ies Quadrats
cm², 29 cm²).
nanderfolgen-
iegt die Maßzahl
uadrats?

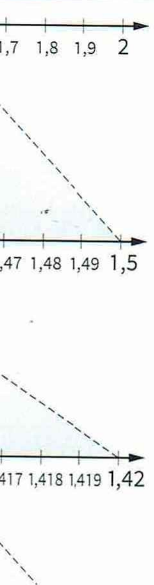
e du für die Zahl
em Komma

2, ...

2,6 ...

ste Nachkom-
an.

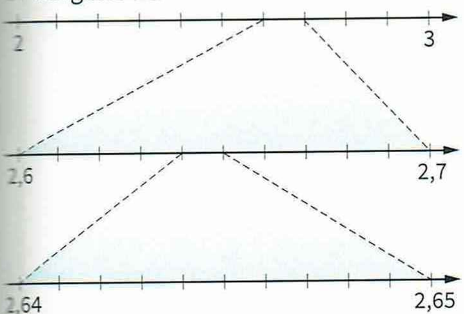
stelle bestimmt
e die einzelnen



ößeren Inter-
alle wird
alten wir

eispiel ist

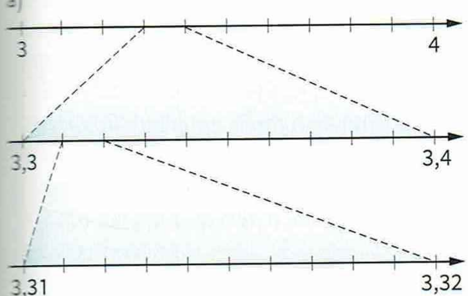
5 In der Zeichnung sind die ersten drei Schritte einer Intervallschachtelung für $\sqrt{7}$ dargestellt.



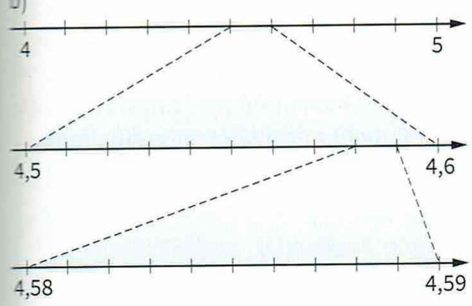
a) Gib die drei dargestellten Intervalle an.
b) Bestimme das vierte Intervall dieser Intervallschachtelung.
c) Begründe, dass $\sqrt{7}$ in jedem dieser Intervalle liegt.

6 Angegeben sind die ersten drei Schritte einer Intervallschachtelung für die Quadratwurzel einer natürlichen Zahl. Bestimme die natürliche Zahl.

a)



b)



c) [4; 5]
[4,3; 4,4]
[4,35; 4,36]

d) [4; 5]
[4,7; 4,8]
[4,79; 4,8]

e) [10; 11]
[10,7; 10,8]
[10,72; 10,73]

f) [14; 15]
[14,5; 14,6]
[14,52; 14,53]

7 a) Für $\sqrt{3}$ zeigt der Taschenrechner die Zahl 1,732050808 an. Begründe mithilfe der dargestellten Rechnung, dass diese Zahl nicht der genaue Wert für $\sqrt{3}$ ist.

```
1,732050808 · 1,732050808
   1732050808
   12124355656
      5196152424
        3464101616
           8660254040
             13856406464
                13856406464
   3,000000001493452864
```

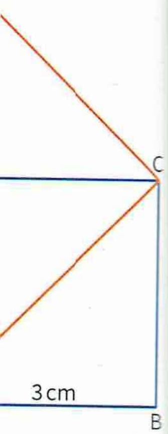
b) Gib die Zahl 1,732050808 in deinen Taschenrechner ein und quadriere sie. Was stellst du fest?
c) Ein weiterer Taschenrechner zeigt das folgende Ergebnis an:
$\sqrt{3} = 1{,}732050807569$
Wie lautet die letzte Ziffer, wenn du das Ergebnis quadrierst?

Die meisten Quadratwurzeln sind Zahlen, die nicht als endliche oder periodische Dezimalzahlen geschrieben werden können. Solche Zahlen heißen **irrationale Zahlen.**
Für irrationale Zahlen können Näherungswerte bestimmt werden, deren Genauigkeit schrittweise verbessert werden kann.

$\sqrt{2} = 1{,}414213562\ldots$
$\sqrt{5} = 2{,}236067977\ldots$

Die rationalen und die irrationalen Zahlen bilden zusammen die **reellen Zahlen.** Die Menge aller reellen Zahlen wird mit $\mathbb{R}$ bezeichnet.

as blaue Qua-
C gezeichnet
t ACEF konst-



es Quadrats
ie Seitenlänge
ist.
gt für $\sqrt{18}$ die
m ist diese
Seitenlänge

Dezimalzahl
nach dem
aßzahl der
drats sein?

rat ABCD mit
iagonale $\overline{AC}$

e $\overline{AC}$ mithilfe

nge der Stre-
endlichen

1 Welche Quadratwurzeln sind rationale Zahlen, welche sind irrationale Zahlen?

$\sqrt{11}$ $\sqrt{81}$ $\sqrt{9}$
$\sqrt{12}$ $\sqrt{48}$ $\sqrt{49}$ $\sqrt{70}$
$\sqrt{0{,}25}$ $\sqrt{0{,}5}$ $\sqrt{2{,}25}$
$\sqrt{1{,}25}$ $\sqrt{6{,}25}$
$\sqrt{10}$ $\sqrt{1}$ $\sqrt{100}$ $\sqrt{0{,}1}$
$\sqrt{0{,}09}$ $\sqrt{0{,}9}$

2 Setze < oder > ein.

a) $\sqrt{32}$ ■ 6		b) $\sqrt{120}$ ■ 11	
$\sqrt{84}$ ■ 9		$\sqrt{145}$ ■ 12	
$\sqrt{53}$ ■ 7		$\sqrt{170}$ ■ 13	
c) $\sqrt{200}$ ■ 14		d) $\sqrt{905}$ ■ 30	
$\sqrt{250}$ ■ 16		$\sqrt{395}$ ■ 20	
$\sqrt{222}$ ■ 15		$\sqrt{1000}$ ■ 31	

3 Gib an, welche Zahl am nächsten liegt

a) bei $\sqrt{85}$:	8	9	10	11
b) bei $\sqrt{110}$:	9	10	11	12
c) bei $\sqrt{56}$:	6,5	7	7,5	8
d) bei $\sqrt{133}$:	11	11,5	12	12,5
e) bei $\sqrt{97}$:	9,2	9,4	9,6	9,8
f) bei $\sqrt{50}$:	6,8	7,1	7,4	7,7

Überprüfe dein Ergebnis mit dem Taschenrechner.

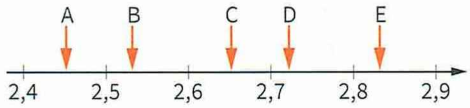
4 Gib wie im Beispiel die beiden aufeinander folgenden natürlichen Zahlen an, zwischen denen die Quadratwurzel liegt. Überlege zunächst, zwischen welchen Quadratzahlen der Radikand liegt.

■	<	$\sqrt{78}$	<	■
64	<	78	<	81
8^2	<	78	<	9^2
8	<	$\sqrt{78}$	<	9

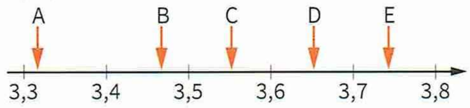
a) $\sqrt{89}$
$\sqrt{42}$
b) $\sqrt{31}$
$\sqrt{67}$
c) $\sqrt{150}$
$\sqrt{200}$

5 Ordne jeder reellen Zahl die zugehörige Markierung auf der Zahlengeraden zu.

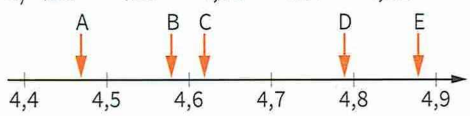
a) $\sqrt{7}$ 2,72 $\sqrt{6}$ 2,53 $\sqrt{8}$



b) 3,55 $\sqrt{14}$ 3,65 $\sqrt{11}$ $\sqrt{12}$



c) $\sqrt{23}$ $\sqrt{20}$ 4,88 $\sqrt{21}$ 4,62



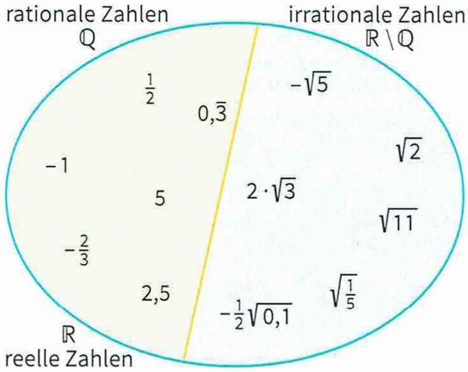
6 a) Gib drei irrationale Quadratwurzeln an, die zwischen 5 und 6 liegen.
b) Bestimme alle irrationalen Quadratwurzeln, die zwischen 3 und 4 liegen.
c) Wie viele irrationale Quadratwurzeln liegen zwischen 6 und 7?

7 a) Gib drei rationale Zahlen an,
- die kleiner als $\sqrt{2}$ sind.
- die zwischen 2 und $\sqrt{5}$ liegen.
- die zwischen $-\sqrt{2}$ und $-\sqrt{3}$ liegen.

b) Gib drei irrationale Zahlen an,
- die kleiner als −6 sind.
- die größer als $\sqrt{2}$ sind.
- die zwischen −10 und −11 liegen.

8 a) Ein Rechteck ist 18 cm lang und 8 cm breit (16 cm lang und 5 cm breit, 2,7 m lang und 1,2 m breit, 2,4 m lang und 1,5 m breit).
Bestimme die Seitenlänge des Quadrats, das den gleichen Flächeninhalt wie das Rechteck hat. Gib dabei an, ob die Maßzahl der Seitenlänge eine rationale oder eine irrationale Zahl ist.
b) Gib die Länge und die Breite eines Rechtecks so an, dass das flächengleiche Quadrat eine Seitenlänge mit irrationaler (rationaler) Maßzahl hat.

9 Die Menge der reellen Zahlen besteht aus den rationalen und den irrationalen Zahlen.



Welche Aussagen sind wahr, welche sind falsch?

10 Überlege, ob die Dezimalzahl eine rationale oder eine irrationale Zahl darstellen kann.

a) 0,27272727272727272...
b) 1,4142135623730950488...
c) 0,15384615384615384 61...
d) 1,26829268292682926829...
e) 0,1001000100001000001...
f) 0,2040608010012014016...

11 Welche Zahlen sind rational, welche irrational?

$\sqrt{0,36} + \sqrt{2,25}$ | $7 \cdot \sqrt{3}$ | $\sqrt{5} + \sqrt{4}$ | $5 \cdot \sqrt{5}$ | $2 + \sqrt{1}$ | $7 \cdot \sqrt{16}$ | $\sqrt{6,25} - \sqrt{4,84}$ | $1 + \sqrt{2}$ | $4 - \sqrt{5}$ | $5 - \sqrt{4}$ | $6 \cdot \sqrt{9}$ | $8 : \sqrt{2}$ | $8 : \sqrt{4}$ | $9 \cdot \sqrt{6}$ | $\sqrt{1,96} + \sqrt{1,69}$ | $\sqrt{0,9} + \sqrt{0,4}$ | $\sqrt{2} \cdot \sqrt{2}$ | $3 + \sqrt{0,25}$ | $7 + \sqrt{0,5}$ | $\sqrt{16:3}$ | $\sqrt{15:3}$ | $\sqrt{18:2}$ | $\sqrt{36:9}$ | $\sqrt{9:36}$

$\sqrt{0,36} + \sqrt{2,25} = 0,6 + 1,5 = 2,1$
$\sqrt{0,36} + \sqrt{2,25}$ ist eine rationale Zahl.

$7 \cdot \sqrt{3} = 7 \cdot 1,73205... = 12,12435...$
$7 \cdot \sqrt{3}$ ist eine irrationale Zahl.

Vervollständige die Tabelle im Heft.

rationale Zahlen	irrationale Zahlen
$\sqrt{0,36} + \sqrt{2,25}$	$7 \cdot \sqrt{3}$

1 Berechne und vergleiche die Ergebnisse. Was stellst du fest?

$\sqrt{16}+\sqrt{9}$ und $\sqrt{16+9}$	$\sqrt{169}-\sqrt{25}$ und $\sqrt{169-25}$
$\sqrt{36}+\sqrt{64}$ und $\sqrt{36+64}$	$\sqrt{289}-\sqrt{64}$ und $\sqrt{289-64}$
$\sqrt{16}\cdot\sqrt{9}$ und $\sqrt{16\cdot 9}$	$\sqrt{100}:\sqrt{4}$ und $\sqrt{100:4}$
$\sqrt{81}\cdot\sqrt{4}$ und $\sqrt{81\cdot 4}$	$\sqrt{225}:\sqrt{9}$ und $\sqrt{225:9}$

Für zwei verschiedene positive reelle Zahlen a und b gilt:

$\sqrt{a}+\sqrt{b}\neq\sqrt{a+b}$
$\sqrt{a}-\sqrt{b}\neq\sqrt{a-b}$

Für alle positiven reellen Zahlen a und b gilt:

$\sqrt{a}\cdot\sqrt{b}=\sqrt{a\cdot b}$
$\sqrt{a}:\sqrt{b}=\sqrt{a:b}$

2 Berechne.

a) $\sqrt{25\cdot 49}$
$\sqrt{36\cdot 81}$

b) $\sqrt{16\cdot 225}$
$\sqrt{64\cdot 121}$

c) $\sqrt{169\cdot 196}$
$\sqrt{100\cdot 289}$

d) $\sqrt{324\cdot 144}$
$\sqrt{361\cdot 576}$

3 Welche Fehler hat Fabian gemacht?

① $\sqrt{16}+\sqrt{9}=\sqrt{25}=5$
② $\sqrt{100}-\sqrt{36}=\sqrt{64}=8$
③ $\sqrt{2}+\sqrt{2}=\sqrt{4}=2$
④ $\sqrt{4}+\sqrt{4}=\sqrt{8}=4$
⑤ $\sqrt{25}<\sqrt{25}=\sqrt{0}=0$

4 Berechne jeweils die Quadratwurzel wie in den Beispielen.

$$\begin{aligned}\sqrt{3\,600}&=\sqrt{36\cdot 100}\\&=\sqrt{36}\cdot\sqrt{100}\\&=6\cdot 10\\&=60\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\sqrt{360\,000}&=\sqrt{36\cdot 10\,000}\\&=\sqrt{36}\cdot\sqrt{10\,000}\\&=6\cdot 100\\&=600\end{aligned}$$

a) $\sqrt{4\,900}$
$\sqrt{8\,100}$

b) $\sqrt{12\,100}$
$\sqrt{14\,400}$

c) $\sqrt{90\,000}$
$\sqrt{40\,000}$

d) $\sqrt{160\,000}$
$\sqrt{640\,000}$

e) $\sqrt{1\,690\,000}$
$\sqrt{6\,250\,000}$

f) $\sqrt{1\,210\,000}$
$\sqrt{2\,250\,000}$

g) $\sqrt{225\,000\,000}$
$\sqrt{2\,500\,000\,000}$

5 Berechne die Produkte, indem du die beiden Wurzeln zu einer Wurzel zusammenfasst.

$\sqrt{2}\cdot\sqrt{50}=\sqrt{2\cdot 50}=\sqrt{100}=10$
$\sqrt{75}\cdot\sqrt{3}=\sqrt{75\cdot 3}=\sqrt{225}=15$

a) $\sqrt{2}\cdot\sqrt{32}$
$\sqrt{2}\cdot\sqrt{72}$

b) $\sqrt{3}\cdot\sqrt{27}$
$\sqrt{48}\cdot\sqrt{3}$

c) $\sqrt{18}\cdot\sqrt{2}$
$\sqrt{6}\cdot\sqrt{54}$

d) $\sqrt{5}\cdot\sqrt{80}$
$\sqrt{6}\cdot\sqrt{150}$

e) $\sqrt{7}\cdot\sqrt{28}$
$\sqrt{72}\cdot\sqrt{8}$

f) $\sqrt{320}\cdot\sqrt{5}$
$\sqrt{11}\cdot\sqrt{44}$

6 Fasse zu einer Wurzel zusammen und berechne.

a) $\sqrt{6}\cdot\sqrt{8}\cdot\sqrt{12}$
$\sqrt{10}\cdot\sqrt{5}\cdot\sqrt{2}$

b) $\sqrt{2{,}5}\cdot\sqrt{5}\cdot\sqrt{2}$
$\sqrt{4{,}5}\cdot\sqrt{6}\cdot\sqrt{3}$

c) $\sqrt{6}\cdot\sqrt{0{,}5}\cdot\sqrt{7{,}5}\cdot\sqrt{2{,}5}$
$\sqrt{2{,}4}\cdot\sqrt{0{,}5}\cdot\sqrt{4{,}8}\cdot\sqrt{0{,}25}$

7 Berechne.

a) $\sqrt{81:9}$
$\sqrt{144:16}$

b) $\sqrt{324:36}$
$\sqrt{441:49}$

8 Ziehe die Quadratwurzel aus den Brüchen.

$\sqrt{\frac{64}{81}} = \frac{\sqrt{64}}{\sqrt{81}} = \frac{8}{9}$

a) $\sqrt{\frac{4}{9}}$
$\sqrt{\frac{16}{25}}$
$\sqrt{\frac{36}{49}}$

b) $\sqrt{\frac{81}{100}}$
$\sqrt{\frac{169}{196}}$
$\sqrt{\frac{121}{225}}$

c) $\sqrt{\frac{144}{289}}$
$\sqrt{\frac{400}{529}}$
$\sqrt{\frac{324}{625}}$

d) $\sqrt{\frac{361}{900}}$
$\sqrt{\frac{289}{900}}$
$\sqrt{\frac{256}{729}}$

9 Berechne die Quadratwurzel.

$\sqrt{\underbrace{0{,}64}_{\text{2 Stellen nach dem Komma}}} = \sqrt{\frac{64}{100}} = \frac{\sqrt{64}}{\sqrt{100}} = \frac{8}{10} = \underbrace{0{,}8}_{\text{1 Stelle nach dem Komma}}$

$\sqrt{\underbrace{0{,}0064}_{\text{4 Stellen nach dem Komma}}} = \sqrt{\frac{64}{10\,000}} = \frac{8}{100} = \underbrace{0{,}08}_{\text{2 Stellen nach dem Komma}}$

a) $\sqrt{0{,}04}$
$\sqrt{0{,}16}$
$\sqrt{0{,}81}$

b) $\sqrt{1{,}96}$
$\sqrt{2{,}25}$
$\sqrt{3{,}24}$

c) $\sqrt{0{,}0049}$
$\sqrt{0{,}0036}$
$\sqrt{0{,}0121}$

d) $\sqrt{0{,}000004}$
$\sqrt{0{,}000025}$
$\sqrt{0{,}000144}$

e) $\sqrt{0{,}000169}$
$\sqrt{0{,}000625}$
$\sqrt{0{,}00000009}$

10 Berechne die Quotienten, indem du die beiden Wurzeln zu einer Wurzel zusammenfasst.

$\sqrt{80} : \sqrt{5} = \sqrt{80:5} = \sqrt{16} = 4$
$\sqrt{75} : \sqrt{3} = \sqrt{75:3} = \sqrt{25} = 5$

a) $\sqrt{162} : \sqrt{2}$
$\sqrt{98} : \sqrt{2}$

b) $\sqrt{300} : \sqrt{3}$
$\sqrt{192} : \sqrt{3}$

c) $\sqrt{242} : \sqrt{2}$
$\sqrt{108} : \sqrt{3}$

d) $\sqrt{150} : \sqrt{6}$
$\sqrt{405} : \sqrt{5}$

e) $\sqrt{847} : \sqrt{7}$
$\sqrt{275} : \sqrt{11}$

f) $\sqrt{60{,}5} : \sqrt{0{,}5}$
$\sqrt{31{,}5} : \sqrt{3{,}5}$

11 Fasse zusammen.

$5\sqrt{7} + 3\sqrt{7} = 8\sqrt{7}$
$9\sqrt{5} - 6\sqrt{5} = 3\sqrt{5}$
$9\sqrt{6} - 3\sqrt{6} - 2\sqrt{6} = 4\sqrt{6}$
$8\sqrt{3} + 6\sqrt{5} + 2\sqrt{5} - 3\sqrt{3} = 5\sqrt{3} + 8\sqrt{5}$

a) $11\sqrt{2} + 7\sqrt{2}$
$9\sqrt{7} - 2\sqrt{7}$
$8\sqrt{6} + 2\sqrt{6}$

b) $9\sqrt{3} + 2\sqrt{3} + 4\sqrt{3}$
$11\sqrt{5} - 2\sqrt{5} - 6\sqrt{5}$
$17\sqrt{8} - 6\sqrt{8} + 2\sqrt{8}$

c) $6\sqrt{11} + 4\sqrt{11} - 6\sqrt{11} - 9\sqrt{11} + 2\sqrt{11}$
$3\sqrt{13} - 6\sqrt{13} + 11\sqrt{13} - 5\sqrt{13} + \sqrt{13}$
$12\sqrt{17} + 4\sqrt{17} - 3\sqrt{17} + \sqrt{17} - 11\sqrt{17}$

d) $6\sqrt{19} + 11\sqrt{17} - 6\sqrt{19} - 4\sqrt{17} + 2\sqrt{19}$
$3\sqrt{23} + 6\sqrt{10} + 11\sqrt{23} - 5\sqrt{10} + \sqrt{23}$
$12\sqrt{6} + 4\sqrt{6} + 13\sqrt{15} + \sqrt{6} - 11\sqrt{15}$

12 Löse die Klammern auf.

$\sqrt{3}\,(\sqrt{12} + \sqrt{27})$
$= \sqrt{3} \cdot \sqrt{12} + \sqrt{3} \cdot \sqrt{27}$
$= \sqrt{36} + \sqrt{81}$
$= 6 + 9$
$= 15$

$(\sqrt{98} - \sqrt{50}) : \sqrt{2}$
$= \sqrt{98} : \sqrt{2} - \sqrt{50} : \sqrt{2}$
$= \sqrt{49} - \sqrt{25}$
$= 7 - 5$
$= 2$

a) $\sqrt{5}\,(\sqrt{5} + \sqrt{20})$
$\sqrt{3}\,(\sqrt{12} + \sqrt{75})$

b) $\sqrt{6}\,(\sqrt{54} - \sqrt{24})$
$\sqrt{2}\,(\sqrt{32} - \sqrt{18})$

c) $(\sqrt{48} + \sqrt{12}) : \sqrt{3}$
$(\sqrt{27} + \sqrt{75}) : \sqrt{3}$

d) $(\sqrt{63} - \sqrt{28}) : \sqrt{7}$
$(\sqrt{96} - \sqrt{24}) : \sqrt{6}$

e) $\sqrt{5}\,(\sqrt{180} - \sqrt{80})$
$(\sqrt{448} - \sqrt{252}) : \sqrt{7}$

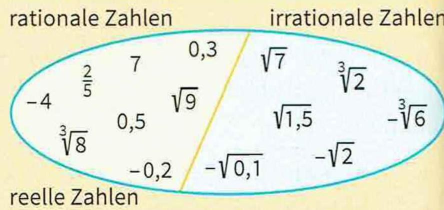
f) $\sqrt{20}\,(\sqrt{125} + \sqrt{5})$
$(\sqrt{128} - \sqrt{98}) : \sqrt{\ }$

Reelle Zahlen

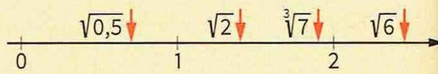
kompakt

$\sqrt{a}$ ist die nichtnegative Zahl b, die beim Quadrieren a ergibt. Die Zahl b heißt Quadratwurzel aus a. Die Zahl a heißt Radikand. Aus negativen Zahlen können wir keine Wurzel ziehen.	$\sqrt{36} = 6$, denn $6^2 = 36$ $\sqrt{121} = 11$, denn $11^2 = 121$ $\sqrt{0} = 0$, denn $0^2 = 0$
$\sqrt[3]{a}$ ist die nichtnegative Zahl b, die als dritte Potenz a ergibt. Die Zahl b heißt dritte Wurzel aus a.	$\sqrt[3]{64} = 4$, denn $4^3 = 64$ $\sqrt[3]{512} = 8$, denn $8^3 = 512$
Die meisten Quadratwurzeln und dritten Wurzeln sind Zahlen, die nicht als endliche oder periodische Dezimalzahlen geschrieben werden können. Solche Zahlen heißen **irrationale Zahlen.**	$\sqrt{2} = 1{,}41421356\ldots$ $\sqrt{6} = 2{,}44948974\ldots$ $\sqrt[3]{7} = 1{,}91293118\ldots$

Die rationalen und die irrationalen Zahlen bilden zusammen die **reellen Zahlen.** Die Menge aller reellen Zahlen wird mit $\mathbb{R}$ bezeichnet.



Alle reellen Zahlen können an der Zahlengeraden dargestellt werden.



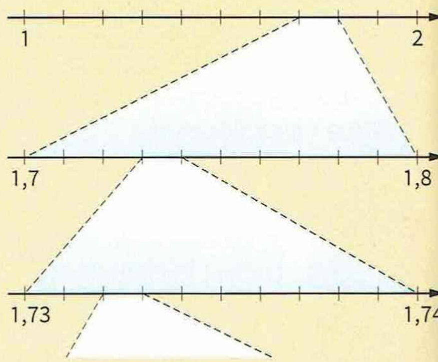
Mit einer Intervallschachtelung können schrittweise beliebig viele Nachkommastellen einer irrationalen Zahl bestimmt werden.

$\sqrt{3}$ liegt im Intervall $[1{,}7;\ 1{,}8]$,
denn $1{,}7^2 = 2{,}89 < 3$
und $1{,}8^2 = 3{,}24 > 3$.

$\sqrt{3}$ liegt im Intervall $[1{,}73;\ 1{,}74]$,
denn $1{,}73^2 = 2{,}9929 < 3$
und $1{,}74^2 = 3{,}0276 > 3$.

$\sqrt{3}$ liegt im Intervall $[1{,}732;\ 1{,}733]$,
denn $1{,}732^2 = 2{,}999824 < 3$
und $1{,}733^2 = 3{,}003289 > 3$.

$\sqrt{3} = 1{,}732\ldots$



Für alle positiven reellen Zahlen a und b gilt:

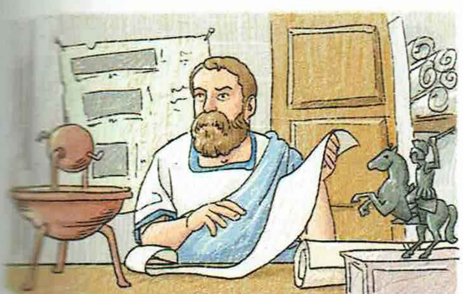
$\sqrt{a} \cdot \sqrt{b} = \sqrt{a \cdot b}$
$\sqrt{a} : \sqrt{b} = \sqrt{a : b}$

$\sqrt{4} \cdot \sqrt{9} = 2 \cdot 3 = 6$
$\sqrt{4 \cdot 9} = \sqrt{36} = 6$

$\sqrt{100} : \sqrt{4} = 10 : 2 = 5$
$\sqrt{100 : 4} = \sqrt{25} = 5$

Heron-Verfahren

Bevor es Taschenrechner gab, war es nicht so leicht, gute Näherungswerte für irrationale Quadratwurzeln zu bestimmen. Die griechischen Mathematiker benutzten vor 2000 Jahren ein Verfahren, mit dem sie nur durch Anwenden der Addition und Division schnell gute Näherungswerte für Quadratwurzeln berechnen konnten. Dieses Verfahren ist nach dem Mathematiker und Ingenieur Heron von Alexandrien (um 100 n. Chr.) benannt.



1 Im Beispiel siehst du, wie du mithilfe des Heron-Verfahrens einen Näherungswert für $\sqrt{15}$ berechnen kannst. Nacheinander werden mehrere Rechtecke bestimmt, die alle den Flächeninhalt 15 cm² haben. Dabei ist der Unterschied der Seitenlängen beim zweiten Rechteck kleiner als beim ersten, beim dritten noch kleiner als beim zweiten und so weiter, so dass die Gestalt der Rechtecke einem Quadrat immer ähnlicher wird. Die Seitenlänge des letzten Rechtecks ist dann eine gute Näherung für $\sqrt{15}$.

a) Vergleiche das Ergebnis des Heron-Verfahrens mit dem Wert, den dein Taschenrechner für $\sqrt{15}$ angibt. Beurteile die Genauigkeit des Verfahrens.

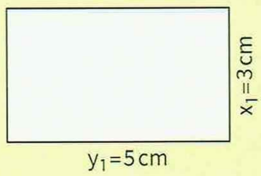
b) Verbessere das Ergebnis, indem du den zweiten Schritt zwei Mal wiederholst. Runde die Werte, die dein Taschenrechner anzeigt, nicht. Vergleiche mit dem Ergebnis, das du mit der Wurzeltaste des Taschenrechners erhältst. Was stellst du fest?

c) Berechne Näherungswerte für $\sqrt{24}$ ($\sqrt{56}$, $\sqrt{20}$, $\sqrt{90}$, $\sqrt{30}$) mithilfe des Heron-Verfahrens.

1. Wähle zwei natürliche Zahlen x_1 und y_1 als Seitenlängen für ein Rechteck mit dem Flächeninhalt A = 15 cm².

$x_1 = 3$

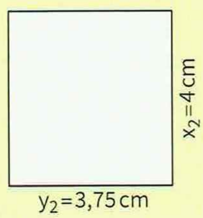
$y_1 = 5$



2. Bestimme zwei Zahlen x_2 und y_2 als Seitenlängen für ein zweites Rechteck mit A = 15 cm². Wähle für x_2 das arithmetische Mittel von x_1 und y_1. Berechne y_2 mithilfe des Flächeninhalts des Rechtecks.

$x_2 = \frac{3+5}{2} = 4$

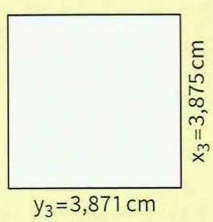
$y_2 = \frac{15}{4} = 3{,}75$



3. Wiederhole den zweiten Schritt. Wähle für x_3 das arithmetische Mittel von x_2 und y_2. Berechne y_3 mithilfe des Flächeninhalts des Rechtecks.

$x_3 = \frac{4+3{,}75}{2} = 3{,}875$

$y_3 = \frac{15}{3{,}875} \approx 3{,}871$



4. Wähle das arithmetische Mittel von x_3 und y_3 als Näherung für $\sqrt{15}$.

$x_4 = \frac{3{,}875 + 3{,}871}{2} = 3{,}8743$

Von den rationalen zu den reellen Zahlen

1 Alle Zahlen, die du als Bruch der Form $\frac{z}{n}$ ausdrücken kannst, heißen **rationale Zahlen.** Dabei ist n eine positive ganze Zahl und z eine beliebige ganze Zahl.

a) Rationale Zahlen kannst du als endliche oder periodische Dezimalzahlen schreiben. Dazu musst du den Zähler durch den Nenner dividieren.

$9 : 4 = 2{,}25$	$5 : 6 = 0{,}833\ldots = 0{,}8\overline{3}$
$\underline{8}$	50
10	$\underline{48}$
$\underline{8}$	20
20	$\underline{18}$
$\underline{20}$	20
0	$\underline{18}\ldots$
$\frac{9}{4} = 2{,}25$	$\frac{5}{6} = 0{,}8\overline{3}$

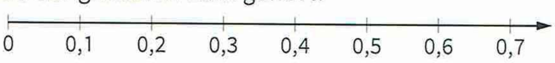
Schreibe $\frac{1}{5}$ ($\frac{3}{10}$, $\frac{2}{9}$, $\frac{4}{15}$) als Dezimalzahl.

b) Umgekehrt kannst du alle endlichen und periodischen Dezimalzahlen als Bruch in der Form $\frac{z}{n}$ schreiben.

$0{,}5 = \frac{1}{2}$ $\quad 0{,}875 = \frac{7}{8}$ $\quad 0{,}\overline{3} = \frac{1}{3}$ $\quad 0{,}\overline{27} = \frac{3}{11}$

Schreibe 0,75 ($0{,}1$; $0{,}\overline{6}$; $0{,}1\overline{6}$) als Bruch.

2 Jeder rationalen Zahl entspricht genau ein Punkt auf der Zahlengeraden.
Auf der Zahlengeraden liegt der Punkt, der zu der kleineren Zahl gehört, links von dem Punkt, der zu der größeren Zahl gehört.



a) Gib eine rationale Zahl an, die zwischen 0,5 und 0,6 (zwischen 0,52 und 0,53; zwischen 0,527 und 0,528) liegt.

b) Bestimme fünf rationale Zahlen, die zwischen 1,24 und 1,25 (zwischen 1,243 und 1,244; zwischen 1,2437 und 1,2438) liegen.

c) Begründe: Zwischen zwei rationalen Zahlen liegen unendlich viele weitere rationale Zahlen.

3 Wir wollen zeigen, dass $\sqrt{2}$ keine rationale Zahl ist, d. h. dass $\sqrt{2}$ nicht als Bruch der Form $\frac{z}{n}$ mit natürlichen Zahlen z und n geschrieben werden kann. Dazu untersuchen wir zunächst die Primfaktoren von Quadratzahlen.

a) Jede natürliche Zahl ist entweder selbst eine Primzahl oder kann als Produkt von mehreren Primzahlen geschrieben werden. Vergleiche die Primfaktorzerlegung einer natürlichen Zahl mit der ihrer Quadratzahl. Was stellst du fest?

Natürliche Zahl	Quadratzahl
$5 = 5$	$25 = 5 \cdot 5$
$6 = 2 \cdot 3$	$36 = 2 \cdot 3 \cdot 2 \cdot 3$
$9 = 3 \cdot 3$	$81 = 3 \cdot 3 \cdot 3 \cdot 3$
$30 = 2 \cdot 3 \cdot 5$	$900 = 2 \cdot 3 \cdot 5 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 5$

Begründe, dass jede Quadratzahl eine gerade Anzahl von Primfaktoren hat.

b) Erkläre die einzelnen Schritte der Umformung.

Annahme: $\sqrt{2}$ ist ein Bruch.

Dann gilt: $\sqrt{2} = \frac{z}{n}$

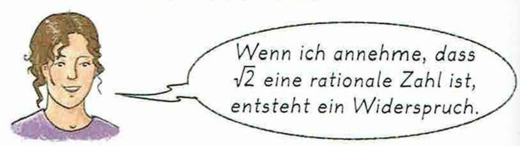
$$2 = \left(\frac{z}{n}\right)^2$$

$$2 = \frac{z^2}{n^2}$$

$$2 \cdot n^2 = z^2$$

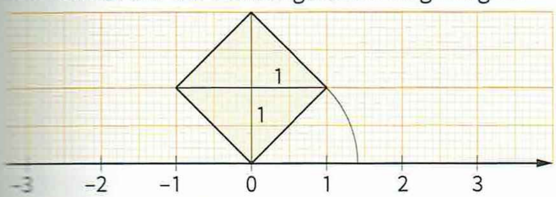
c) Begründe:
1. Die Zahl z^2 hat eine gerade Anzahl von Primfaktoren.
2. Die Zahl $2 \cdot n^2$ hat eine ungerade Anzahl von Primfaktoren.

Die Umformung zeigt: Wenn $\sqrt{2}$ ein Bruch $\frac{z}{n}$ ist, dann stellen z^2 und $2 \cdot n^2$ dieselbe Zahl dar.
Diese Zahl kann in eine gerade Anzahl von Primfaktoren, aber auch in eine ungerade Anzahl von Primfaktoren zerlegt werden.
Das ist unmöglich, weil die Anzahl der Primfaktoren für jede Zahl eindeutig festgelegt ist.
Daher kann $\sqrt{2}$ kein Bruch sein.

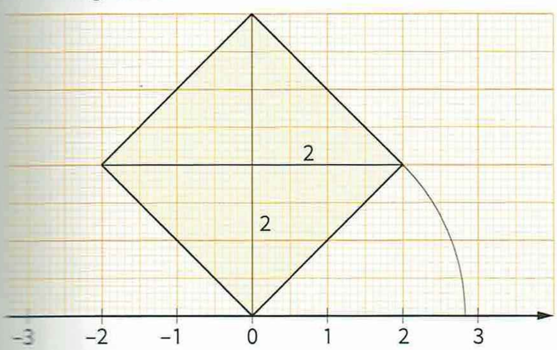


$\sqrt{2}$ ist keine rationale Zahl.

4 Tim hat ein Quadrat auf Millimeterpapier gezeichnet und die Seitenlänge des Quadrats mit dem Zirkel auf der Zahlengeraden abgetragen.



a) Gib die Seitenlänge des Quadrats an.
b) Begründe: Auf der Zahlengeraden gibt es Punkte, denen keine rationale Zahl entspricht.
c) Welche irrationale Zahl ist auf der Zahlengeraden dargestellt?



Nicht jedem Punkt auf der Zahlengeraden entspricht eine rationale Zahl. Es gibt noch unendlich viele andere Punkte.
Die Zahlen, die diesen Punkten entsprechen, heißen **irrationale Zahlen.**

5 Grundlage unseres Zahlensystems sind die natürlichen Zahlen.

$\mathbb{N} = \{0, 1, 2, 3, 4, 5 \ldots\}$

Wir benutzen sie zum Zählen.
Wenn du natürliche Zahlen addierst oder multiplizierst, ist das Ergebnis wieder eine natürliche Zahl. Aber beim Subtrahieren tritt eine Schwierigkeit auf: Viele Subtraktionsaufgaben, z. B. $7 - 12$, kannst du mithilfe der natürlichen Zahlen nicht lösen.
Deshalb wird der Bereich der Zahlen zur Menge $\mathbb{Z}$ der ganzen Zahlen erweitert.

$\mathbb{Z} = \{\ldots -3, -2, -1, 0, 1, 2, 3, \ldots\}$

Aber auch im Bereich der ganzen Zahlen sind nicht alle Grundrechenarten durchführbar. Die Divisionsaufgaben $7 : 2$ oder $-6 : 4$ kannst du auch mithilfe der ganzen Zahlen nicht lösen. Also wird der Bereich der Zahlen zur Menge $\mathbb{Q}$ der rationalen Zahlen erweitert.

$\mathbb{Q} = \{\frac{z}{n} \mid z, n \in \mathbb{Z}, n > 0\}$

Um allen Punkten der Zahlengeraden eine Zahl zuzuordnen, reichen aber auch die rationalen Zahlen nicht aus. Daher wird der Bereich der rationalen Zahlen zur Menge $\mathbb{R}$ der reellen Zahlen erweitert.
Zu welcher Zahlenmenge gehört die Zahl $\sqrt{3}$ ($\frac{2}{7}$, -1, 13)?