

Arbeitsblatt 30. Januar 2025: Zins und Zinseszins

Vergessen Sie bei *Textaufgaben* nicht all das „gegeben“ und „gesucht“.

1. Basis.

(a) Bezeichnungen.

- (A) ■ Was bei der Prozentrechnung der Grundwert G ist, heißt bei der Zinsrechnung wie?

Lösung:

Kapital. Das Dumme ist nur, dass auch der Prozentwert Kapital heißt. Das Kapital wächst. Um beides auseinanderzuhalten, führen wir K_{alt} für den Grundwert und K_{neu} für den Prozentwert ein. Man kann das natürlich auch abkürzen zu K_a und K_n . Es können sich anderswo auch leicht andere Bezeichnungen finden wie K_0 für das Ausgangskapital.

- (B) ■ Wie heißt der Prozentsatz der Änderung pro Jahr bei der Zinsrechnung?

Lösung:

Zinssatz, z .

- (C) ■ Wofür steht die Abkürzung „p.a.“?

Lösung:

per annum = „pro Jahr“

(b) Formeln

- (A) ■ Welche Formel gibt Ihnen das Kapital nach n Jahren?

Lösung:

$$K_{neu} = K_{alt}(1 + z)^n$$

- (B) ■ Wie vereinfacht sich das, wenn es nur um 1 Jahr geht?

Lösung:

$$K_{neu} = K_{alt}(1 + z)$$

- (c) Sie legen 300 € an. Der Zinssatz beträgt $z = 3\%$ p.a.

- (A) Wie viel Geld haben Sie nach 1 Jahr?

Lösung:

$$K_{neu} = K_{alt}(1 + z) = 300 \text{ €} \cdot (1 + 0.03) = 309 \text{ €}$$

- (B) ... nach 2 Jahren?

Lösung:

$$K_{neu} = K_{alt}(1 + z)^n = 300 \text{ €} \cdot (1 + 0.03)^2 = 318.27 \text{ €}$$

- (C) ... nach 5 Jahren?

Lösung:

$$K_{neu} = K_{alt}(1 + z)^n = 300 \text{ €} \cdot (1 + 0.03)^5 = 347.78 \text{ €}$$

- (D) ... nach 10 Jahren?

Lösung:

$$K_{neu} = K_{alt}(1 + z)^n = 300 \text{ €} \cdot (1 + 0.03)^{10} = 403.17 \text{ €}$$

- (E) ... nach 20 Jahren?

Lösung:

$K_{neu} = K_{alt}(1 + z)^n = 300 \text{ €} \cdot (1 + 0.03)^{20} = 541.83 \text{ €}$. Im 1. Jahr kamen nur 9 € dazu. Würde dieser Betrag 20 Jahre lang ausbezahlt, ergäben sich insgesamt

lediglich 480 €. Die Differenz von 61.83 € ist das, was man Zinseszins nennt. Er entsteht dadurch, dass der jeweils gezahlte Zins wiederum verzinst wird.

(d) Berechnen Sie jeweils das neue Kapital.

(A) Ausgangskapital $K = 100$ €, Zinssatz $z = 1$ %, Laufzeit: 10 Jahre.

Lösung:

$$K_{\text{neu}} = K_{\text{alt}}(1 + z)^n = 100 \text{ €} \cdot (1 + 0.01)^{10} = 110.46 \text{ €}$$

(B) Ausgangskapital $K = 200$ €, Zinssatz $z = 7$ %, Laufzeit: 3 Jahre.

Lösung:

$$K_{\text{neu}} = K_{\text{alt}}(1 + z)^n = 200 \text{ €} \cdot (1 + 0.07)^3 = 245.01 \text{ €}$$

(C) Ausgangskapital $K = 10\,000$ €, Zinssatz $z = 8$ %, Laufzeit: 5 Jahre.

Lösung:

$$K_{\text{neu}} = K_{\text{alt}}(1 + z)^n = 10\,000 \text{ €} \cdot (1 + 0.08)^5 = 14\,693.28 \text{ €}$$

(D) Ausgangskapital $K = 100$ €, Zinssatz $z = 3$ %, Laufzeit: 17 Jahre.

Lösung:

$$K_{\text{neu}} = K_{\text{alt}}(1 + z)^n = 100 \text{ €} \cdot (1 + 0.03)^{17} = 165.28 \text{ €}$$

2. Der Leitzins, zu dem die Geschäftsbanken von der Europäischen Zentralbank Geld leihen können, liegt derzeit bei 3 % p.a. Wenn sich die Xonabank von der Zentralbank heute 77 000 000 € leiht, was müsste sie in 3 Jahren zurückzahlen?

Lösung:

geg.: $z = 3$ %, $K_{\text{alt}} = 77\,000\,000$ €, $n = 3$

ges.: K_{neu}

$$K_{\text{neu}} = K_{\text{alt}}(1 + z)^n = 77\,000\,000 \text{ €} \cdot (1 + 0.03)^3 = 84\,139\,979 \text{ €}$$

Antwort: Die Xonabank müsste 84 139 979 € zurückzahlen.

3. Wir schreiben das Jahr 1. Joseph legt für seinen kleinen Sohn 100 Sesterzen an. Er bekommt einen Zinssatz von 1 %. Das ist mies, die Zeiten sind schlecht. Zum Glück lebt sein Sohn ewig. Wie viel Geld hat er heute?

Lösung:

geg.: $z = 1$ %, $K_{\text{alt}} = 100$ sesterzen, $n = 2024$

ges.: K_{neu}

$$K_{\text{neu}} = K_{\text{alt}}(1 + z)^n = 100 \text{ sesterzen} \cdot (1 + 0.01)^{2024} = 55\,777\,691\,517.42 \text{ sesterzen}$$

Antwort: Der kleine Jesus hätte 55 777 691 517.42 sesterzen zur Verfügung. Das ist noch nicht Muskstyle, hätte aber gereicht, um Twitter zu kaufen und in XP umzubenennen. Bei derart absurden Laufzeiten sieht man den explosiven Charakter des Zinseszins. Das Kapital wächst exponentiell.

4. Sie leihen sich Geld zu einem Zinssatz von 12 %. Nach 5 Jahren müssen Sie 176 € zurückzahlen. Wie viel Geld haben Sie sich ursprünglich geliehen?

Lösung:

geg.: $z = 12\%$, $n = 5$, $K_{neu} = 176 \text{ €}$

ges.: K_{alt} Wir lösen unsere Gleichung nach K_{alt} auf (und kürzen ab zu K_a und K_n).

$$\begin{aligned} K_n &= K_a(1+z)^n \quad | : (1+z)^n \\ \frac{K_n}{(1+z)^n} &= K_a = \frac{176 \text{ €}}{(1,12)^5} = 99.87 \text{ €} \end{aligned}$$