# Inhaltsverzeichnis



# 1 Was bekommen wir, wenn wir einen Bruch durch eine Zahl teilen?

Wir hatten gesehen:

> Durch einen Bruch teilen ist mit dem Kehrbruch multiplizieren!

Das heißt zum Beispiel

$$\frac{3}{\frac{5}{7}} = 3 \cdot \frac{7}{5} = \frac{21}{5}$$

Was aber bekommen, wir, wenn wir einen Bruch durch eine Zahl teilen, also zum Beispiel

$$\frac{\frac{3}{5}}{7}$$

Wir können jede Zahl als Bruch schreiben, indem wir durch $1$ teilen. Wir können also $7$ einfach als $^7/_1$ schreiben. Warum machen wir das? Weil unsere Frage dann so aussieht:

$$\frac{\frac{3}{5}}{\frac{7}{1}}$$

Nun teilen wir einen Bruch durch einen anderen Bruch und wir wissen wie wir das machen müssen: Mit dem Kehrbruch multiplizieren. Wir bekommen also bisher:

$$\frac{\frac{3}{5}}{7} = \frac{\frac{3}{5}}{\frac{7}{1}} = \frac{3}{5} \cdot \frac{1}{7}$$

Wir wissen aber auch schon wie wir Brüche multiplizieren: Wir multiplizieren Zähler mit Zähler und Nenner mit Nenner:

$$\frac{3}{5} \cdot \frac{1}{7} = \frac{3 \cdot 1}{5 \cdot 7} = \frac{3}{5 \cdot 7} = \frac{3}{35}$$

Das ist das Endergebnis. Keine Angst, diesen Tanz müssen wir nicht jedesmal wiederholen. Die Argumentation, die wir hier am Beispiel gezeigt haben funktioniert immer. Also gilt

$$\frac{\frac{a}{b}}{c} = \frac{a}{b \cdot c}$$

Das heißt, man würde unsere Rechnung oben gewöhnlich sehr kurz schreiben als

$$\frac{\frac{3}{5}}{7} = \frac{3}{5 \cdot 7} = \frac{3}{35}$$

Selbst den Zwischenschritt kann man mit etwas Übung weglassen.

## 2 Warum den Zähler nicht gleich ganz wegkürzen?

Wenn wir einen Bruch haben wie $^{70}/_{28}$, so können wir kürzen

$$\frac{\cancelto{5}{\cancelto{10}{70}}}{\cancelto{2}{\cancelto{4}{28}}} = \frac{5}{2}$$

Warum aber kürzen wir nicht radikaler und gleich die ganze $70$ weg? Wir können natürlich Zähler und Nenner durchaus durch jede Zahl teilen (außer 0). Also auch durch 70. Dummerweise lässt sich der Nenner aber nicht durch 70 teilen und wir bekommen

$$\frac{\cancel{70}}{\cancelto{\frac{28}{70}}{28}} = \frac{1}{\frac{28}{70}}$$

Nun ist ja „durch einen Bruch teilen mit dem Kehrbruch multiplizieren“, wir bekommen also wieder

$$\frac{1}{\frac{28}{70}} = \frac{70}{28}$$

Man kann das also machen, es bringt uns nur nicht weiter.

## 3 Kürzen aus multiplizierten Brüchen

In Ausdrücken wie dem folgenden dürfen wir direkt kürzen:

$$\frac{\cancel{8}}{5} \cdot \frac{7}{\cancel{8}} = \frac{7}{5}$$

Warum? Wir könnten die Brüche ja jederzeit ausmultiplizieren, Brüche multiplizieren wir ja, indem wir die Zähler miteinander multiplizieren und die Nenner miteinander multiplizieren:

$$\frac{8}{5} \cdot \frac{7}{8} = \frac{8 \cdot 7}{5 \cdot 8}$$

Und hier dürfen wir jetzt auf jeden Fall kürzen. Wir können also auch gleich kürzen, ohne die Brüche erst auszumultiplizieren.

### 3.1 Ich bin noch nicht überzeugt, wieso darf man hier denn kürzen?

Wieso darf man die 8er hier kürzen, wenn sie doch an so unterschiedlichen Stellen in Zähler und Nenner stehen? Das kann man einfach ändern:

$$\frac{8 \cdot 7}{5 \cdot 8} = \frac{8 \cdot 7}{8 \cdot 5} = \frac{8}{8} \cdot \frac{7}{5} = 1 \cdot \frac{7}{5} = \frac{7}{5}$$

***Wenn*** Zähler und Nenner Produkte sind, oder wenn wir ein Produkt aus Brüchen haben, dürfen wir gleiche Zahlen aus Zählern und Nennern radikal herauskürzen. Wir dürfen auch Vorfaktoren und Nenner einfach kürzen, weil wir die Vorfaktoren ja jederzeit auf den Bruchstrich heben könnten:

$$\frac{3}{7} \cdot \cancel{11} \cdot \frac{5}{\cancel{11}} = \frac{15}{7}$$

## 4 Warum darf man nur aus Zähler und Nenner gleichzeitig kürzen?

In einer Situation wie der folgenden ist es verführerisch, die beiden 3er zu kürzen:

$$\frac{3 \cdot 5 \cdot 3}{10 \cdot 7 \cdot 24}$$

Das geht aber nicht. Man sieht das schnell, wenn man die beiden 3en einfach vor den Bruch zieht, wie man das ja mit allem machen kann, was im Zähler steht:

$$\frac{3 \cdot 5 \cdot 3}{10 \cdot 7 \cdot 24} = 3 \cdot 3 \cdot \frac{5}{10 \cdot 7 \cdot 24}$$

Nun ist es klar, dass man die $3 \cdot 3$ nicht einfach wegstreichen kann, denn 9 ist ja nicht gleich 1.

## 5 Wieso ist durch einen Bruch teilen mit dem Kehrbruch multiplizieren?

Dazu gibt es hier eine eine eigene PDF-Präsentation (`2024-11-14-durch-brueche-teilen.pdf`), aber ein sehr einfaches Argument ist einfach auszuprobieren. Wir wissen, dass jede Zahl durch sich selbst geteilt 1 ergibt, also auch ein Bruch durch sich selbst geteilt:

$$1 = \frac{5/7}{5/7}$$

Wenn wir nun unsere Regel anwenden („Durch einen Bruch teilen ist mit dem Kehrbruch multiplizieren“), so erhalten wir

$$\frac{5/7}{5/7} = \frac{\cancel{5}}{\cancel{7}} \cdot \frac{\cancel{7}}{\cancel{5}} = 1$$

Unsere Regel führt also dazu, dass ein Bruch geteilt durch sich selbst 1 ergibt. Genau so hatten wir sie ja auch abgeleitet, diese Rechnung hier ist nur die Überprüfung, dass das auch wirklich klappt.

## 6 Fachbegriffe

Was ist nochmal ein Quotient etc?

Ein *Quatient* ist das Ergebnis einer *Division*. In anderen Worten: Teilt man eine Zahl durch eine andere, so erhält man einen *Quotienten*.

$$\frac{a}{b} = \text{Quotient}$$

Ein *Produkt* ist das Ergebnis einer *Multiplikation*. In anderen Worten: Wenn man zwei Zahlen miteinander malnimmt, erhält man ein *Produkt*.

$$a \cdot b = \text{Produkt}$$

## 7 Was heißt „erweitern mit 5“?

Erweitern ist das Gegenstück zum Kürzen. Wir multiplizieren Nenner und Zähler mit derselben Zahl:

$$\frac{3}{7} = \frac{3}{7} \cdot 1 = \frac{3}{7} \cdot \frac{5}{5} = \frac{3 \cdot 5}{7 \cdot 5} = \frac{15}{35}$$

Nun haben wir $3/7$ mit 5 erweitert. Die ganzen Zwischenschritte müssen nicht angegeben werden. Sie stehen hier nur zur Verdeutlichung, warum man das immer machen darf.

## 8 Wie kürze ich formal korrekt?

In Klassenarbeiten und ähnlichen Prüfungen streichen Sie gekürzte Zahlen bitte wie folgt:

$$\frac{\cancelto{2}{12}}{\cancelto{3}{18}} = \frac{2}{3}$$

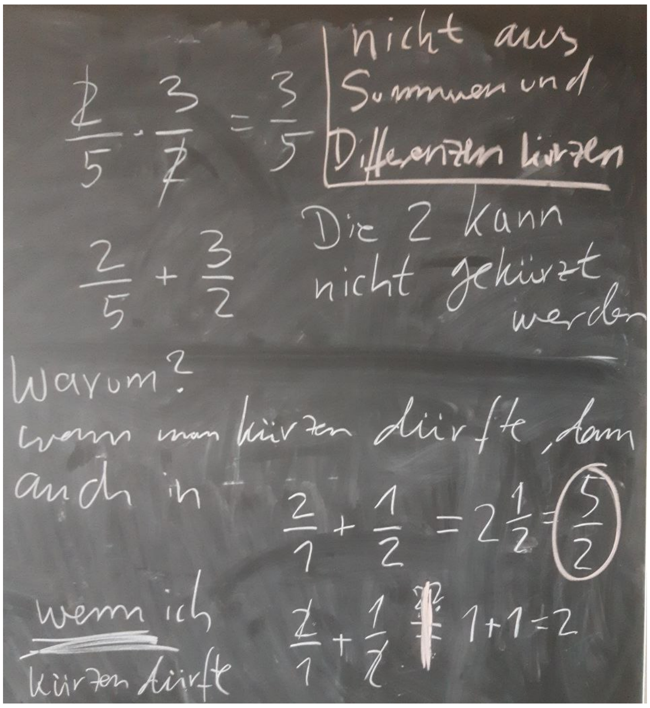
Es müssen definitiv keine kleinen Pfeile sein wie hier, ein schlichter Strich reichst aus. Mit welcher Zahl (hier 6) gekürzt wurde, muss nicht gekennzeichnet werden. Falls eine 1 übrigbleibt, muss dies nicht vermerkt werden wie in

$$\frac{\cancel{6}}{\cancelto{3}{18}} = \frac{2}{3}$$

Man muss nicht alles auf einmal kürzen, man kann es auch in mehreren Schritten machen, zum Beispiel

$$\frac{\cancelto{\cancelto{2}{6}}{12}}{\cancelto{\cancelto{3}{9}}{18}} = \frac{2}{3}$$

## 9 Nicht aus Summen kürzen!




Die Tafelanschrift zeigt deutlich warum aus Summen nicht gekürzt werden darf: Es ist leicht, Gegenbeispiele zu entwerfen wie das obige: $^2/_1 + ^1/_2$ muss $2^1/_2$ ergeben. Wenn man die 2er kürzen würde, erhielte man aber für diese Summe $2$, was nicht sein kann.

## 10 Die Regeln für die Addition mit 0 gelten auch für Brüche

Es gilt immer

$$a + 0 = a$$

(Man sagt auch, die 0 ist das neutrale Element der Addition). Dies gilt auch, wenn $a$ zufällig ein Bruch ist. So gilt also zum Beispiel:

$$\frac{0}{7} + \frac{20}{23} = 0 + \frac{20}{23} = \frac{20}{23}$$

## 11 Durch 0 teilen geht wirklich nie

Wir wissen: $^a/_0$ geht nie. Und das setzt sich fort, so dass auch

$$3 + \frac{1}{0}$$

nicht definiert ist, oder jeder andere Term, in dem irgendwo durch 0 geteilt wird. Nicht einmal

$$\frac{0}{0}$$

ist definiert, man kann hier nicht einfach kürzen.