

Hausaufgaben 30. Januar 2025: Zins und Zinseszins

Vergessen Sie bei *Textaufgaben* nicht all das „gegeben“ und „gesucht“.

1. Basis.

- (a) Sie legen 500 € an. Der Zinssatz beträgt $z = 4\%$ p.a.

- (A) Wie viel Geld haben Sie nach 1 Jahr?

Lösung:

$$K_{\text{neu}} = K_{\text{alt}} (1 + z) = 500 \text{ €} \cdot (1 + 0.04) = 520 \text{ €}$$

- (B) ... nach 2 Jahren?

Lösung:

$$K_{\text{neu}} = K_{\text{alt}} (1 + z)^n = 500 \text{ €} \cdot (1 + 0.04)^2 = 540.8 \text{ €}$$

- (C) ... nach 5 Jahren?

Lösung:

$$K_{\text{neu}} = K_{\text{alt}} (1 + z)^n = 500 \text{ €} \cdot (1 + 0.04)^5 = 608.33 \text{ €}$$

- (D) ... nach 10 Jahren?

Lösung:

$$K_{\text{neu}} = K_{\text{alt}} (1 + z)^n = 500 \text{ €} \cdot (1 + 0.04)^{10} = 740.12 \text{ €}$$

- (E) ... nach 20 Jahren?

Lösung:

$$K_{\text{neu}} = K_{\text{alt}} (1 + z)^n = 500 \text{ €} \cdot (1 + 0.04)^{20} = 1095.56 \text{ €}$$

Das heißt, nach dieser Zeit hat sich Ihr Geld in etwa verdoppelt.

- (b) Berechnen Sie jeweils das neue Kapital.

- (A) Ausgangskapital $K = 1000 \text{ €}$, Zinssatz $z = 6\%$, Laufzeit: 10 Jahre.

Lösung:

$$K_{\text{neu}} = K_{\text{alt}} (1 + z)^n = 1000 \text{ €} \cdot (1 + 0.06)^{10} = 1790.85 \text{ €}$$

- (B) Ausgangskapital $K = 200\,000 \text{ €}$, Zinssatz $z = 0.1\%$, Laufzeit: 30 Jahre.

Lösung:

$$K_{\text{neu}} = K_{\text{alt}} (1 + z)^n = 200\,000 \text{ €} \cdot (1 + 0.001)^{30} = 206\,087.82 \text{ €}$$

- (C) Ausgangskapital $K = 212 \text{ €}$, Zinssatz $z = 1\%$, Laufzeit: 50 Jahre.

Lösung:

$$K_{\text{neu}} = K_{\text{alt}} (1 + z)^n = 212 \text{ €} \cdot (1 + 0.01)^{50} = 348.66 \text{ €}$$

- (D) Ausgangskapital $K = 1100 \text{ €}$, Zinssatz $z = 5\%$, Laufzeit: 1 Jahr.

Lösung:

$$K_{\text{neu}} = K_{\text{alt}} (1 + z)^n = 1100 \text{ €} \cdot (1 + 0.05)^1 = 1155 \text{ €}$$

- (E) Ausgangskapital $K = 20\,000 \text{ €}$, Zinssatz $z = 0\%$, Laufzeit: 10 Jahre.

Lösung:

$$K_{\text{neu}} = K_{\text{alt}} (1 + z)^n = 20\,000 \text{ €} \cdot (1 + 0)^{10} = 20\,000 \text{ €}$$

Das ist zu erwarten, wenn der Zinssatz 0 ist: Keine Zinsen, das Kapital bleibt konstant.

2. Die Inflationsrate, auch Teuerungsrate genannt, gibt an, wie stark die Preise für eine standardisierte Menge an Gütern (Miete, Benzin, Essen, etc) im Laufe eines Jahres steigt. 2023 lag die Inflationsrate bei etwa 5.9%. Wenn das so weitergegangen wäre, was würde dann im

Jahre 2030 etwas kosten, das heute 100 € kostet?

Lösung:

geg.: Dem Ausgangskapital K entspricht hier der heutige Preis von 100 €. Der Zinssatz wäre die Inflationsrate 5.9 %. Die Laufzeit ist die Zahl der Jahre zwischen jetzt und 2030, also $n = 2030 - 2024 = 6$. Kurz: $K = 100$ €; $z = 5.9$ %; $n = 6$

ges.: K_n

$$K_n = K_a(1 + z)^n = 100 \text{ €} \cdot (1 + 0.06)^6 = 141.85 \text{ €}$$

Antwort: 2030 würde etwas, das heute 100 € kostet, bereits 141.85 € kosten.

3. Die Europäische Zentralbank¹ strebt eine Inflationsrate von 2.2 % an. Wie lange dauert es bei einer solchen Inflationsrate, bis sich die Preise verdoppelt haben?

Hinweis: Sie können versuchen, eine allgemeine Formel aufzustellen. Sie können es aber auch einfach ausprobieren.

Lösung:

Unsere Formel

$$K_n = K_a(1 + z)^n$$

Gibt das neue Kapital K_n als Produkt aus dem alten Kapital K_a und einem Faktor $(1 + z)^n$ an. Wenn dieser Faktor den Wert 2 erreicht, haben sich die Preise verdoppelt. Schlichtes ausprobieren ergibt für 31 Jahre

$$(1 + z)^n = (1 + 0.022)^{31} = 1.96$$

Bereits ab 32 Jahren liegen wir aber über 2:

$$(1 + z)^n = (1 + 0.022)^{32} = 2.006451$$

Das heißt, bei einer erstrebenswerten Inflationsrate verdoppeln sich die Preise etwa alle 32 Jahre.

Das Auflösen der Formel würde ich lieber auf Nachfrage besprechen, es ist wirklich nicht klausurrelevant.

¹Diese Aufgabe wäre nicht klausurgeeignet. Sie ist zum Knabbern gedacht für die, die mit dem Aufgabenblatt schnell fertig sind. Ausprobieren ist relativ einfach. Eine Formel zu erstellen erfordert aber Mathematik, die Sie vermutlich noch nicht behandelt haben.