1 Allgemeine Brüche addieren

Nach allem, was wir schon wissen ist das kein großes Thema.

Ganz klar ist wie wir sogenannte „gleichnamige“ Brüche addieren, Brüche, die schon den Nenner teilen. Wie mit Bäumen, Zitronen und Äpfeln werden auch solche Brüche einfach addiert: 3 Birnen + 2 Birnen sind 5 Birnen, also

$$\frac{3}{7} + \frac{2}{7} = \frac{3+2}{7} = \frac{5}{7}$$

Wenn Brüche verschiedene Nenner haben, muss man sie erst in diese addierbare Form bringen. Bisher haben wir das mit Gefühl gemacht. Das Produkt der beiden Nenner funktioniert immer, so ist

$$\frac{2}{7} + \frac{3}{5} = \frac{10}{35} + \frac{21}{35} = \frac{31}{35}$$

Es ist auch einfach, wenn ein Nenner ein Vielfaches des anderen ist wie in

$$\frac{1}{7} + \frac{1}{14} = \frac{2}{14} + \frac{1}{14} = \frac{3}{14}$$

Mit etwas Draufstarren geht es auch bei etwas komplexeren Fällen wie

$$\frac{1}{14} + \frac{1}{21}$$

Für diesen allgemeinen Fall wollen wir nun ein Verfahren entwicklen.

Wir suchen das sogenannte *Kleinste Gemeinsame Vielfache* der beiden Nenner. Wir suchen also die kleinste Zahl, die sich durch beide Nenner teilen lässt.

Wir beginnen mit der Primfaktorzerlegung beider Nenner:

$$\begin{aligned} 14 &= 2 \cdot 7 \\ 21 &= 3 \cdot 7 \end{aligned}$$

Die Zahl, die wir suchen, muss durch beide Zahlen teilbar sein, sie muss also beide Primfaktorzerlegungen enthalten. Dies gilt für

$$\underbrace{2 \cdot \overbrace{7}^{}}_{14}\overbrace{\cdot\, 3}^{21}$$

Somit ist der Hauptnenner 42. Damit können wir schnell berechnen

$$\frac{1}{14} + \frac{1}{21} = \frac{3}{42} + \frac{2}{21} = \frac{5}{21}$$

Ein etwas komplexeres Beispiel wäre

$$\frac{7}{24} + \frac{13}{90}$$

Hier haben wir die beiden Primfaktorzerlegungen

$$\begin{aligned} 24 &= 2 \cdot 2 \cdot 2 \cdot 3 = 2^3 \cdot 3 \\ 90 &= 2 \cdot 3 \cdot 3 \cdot 5 = 2 \cdot 3^2 \cdot 5 \end{aligned}$$

Die kleinste Zahl, in der beide Zerlegungen enthalten sind ist

$$\underbrace{2 \cdot 2 \cdot 2 \cdot 3}_{24} \overbrace{\cdot\, 3 \cdot 5}^{90} = 2^3 \cdot 3^2 \cdot 5 = 360$$

Wir nehmen also von jeder Primzahl, die in mindestens einer der beiden Zerlegungen enthalten ist die höchste vorkommende Anzahl. Nun ist

$$\frac{7}{24} + \frac{13}{90} = \frac{105}{360} + \frac{52}{360} = \frac{157}{360}$$