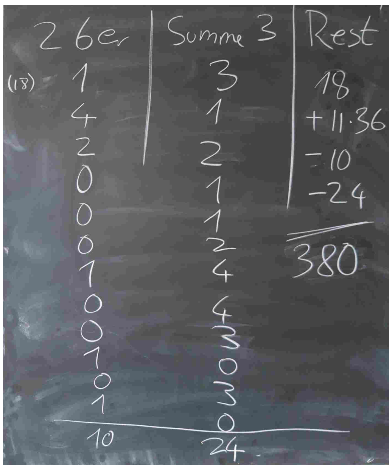
Wahrscheinlichkeitsbäume

Wir hatten in der letzten Stunde ausgerechnet, dass die Wahrscheinlichkeit für einen 6er Pasch (2 6er mit 2 Würfeln) gleich $\frac{1}{6} \cdot \frac{1}{6} = \frac{1}{36}$ ist.

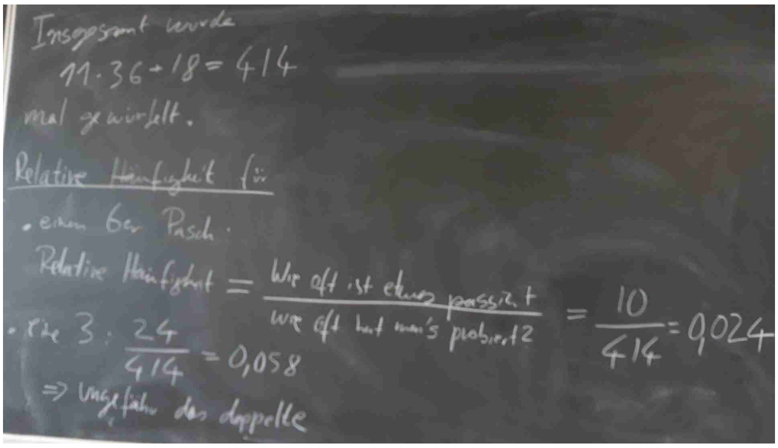
Diese Erkenntnis hat aber durchaus auch zu Unglauben geführt und war etwas abstrakt geblieben. Daher probieren wir es heute einfach aus.

11 Schüler erhalten 2 Würfel und würfeln 36 mal. Eine Schülerin hat nur 1 Würfel und würfelt 18 Doppelwürfe.

Gezählt wird die Häufigkeit der 6er-Paschs und der Fälle in denen sich insgesamt eine 3 ergibt:



Wir berechnen die Gesamtzahl der Würfe und die relativen Häufigkeiten der 6er Paschs und der 3er.



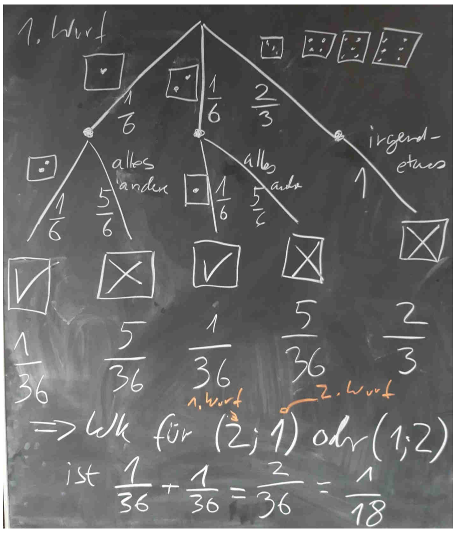
Wir können die relative Häufigkeit für zwei 6er mit der berechneten Wahrscheinlichkeit vergleichen:

$$\frac{1}{6} \cdot \frac{1}{6} = \frac{1}{36} = 0.0278 = 2.78\,\%$$

Da sind wir mit unserem Versuch doch recht nahe dran.

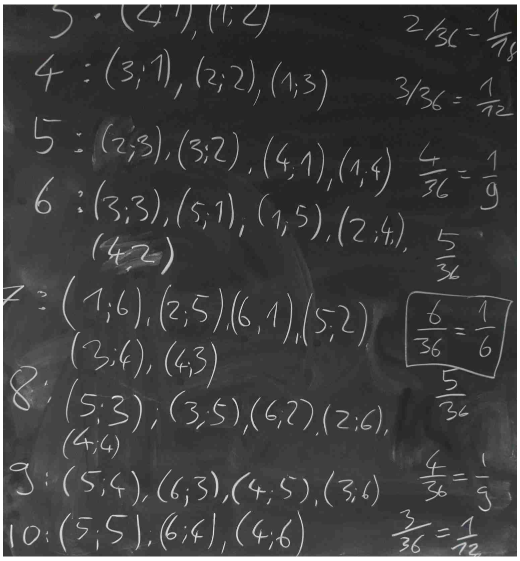
Wir sehen, dass die 3 etwa doppelt so häufig vorkam wie der 6er-Pasch. Warum ist das so? Wir zeichnen einen Baum, der nicht Häufigkeiten zeigt wie in der letzten Stunde, sondern direkt Wahrscheinlichkeiten.

Es wird 2 mal geworfen, die 1. Verzweigung zeigt den 1. Wurf, die 2. Verzweigung den 2. Wurf. Es gibt oben nur 3 Verzweigungen und nicht 6, da wir die Fälle, in denen keine 3 mehr gewürfelt werden kann (der 1. Würfel zeigt 3, 4, 5 oder 6) zu einem einzigen Fall zusammenfassen. Entsprechend verfahren wir im 2. Wurf.



Wir erhalten tatsächlich die doppelte Wahrscheinlichkeit wie für den 6er-Pasch.

Wir stellen fest, dass *jede* Kombination aus 1. Augenzahl und 2. Augenzahl dieselbe Wahrscheinlichkeit von $\frac{1}{36}$ hat. Wir können also die jeweiligen Möglichkeiten einfach auszählen, um die Wahrscheinlichkeit für jede mögliche Augensumme über 2 Würfel zu berechnen:

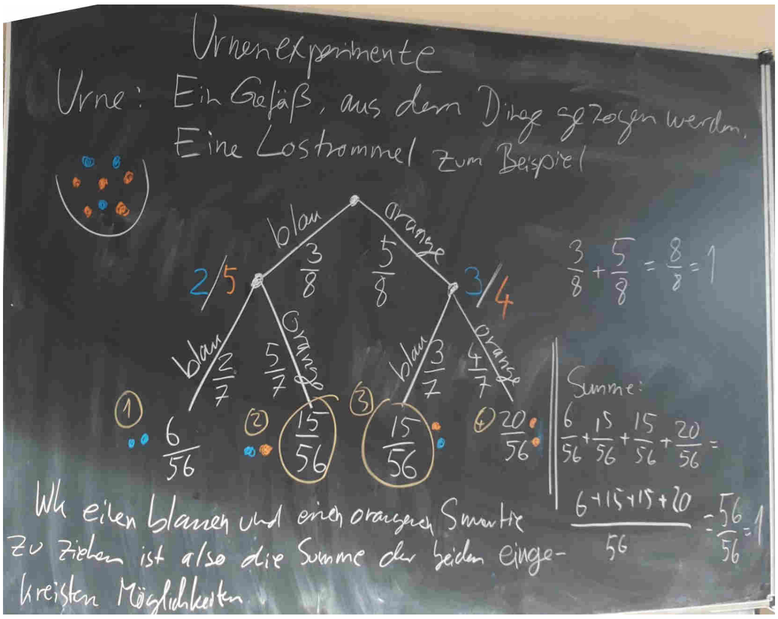


Die Tabelle ist nicht ganz vollständig, es bleibt dem geneigten Leser überlassen, die Fälle 2, 11 und 12 zu ergänzen.

Urnenexperimente

Nun gehen wir über zu einem sehr häufigen Aufgabentyp, vor allem im BBR: Urnenexperimente: In einem Behälter sind Objekte, die sich irgendwie in Klassen einteilen lassen, normalerweise weil sie unterschiedlich gefärbt sind.

Wir haben Smarties verwendet. Wir sind von einem Fall mit nur 2 Farben ausgegangen, weil dann der ganze Baum gut an die Tafel passt. Oft werden 3 Farben verwendet.



Die Wahrscheinlichkeit für einen speziellen Ast ist das Produkt der Einzelwahrscheinlichkeiten. Oft muss mehr als ein Ast zusammengefasst werden, da zum Beispiel nach der Wahrscheinlichkeit gefragt wird, genau einen orangenen Smartie zu ziehen. Dann müssen die Wahrscheinlichkeiten der entsprechenden Äste addiert werden.

Die Einzelwahrscheinlichkeiten unter jedem Punkt addieren sich zu 1, zum Beispiel die $\frac{5}{8}$ und $\frac{5}{8}$ ganz oben. Genauso addieren sich alle Endwahrscheinlichkeiten der Äste zu eins. Beides kann zur Kontrolle verwendet werden.

In unserer Darstellung sind die Einzelereignisse (z.B. ein blauer Smartie wird beim 1. Mal gezogen) an den Ästen angezeichnet, während die kombinierten Ereignisse (erst blau, dann orange) unten an den Ästen stehen, hier über Punkte angedeutet. Im BBR findet man aber gerne auch die *Einzelereignisse* (orangenes Smartie gezogen) unter dem ganzen Ast, bzw anstelle der Knoten. Dies scheint mir nicht so konsistent, aber man muss damit rechnen.