Arbeitsblatt 7. Februar 2025: Zins und (kein) Zinseszins – Lösung

Vergessen Sie bei *Textaufgaben* nicht all das „gegeben“ und „gesucht“.

Aufgaben, die einen vielleicht kleinen Extragedanken brauchen, sind mit einem * gekennzeichnet. Aufgaben, die zum Knobeln gedacht sind, tragen ein **. Wer sie nicht knackt, muss sich noch keine Sorgen machen!

1. Basis. Zinsen über ein Jahr. Beachten Sie: „Zinsen“ nennt man das, was sich innerhalb eines Jahres in echtem Geld am Kapital ändert. Als Formel kann man also schreiben:

   $$Z = K_n - K_a$$

   Hier verwenden wir ein großes Z, um es vom Zinssatz z zu unterscheiden, für den wir ein kleines z schreiben.

   Die Zinsen lassen sich aus dem Kapital und dem Zinssatz berechnen wie der Prozentwert aus Grundwert und dem Prozentwert:

   $$Z = K_a z$$

   D.h., wenn wir 500 € bei einem Zinssatz von 5 % anlegen, erhalten wir nach einem Jahr 25 € Zinsen. Das ist absolut dieselbe Formel wie $W = Gp$ aus der Prozentrechnung. Zinsrechnung ist Prozentrechnung.

   (a) Das Ausgangskapital sei 10 000 €. Nach einem Jahr ist das Kapital auf 11 000 € angewachsen. Wie viele Euro Zinsen gab es also?
   Lösung:

   $$Z = K_n - K_a = 11\,000\,€ - 10\,000\,€ = 1000\,€$$

   (b) Ein Kapital von 7700 € wird zu einem Zinssatz von 6 % angelegt.

   - Wie viele Zinsen gibt es nach dem 1. Jahr?
     Lösung:

     $$Z = K_a z = 7700\,€ \cdot 0{,}06 = 462\,€$$

   - Auf welchen Wert ist das Kapital nach dieser Zeit angewachsen?
     Lösung:
     Dies geht natürlich auch über unsere allgemeine Zinsformel, aber wenn man die Zinsen bereits berechnet hat, ist es natürlich am einfachsten zu rechnen

     $$K_n = K_a + Z = 7700\,€ + 462\,€ = 8162\,€$$

   (c) Wie viel Zinsen sind nach einem Jahr für ein Darlehen von 6800 € bei einem Zinssatz von 7,3 % zu zahlen?
   Lösung:
   Für die Rechnung ist es egal, ob es sich um eine Anlage oder ein Guthaben handelt (Des einen Guthaben ist des anderen Kredit):

   $$Z = K_a z = 6800\,€ \cdot 0{,}073 = 496{,}40\,€$$

2. Basis. Das neue Kapital aus dem Ausgangskapital und dem Zinssatz berechnen. Das kennen wir schon. Unsere Formel für *mehrere* Jahre ($K_n = K_a(1+z)^n$) schnurrt bei einem Jahr zusammen auf ein einfaches

$$K_n = K_a(1+z)$$

D.h., wenn wir 8000 € zu einem Zinssatz von 7 % anlegen, so haben wir nach einem Jahr $K_n = K_a(1+z) = 8000\,€ \cdot (1+0{,}07) = 8000\,€ \cdot 1{,}07 = 8560\,€$.

   (a) Das neue Kapital ausrechnen. Wenn $K_a = 660\,€$ und $z = 5\,\%$, was ist dann das neue Kapital K_n nach 1 Jahr?
   Lösung:

$$K_n = K_a(1+z) = 600\,€ \cdot (1+5\,\%) = 600\,€ \cdot (1+0{,}05) = 600\,€ \cdot 1{,}05 = 630\,€$$

   (b) Das Ausgangskapital ausrechnen.

   - Lösen Sie die Gleichung $K_n = K_a(1+z)$ nach dem Augangskapital K_a auf.
     Lösung:

$$\begin{aligned} K_n &= K_a(1+z) \quad \Big| : (1+z) \\ \frac{K_n}{1+z} &= K_a \end{aligned}$$

   - Was ist das Ausgangskapital, wenn bei einem Zinssatz von $z = 12\,\%$ das neue Kapital K_n nach einem Jahr 12 320 € beträgt?
     Lösung:

$$K_a = \frac{K_n}{1+z} = \frac{12\,320\,€}{1{,}12} = 11\,000\,€$$

   (c) Den Zinssatz ausrechnen.

   - Lösen Sie die Gleichung $K_n = K_a(1+z)$ nach dem Zinssatz z auf.
     Lösung:

$$\begin{aligned} K_n &= K_a(1+z) \quad \Big| : K_a \\ \frac{K_n}{K_a} &= 1+z \quad \Big| -1 \\ \frac{K_n}{K_a} - 1 &= z \end{aligned}$$

   - Was ist der Zinssatz, wenn ein Kapital von 110 € in einem Jahr auf 120 € anwächst?
     Lösung:

$$z = \frac{K_n}{K_a} - 1 = \frac{120\,€}{110\,€} - 1 = 1{,}\overline{09} - 1 = 0{,}\overline{09} = 9{,}\overline{09}\,\% \approx 9{,}1\,\%$$

3. Ein Unternehmer muss einen Kredit zu 8,5 % aufnehmen. Nach einem Jahr zahlt er 1275 € Zinsen.

Wie hoch ist der Kredit?
Lösung:

geg.: $Z = 1275\,€$; $z = 0{,}085$

ges.: K_a

$$Z = K_a z \quad \Big| : z$$
$$\frac{Z}{z} = K_a = \frac{1275\,€}{0{,}085} = 15\,000\,€$$

Antwort: Der Kredit war über 15 000 €.

4. Emmanuel leiht sich von Vladi 12 000 €. Nach einem Jahr zahlt er 13 560 € zurück und der Kredit ist abgegolten.

   Was ist der Zinssatz?
   Lösung:

   geg.: $K_a = 12\,000\,€$; $K_n = 13\,560\,€$

   ges.: z
   $$z = \frac{K_n}{K_a} - 1 = \frac{13\,560\,€}{12\,000\,€} - 1 = 1{,}13 - 1 = 0{,}13 = 13\,\%$$

   Antwort: Der Zinssatz ist $z = 13\,\%$.

5. Zum Bau eines Hauses ist ein Kredit von 180 000 € nötig. Die Sparkasse gewährt einen Zinssatz von 6,8 %.

   Wie hoch ist die Zinsbelastung im ersten Jahr?
   Lösung:

   geg.: $K_a = 180\,000\,€$; $z = 6{,}8\,\%$

   ges.: Zinsen Z
   $$Z = K_a z = 180\,000\,€ \cdot 0{,}068 = 12\,240\,€$$

6. Herr Schliemann kauft ein Auto zum Preis von 13 750 € und lässt diese Summe vom Autohändler finanzieren. Nach einem Jahr hat Herr Schmidt 15 331,25 € gezahlt und den Kredit damit vollständig getilgt.

   Wie hoch war der Zinssatz?
   Lösung:
   11,5 %

7. * Ein Kunde leiht sich bei einer Bank 4800 € für 5 Monate zu einem Zinssatz von 5,5 %.

   Wie viel Zinsen muss er bezahlen?
   Lösung:
   Für ein Jahr wären es
   $$Z = K_a z = 4800\,€ \cdot 0{,}055 = 264\,€$$

   Dann sind es für 5 Monate
   $$\frac{264\,€ \cdot 5}{12} = 110\,€$$

8. * Das Haus der Familie Rockefeller ist mit einer Hypothek belastet. Die Rockefellers zahlen bei einem jährlichen Zinssatz von 8,5 % monatlich 637,50 € Zinsen.

   Wie hoch ist die Hypothek?
   Lösung:

   geg.: $z = 8{,}5\,\%$ p.a.; 637,5 € monatliche Zinsen

   ges.: K_a

   Die jährlichen Zinsen belaufen sich auf $12 \cdot 637{,}5\,€ = 7650\,€$. Damit können wir in unsere Formel einsetzen

   $$K_a = \frac{Z}{z} = \frac{7650\,€}{0{,}085} = 90\,000\,€$$

   Antwort: Die Hypothek beträgt 90 000 €.

9. * Zwei Banken liefern sich einen Wettbewerb um die Gunst der Kund*innen.

   Die Bonkersbank sagt: "Bei uns bekommen Sie 8 % Zins auf ihre Spareinlagen."

   Die BesteBank sagt: "Bei uns bekommen Sie zweimal im Jahr, nämlich einmal Ende

   Juni und einmal Ende Dezember, 4 % Zins auf Ihrem Konto gutgeschrieben."

   - Begründe rechnerisch, bei welcher Bank man als Kunde besser fährt.
     Lösung:
     Bei der Bonkersbank hat man nach einem Jahr 108 % des Ausgangskapitals K_a, nämlich $(1 + z_{\text{Bonkers}})$.

     Bei der BesteBank hat man nach einem Jahr $(1 + z_{\text{Beste}})^2 = 1{,}04^2 = 1.0816 = 108{,}16\,\%$ vom ursprünglichen Kapital angehäuft.

     Man fährt also besser mit der BesteBank.

   - * Was wäre der „effektive Jahreszins“, den die BesteBank gewährt, was wäre also der Zinssatz p.a. (per annum=pro Jahr), der nach einem Jahr dieselben Zinsen gibt wie die halbjährliche Zahlung von je 4 %?
     Lösung:
     Nach Lösung der 1. Teilaufgabe ist das eigentlich trivial: Der effektive Jahreszins sind 8,16 %.