + \sqrt{2} = \sqrt{4} = 2$$

$$\textcircled{4} \quad \sqrt{4} + \sqrt{4} = \sqrt{8} = 4$$

$$\textcircled{5} \quad \sqrt{25} < \sqrt{25} = \sqrt{0} = 0$$

**4** Berechne jeweils die Quadratwurzel wie in den Beispielen.

$$\sqrt{3600} = \sqrt{36 \cdot 100}$$

$$= \sqrt{36} \cdot \sqrt{100}$$

$$= 6 \cdot 10$$

$$= 60$$

$$\sqrt{360\,000} = \sqrt{36 \cdot 10\,000}$$

$$= \sqrt{36} \cdot \sqrt{10\,000}$$

$$= 6 \cdot 100$$

$$= 600$$

$$\text{a) } \frac{\sqrt{4900}}{\sqrt{8100}} \quad \text{b) } \frac{\sqrt{12100}}{\sqrt{14400}} \quad \text{c) } \frac{\sqrt{90\,000}}{\sqrt{40\,000}}$$

$$\text{d) } \frac{\sqrt{160\,000}}{\sqrt{640\,000}} \quad \text{e) } \frac{\sqrt{1\,690\,000}}{\sqrt{6\,250\,000}}$$

$$\text{f) } \frac{\sqrt{1\,210\,000}}{\sqrt{2\,250\,000}} \quad \text{g) } \frac{\sqrt{225\,000\,000}}{\sqrt{2\,500\,000\,000}}$$

**5** Berechne die Produkte, indem du die beiden Wurzeln zu einer Wurzel zusammenfasst.

$$\sqrt{2} \cdot \sqrt{50} = \sqrt{2 \cdot 50} = \sqrt{100} = 10$$

$$\sqrt{75} \cdot \sqrt{3} = \sqrt{75 \cdot 3} = \sqrt{225} = 15$$

$$\text{a) } \frac{\sqrt{2} \cdot \sqrt{32}}{\sqrt{2} \cdot \sqrt{72}} \quad \text{b) } \frac{\sqrt{3} \cdot \sqrt{27}}{\sqrt{48} \cdot \sqrt{3}} \quad \text{c) } \frac{\sqrt{18} \cdot \sqrt{2}}{\sqrt{6} \cdot \sqrt{54}}$$

$$\text{d) } \frac{\sqrt{5} \cdot \sqrt{80}}{\sqrt{6} \cdot \sqrt{150}} \quad \text{e) } \frac{\sqrt{7} \cdot \sqrt{28}}{\sqrt{72} \cdot \sqrt{8}} \quad \text{f) } \frac{\sqrt{320} \cdot \sqrt{5}}{\sqrt{11} \cdot \sqrt{44}}$$

**6** Fasse zu einer Wurzel zusammen und berechne.

$$\text{a) } \frac{\sqrt{6} \cdot \sqrt{8} \cdot \sqrt{12}}{\sqrt{10} \cdot \sqrt{5} \cdot \sqrt{2}} \quad \text{b) } \frac{\sqrt{2,5} \cdot \sqrt{5} \cdot \sqrt{2}}{\sqrt{4,5} \cdot \sqrt{6} \cdot \sqrt{3}}$$

$$\text{c) } \frac{\sqrt{6} \cdot \sqrt{0,5} \cdot \sqrt{7,5} \cdot \sqrt{2,5}}{\sqrt{2,4} \cdot \sqrt{0,5} \cdot \sqrt{4,8} \cdot \sqrt{0,25}}$$

**2** Berechne.

$$\text{a) } \frac{\sqrt{25} \cdot \sqrt{49}}{\sqrt{36} \cdot \sqrt{81}}$$

$$\text{b) } \frac{\sqrt{16} \cdot \sqrt{225}}{\sqrt{64} \cdot \sqrt{121}}$$

$$\text{c) } \frac{\sqrt{169} \cdot \sqrt{196}}{\sqrt{100} \cdot \sqrt{289}}$$

$$\text{d) } \frac{\sqrt{324} \cdot \sqrt{144}}{\sqrt{361} \cdot \sqrt{576}}$$

# Rechnen mit Quadratwurzeln

**7** Berechne.

a)  $\sqrt{\frac{81}{16}} = \sqrt{\frac{81}{144}} : \sqrt{\frac{16}{144}} = \frac{9}{12} = \frac{3}{4}$

b)  $\sqrt{\frac{324}{441}} = \sqrt{\frac{324}{441}} : \sqrt{\frac{36}{49}} = \frac{18}{21} = \frac{6}{7}$

**8** Ziehe die Quadratwurzel aus den Brüchen.

$$\sqrt{\frac{64}{81}} = \frac{\sqrt{64}}{\sqrt{81}} = \frac{8}{9}$$

Beim Addieren und Subtrahieren kannst du gleiche Wurzeln zusammenfassen.



**11** Fasse zusammen.

a)  $\sqrt{\frac{4}{9}} = \frac{\sqrt{4}}{\sqrt{9}} = \frac{2}{3}$

b)  $\sqrt{\frac{81}{100}} = \frac{\sqrt{81}}{\sqrt{100}} = \frac{9}{10}$

c)  $\sqrt{\frac{144}{289}} = \frac{\sqrt{144}}{\sqrt{289}} = \frac{12}{17}$

d)  $\sqrt{\frac{361}{900}} = \frac{\sqrt{361}}{\sqrt{900}} = \frac{19}{30}$

$\sqrt{\frac{16}{25}} = \frac{\sqrt{16}}{\sqrt{25}} = \frac{4}{5}$

$\sqrt{\frac{169}{196}} = \frac{\sqrt{169}}{\sqrt{196}} = \frac{13}{14}$

$\sqrt{\frac{400}{529}} = \frac{\sqrt{400}}{\sqrt{529}} = \frac{20}{23}$

$\sqrt{\frac{289}{900}} = \frac{\sqrt{289}}{\sqrt{900}} = \frac{17}{30}$

$\sqrt{\frac{36}{49}} = \frac{\sqrt{36}}{\sqrt{49}} = \frac{6}{7}$

$\sqrt{\frac{121}{225}} = \frac{\sqrt{121}}{\sqrt{225}} = \frac{11}{15}$

$\sqrt{\frac{324}{625}} = \frac{\sqrt{324}}{\sqrt{625}} = \frac{18}{25}$

$\sqrt{\frac{256}{729}} = \frac{\sqrt{256}}{\sqrt{729}} = \frac{16}{27}$

$5\sqrt{7} + 3\sqrt{7} = 8\sqrt{7}$

$9\sqrt{5} - 6\sqrt{5} = 3\sqrt{5}$

$9\sqrt{6} - 3\sqrt{6} - 2\sqrt{6} = 4\sqrt{6}$

$8\sqrt{3} + 6\sqrt{5} + 2\sqrt{5} - 3\sqrt{3} = 5\sqrt{3} + 8\sqrt{5}$

**9** Berechne die Quadratwurzel.

$$\sqrt{0,64} = \sqrt{\frac{64}{100}} = \frac{\sqrt{64}}{\sqrt{100}} = \frac{8}{10} = 0,8$$

2 Stellen nach dem Komma

1 Stelle nach dem Komma

$$\sqrt{0,0064} = \sqrt{\frac{64}{10000}} = \frac{\sqrt{64}}{\sqrt{10000}} = \frac{8}{100} = 0,08$$

4 Stellen nach dem Komma

2 Stellen nach dem Komma

a)  $11\sqrt{2} + 7\sqrt{2} = 18\sqrt{2}$

$9\sqrt{7} - 2\sqrt{7} = 7\sqrt{7}$

$8\sqrt{6} + 2\sqrt{6} = 10\sqrt{6}$

b)  $9\sqrt{3} + 2\sqrt{3} + 4\sqrt{3} = 15\sqrt{3}$

$11\sqrt{5} - 2\sqrt{5} - 6\sqrt{5} = 3\sqrt{5}$

$17\sqrt{8} - 6\sqrt{8} + 2\sqrt{8} = 11\sqrt{8}$

c)  $6\sqrt{11} + 4\sqrt{11} - 6\sqrt{11} - 9\sqrt{11} + 2\sqrt{11} = -3\sqrt{11}$

$3\sqrt{13} - 6\sqrt{13} + 11\sqrt{13} - 5\sqrt{13} + \sqrt{13} = 7\sqrt{13}$

$12\sqrt{17} + 4\sqrt{17} - 3\sqrt{17} + \sqrt{17} - 11\sqrt{17} = 6\sqrt{17}$

d)  $6\sqrt{19} + 11\sqrt{17} - 6\sqrt{19} - 4\sqrt{17} + 2\sqrt{19} = 7\sqrt{17}$

$3\sqrt{23} + 6\sqrt{10} + 11\sqrt{23} - 5\sqrt{10} + \sqrt{23} = 17\sqrt{23}$

$12\sqrt{6} + 4\sqrt{6} + 13\sqrt{15} + \sqrt{6} - 11\sqrt{15} = 16\sqrt{6} + 12\sqrt{15}$

a)  $\sqrt{0,04} = \sqrt{\frac{4}{100}} = \frac{\sqrt{4}}{\sqrt{100}} = \frac{2}{10} = 0,2$

$\sqrt{0,16} = \sqrt{\frac{16}{100}} = \frac{\sqrt{16}}{\sqrt{100}} = \frac{4}{10} = 0,4$

$\sqrt{0,81} = \sqrt{\frac{81}{100}} = \frac{\sqrt{81}}{\sqrt{100}} = \frac{9}{10} = 0,9$

b)  $\sqrt{1,96} = \sqrt{\frac{196}{100}} = \frac{\sqrt{196}}{\sqrt{100}} = \frac{14}{10} = 1,4$

$\sqrt{2,25} = \sqrt{\frac{225}{100}} = \frac{\sqrt{225}}{\sqrt{100}} = \frac{15}{10} = 1,5$

$\sqrt{0,0036} = \sqrt{\frac{36}{10000}} = \frac{\sqrt{36}}{\sqrt{10000}} = \frac{6}{100} = 0,06$

c)  $\sqrt{0,0049} = \sqrt{\frac{49}{10000}} = \frac{\sqrt{49}}{\sqrt{10000}} = \frac{7}{100} = 0,07$

$\sqrt{0,0121} = \sqrt{\frac{121}{10000}} = \frac{\sqrt{121}}{\sqrt{10000}} = \frac{11}{100} = 0,11$

d)  $\sqrt{0,000004} = \sqrt{\frac{4}{1000000}} = \frac{\sqrt{4}}{\sqrt{1000000}} = \frac{2}{1000} = 0,002$

$\sqrt{0,000025} = \sqrt{\frac{25}{1000000}} = \frac{\sqrt{25}}{\sqrt{1000000}} = \frac{5}{1000} = 0,005$

$\sqrt{0,000144} = \sqrt{\frac{144}{1000000}} = \frac{\sqrt{144}}{\sqrt{1000000}} = \frac{12}{1000} = 0,012$

e)  $\sqrt{0,000169} = \sqrt{\frac{169}{1000000}} = \frac{\sqrt{169}}{\sqrt{1000000}} = \frac{13}{1000} = 0,0013$

$\sqrt{0,000625} = \sqrt{\frac{625}{1000000}} = \frac{\sqrt{625}}{\sqrt{1000000}} = \frac{25}{1000} = 0,0025$

$\sqrt{0,00000009} = \sqrt{\frac{9}{10000000000}} = \frac{\sqrt{9}}{\sqrt{10000000000}} = \frac{3}{1000000} = 0,000003$

**10** Berechne die Quotienten, indem du die beiden Wurzeln zu einer Wurzel zusammenfasst.

$\sqrt{80} : \sqrt{5} = \sqrt{80 : 5} = \sqrt{16} = 4$

$\sqrt{75} : \sqrt{3} = \sqrt{75 : 3} = \sqrt{25} = 5$

**12** Löse die Klammern auf.

$$\begin{aligned} & \sqrt{3}(\sqrt{12} + \sqrt{27}) \\ &= \sqrt{3} \cdot \sqrt{12} + \sqrt{3} \cdot \sqrt{27} \\ &= \sqrt{36} + \sqrt{81} \\ &= 6 + 9 \\ &= 15 \end{aligned}$$

Zwischen Klammer und Wurzelzeichen darfst du den Malpunkt weglassen.



a)  $\sqrt{162} : \sqrt{2} = \sqrt{162 : 2} = \sqrt{81} = 9$

$\sqrt{98} : \sqrt{2} = \sqrt{98 : 2} = \sqrt{49} = 7$

b)  $\sqrt{300} : \sqrt{3} = \sqrt{300 : 3} = \sqrt{100} = 10$

$\sqrt{192} : \sqrt{3} = \sqrt{192 : 3} = \sqrt{64} = 8$

c)  $\sqrt{242} : \sqrt{2} = \sqrt{242 : 2} = \sqrt{121} = 11$

$\sqrt{108} : \sqrt{3} = \sqrt{108 : 3} = \sqrt{36} = 6$

d)  $\sqrt{150} : \sqrt{6} = \sqrt{150 : 6} = \sqrt{25} = 5$

$\sqrt{405} : \sqrt{5} = \sqrt{405 : 5} = \sqrt{81} = 9$

e)  $\sqrt{847} : \sqrt{7} = \sqrt{847 : 7} = \sqrt{121} = 11$

$\sqrt{275} : \sqrt{11} = \sqrt{275 : 11} = \sqrt{25} = 5$

a)  $\sqrt{5}(\sqrt{5} + \sqrt{20}) = \sqrt{5} \cdot \sqrt{5} + \sqrt{5} \cdot \sqrt{20} = 5 + \sqrt{100} = 5 + 10 = 15$

b)  $\sqrt{6}(\sqrt{54} - \sqrt{24}) = \sqrt{6} \cdot \sqrt{54} - \sqrt{6} \cdot \sqrt{24} = \sqrt{324} - \sqrt{144} = 18 - 12 = 6$

c)  $(\sqrt{48} + \sqrt{12}) : \sqrt{3} = (\sqrt{27} + \sqrt{75}) : \sqrt{3} = \sqrt{9} + \sqrt{25} = 3 + 5 = 8$

d)  $(\sqrt{63} - \sqrt{28}) : \sqrt{7} = (\sqrt{96} - \sqrt{24}) : \sqrt{7} = \sqrt{144} - \sqrt{48} = 12 - 8 = 4$

e)  $\sqrt{5}(\sqrt{180} - \sqrt{80}) = (\sqrt{448} - \sqrt{252}) : \sqrt{7} = \sqrt{144} - \sqrt{48} = 12 - 8 = 4$

f)  $\sqrt{20}(\sqrt{125} + \sqrt{5}) = (\sqrt{128} - \sqrt{98}) : \sqrt{7} = \sqrt{64} - \sqrt{49} = 8 - 7 = 1$

$\sqrt{a}$  ist die nichtnegative Zahl b, die beim Quadrieren a ergibt.

Die Zahl b heißt Quadratwurzel aus a.

Die Zahl a heißt Radikand.

Aus negativen Zahlen können wir keine Wurzel ziehen.

$$\sqrt{36} = 6, \quad \text{denn} \quad 6^2 = 36$$

$$\sqrt{121} = 11, \quad \text{denn} \quad 11^2 = 121$$

$$\sqrt{0} = 0, \quad \text{denn} \quad 0^2 = 0$$

$\sqrt[3]{a}$  ist die nichtnegative Zahl b, die als dritte Potenz a ergibt.

Die Zahl b heißt dritte Wurzel aus a.

$$\sqrt[3]{64} = 4, \quad \text{denn} \quad 4^3 = 64$$

$$\sqrt[3]{512} = 8, \quad \text{denn} \quad 8^3 = 512$$

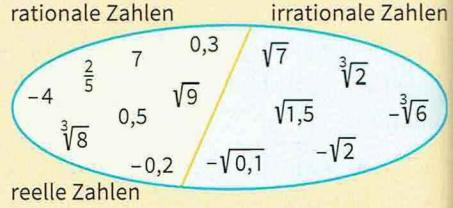
Die meisten Quadratwurzeln und dritten Wurzeln sind Zahlen, die nicht als endliche oder periodische Dezimalzahlen geschrieben werden können. Solche Zahlen heißen **irrationale Zahlen**.

$$\sqrt{2} = 1,41421356 \dots$$

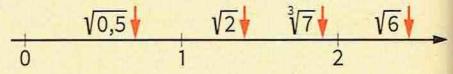
$$\sqrt{6} = 2,44948974 \dots$$

$$\sqrt[3]{7} = 1,91293118 \dots$$

Die rationalen und die irrationalen Zahlen bilden zusammen die **reellen Zahlen**. Die Menge aller reellen Zahlen wird mit  $\mathbb{R}$  bezeichnet.



Alle reellen Zahlen können an der Zahlengeraden dargestellt werden.



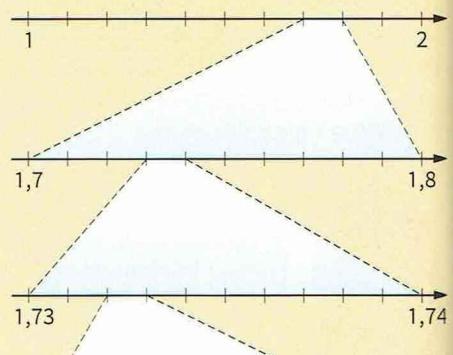
Mit einer Intervallschachtelung können schrittweise beliebig viele Nachkommastellen einer irrationalen Zahl bestimmt werden.

$\sqrt{3}$  liegt im Intervall  $[1,7; 1,8]$ , denn  $1,7^2 = 2,89 < 3$  und  $1,8^2 = 3,24 > 3$ .

$\sqrt{3}$  liegt im Intervall  $[1,73; 1,74]$ , denn  $1,73^2 = 2,9929 < 3$  und  $1,74^2 = 3,0276 > 3$ .

$\sqrt{3}$  liegt im Intervall  $[1,732; 1,733]$ , denn  $1,732^2 = 2,999824 < 3$  und  $1,733^2 = 3,003289 > 3$ .

$$\sqrt{3} = 1,732 \dots$$



Für alle positiven reellen Zahlen a und b gilt:

$$\sqrt{a} \cdot \sqrt{b} = \sqrt{a \cdot b}$$

$$\sqrt{a} : \sqrt{b} = \sqrt{a : b}$$

$$\sqrt{4} \cdot \sqrt{9} = 2 \cdot 3 = 6$$

$$\sqrt{4 \cdot 9} = \sqrt{36} = 6$$

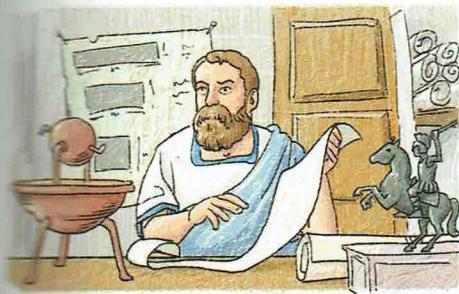
$$\sqrt{100} : \sqrt{4} = 10 : 2 = 5$$

$$\sqrt{100 : 4} = \sqrt{25} = 5$$



## Heron-Verfahren

Bevor es Taschenrechner gab, war es nicht so leicht, gute Näherungswerte für irrationale Quadratwurzeln zu bestimmen. Die griechischen Mathematiker benutzten vor 2000 Jahren ein Verfahren, mit dem sie nur durch Anwenden der Addition und Division schnell gute Näherungswerte für Quadratwurzeln berechnen konnten. Dieses Verfahren ist nach dem Mathematiker und Ingenieur Heron von Alexandria (um 100 n. Chr.) benannt.



**1** Im Beispiel siehst du, wie du mithilfe des Heron-Verfahrens einen Näherungswert für  $\sqrt{15}$  berechnen kannst. Nacheinander werden mehrere Rechtecke bestimmt, die alle den Flächeninhalt  $15 \text{ cm}^2$  haben.

Dabei ist der Unterschied der Seitenlängen beim zweiten Rechteck kleiner als beim ersten, beim dritten noch kleiner als beim zweiten und so weiter, so dass die Gestalt der Rechtecke einem Quadrat immer ähnlicher wird.

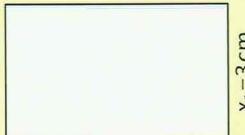
Die Seitenlänge des letzten Rechtecks ist dann eine gute Näherung für  $\sqrt{15}$ .  
 a) Vergleiche das Ergebnis des Heron-Verfahrens mit dem Wert, den dein Taschenrechner für  $\sqrt{15}$  angibt. Beurteile die Genauigkeit des Verfahrens.  
 b) Verbessere das Ergebnis, indem du den zweiten Schritt zwei Mal wiederholst. Runde die Werte, die dein Taschenrechner anzeigt, nicht.

Vergleiche mit dem Ergebnis, das du mit der Wurzel Taste des Taschenrechners erhältst. Was stellst du fest?  
 c) Berechne Näherungswerte für  $\sqrt{24}$  ( $\sqrt{56}, \sqrt{20}, \sqrt{90}, \sqrt{30}$ ) mithilfe des Heron-Verfahrens.

- Wähle zwei natürliche Zahlen  $x_1$  und  $y_1$  als Seitenlängen für ein Rechteck mit dem Flächeninhalt  $A = 15 \text{ cm}^2$ .

$$x_1 = 3$$

$$y_1 = 5$$

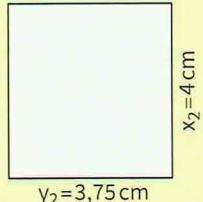


$$y_1 = 5 \text{ cm}$$

- Bestimme zwei Zahlen  $x_2$  und  $y_2$  als Seitenlängen für ein zweites Rechteck mit  $A = 15 \text{ cm}^2$ . Wähle für  $x_2$  das arithmetische Mittel von  $x_1$  und  $y_1$ . Berechne  $y_2$  mithilfe des Flächeninhalts des Rechtecks.

$$x_2 = \frac{3+5}{2} = 4$$

$$y_2 = \frac{15}{4} = 3,75$$

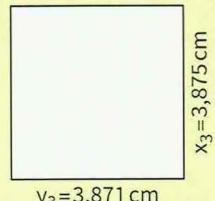


$$y_2 = 3,75 \text{ cm}$$

- Wiederhole den zweiten Schritt. Wähle für  $x_3$  das arithmetische Mittel von  $x_2$  und  $y_2$ . Berechne  $y_3$  mithilfe des Flächeninhalts des Rechtecks.

$$x_3 = \frac{4+3,75}{2} = 3,875$$

$$y_3 = \frac{15}{3,875} \approx 3,871$$



$$y_3 = 3,871 \text{ cm}$$

- Wähle das arithmetische Mittel von  $x_3$  und  $y_3$  als Näherung für  $\sqrt{15}$ .

$$x_4 = \frac{3,875 + 3,871}{2} = 3,8743$$

**1** Alle Zahlen, die du als Bruch der Form  $\frac{z}{n}$  ausdrücken kannst, heißen **rationale Zahlen**. Dabei ist  $n$  eine positive ganze Zahl und  $z$  eine beliebige ganze Zahl.

a) Rationale Zahlen kannst du als endliche oder periodische Dezimalzahlen schreiben. Dazu musst du den Zähler durch den Nenner dividieren.

$$9 : 4 = 2,25$$

$$\frac{8}{10}$$

$$\frac{8}{20}$$

$$\frac{20}{0}$$

$$\underline{18 \dots}$$

$$5 : 6 = 0,833\dots = 0,\overline{83}$$

$$\frac{50}{48}$$

$$\frac{18}{20}$$

$$\frac{20}{0}$$

$$\underline{18 \dots}$$

$$\frac{9}{4} = 2,25$$

$$\frac{5}{6} = 0,8\overline{3}$$

Schreibe  $\frac{1}{5}$  ( $\frac{3}{10}, \frac{2}{9}, \frac{4}{15}$ ) als Dezimalzahl.

b) Umgekehrt kannst du alle endlichen und periodischen Dezimalzahlen als Bruch in der Form  $\frac{z}{n}$  schreiben.

$$0,5 = \frac{1}{2}$$

$$0,875 = \frac{7}{8}$$

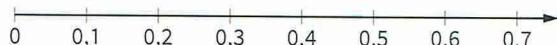
$$0,\overline{3} = \frac{1}{3}$$

$$0,\overline{27} = \frac{3}{11}$$

Schreibe  $0,75$  ( $0,1; 0,\overline{6}; 0,1\overline{6}$ ) als Bruch.

**2** Jeder rationalen Zahl entspricht genau ein Punkt auf der Zahlengeraden.

Auf der Zahlengeraden liegt der Punkt, der zu der kleineren Zahl gehört, links von dem Punkt, der zu der größeren Zahl gehört.



a) Gib eine rationale Zahl an, die zwischen  $0,5$  und  $0,6$  (zwischen  $0,52$  und  $0,53$ ; zwischen  $0,527$  und  $0,528$ ) liegt.

b) Bestimme fünf rationale Zahlen, die zwischen  $1,24$  und  $1,25$  (zwischen  $1,243$  und  $1,244$ ; zwischen  $1,2437$  und  $1,2438$ ) liegen.

c) Begründe: Zwischen zwei rationalen Zahlen liegen unendlich viele weitere rationale Zahlen.



Auf der Zahlengeraden liegen die rationalen Zahlen ganz dicht beieinander.

**3** Wir wollen zeigen, dass  $\sqrt{2}$  keine rationale Zahl ist, d. h. dass  $\sqrt{2}$  nicht als Bruch der Form  $\frac{z}{n}$  mit natürlichen Zahlen  $z$  und  $n$  geschrieben werden kann. Dazu untersuchen wir zunächst die Primfaktoren von Quadratzahlen.

a) Jede natürliche Zahl ist entweder selbst eine Primzahl oder kann als Produkt von mehreren Primzahlen geschrieben werden. Vergleiche die Primfaktorzerlegung einer natürlichen Zahl mit der ihrer Quadratzahl. Was stellst du fest?

Natürliche Zahl

$$5 = 5$$

$$6 = 2 \cdot 3$$

$$9 = 3 \cdot 3$$

$$30 = 2 \cdot 3 \cdot 5$$

Quadratzahl

$$25 = 5 \cdot 5$$

$$36 = 2 \cdot 3 \cdot 2 \cdot 3$$

$$81 = 3 \cdot 3 \cdot 3 \cdot 3$$

$$900 = 2 \cdot 3 \cdot 5 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 5$$

Begründe, dass jede Quadratzahl eine gerade Anzahl von Primfaktoren hat.

b) Erkläre die einzelnen Schritte der Umformung.

Annahme:  $\sqrt{2}$  ist ein Bruch.

Dann gilt:  $\sqrt{2} = \frac{z}{n}$

$$2 = \left(\frac{z}{n}\right)^2$$

$$2 = \frac{z^2}{n^2}$$

$$2 \cdot n^2 = z^2$$

c) Begründe:

1. Die Zahl  $z^2$  hat eine gerade Anzahl von Primfaktoren.

2. Die Zahl  $2 \cdot n^2$  hat eine ungerade Anzahl von Primfaktoren.

Die Umformung zeigt: Wenn  $\sqrt{2}$  ein Bruch  $\frac{z}{n}$  ist, dann stellen  $z^2$  und  $2 \cdot n^2$  dieselbe Zahl dar.

Diese Zahl kann in eine gerade Anzahl von Primfaktoren, aber auch in eine ungerade Anzahl von Primfaktoren zerlegt werden.

Das ist unmöglich, weil die Anzahl der Primfaktoren für jede Zahl eindeutig festgelegt ist.

Daher kann  $\sqrt{2}$  kein Bruch sein.



Wenn ich annahme, dass  $\sqrt{2}$  eine rationale Zahl ist, entsteht ein Widerspruch.

$\sqrt{2}$  ist keine rationale Zahl.



ionale  
Form  $\frac{z}{n}$   
ben wer-  
st die

ist eine  
reren  
che die  
zahl mit  
?

2 · 3 · 5  
rade  
ormung.

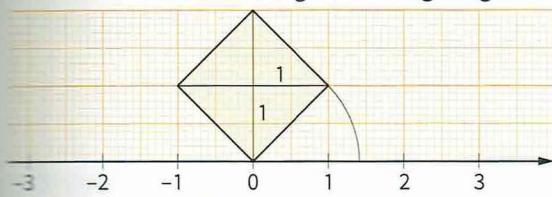
Prim-  
l von  
 $\frac{z}{n}$  ist,

Prim-  
ahl von

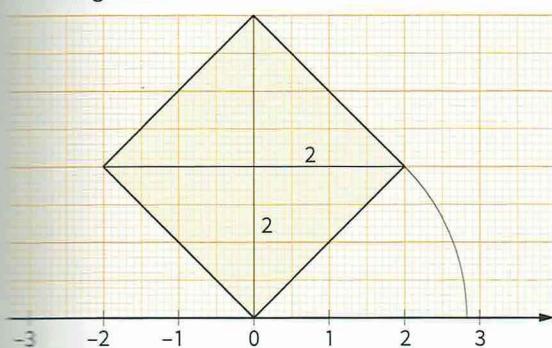
fakto-

iss  
st,  
ch.

- 4 Tim hat ein Quadrat auf Millimeterpapier gezeichnet und die Seitenlänge des Quadrats mit dem Zirkel auf der Zahlengeraden abgetragen.



- a) Gib die Seitenlänge des Quadrats an.  
b) Begründe: Auf der Zahlengeraden gibt es Punkte, denen keine rationale Zahl entspricht.  
c) Welche irrationale Zahl ist auf der Zahlengeraden dargestellt?



Die rationalen Zahlen liegen auf der Zahlengeraden ganz dicht beieinander, ...

trotzdem gibt es dazwischen noch unendlich viele irrationale Zahlen.



Nicht jedem Punkt auf der Zahlengeraden entspricht eine rationale Zahl. Es gibt noch unendlich viele andere Punkte. Die Zahlen, die diesen Punkten entsprechen, heißen **irrationale Zahlen**.

- 5 Grundlage unseres Zahlensystems sind die natürlichen Zahlen.

$$\mathbb{N} = \{0, 1, 2, 3, 4, 5, \dots\}$$

Wir benutzen sie zum Zählen.

Wenn du natürliche Zahlen addierst oder multiplizierst, ist das Ergebnis wieder eine natürliche Zahl. Aber beim Subtrahieren tritt eine Schwierigkeit auf: Viele Subtraktionsaufgaben, z. B.  $7 - 12$ , kannst du mithilfe der natürlichen Zahlen nicht lösen.

Deshalb wird der Bereich der Zahlen zur Menge  $\mathbb{Z}$  der ganzen Zahlen erweitert.

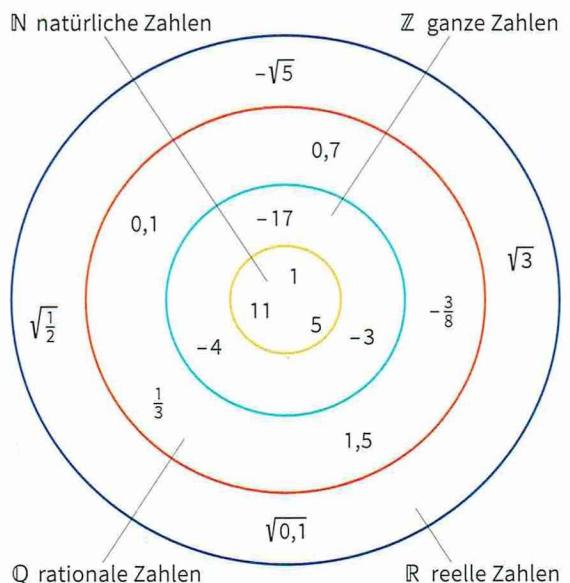
$$\mathbb{Z} = \{\dots, -3, -2, -1, 0, 1, 2, 3, \dots\}$$

Aber auch im Bereich der ganzen Zahlen sind nicht alle Grundrechenarten durchführbar. Die Divisionsaufgaben  $7 : 2$  oder  $-6 : 4$  kannst du auch mithilfe der ganzen Zahlen nicht lösen. Also wird der Bereich der Zahlen zur Menge  $\mathbb{Q}$  der rationalen Zahlen erweitert.

$$\mathbb{Q} = \left\{ \frac{z}{n} \mid z, n \in \mathbb{Z}, n > 0 \right\}$$

Um allen Punkten der Zahlengeraden eine Zahl zuzuordnen, reichen aber auch die rationalen Zahlen nicht aus. Daher wird der Bereich der rationalen Zahlen zur Menge  $\mathbb{R}$  der reellen Zahlen erweitert.

Zu welcher Zahlenmenge gehört die Zahl  $\sqrt{3}$  ( $\frac{2}{7}, -1, 13$ )?

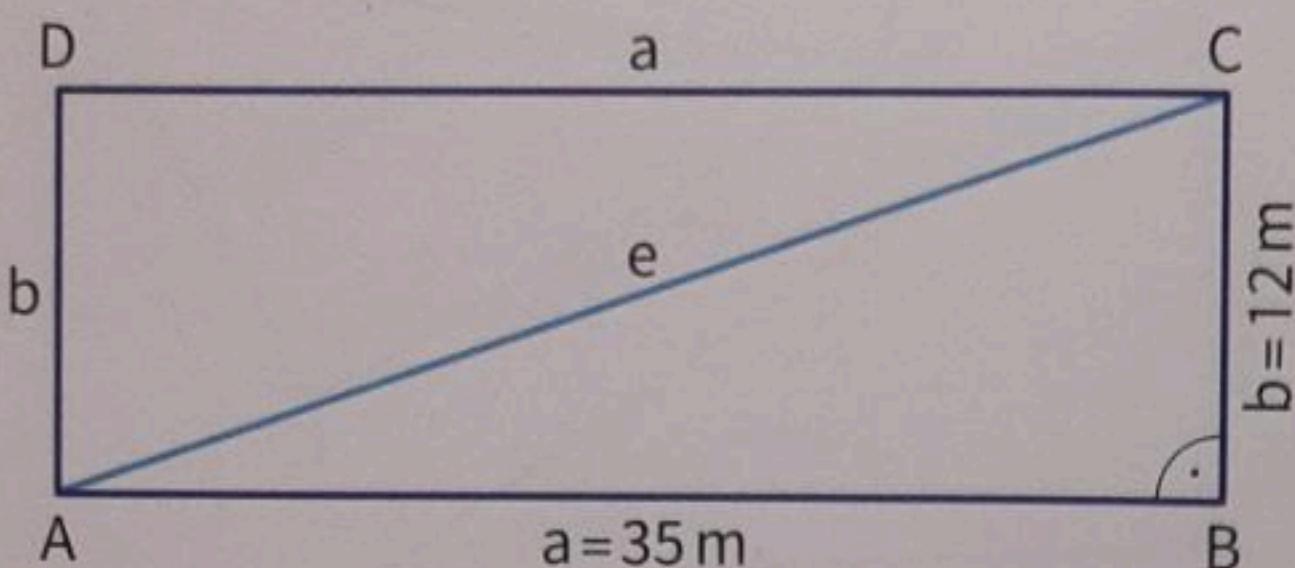






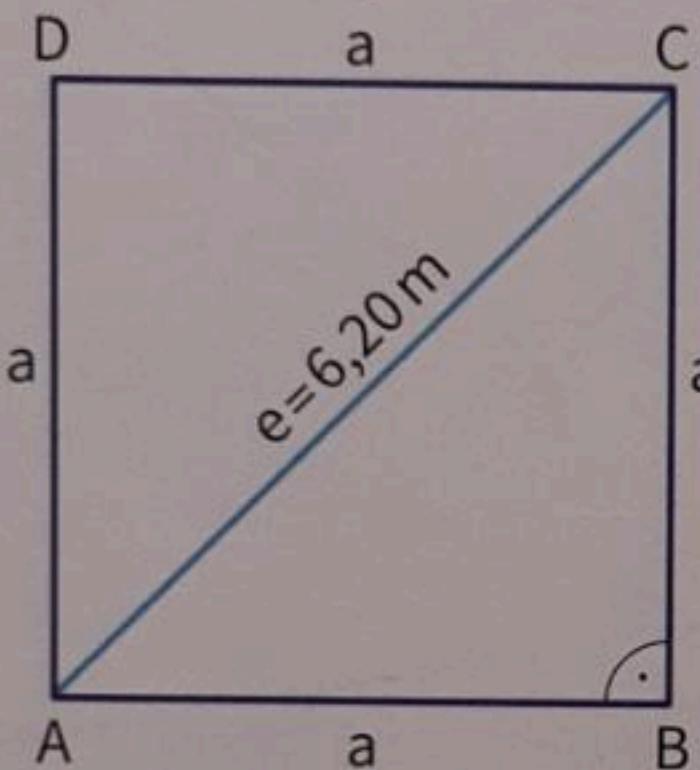
## Üben und Vertiefen

- 6** a) Berechne die Länge der Diagonalen e in dem abgebildeten Rechteck ABCD.



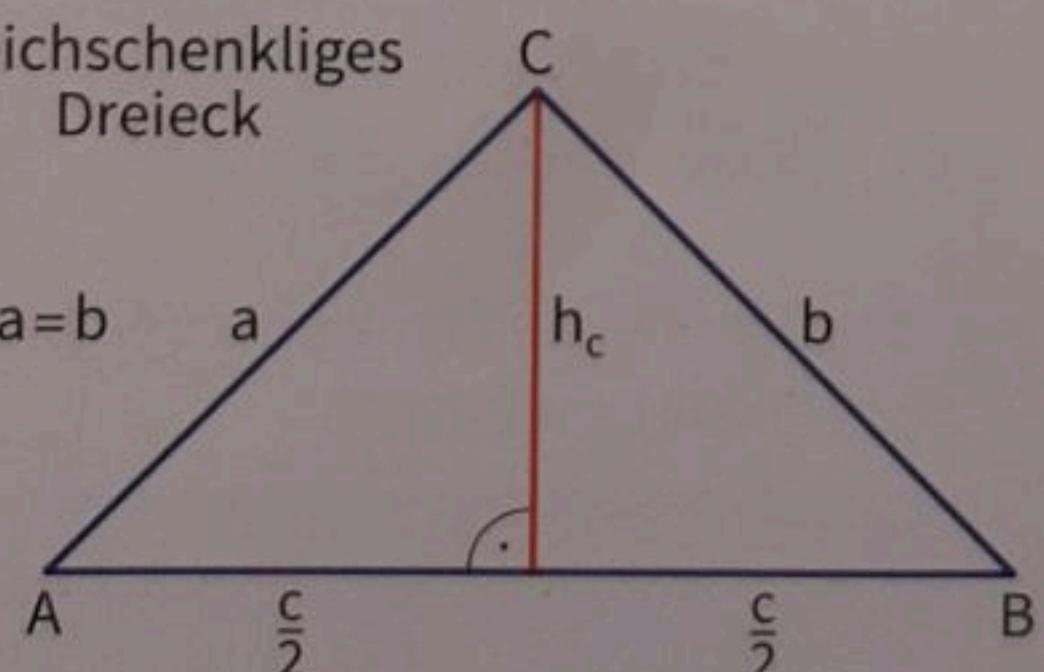
- b) In einem Rechteck ABCD ist  $a = 64 \text{ m}$ . Die Länge der Diagonalen beträgt  $80 \text{ m}$ . Berechne zunächst die Länge der Seite b. Bestimme anschließend den Umfang und den Flächeninhalt des Rechtecks.

- 7** Die Diagonale in dem abgebildeten Quadrat ABCD beträgt  $6,20 \text{ m}$ .



- a) Berechne die Seitenlänge a.  
b) Bestimme den Flächeninhalt des Quadrats.

- 8** Gleichschenkliges Dreieck



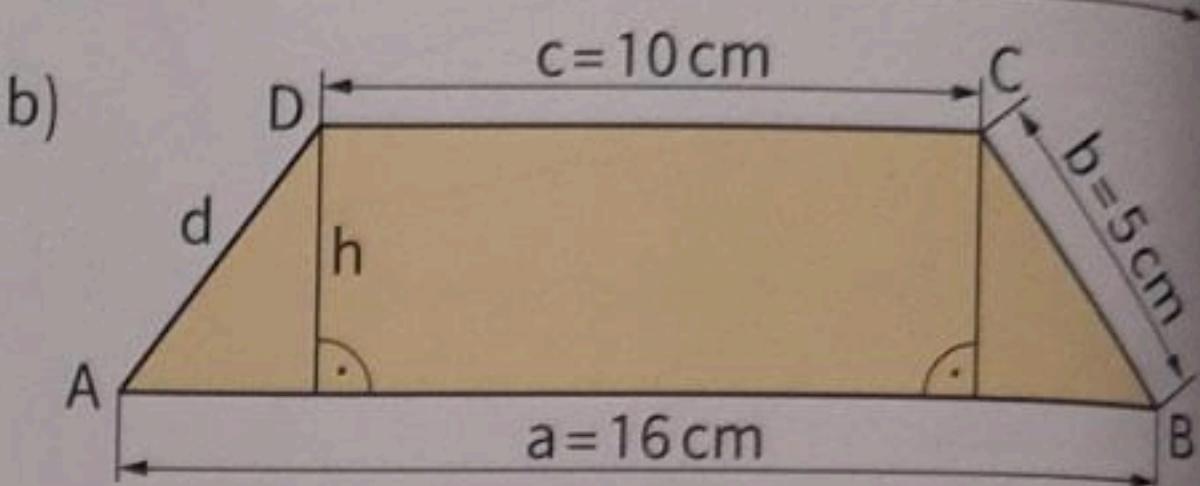
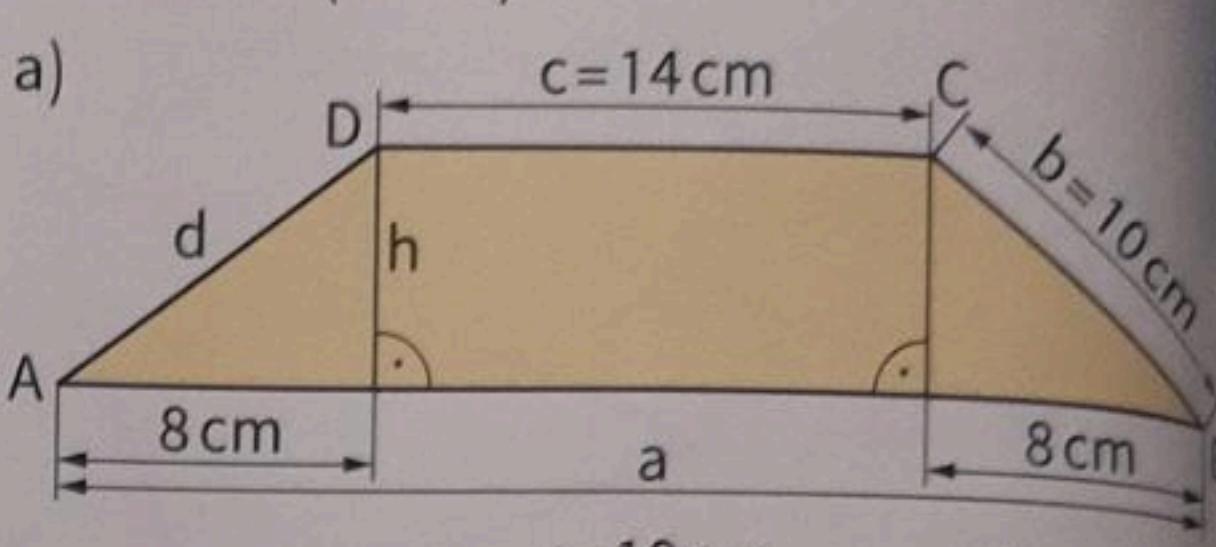
Berechne die fehlenden Größen in dem gleichschenkligen Dreieck.

	a)	b)	c)	d)
a	■	■	8,7 m	26,5 m
c	7,2 cm	16,8 m	12,6 m	■
$h_c$	2,7 cm	13,5 m	■	22,5 m
A	■	■	■	■

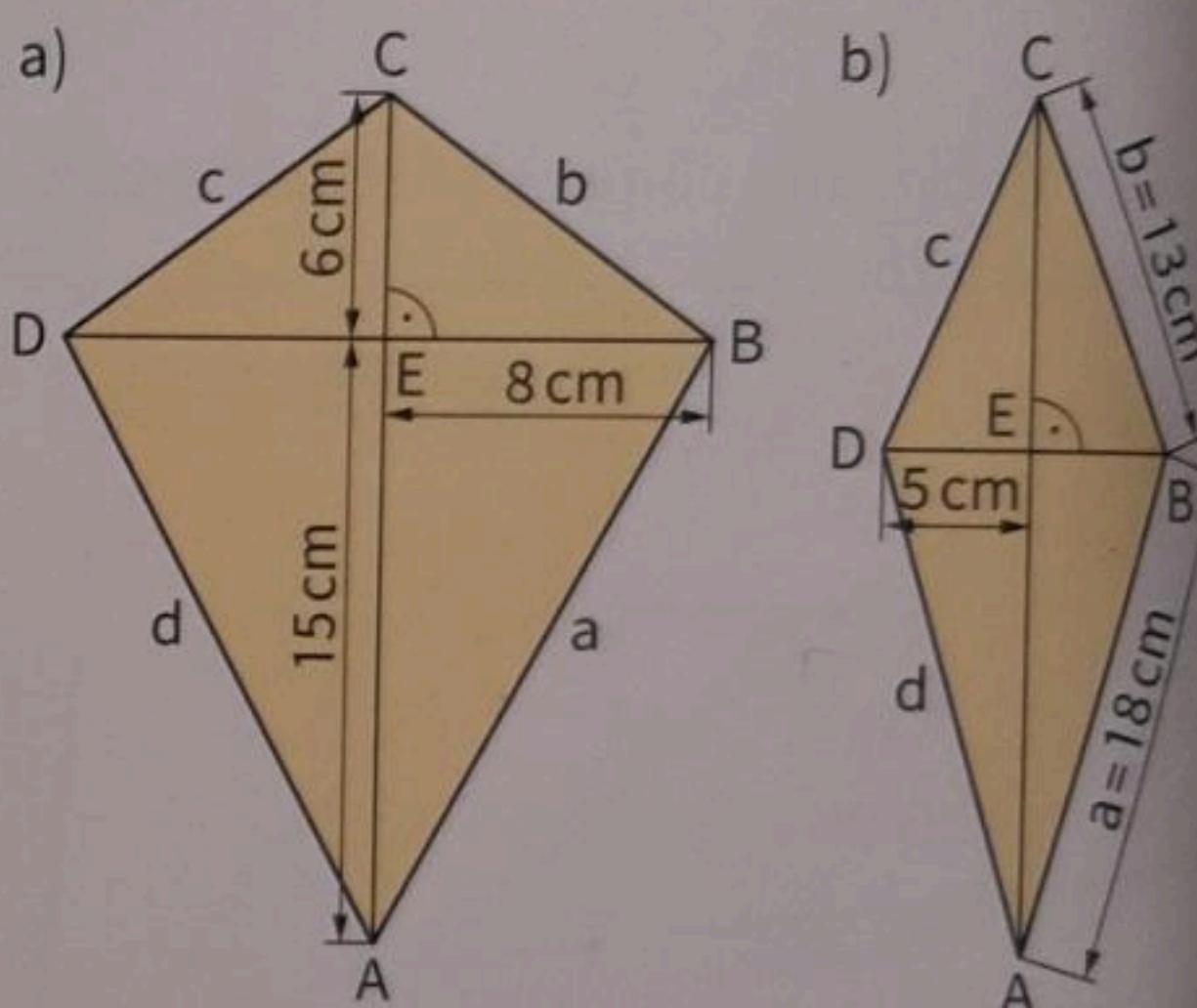
Lösungen zu Aufgabe 8:

15,9 6 4,5 28

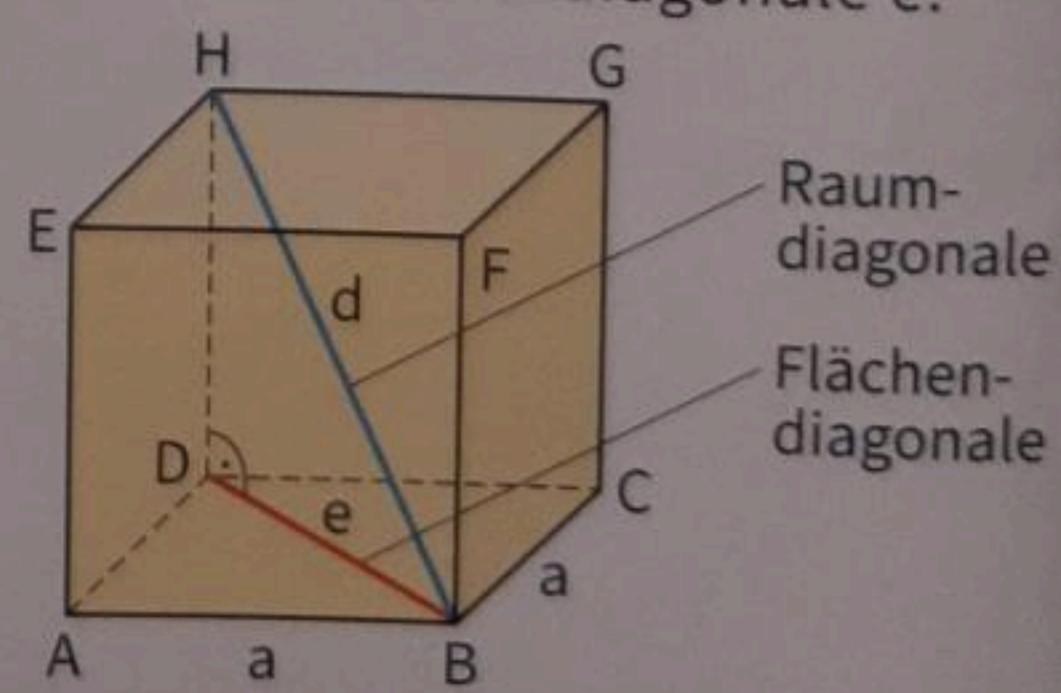
- 9** Berechne den Umfang und den Flächeninhalt des gleichschenkligen Trapezes ABCD ( $b = d$ ).



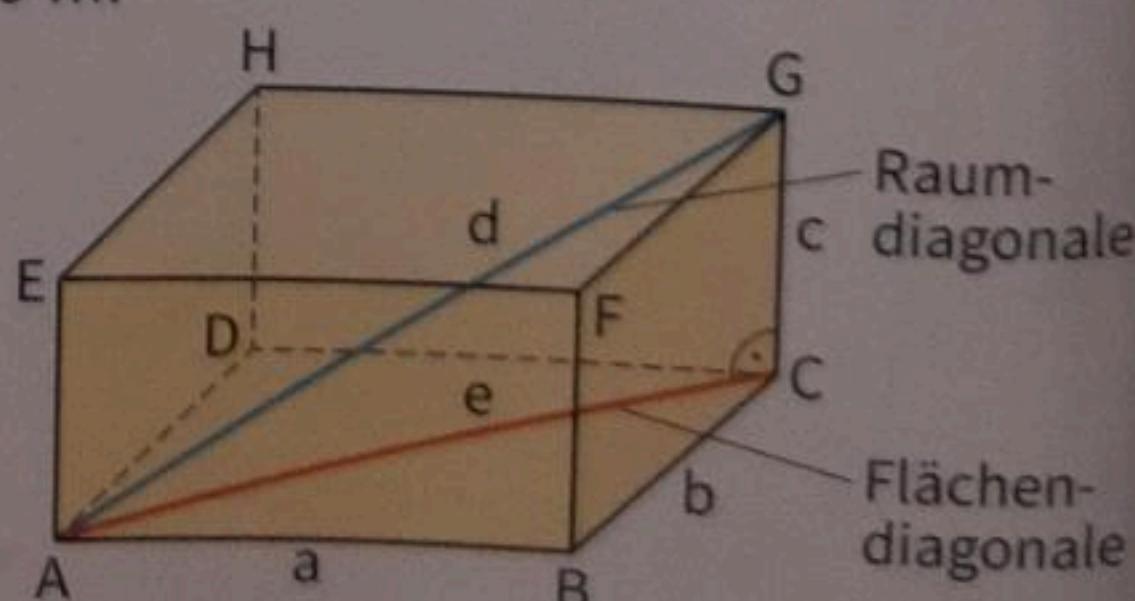
- 10** Berechne den Umfang und den Flächeninhalt des Drachens.



- 11** Berechne die Raumdiagonale d des Würfels mit der Kantenlänge  $a = 9 \text{ cm}$  ( $13 \text{ cm}$ ;  $24 \text{ cm}$ ). Bestimme dafür zunächst die Flächendiagonale e.



- 12** Berechne die Raumdiagonale d des Quaders ABCD mit  $a = 5 \text{ m}$ ;  $b = 7 \text{ m}$  und  $c = 9 \text{ m}$ .



Sachaufgabe

Mod

Aufgabe:  
Der Fuß einer Haushalt  
Die Leiter soll eine Regenrinne  
Wie lang mu

1. Stelle fe  
Informa  
Aufgabe

2. Zeichne  
rechtwi  
gegeben  
gesucht  
Markier  
Dreieck  
kels un

3. Formul  
Dreieck  
Gleichu

4. Berech

5. Formul

1 Der Fuß  
einer Haush  
den. Die Leit  
gelegenes F

2 Eine Fe  
gelegenes F  
des Fußes c  
beträgt 3,6  
Wie weit m  
werden, we  
Wagen steh

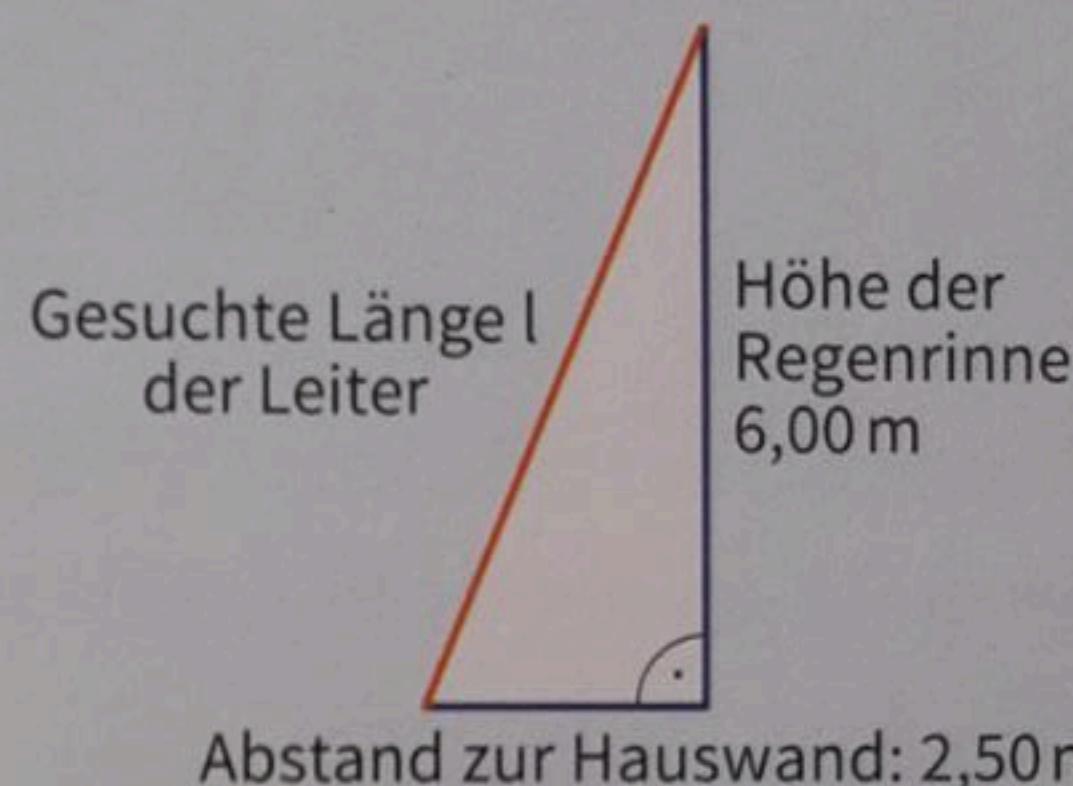
Aufgabe:  
Der Fuß einer Leiter steht 2,50 m von einer Hauswand auf dem Erdboden. Die Leiter soll eine 6,00 m hoch gelegene Regenrinne erreichen.  
Wie lang muss die Leiter sein?



**1.** Stelle fest, welche Angaben und Informationen du benötigst, um die Aufgabe zu bearbeiten.

Höhe der Regenrinne: 6,00 m  
Abstand von der Wand: 2,50 m

**2.** Zeichne zu der Sachaufgabe ein rechtwinkliges Dreieck, in dem zwei gegebene Seitenlängen und die gesuchte Seitenlänge vorkommen. Markiere in dem rechtwinkligen Dreieck die Lage des rechten Winkels und beschriffe diese Planfigur.



**3.** Formuliere für das rechtwinklige Dreieck den Satz des Pythagoras als Gleichung.

$$(2,50 \text{ m})^2 + (6,00 \text{ m})^2 = l^2$$

**4.** Berechne die gesuchte Seitenlänge.

$$\begin{aligned} l^2 &= (2,50 \text{ m})^2 + (6,00 \text{ m})^2 \\ l &= \sqrt{2,50^2 + 6,00^2} \text{ m} \\ l &= 6,50 \text{ m} \end{aligned}$$

**5.** Formuliere eine Antwort.

Die Leiter muss 6,50 m lang sein.

**1** Der Fuß einer Leiter steht 2,00 m von einer Hauswand entfernt auf dem Erdboden. Die Leiter erreicht ein 6,00 m hoch gelegenes Fenster. Wie lang ist die Leiter?

**2** Eine Feuerwehr will ein 13,50 m hoch gelegenes Fenster erreichen. Der Abstand des Fußes der Leiter zu der Hauswand beträgt 3,60 m. Wie weit muss die Leiter ausgefahren werden, wenn sie auf einem 1,60 m hohen Wagen steht?

**3** Die Seilbahn von Bregenz überwindet von der Talstation bis zur Bergstation einen Höhenunterschied von 609 m.



Wie lang muss das Halteseil der Bahn mindestens sein?

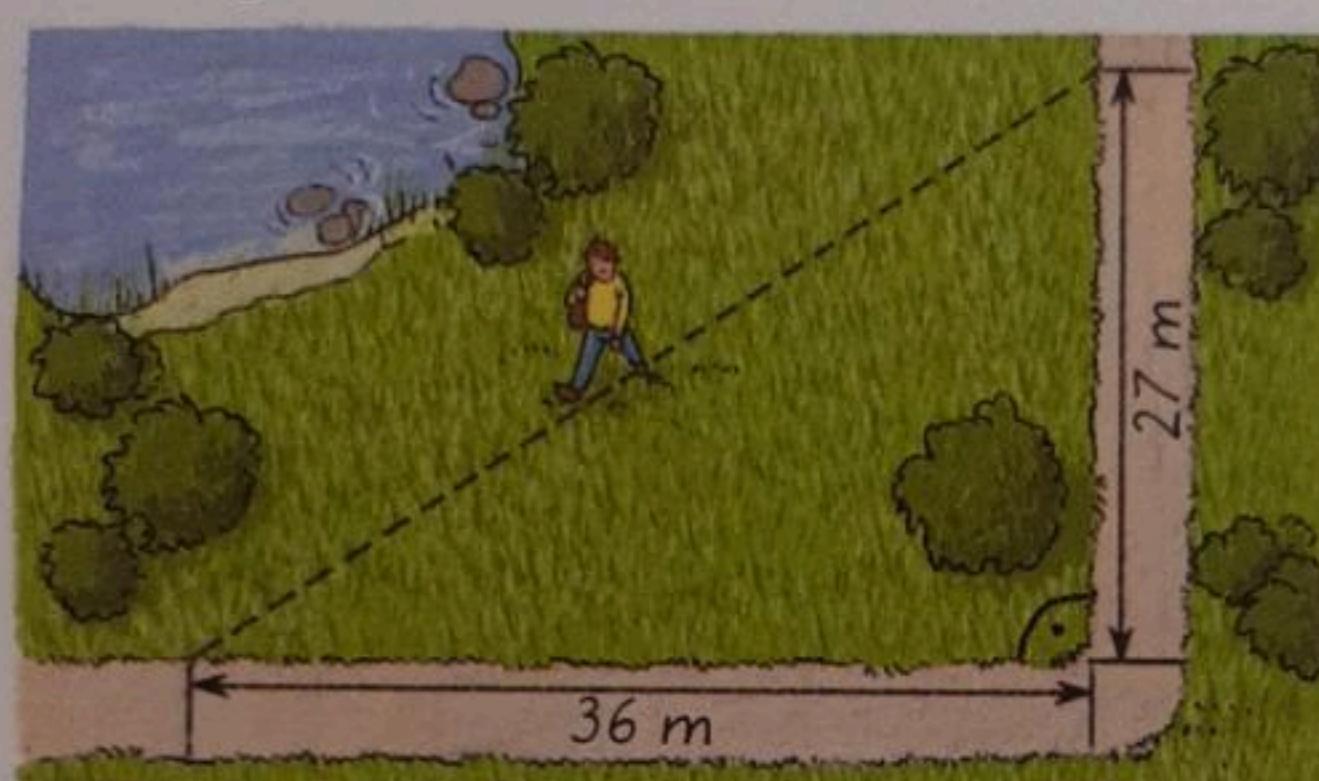
## Sachaufgaben

- 4** Ein starker Sturm hat den Stamm einer Lärche in einer Höhe von 5 m so abgeknickt, dass ihre Spitze 12 m vom Stamm entfernt den Waldboden berührt.



Wie hoch war der Baum vor dem Sturm?

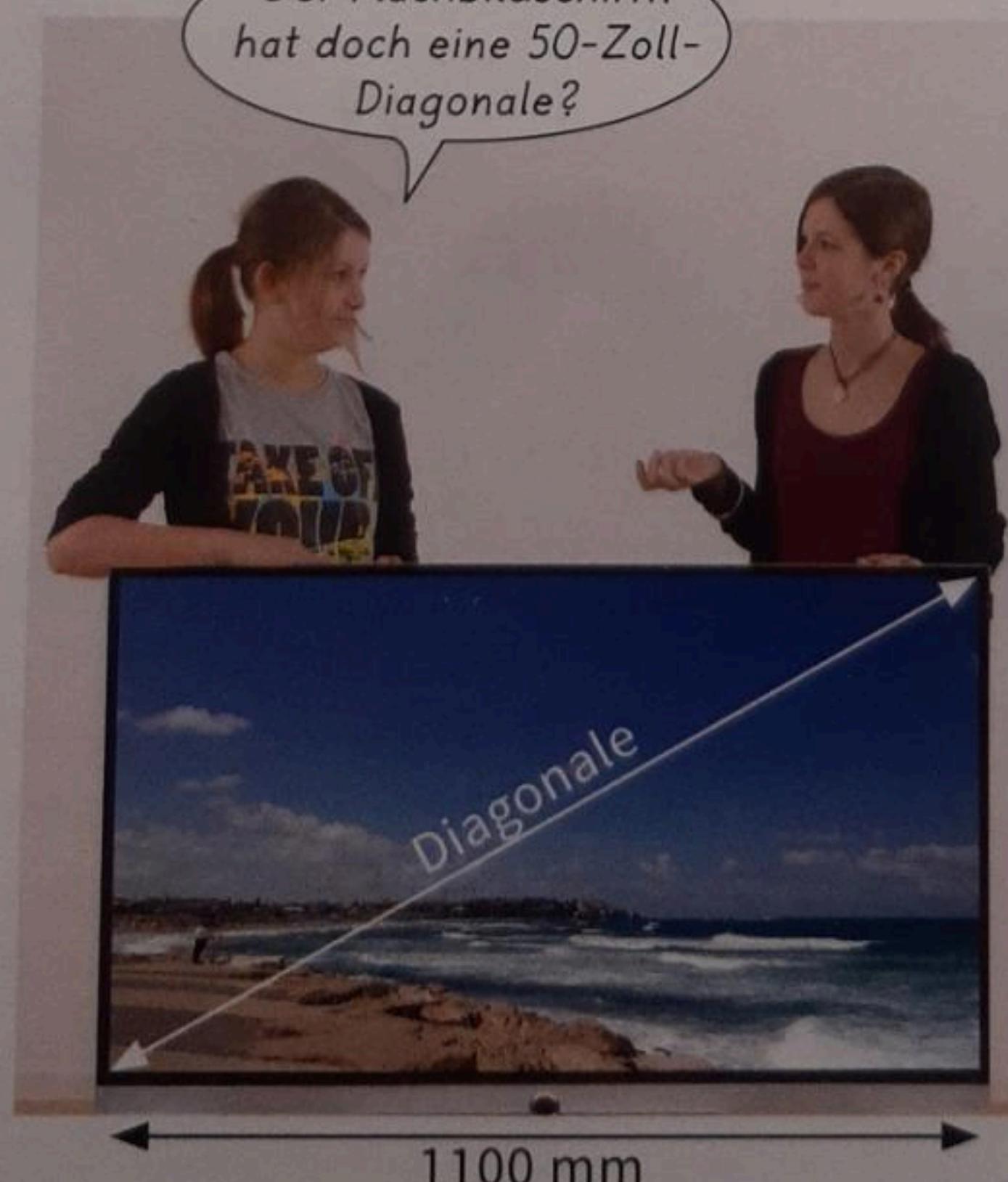
- 5** Ein Fußgänger läuft in einem Park wie abgebildet über die Rasenfläche.



Um wie viel Meter verkürzt sich dadurch sein Weg?

- 6** a)

Der Flachbildschirm  
hat doch eine 50-Zoll-  
Diagonale?

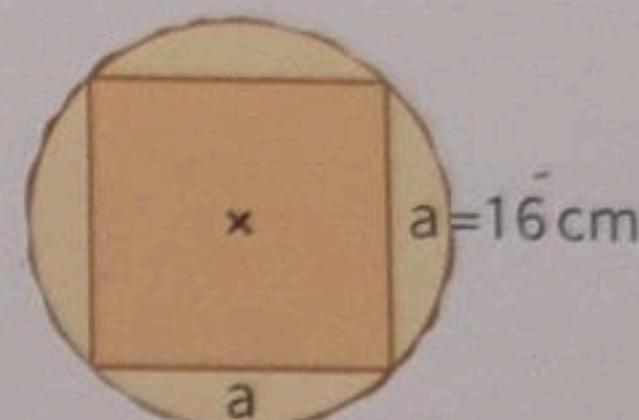


Hat Lisa Recht?

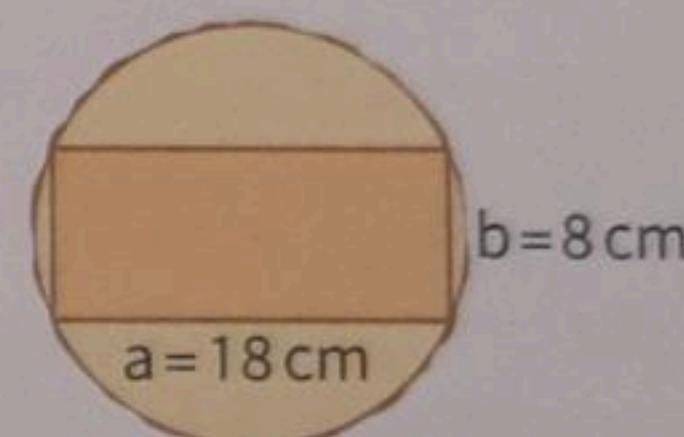
- b) Ein Flachbildschirm ist 82 cm lang und 47 cm breit.

Gib die Länge der Bildschirmdiagonale in Zoll an.

- 7** a) Aus einem Baumstamm soll ein Balken mit der abgebildeten quadratischen Grundfläche gesägt werden. Berechne den Durchmesser des Baumstamms.



- b) Welchen Durchmesser muss ein Baumstamm haben, aus dem ein Balken mit der abgebildeten rechteckigen Grundfläche geschnitten werden soll?

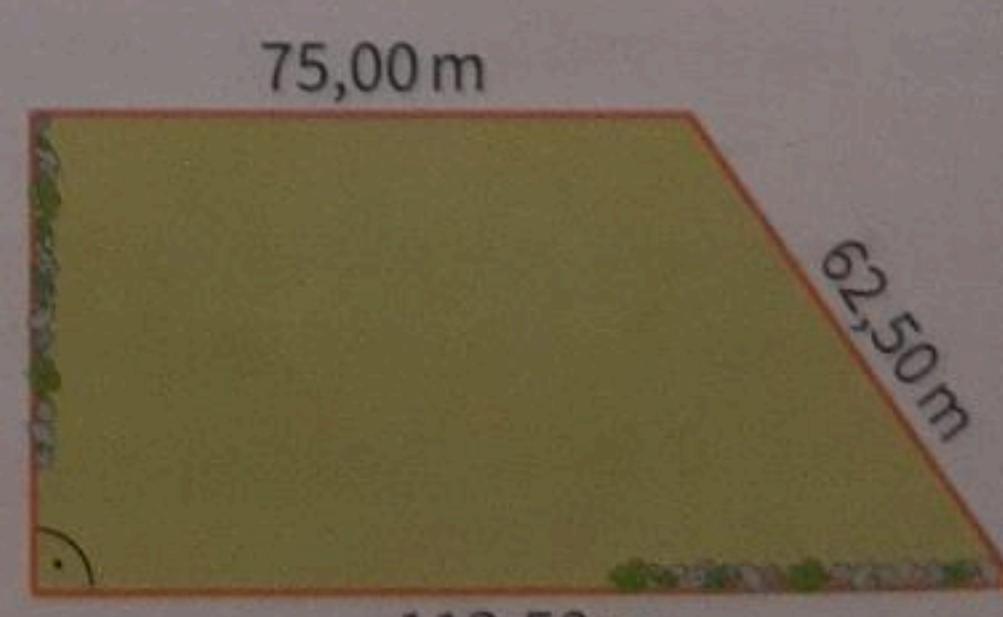


- 8** a) Passt die abgebildete kreisförmige Tischplatte durch die geöffnete Hecktür?



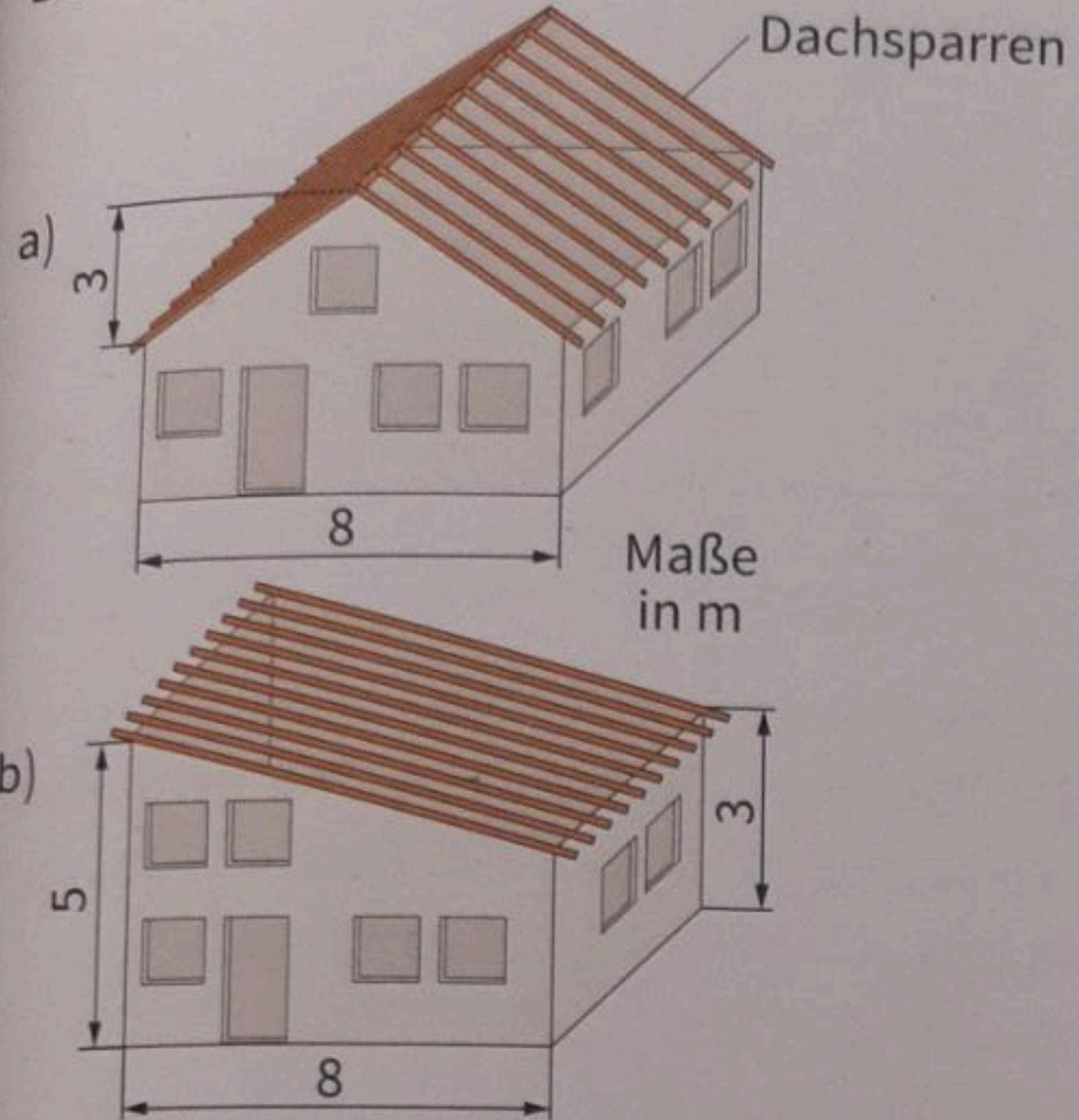
- b) Überprüfe durch eine Rechnung, ob sich eine runde Tischplatte mit  $d = 130$  cm durch eine 92 cm hohe und 106 cm breite rechteckige Heckklappenöffnung eines Autos schieben lässt.

- 9** Das abgebildete trapezförmige Grundstück soll verkauft werden.

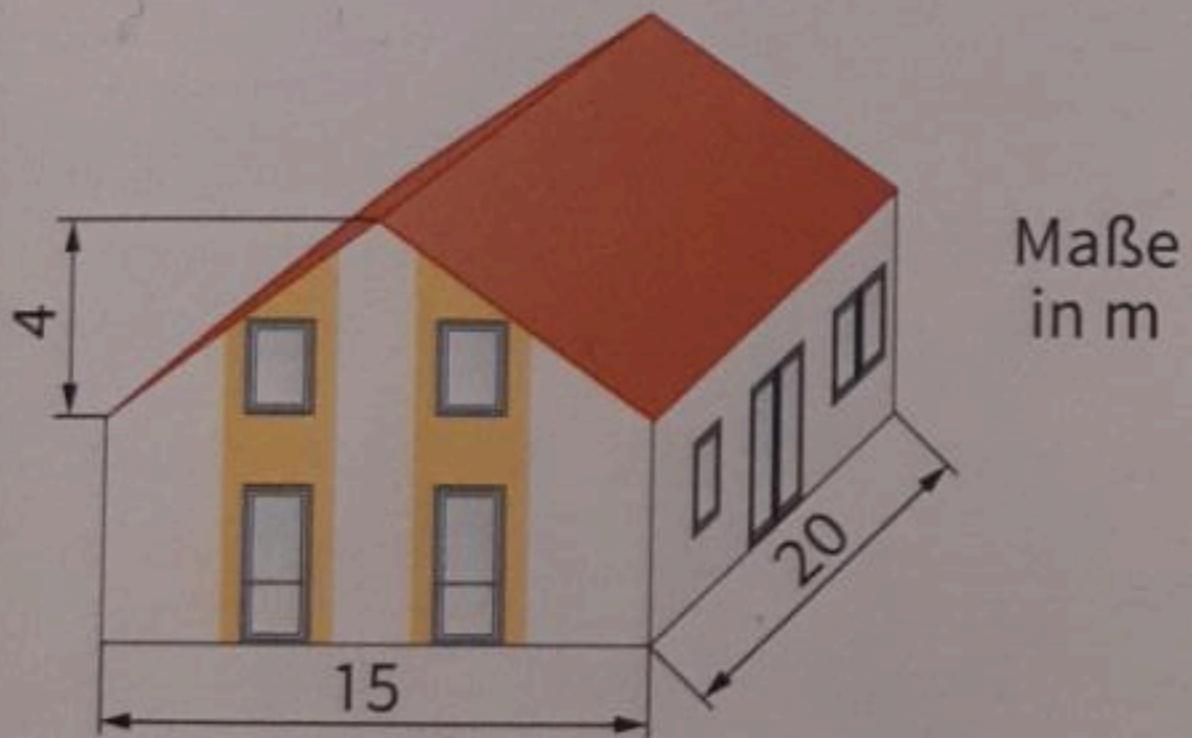


Der Besitzer verlangt 72 € für einen Quadratmeter Fläche.

- 10 Berechne für das abgebildete Gebäude die Länge eines Dachsparrens. Ein Dachsparren soll 40 cm überstehen.

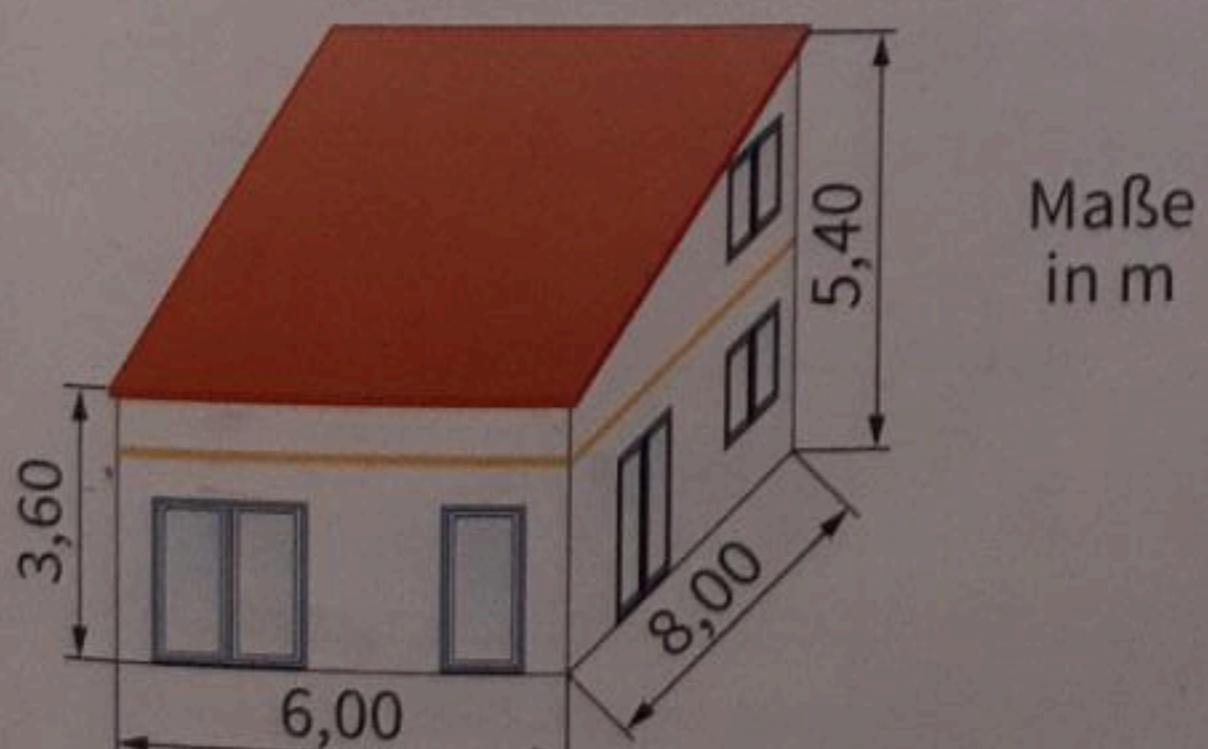


- 11 Die Fläche des Satteldaches soll mit Ziegeln eingedeckt werden. Für einen Quadratmeter der Dachfläche werden 14 Ziegel benötigt.



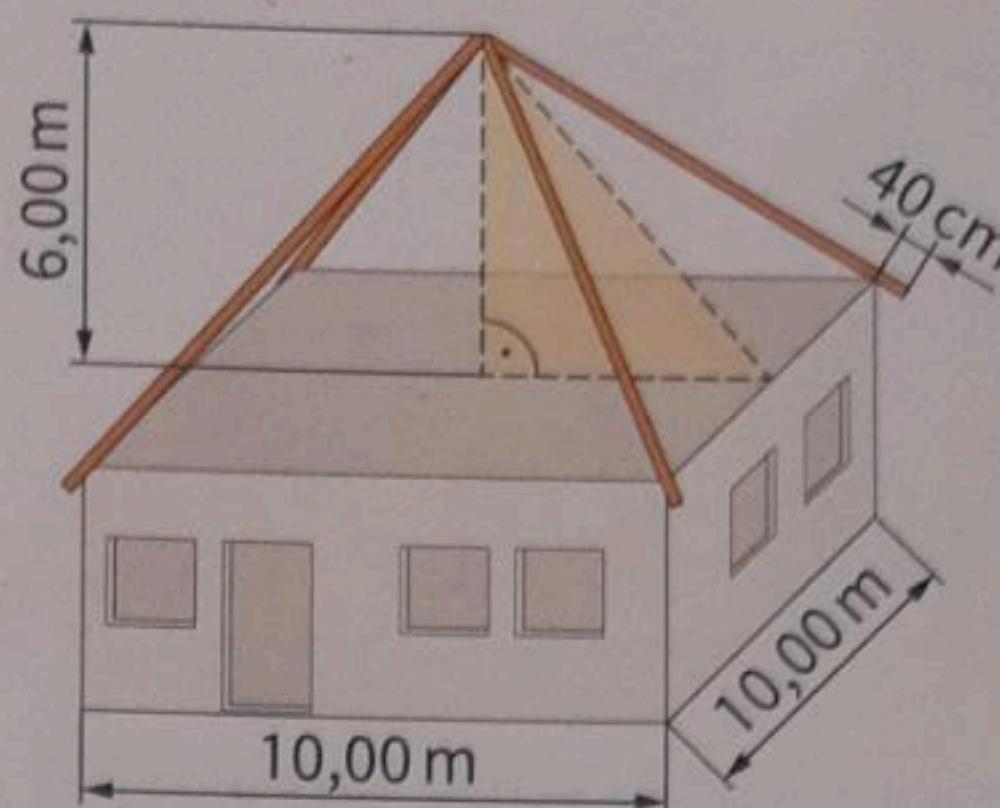
Wie viele Ziegel müssen für die gesamte Dachfläche mindestens eingekauft werden?

- 12 Das abgebildete Pultdach soll einen neuen Belag aus Zinkblech erhalten. Ein Quadratmeter Zinkblech kostet 90 €. Für Verschnitt müssen 10% der Dachfläche hinzugerechnet werden.

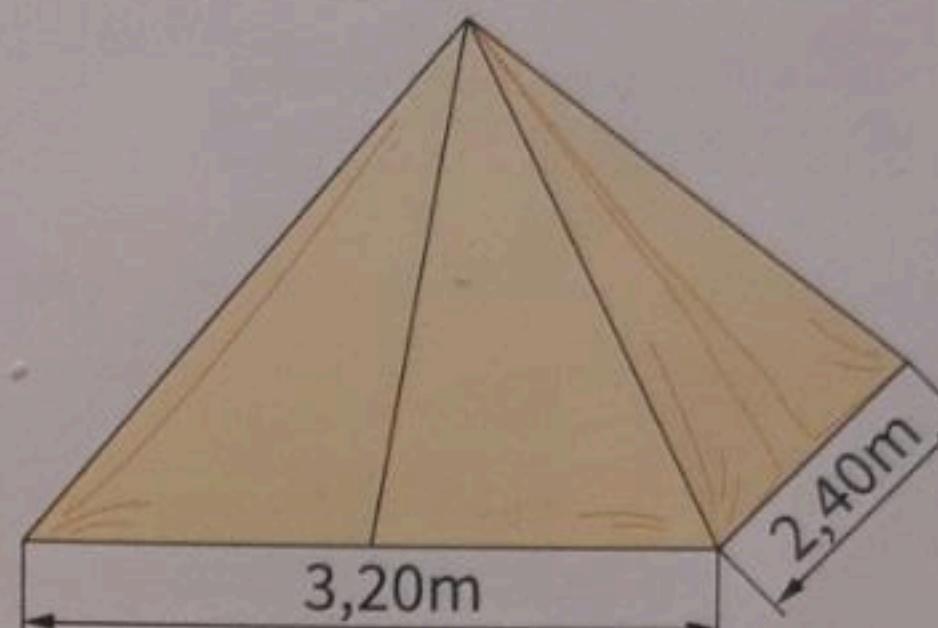


Lösungen zu Aufgabe 10 bis 12:  
5,4 4 760 8,65 4 870,80

- 13 Bestimme die Länge eines Dachsparrens. Der einzelne Dachsparren soll 40 cm überstehen.

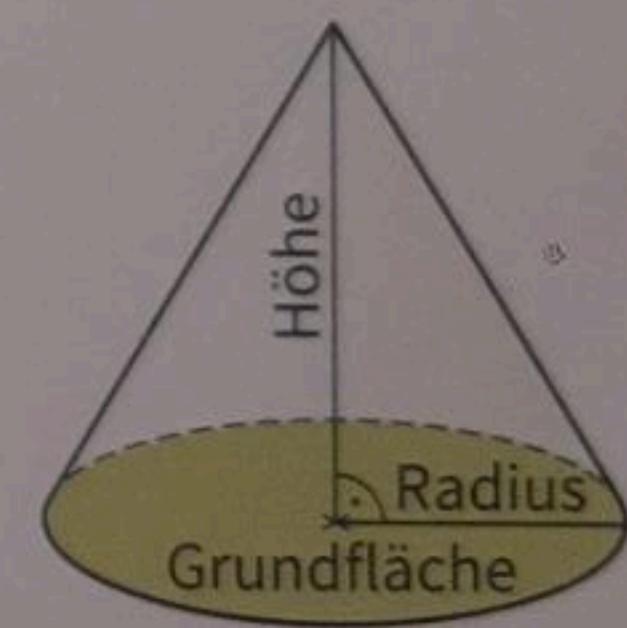
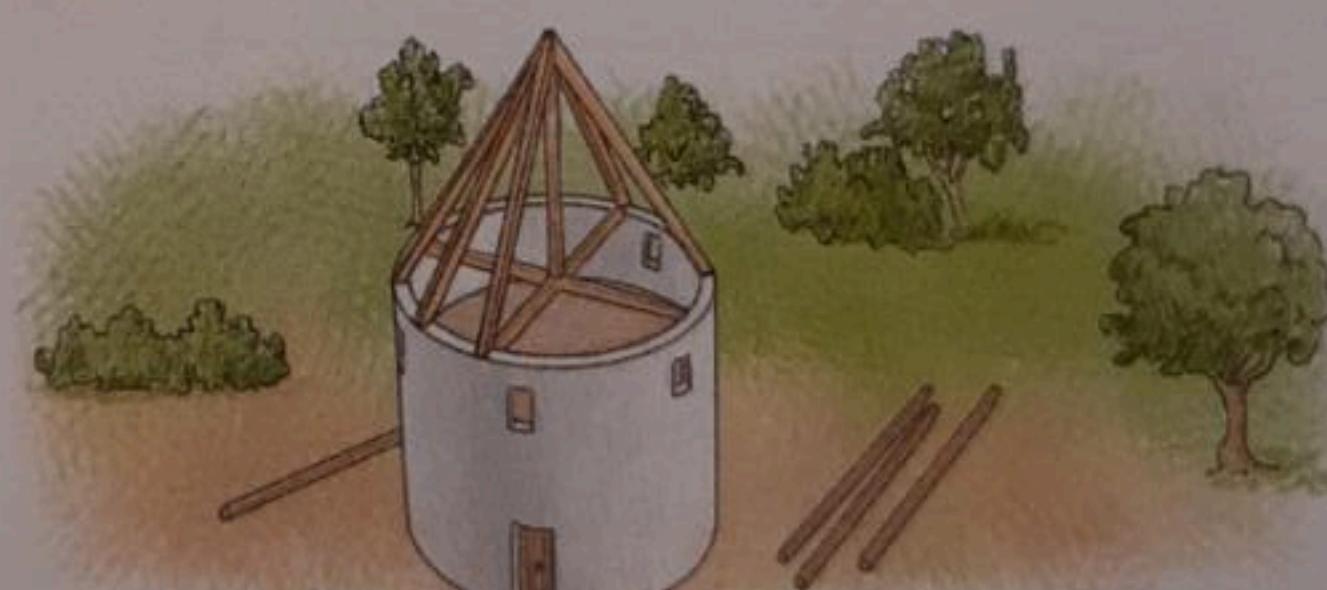


- 14 Das abgebildete Zelt ist 2 m hoch.



Wie viel Quadratmeter Zeltstoff wurden mindestens für die Herstellung der vier Seitenflächen verarbeitet?

- 15 Ein Turm hat ein kegelförmiges Dach.



Der Umfang der kreisförmigen Grundfläche des Kegels beträgt 50,27 m.

Das 15,00 m hohe Dach soll erneuert werden. Berechne die Länge eines Dachsparrens.

- 16



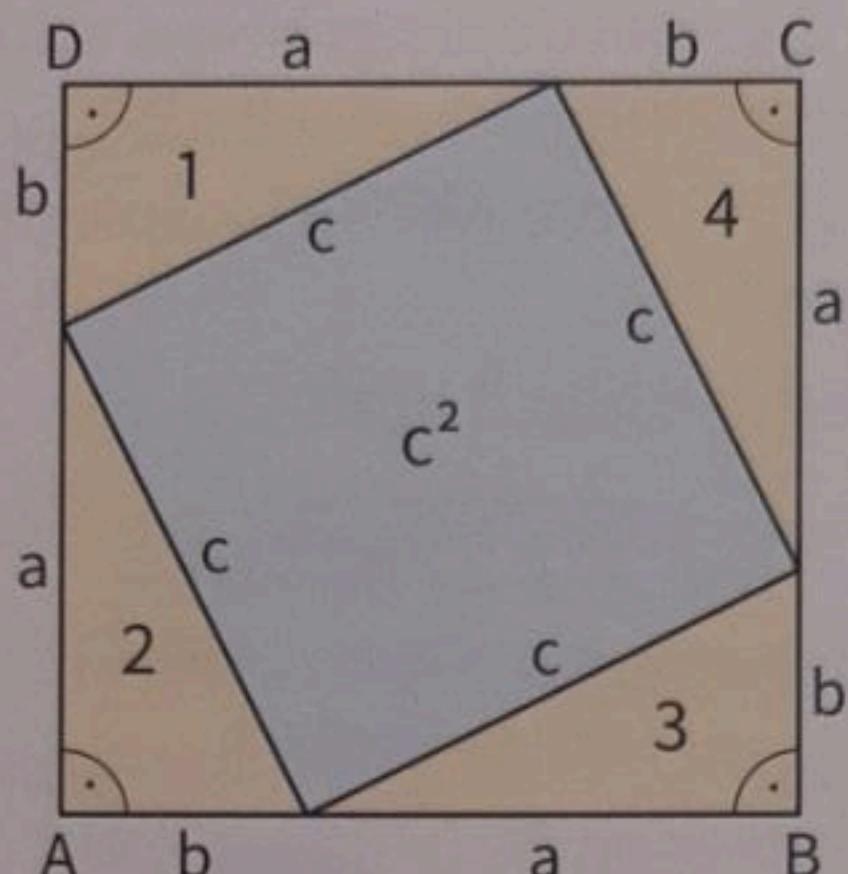
Wie lang muss der Strohhalm mindestens sein, damit er nicht in die Getränkepackung rutschen kann?

## Beweise

**1** Die Seiten des abgebildeten Quadrats sind jeweils in die Abschnitte  $a$  und  $b$  eingeteilt.

a) Zeige mithilfe eines Kongruenzsatzes, dass die rechtwinkligen Dreiecke 1, 2, 3 und 4 zueinander kongruent sind.

Begründe auch, dass das innere Viereck ein Quadrat ist.



b) Für den **Satz des Pythagoras** gibt es viele verschiedene Beweise.

Erläutere die einzelnen Schritte des folgenden Beweises.

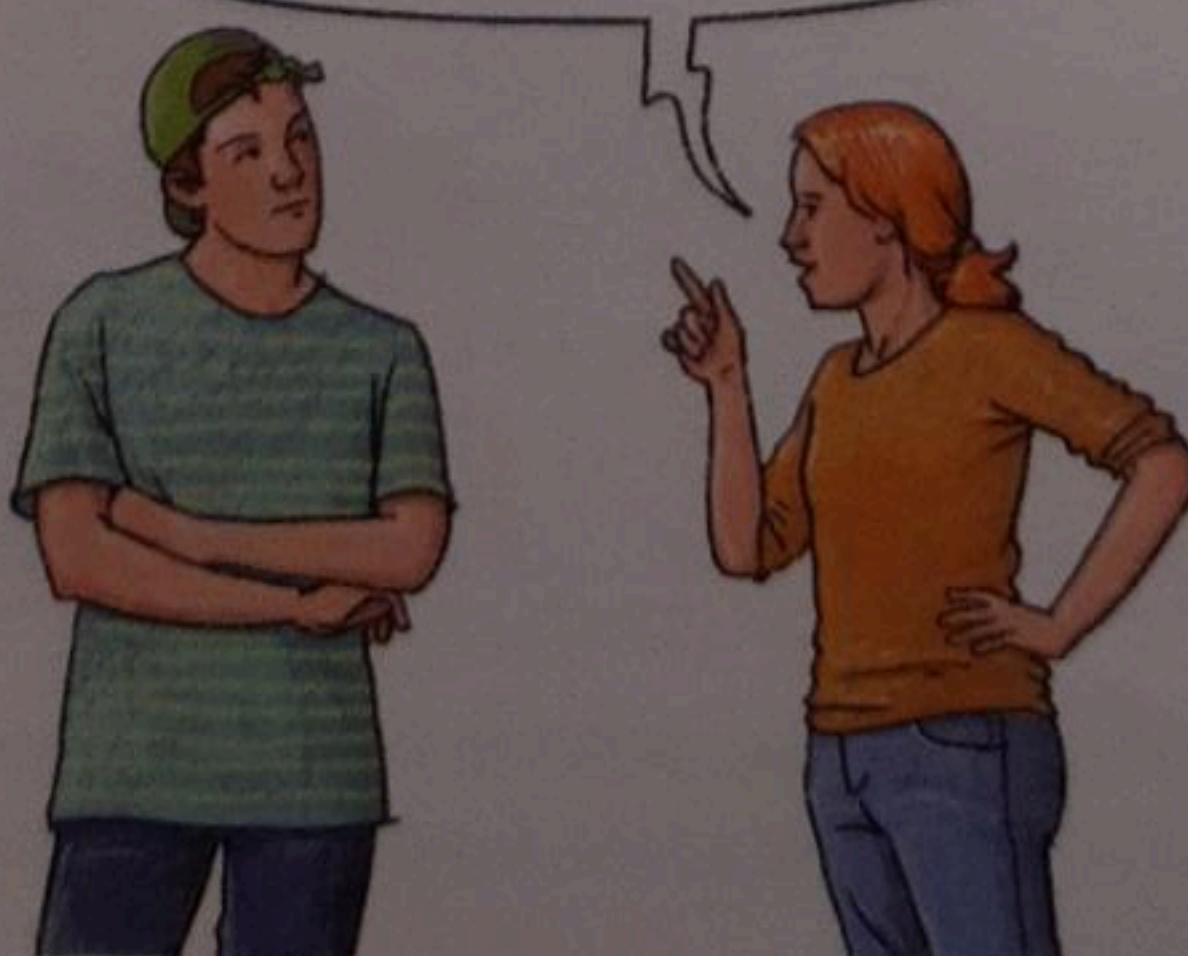
$$1. (a+b)^2 - 4 \cdot \frac{a \cdot b}{2} = c^2$$

$$2. a^2 + 2ab + b^2 - 2ab = c^2$$

$$3. a^2 + b^2 = c^2$$

Der Kathetensatz, der Höhensatz und der Satz des Pythagoras werden als **Flächensätze am rechtwinkligen Dreieck** oder als die **Satzgruppe des Pythagoras** bezeichnet.

Die Beweise in den folgenden Aufgaben verdeutlichen den engen Zusammenhang zwischen den einzelnen Flächensätzen.



**2** a) Der **Satz des Pythagoras** lässt sich mithilfe des Kathetensatzes beweisen. Erläutere die einzelnen Schritte.

$$\begin{aligned} \text{Im } \triangle ABC \text{ gilt: } a^2 &= c \cdot p \\ b^2 &= c \cdot q \end{aligned}$$

$$\text{Also gilt: } a^2 + b^2 = c \cdot p + c \cdot q$$

$$\text{Daraus folgt: } a^2 + b^2 = c \cdot (p + q)$$

$$a^2 + b^2 = c \cdot c$$

$$a^2 + b^2 = c^2$$

b) Aus dem Satz des Pythagoras kannst du den **Höhensatz** herleiten.

$$1. c^2 = (p+q)^2$$

$$c^2 = p^2 + 2p \cdot q + q^2$$

$$2. c^2 = a^2 + b^2$$

$$c^2 = h_c^2 + p^2 + h_c^2 + q^2$$

$$3. p^2 + 2p \cdot q + q^2 = h_c^2 + p^2 + h_c^2 + q^2$$

$$2p \cdot q = 2h_c^2 \quad | :2$$

$$p \cdot q = h_c^2$$

Mit dem Satz des Pythagoras kannst du auch den **Kathetensatz** beweisen.

$$1. h_c^2 = a^2 - p^2 \quad h_c^2 = b^2 - q^2$$

$$2. a^2 - p^2 = b^2 - q^2$$

$$3. a^2 - p^2 = b^2 - (c-p)^2$$

$$a^2 - p^2 = b^2 - (c^2 - 2cp + p^2)$$

$$a^2 - p^2 = b^2 - c^2 + 2cp - p^2 \quad | +p^2 | -b^2 | +c^2$$

$$a^2 - b^2 + c^2 = 2cp$$

$$4. a^2 - b^2 + a^2 + b^2 = 2cp$$

$$2a^2 = 2cp \quad | :2$$

$$a^2 = cp$$

Zeige entsprechend, dass gilt:  $b^2 = c \cdot q$ .

**3** Der **Höhensatz** lässt sich auch mithilfe des Satzes von Pythagoras und des Kathetensatzes beweisen.

$$1. h_c^2 = b^2 - q^2 \quad b^2 = c \cdot q$$

$$2. h_c^2 = c \cdot q - q^2$$

Ergänze den Beweis in deinem Heft.