Algorithmen und Datenstrukturen 1

Felix Ichters, Lukas Dzielski*

Sommersemester 2023

Begleitmaterial zur Vorlesung 'Algorithmen und Datenstrukturen'.

*Universität Heidelberg

Inhaltsverzeichnis

1 Beweise

1.1 Statements

Ein **Statement/ Aussage** ist ein Mathematischer Ausdruck der entweder wahr oder Fallsch ist.

Beispiel:

- $2 \in \{x \in \mathbb{R} | x < 5\}$ (wahr)
- $3^2 + 5^2 = 8^2$ (falsch)

Dabei werden Ausdrüche wie $0 < x < 1$ verwendet um Mengen zu definieren.

$$A = \{x \in \mathbb{R} | 0 < x < 1\}$$

Wichtig ist hierbei der **Wahrheitswert** eines offenen Ausdrucks $0 < x < 1$ hängt von gewähltem x ab. Also ist

- $x = 1/2$ (wahr)
- $x = 5$ (falsch)

Die **Domäne** ist hierfür wichtig zu beachten. Für $\mathbb{N}$, gibt es kein x s.t. $0 < x < 1$, aber es gibt welche für $\mathbb{R}$

1.2 Formal mathematical proofs

Ein **formaler mathematischer Beweise** besteht aus einer nummerierten Sequent von **wahren Aussagen**. Jede Aussage in einem Beweis ist ein **Annahme** oder **folgt** aus vorherigen Aussagen dirch Ableitungsregel/ Inferenzregel (rule of inference). Die Letzte Aussage ist die die wir bewiesen haben.
$\Rightarrow$ Offene Aussagen können in Beweisen nicht auftreten!

Beispiel einer Inferenzregel: set definition rule

Wenn ein Element in einer Menge ist, dann können wir definierende Eienschaften ableiten. Andererseits, wenn es die definierende Eigenschaften erfüll, dann können wir ableiten das dasd Element in der Menge ist.

1.3 Set definition rule: Beispiel

Definiere $C = \{x \in \mathbb{R} | x < 2\}$
($x < 2 \wedge x \in \mathbb{R}$ ist die definierende Eigenschaft). Dabei gibt es zeiw Möglichkeiten für die Ableitung

Möglichkeit 1
1. $a \in C$
2. $a < 2 \wedge a \in \mathbb{R}(1; defC)$

Möglichkeit 2
1. $b < 2 \wedge b \in \mathbb{R}$
2. $b \in C(1; defC)$

Jede Aussage in dem Bewies hat eine Nummer. Wir begründen wie wir eine Aussage ableiten, zb $(1; defC)$ bedeutet wir leiten die aktuelle Aussage aus Aussage 1 mit der Definition von C und der set definition rule ab.

Bemerkung: $\wedge b \in R$

wird oft ausgelassen, wenn Kontext es zulässt.

1.4 Macro-steps in proofs

Problem:

Schauen wir uns folgenden Bewwis an:
(ass = Annahme (assumption) und prop = Eigenschaft(property))

Beweis.
Annahme:

$$1.X = \{x \in \mathbb{R} \,|\, x < 1\}$$
$$2.a \in X$$

Zeige: $a < 2$

1.	$a \in X$	(ass 2)
2.	$a < 1$	(1, ass 1; def X)
3.	$1 < 2$	(prop R)
4.	$a < 2$	(2, 3; prop R)

□

Ist das ein akzrptabler Beweis? Akzeptanz von Makro-Schritten wie "**prop** $\mathbb{R}$"hängt von der Zielgruppe ab!
Welche Eigenschaft von $\mathbb{R}$ wurde benutzt?

1.5 Einfache Beweistechniken

Beweis durch beispiel

Beispiel: Zeigen Sie es gibt einePrimzahl zwischen 80 und 90.
Idee: Zeugen angeben für Primzahl (p) für die die Aussage gilt.

Beweis. Wähle $p = 83$ □

Ist das ausreichend?
Eigenflich, **NEIN**. Wie müssen noch **zeigen** das 83 tatsächlich eine Primzahl ist.
Das können wir tun in dem wir alle Teiler ausprobieren.

Wiederlegen von Behauptungen

Behauptung: Nimm an n ist eine Primzahl größer als 1. Dann ist $2^n - 1$ ebenfalls eine Primzahl.
Können Sie die Behauptung beweisen? Try hard $\cdots$
Wenn Sie es nicht können, dann sollen Sie darüber nachednken die Behauptung zu wiederlegen.
Eine Primzahl n für die $2^n - 1$ nicht prim ist, ist genug!
Das Gegenbeispiel ist $n = 11$ da 11 prim ist aber

$$2^{11} - 1 = 2047 = 23 \cdot 89$$

keine Primzahl ist!

1.6 $\forall$ Aussagen beweisen

Inferenzregel für definierte Beziehungen

The definition rule

Angenommen, es wurde eine Beziehung definiert. Wenn die Beziehung gilt (in irgendweinem Beweisschritt oder Annahme), dann kann die definierende Eigenschaft abgeleitet werden. Andererseits, wenn die definierende Eigenschaft gilt, dann kann die Beziehung abgeleitet werden.

Beispiel: Für Mengen A und B, definiere A ist **Teilmenge** von B, $A \subseteq B$, wenn **für alle** x **mit** $x \in A : x \in B$. Mit anderen Worten:
$A \subseteq B$ if and only if (iff) $\forall x((x \in A) \rightarrow (x \in B))$ ist wahr.

Möglichkeit 1:

1.	$A \subseteq B$	(ass 2)
2.	für alle x s.t.$x \in A : x \in B$	(1, def $\subseteq$)

Möglichkeit 2:

1.	für alle x s.t.$x \in A : x \in B$	(1, def $\subseteq$)
2.	$A \subseteq B$	(ass 2)

Inferenzeregel für $\forall$

Sei $\mathfrak{P}$ eine Formel. Beispielsweise steht $\mathfrak{P}(x)$ für $x \in A$ und $\mathfrak{Q}(x)$ steht für $x \in B$. Dann kann "**für alle x s.t.** $x \in A : x \in B$äls "**für alle x s.t.** $\mathfrak{P}(x) : \mathfrak{Q}(x)$"geschrieben werden.

Regeln um $\forall$ Aussagen zu beweisen (pr $\forall$)

Um Aussagen der Form "**für alle** x **in s.t.** $\mathfrak{P}(x) : \mathfrak{Q}(x)$", zu beweisen nimmt man an x sei **beliebig gewähltes Element (eigenvariable)** s.t $\mathfrak{P}(x)$ wahr ist. Dann zeige man $\mathfrak{Q}(x)$ ist wahr.

Generaliesirungen z.B. "für alle x, y s.t. $\mathfrak{P}(x, y) : \mathfrak{Q}(x, y)$"möglich

Inferenzeregel für $\forall$: Ein Beispiel

Sei $C = \{x \in \mathbb{R} | x < 1\}$ und $D = \{x \in \mathbb{R} | x < 2\}$. Zeige $C \subseteq D$!

Beweis.
Annahme:

$$1.C = \{X \in \mathbb{R} | x < 1\}$$
$$2.D = \{x \in \mathbb{R} | x < 2\}$$

Zeige: $C \subseteq D$

1.	Sei $x \in C$ beliebig	
2.	$x < 1$	(1, ass 1; def C)
3.	$x < 2$	$(2, \text{prop}\mathbb{R})$
4.	$x \in D$	(3, ass 2; def D)
5.	für alle$x \in X : x \in D$	$(1 - 4; \text{pr}\forall)$
6.	$C \subseteq D$	$(5, \text{def} \subseteq)$

□

Wie können wir "für alle x s.t $\mathfrak{P}(x) : \mathfrak{Q}(x)$"wiederlegen?

2 Einführung

2.1 ...

...

3 Fogen, Felder und Listen

3.1 ...

...

4 Hashing

4.1 ...

...

5 Sortieren

5.1 ...

...

6 Prioritätslisten

6.1 ...

...

7 Sortierte Listen

7.1 ...

...

8 Graphenreprarsentation

8.1 ...

...

9 Graphtravesierung

9.1 ...

...

10 Küreste Wege

10.1 ...

...

11 Minimale Spannbäume

11.1 ...

...

12 Optimierung

12.1 ...

...