

Wurzeln – Rechenregeln und Eigenschaften

Hier die Weiterführung der Intervallschachtelung, um $\sqrt{2}$ zu finden:

⑤ $\sqrt{2}$: Intervallschachtelung

Unten	Oben	Intervall	Breite/Länge
1	2	$[1; 2]$	1
1	$1,5 = \frac{3}{2}$	$[1; 1,5]$	$\frac{1}{2} = 0,5$
1,25	1,5	$[1,25; 1,5]$	$0,25 = \frac{1}{4}$
1,375	1,5	$[1,375; 1,5]$	$\frac{1}{8} = 0,125$
1,375	1,4375	$[1,375; 1,4375]$	$\frac{1}{16}$
	\vdots		

Wir kommen nie ganz zu $\sqrt{2}$!

Man kann sich damit zufrieden geben, dass wir in 5 Intervallen nicht bei der Wurzel aus 2 angekommen sind und akzeptieren, was die Bücher sagen, dass es nicht möglich ist, jemals bei $\sqrt{2}$ anzukommen.

Wenn man möchte, kann man aber auch den Beweis nachvollziehen. Wer das möchte, dieses unperfekte Tafelbild aber auf andere Art aufgeschrieben sehen möchte, kann sich im Buch die Seiten 52 und 53 anschauen.

⑥ Kann $\sqrt{2}$ eine rationale Zahl sein?

wenn ja, dann

$$\sqrt{2} = \frac{z}{n} \quad \left. \begin{array}{l} \text{Zähler} \\ \text{Nenner} \end{array} \right\} \text{aus } \mathbb{N}$$

Wir quadrieren beide Seiten:

$$\sqrt{2}^2 = \left(\frac{z}{n}\right)^2$$

$$2 = \frac{z}{n} \cdot \frac{z}{n} = \frac{z^2}{n^2} = 2 \cdot n^2$$

$$\boxed{z^2 = 2(n^2)}$$

gerade Anzahl Primfaktoren \rightarrow auch $2 \cdot n^2$ hat eine ungerade Anzahl Primfaktoren.
Diese Gleichung kann also nicht erfüllt werden.

$12 = 2 \cdot 6 = 2 \cdot 2 \cdot 3$ 3 dreier

$54 = 2 \cdot 27 = 2 \cdot 3 \cdot 9 = 2 \cdot 3 \cdot 3 \cdot 3$ 1 zweier

$25 = 5 \cdot 5$

$(54)^2 = (2 \cdot 3 \cdot 3 \cdot 3)^2$

$= (2 \cdot 3 \cdot 3 \cdot 3) \cdot (2 \cdot 3 \cdot 3 \cdot 3)$

$= 2 \cdot 3 \cdot 3 \cdot 3 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 3 \cdot 3$

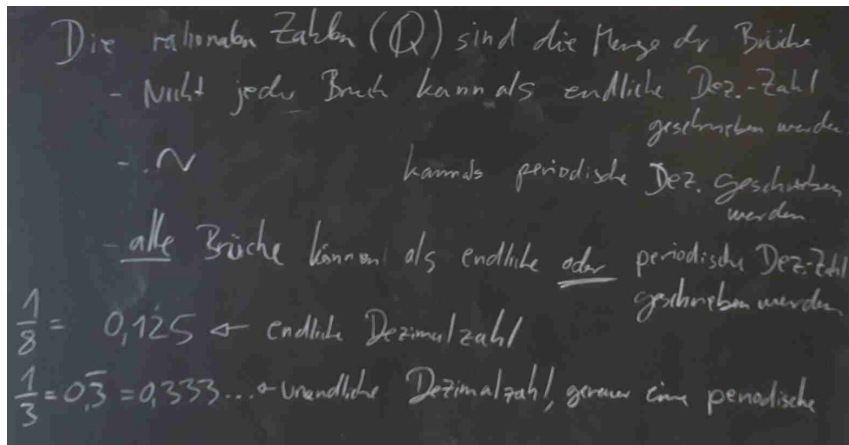
$= 2 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 3 \cdot 3 \cdot 3 \cdot 3 \cdot 3$

2 zweier 6 Dreier

gerade Anzahl Primfaktoren \rightarrow gilt für jede Quadratzahl!

Um nachvollziehen zu können, was das zur Folge hat, machen wir uns noch einmal ein paar Eigenschaften von

Brüchen klar:



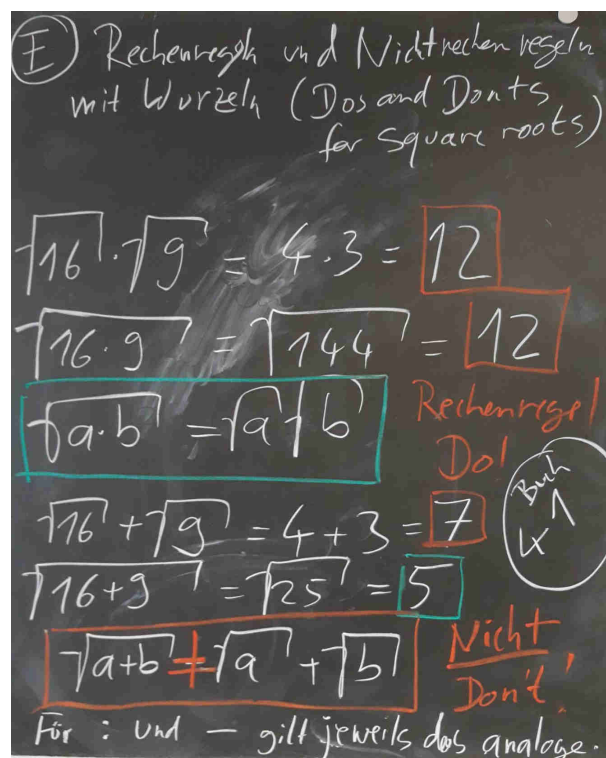
Das umgekehrte gilt auch: Jede endliche oder periodische Dezimalzahl kann als Bruch geschrieben werden.

Umgekehrt bedeutet das also, dass Zahlen wie $\sqrt{2}$ Zahlen sind, die weder als endliche *noch* als periodische Dezimalzahlen geschrieben werden können.

Es muss sich also um unendliche, aber *nicht* periodische Dezimalzahlen handeln.

Rechenregeln für Wurzeln

Folgende Rechenregel und folgende **Nicht**rechenregel lässt sich leicht über kleine Beispiele motivieren bzw widerlegen:



Diese Regeln zu kennen und mit ihr umgehen zu können, ist für Umformungen recht häufig wichtig und hilfreich.