1 Primfaktorzerlegung

Diese Stunde haben wir viel wiederholt.

Warum haben wir das gemacht? Primzahlen sind gewissermaßen die Atome der Zahlen. Zuallermindest sind sie ein grundlegendes Konzept, das immer wieder mal erwähnt wird und von dem man gehört haben muss, um weitergehende Dinge zu verstehen.

Um effektiv kürzen zu können, braucht man Primzahlen. Um systematisch Brüche addieren zu können, braucht man Primzahlen.

Davon abgesehen *könnte* man mit Primzahlen unglaublich tiefgehende, prinzipielle Mathematik betreiben. Es gibt nach wie vor kein Verfahren, herauszubekommen, was die nächste Primzahl ist, außer, es einfach auszuprobieren (im Wesentlichen). Warum ist das so, warum sind die Löcher im Sieb des Eratosthenes so unvorhersehbar unregelmäßig verteilt, obwohl es doch die Löcher im unglaublich regelmäßigen Prozess der Multiplikation sind? Wir wissen es nicht! Wie faszinierend. Wie lange könnte man darüber lernen. Doch wir haben keine Zeit und werden uns hier auf das absolut notwendige (na gut, fast) beschränken, damit das Konzept klar wird und die Dinge gemacht werden können, die ihr für den BBR braucht.

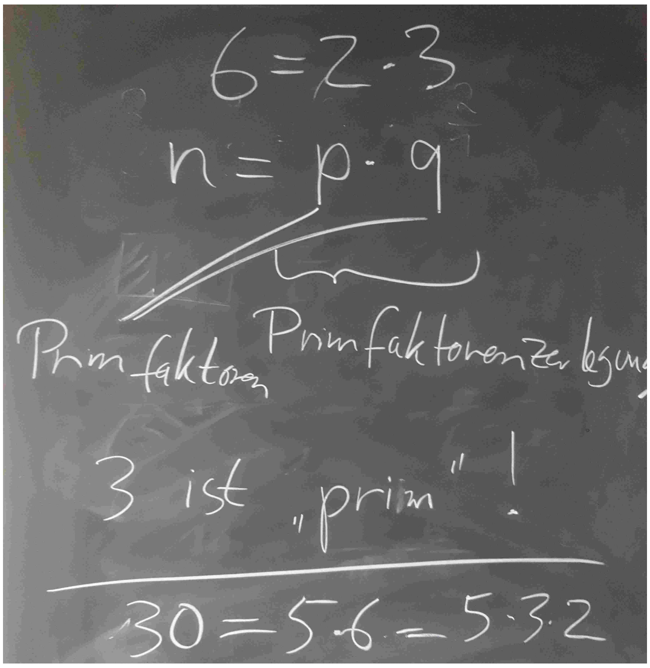
1.1 Was sind Primzahlen?

Wir haben viel gekürzt in letzter Zeit.

$$\frac{\cancel{14}^{\,7}}{\cancel{18}^{\,6}} \underset{6}{=} \frac{7}{6}$$

Dabei treffen wir auf Zahlen wie die 7, von denen wir schnell bemerken, dass wir sie nie weiter kürzen können, außer durch sich selbst. Zahlen wie die 7 hingegen lassen sich in andere Zahlen zerlegen ($6 = 2 \cdot 3$). Diese Zerlegung lässt sich soweit treiben, bis wir wieder bei den unzerlegbaren Zahlen ankommen.

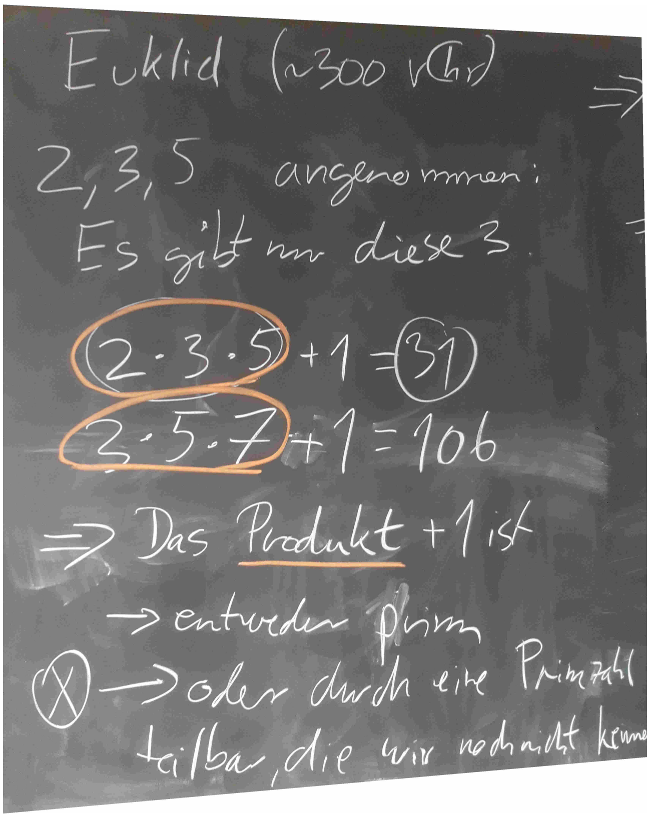
Definition: Primazahlen sind natürliche Zahlen, die sich nur durch 1 und durch sich selbst teilen lassen.



Die kleinsten Primzahlen sind 2, 3, 5, 7, 11, 13, 17, 19, 23, 29, 31, 37, 41, 43, 47, 53, 59, 61, 67, 71, 73, 79, 83, 89, 97.

1.2 Wie viele Primzahlen gibt es?

Einer der ersten und einer der berühmtesten Beweise der Mathematik ist der Beweis von Euklid, dass es unendlich viele Primzahlen gibt:



Wir gehen also davon aus, dass wir eine Liste Primzahlen haben, zum Beispiel 2, 3, 5. Nun wird gezeigt, dass diese Liste immer unvollständig ist.

Dazu multipliziert Euklid alle Primzahlen auf der Liste miteinander und zählt eins hinzu. In unserem Beispiel erhalten wir 31. Nun wissen wir, dass diese Zahl durch keine Primzahl auf unserer Liste teilbar sein kann. 30 ist durch 2 teilbar, also kann 31 nicht durch 2 teilbar sein, 30 ist durch 3 teilbar, also kann 31 nicht durch 3 teilbar sein, 30 ist durch 5 teilbar, also kann 30 nicht durch 5 tilbar sein.

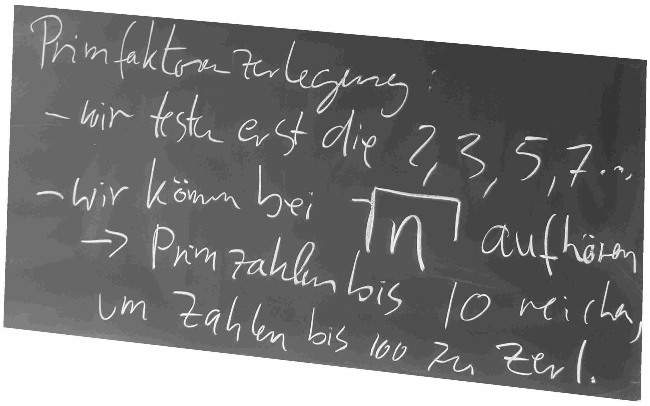
Für diese 3 Zahlen ist da klar, aber dasselbe Argument gilt für *alle* möglichen Listen: Wir erzeugen erst eine Zahl, die durch alle Zahlen auf der Liste teilbar ist: Das Produkt aller Zahlen. Dann zählen wir 1 dazu und wissen nun, dass das Ergebnis durch *keine* Zahl auf der Liste teilbar sein kann.

Das Ergebnis kann eine weitere Primzahl sein, die wir noch nicht auf der Liste hatten.

Wenn wir von der Liste 3, 5, 7 ausgehen, erhalten wir allerdings $3 \cdot 5 \cdot 7 + 1 = 106$. Dies ist keine Primzahl, aber durch eine Primzahl teilbar, die nicht auf unserer Liste stand: 2.

Wir kommen also zum Schluss, dass jede Liste mit Primzahlen, die irgendjemand irgendwann irgendwo vorlegen könnte, immer unvollständig sein muss. Es muss also unendlich viele Primzahlen geben.

1.3 Primfaktorzerlegung



Manchmal braucht man eine Primfaktorzerlegung. Sei es um ganz fiese Brüche von Hand zu kürzen (eher selten), sei es, um schnell einen guten Hauptnenner zur Addition von Brüchen zu finden (eher) oder sei es aus Spaß (der

Normalfall).

Wir fangen mit einer Zahl an, zum Beispiel 53. Von dieser Zahl wollen wir unbedingt wissen, ob sie prim ist, also, ob sie eine Primzahl ist. Wenn sie keine Primzahl ist, wollen wir sie in ihre Primfaktoren zerlegen.

Wir testen hierfür eine Primzahl nach der anderen, ob sie unsere Zahl teilt und fangen dabei bei der kleinsten Primzahl an. Warum? Es gibt mehrere Gründe: Einerseits ist es leicht, durch kleine Zahlen zu teilen, zum Beispiel durch 2. Dadurch wird unsere Zahl schnell kleiner. Außerdem gibt es für die kleinen Primzahlen praktische Teilungsregeln, die uns schnell sagen, ob sie eine Zahl teilen oder nicht. Einen weiteren Grund sehen wir gleich.

Fangen wir also mal mit der 2 an: Zahlen, die auf 0, 2, 4, 6 oder 8 enden sind gerade Zahlen also durch 2 teilbar. 53 ist keine solche Zahl. Sie ist also nicht durch 2 teilbar.

Nun die 3: Zahlen, deren Quersumme durch 3 teilbar ist, sind durch 3 teilbar. Die Quersumme von 53 ist $5 + 3 = 8$, 8 ist nicht durch 3 teilbar, also ist 53 nicht durch 8 teilbar.[1]

Nun die 5: Zahlen, die auf 0 und 5 enden, sind durch 5 teilbar. 53 endet auf 3, ist also nicht durch 5 teilbar.

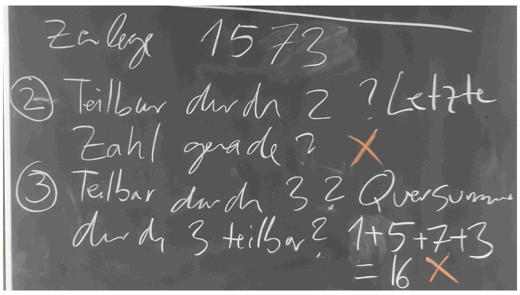
Nun die 7: Wir wissen, dass 53 nicht in der 7er-Reihe ist, also ist 53 nicht durch 7 teilbar. Es gibt eine Teilungsregel für die 7, die etwas systematischer ist, wir lernen sie gleich noch kennen.

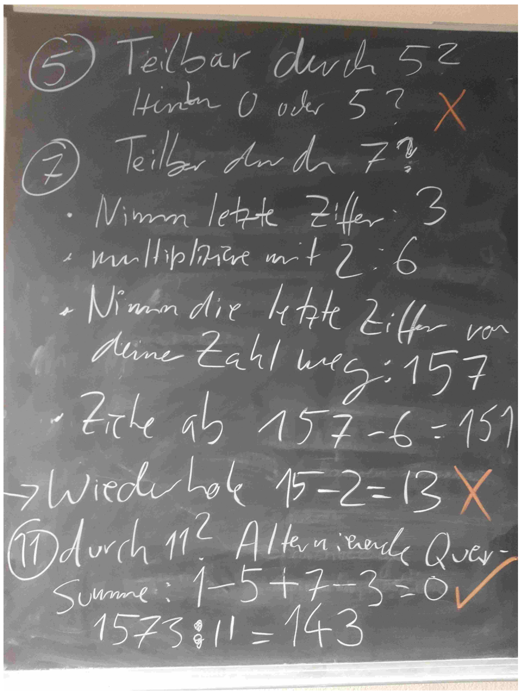
Nun, wie geht es weiter? An dieser Stelle können wir aufhören. „Wieso? Warum machen wir nicht mit der 11 weiter?“ höre ich Euch fragen.

Nun: Wir suchen eine Primfaktorzerlegung. Wir suchen also ein Produkt, das 53 ergibt: $53 = p \cdot Z$, wobei p und Z Zahlen sind. p ist eine mögliche Primzahl, durch die sich 53 teilen lassen würde. Die zweite Zahl Z könnte dann auch eine Primzahl sein, oder nicht. p jedenfalls steht für die kleinste Primzahl, die 53 teilen würde. Wir wissen nun, dass das mindestens die 11 sein muss, die anderen haben wir explizit, eine nachder anderen ausgeschlossen. q ist also ≥ 11. Z kann aber auch nicht kleiner sein als 11, sonst gäbe es ja eine Zahl, die kleiner wäre als 11, die unsere 53 teilt. Wenn p und Z aber beide mindestens 11 sein müssen, dann ist die kleinste Zahl, die wir so bilden können 121. 121 ist größer als 53. Es kann also keine Primzahlen geben, die beide größer oder gleich 11 sind und multipliziert 53 ergeben. Und kleinere Zahlen funktionieren ja nicht. Also gibt es *überhaupt keine* Primzahlen, die 53 teilen. 53 ist eine Primzahl.

Dasselbe Argument funktioniert immer. Wir müssen eine Zahl n immer nur auf Primzahlen bis $\sqrt{n}$ prüfen. Haben wir bis dahin keinen Teiler gefunden, wissen wir, dass wir eine Primzahl vor uns haben. So ist zum Beispiel $\sqrt{169} = 13$. Wollen wir also testen, ob 167 eine Primzahl ist, nur auf Teiler bis zur 11 testen, weil $13 \cdot 13$ bereits größer ist als die Zahl, die wir testen wollen.

Die folgenden Bilder führen das Verfahren noch einmal an einer größeren Zahl vor, die noch dazu keine Primzahl ist: 1573:





[1] Es wäre schön, wenn wir die Zeit hätten, all diese Teilungsregeln zu beweisen.

1.3.1 Spezielle Teilungsregeln

Die Sieben. Die Teilungsregel für die 7 hat mehrere Schritte, hilft aber vielleicht, schnell(er) zu erkennen, ob eine Zahl durch 7 teilbar ist, als die schriftliche Division. Auf jeden Fall ist es lustig, dass es funtioniert:

- Nimm die Zahl und schneide die letzte Ziffer (3) ab und lege das Ergebnis (157) zur Seite.
- Multipliziere die abgeschnittene letzte Ziffer mit 2. Wir bekommen in unserem Beispiel 6.
- Nimm dieses Ergebnis und ziehe es von der zur Seite gelegten gekürzten Zahl ab: $157 - 6 = 151$.
- Nun erkennen wir entweder, ob diese Zahl durch 7 teilbar ist. In diesem Fall gilt für die Ausgangszahl (1573) dasselbe. Oder wir fangen nochmal von vorne an.

Machen wir hier einen zweiten Durchgang:

- Letze Ziffer abschneiden: Ergibt 15 und 1.
- Multiplizieren: $1 \cdot 2 = 2$
- Abziehen: $15 - 2 = 13$.
- Beurteilen: 13 ist nicht durch 7 teilbar.

Also ist 1573 nicht durch 7 teilbar.

Die Elf. Um zu testen, ob eine Zahl durch 11 teilbar ist, verwendet man die sogenannte alternierende (abwechselnde) Quersumme. Dies ist am besten an zwei (weiteren) Beispielen gezeigt:

1234567 ist nicht durch 11 teilbar, weil $1 - 2 + 3 - 4 + 5 - 6 + 7 = 4$ nicht durch 11 teilbar ist.

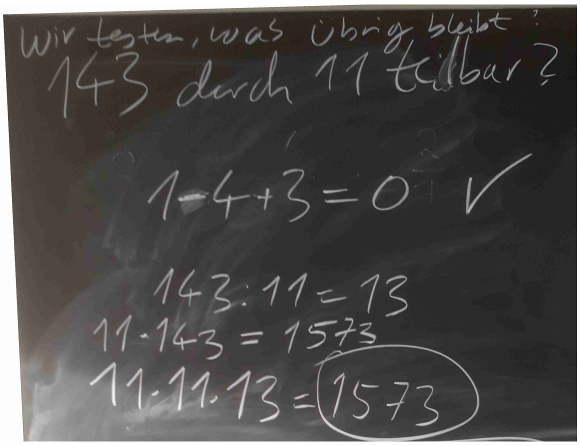
36781107 ist durch 11 teilbar, weil $3 - 6 + 7 - 8 + 1 - 1 + 0 - 7 = -11$ durch 11 teilbar ist.

Nun gut! Zurück zur 1573! Wir wissen nun, dass wir durch 11 teilen können. Dies ergibt

$$\frac{1573}{11} = 143$$

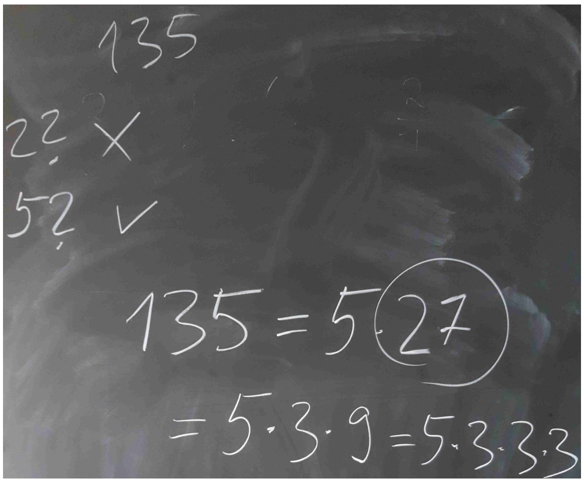
Nun wissen wir, dass $1573 = 11 \cdot 143$. Sind wir nun fertig? Nein, wir wissen noch nicht, ob wir 143 weiter zerlegen können. Müssen wir nun noch einmal prüfen, ob 143 durch 2, 3, 5 und 7 teilbar ist? Nein, weil, wenn das so wäre, wäre auch 1573 durch diese Zahlen teilbar gewesen.

Wir können also gleich mit der 11 anfangen.



Wir haben also erfahren, dass $1573 = 11 \cdot 11 \cdot 13$ ist.

Das letzte Tafelbild zeigt noch kurz, wie man die Zwischenergebnisse von Primfaktorzerlegungen so schreibt, das es mathematisch korrekt ist, nichts verloren geht und man schnell zum Ziel kommt:



1.4 Wie finden wir Primzahlen?

Hier gibt es viele Verfahren, die Suche nach neuen Primzahlen ist in gewisser Weise ein eigener Zweig der Mathematik.

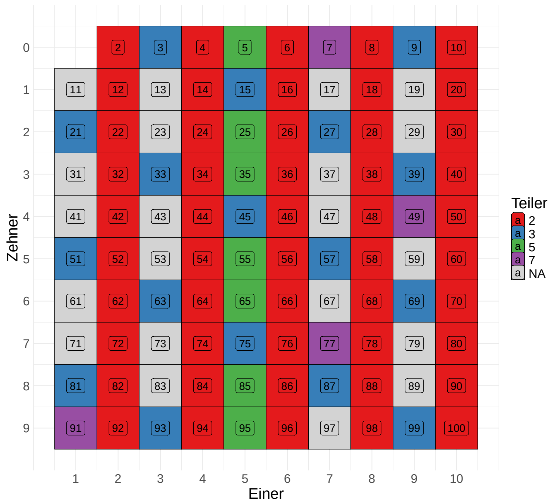
Ein sehr altes Verfahren ist das „Sieb des Eratosthenes“[2] Das folgende Bild ist eine bildliche Darstellung. Man fängt auch hier mit der kleinsten Primazahl an und streicht alle ihre Vielfachen. Diese können ja keine Primzahlen sein.

Die kleinste unausgestrichene Zahl ist jeweils die nächste Primzahl. Hier die 3.[3]

Mit dieser machen wir jeweils weiter. Wir streichen also alle Vielfachen von 3, die noch nicht ausgestrichen wurden: 3, 9, 15, etc.

Dann kommen nach denselben Regeln 5 und 7 dran.

Die nächste Primzahl ist die 11. Aber nach dem, was wir oben schon einmal durchgedacht haben, brauchen wir gar nicht darüber nachzudenken, hier etwas auszustreichen: $2 \cdot 11$, $3 \cdot 11$, $5 \cdot 11$ und $7 \cdot 11$ haben wir ja schon ausgestrichen, da wir alle Vielfachen von 2, 3, 5, und 7 schon erledigt haben. Damit natürlich auch alles andere, wie $4 \cdot 11$, was ja auch ein Vilfaches von 2 wäre. Wir sehen das auch sofort im Bild: Alle Vielfachen von 11 liegen auf einer Diagonale (11, 22, 33, etc) und alle sind bereits ausgestrichen. Das heißt, alle Zahlen, die noch nicht markiert sind, sind Primzahlen: 11, 13, 17, 19, 23, 29, etc.



[2] Er lebte im 3. Jhd v. Chr. in Alexandria.
[3] Die Eins ist ja keine Primzahl.