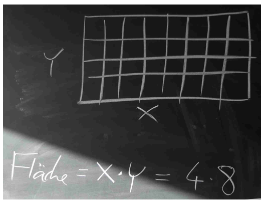
Zwei Formeln für die Fläche eines rechtwinkligen Dreiecks

Wir suchen im Folgenden Formeln zur Berechnung der Fläche eines rechtwinkligen Dreiecks. Für die Klassenarbeit und den BBR ist die Anwendung der Formeln entscheidend, hier geht es uns aber auch um die Herleitung der Formeln. Herleitungen, bzw. Beweise sind die eigentliche Seele der Mathematik. Wenn man sich eine Formel herleiten kann, muss man sie sich nicht merken. Man vergisst sie auch nicht so schnell und man hat sie tatsächlich parat, wenn man sie wirklich braucht, oder erinnert sich wenigstens an ihre Existenz und kann sie nachschauen. Das Nachvollziehen mathematischer Herleitungen trainiert logisches Schließen im Allgemeinen, nun wahrlich eine relevante Fähigkeit.

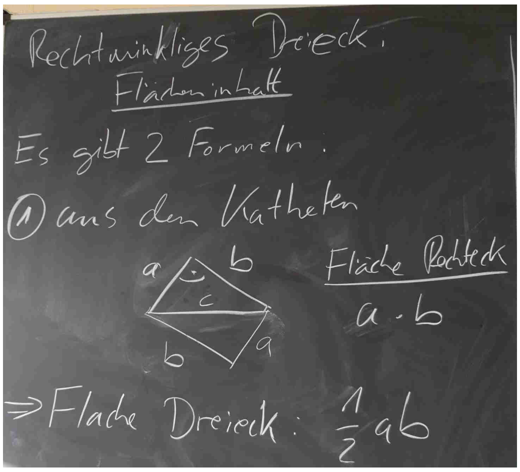
Vorab, da das nicht sofort unmittelbar klar zu sein schien, die Erinnerung an die allgemeine Flächenberechnung im Rechteck:



Kurz: Die Fläche eines Rechtecks ist das Produkt der beiden Seitenlängen.

Wenn beide Katheten bekannt sind

In diesem Fall lässt sich schnell aus dem rechtwinkligen Dreieck ein Rechteck konstruieren: Wir verdoppeln das Dreieck und kombinieren die beiden Dreiecke zu einem Rechteck.



Die Fläche des Dreiecks ist leicht zu berechnen und die Fläche des Dreiecks ist entsprechend die Hälfte. So bekommen wir unsere erste Möglichkeit, die Fläche eines rechtwinkligen Dreiecks zu berechnen:

$$A = \frac{1}{2}ab$$

Beachte: Der Großbuchstabe A wird gewöhnlich für die Bezeichnung der Fläche verwendet. Theoretisch besteht die Verwechslung mijt einem Punkt A, da Großbuchstaben auch gewohnheitsmäßig für die Bezeichnung von Punkten verwendet werden. Hier haben wir aber keinen Punkt A definiert, so dass kein Problem auftritt.

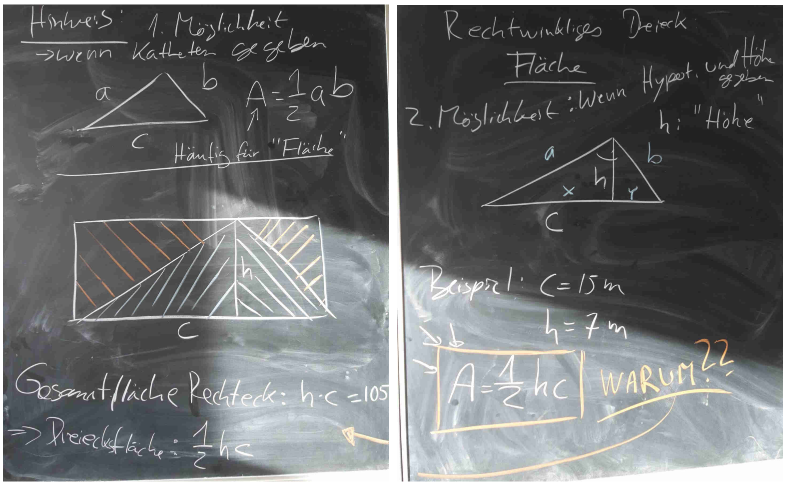
Wenn Hypotenuse und Höhe bekannt sind

Zur Erinnerung: Eine „Höhe“ in eine Dreieck verbindet je einen Eckpunkt des Dreiecks mit der gegenüberliegenden Seite und trifft diese senkrecht.

Dieses Tafelbild (s. nächste Seite) ist nicht so perfekt aufgebaut wie man sich das wünschen würde:

Links oben findet sich eine Erinnerung an die erste Möglichkeit, die Fläche eines rechtwinkligen Dreiecks zu berechnen, s. oben.

Rechts oben ist die Problemstellung: Wir haben ein rechtwinkliges Dreieck, dessen Höhe und Hypotenuse bekannt sind, aber nicht die Katheten bekannt sind. Direkt darunter ist ein willkürliches Beispiel mit 2 möglichen Werten für die Hypotenuse c und die Höhe h gegeben.



Es folgt rechts unten die Formel, die sich für die Berechnung ergeben wird:

$$A = \frac{1}{2}hc$$

Nun bestand die Aufgabe an die Schüler*Innen, einen Beweis für diese Formel zu erarbeiten („WARUM?“). Die Lösung, die sich ergab, findet sich links in der unteren Hälfte, verbunden mit dem orangenen Pfeil. Der Schlüssel liegt im Rechteck, dass als eine Seite die Höhe h hat und die Hypotenuse c als andere Seite. Dessen Fläche ist wieder schnell als hc berechnet.

Wir haben erkannt, dass dieses Rechteck in 2 kleinere Rechtecke zerfällt, eines links und eines rechts. Jedes dieser Rechtecke gehört genau zur Hälfte zu unserem ursprünglichen rechtwinkligen Dreieck, dessen Fläche wir angeben wollen. Diese Fläche ist also tatsächlich

$$A = \frac{1}{2}hc$$

Nebenbemerkung für Interessierte: Eine andere Herleitung derselben Formel. Es gibt noch eine andere Möglichkeit, zum selben Ergebnis zu kommen. Diese Möglichkeit hatte ich eigentlich im Kopf und hatte daher angeregt, x, y, a und b in das Dreieck rechts oben einzutragen: Wir erkennen, dass die Höhe das Dreieck in zwei kleinere Dreiecke zerlegt. Die Katheten a und b des großen Dreiecks, um dessen Fläche es uns geht, sind die Hypotenusen dieser beiden kleineren Dreiecke. Deren Flächen sind nach unserer Formel für die Fläche rechtwinkliger Dreiecke das halbe Produkt der Katethen:

$$A_1 = \frac{1}{2}hx$$
$$A_2 = \frac{1}{2}hy$$

Die Fläche des großen Dreiecks ist die Summe dieser kleineren Flächen, also

$$A = A_1 + A_2 = \frac{1}{2}hx + \frac{1}{2}hy = \frac{1}{2}h(x+y) = \frac{1}{2}hc$$

Dies ist natürlich wieder genau dieselbe Formel.