Tresses et treillis

Vincent Jugé

Stage Animath 2016

22/08/2016

Sommaire

Comment multiplier deux tresses ?

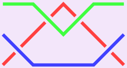
Qu'est-ce qu'une tresse ?

1. Des brins entremêlés

Comment multiplier deux tresses ?

Qu'est-ce qu'une tresse ?

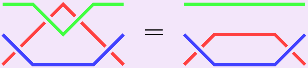
1. Des brins entremêlés
2. Des brins entremêlés **à déformation près**



Comment multiplier deux tresses ?

Qu'est-ce qu'une tresse ?

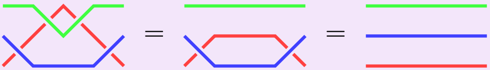
1. Des brins entremêlés
2. Des brins entremêlés **à déformation près**



Comment multiplier deux tresses ?

Qu'est-ce qu'une tresse ?

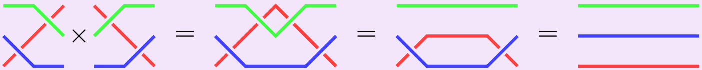
1. Des brins entremêlés
2. Des brins entremêlés **à déformation près**



Comment multiplier deux tresses ?

Qu'est-ce qu'une tresse ?

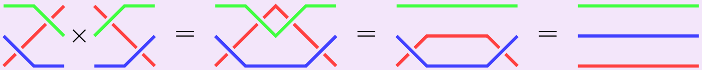
1. Des brins entremêlés
2. Des brins entremêlés **à déformation près**, munis d'un **produit**



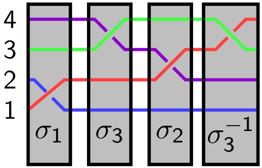
Comment multiplier deux tresses ?

Qu'est-ce qu'une tresse ?

1. Des brins entremêlés
2. Des brins entremêlés **à déformation près**, munis d'un **produit**



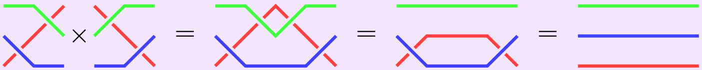
Des notations bien pratiques :



Comment multiplier deux tresses ?

Qu'est-ce qu'une tresse ?

1. Des brins entremêlés
2. Des brins entremêlés **à déformation près**, munis d'un **produit**



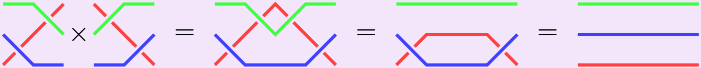
Quelles propriétés pour ce produit ?

3. Simplifications $3 - 3 = 0$ et $3 \div 3 = 1$

Comment multiplier deux tresses ?

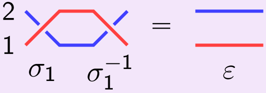
Qu'est-ce qu'une tresse ?

1. Des brins entremêlés
2. Des brins entremêlés **à déformation près**, munis d'un **produit**



Quelles propriétés pour ce produit ?

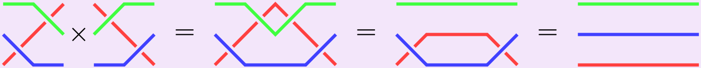
3. Simplifications $3 - 3 = 0$ et $3 \div 3 = 1$



Comment multiplier deux tresses ?

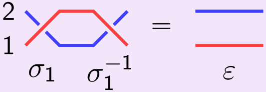
Qu'est-ce qu'une tresse ?

1. Des brins entremêlés
2. Des brins entremêlés **à déformation près**, munis d'un **produit**



Quelles propriétés pour ce produit ?

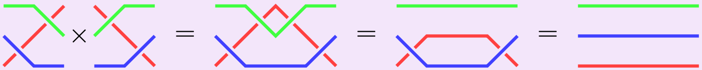
3. Simplifications $\qquad 3 - 3 = 0$ et $3 \div 3 = 1$
4. Commutativité partielle $\qquad 2 \times 3 = 3 \times 2$ et $2 + 3 = 3 + 2$



Comment multiplier deux tresses ?

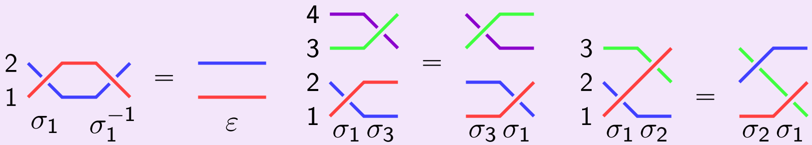
Qu'est-ce qu'une tresse ?

1. Des brins entremêlés
2. Des brins entremêlés **à déformation près**, munis d'un **produit**



Quelles propriétés pour ce produit ?

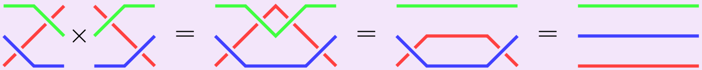
3. Simplifications — $3 - 3 = 0$ et $3 \div 3 = 1$
4. Commutativité partielle — $2 \times 3 = 3 \times 2$ et $2 + 3 = 3 + 2$



Comment multiplier deux tresses ?

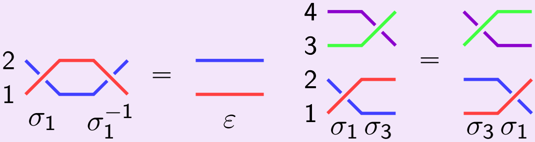
Qu'est-ce qu'une tresse ?

1. Des brins entremêlés
2. Des brins entremêlés **à déformation près**, munis d'un **produit**



Quelles propriétés pour ce produit ?

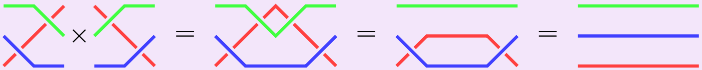
3. Simplifications — $3 - 3 = 0$ et $3 \div 3 = 1$
4. Commutativité partielle — $2 \times 3 = 3 \times 2$ et $2 + 3 = 3 + 2$
5. Relations **de tresses**



Comment multiplier deux tresses ?

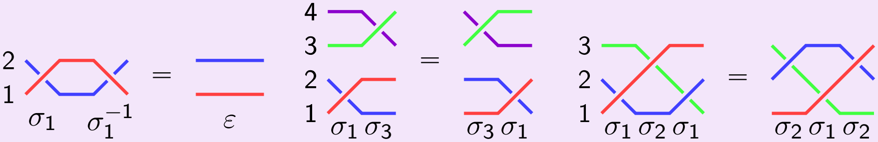
Qu'est-ce qu'une tresse ?

1. Des brins entremêlés
2. Des brins entremêlés **à déformation près**, munis d'un **produit**



Quelles propriétés pour ce produit ?

3. Simplifications $\qquad 3 - 3 = 0$ et $3 \div 3 = 1$
4. Commutativité partielle $\qquad 2 \times 3 = 3 \times 2$ et $2 + 3 = 3 + 2$
5. Relations **de tresses**



Tresses positives et permutations

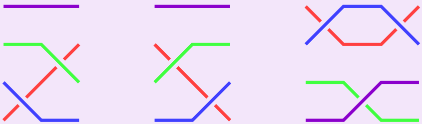
Qu'est-ce qu'une tresse positive ?

1. Une tresse avec uniquement des échanges de la forme σ_i

Tresses positives et permutations

Qu'est-ce qu'une tresse positive ?

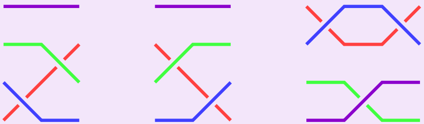
1. Une tresse avec uniquement des échanges de la forme σ_i



Tresses positives et permutations

Qu'est-ce qu'une tresse positive ?

1. Une tresse avec uniquement des échanges de la forme σ_i



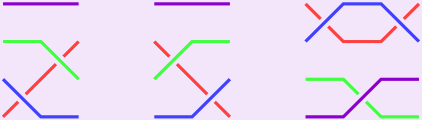
✓ ✗ ✓

Qu'est-ce qu'une permutation ?

Tresses positives et permutations

Qu'est-ce qu'une tresse positive ?

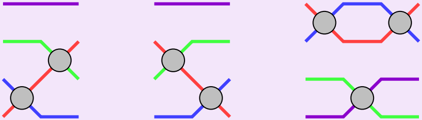
1. Une tresse avec uniquement des échanges de la forme σ_i



✓ ✗ ✓

Qu'est-ce qu'une permutation ?

2. Une tresse où l'on ne sait pas quel brin passe au premier plan ($\sigma_i = \sigma_i^{-1}$)



Divisibilité et tresses positives

Divisibilité dans les entiers positifs ou nuls : $a \mid b$

Un entier a divise un entier b si et seulement s'il existe un entier c tel que $b = a \times c$.

$$3 \mid 12,\ 2 \mid 14,\ 7 \mid 0 \text{ et } 0 \mid 0 \text{ mais } 4 \nmid 7$$

Divisibilité et tresses positives

Divisibilité dans les entiers positifs ou nuls : $a \mid b$

Un entier a divise un entier b si et seulement s'il existe un entier c tel que $b = a \times c$.

$$3 \mid 12,\ 2 \mid 14,\ 7 \mid 0 \text{ et } 0 \mid 0 \text{ mais } 4 \nmid 7$$

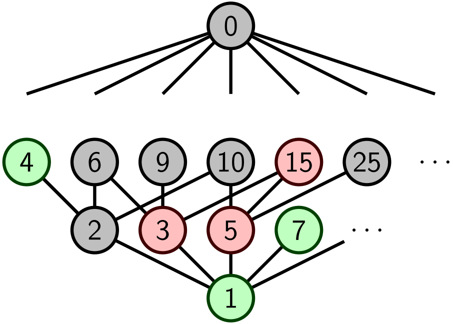
Divisibilité dans les tresses positives : $\alpha \preccurlyeq \beta$ et $\beta \succcurlyeq \alpha$

1. Une tresse α divise une tresse β **à gauche** si et seulement s'il existe une tresse γ telle que $\beta = \alpha \times \gamma$.
2. Une tresse α divise une tresse β **à droite** si et seulement s'il existe une tresse γ telle que $\beta = \gamma \times \alpha$.

$$\sigma_1 \preccurlyeq \sigma_1\sigma_2\sigma_1,\ \sigma_1 \preccurlyeq \sigma_2\sigma_1\sigma_2,\ \sigma_1\sigma_2\sigma_1 \succcurlyeq \sigma_1 \text{ et } \sigma_2 \preccurlyeq \sigma_2\sigma_1 \text{ mais } \sigma_1 \not\preccurlyeq \sigma_2\sigma_1$$

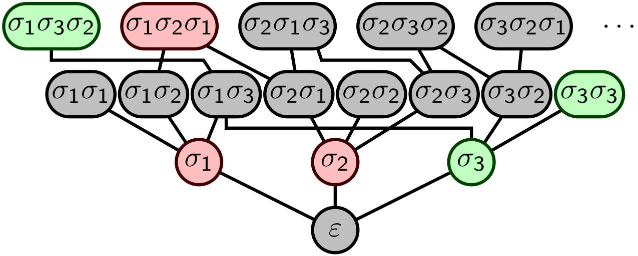
Diagrammes de divisibilité : PGCD et PPCM

Dans les entiers naturels : $\mathrm{PGCD}(4,7) = 1$ et $\mathrm{PPCM}(3,5) = 15$



Diagrammes de divisibilité : PGCD et PPCM

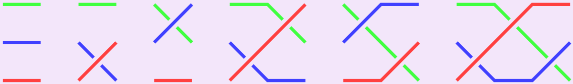
Dans les tresses positives à 4 brins (division **à gauche**) :
$\mathrm{PGCD}(\sigma_1\sigma_3\sigma_2, \sigma_3\sigma_3) = \sigma_3$ et $\mathrm{PPCM}(\sigma_1, \sigma_2) = \sigma_1\sigma_2\sigma_1$



Montrer qu'il existe des PGCD et de PPCM : tresses simples

Que sont les tresses simples ?

Les tresses dont deux brins ne se croisent jamais deux fois.

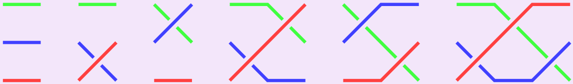


ε σ_1 σ_2 $\sigma_1\sigma_2$ $\sigma_2\sigma_1$ $\sigma_1\sigma_2\sigma_1$

Montrer qu'il existe des PGCD et de PPCM : tresses simples

Que sont les tresses simples ?

Les tresses dont deux brins ne se croisent jamais deux fois.

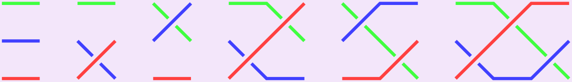


ε σ_1 σ_2 $\sigma_1\sigma_2$ $\sigma_2\sigma_1$ $\sigma_2\sigma_1\sigma_2$

Montrer qu'il existe des PGCD et de PPCM : tresses simples

Que sont les tresses simples ?

Les tresses dont deux brins ne se croisent jamais deux fois.

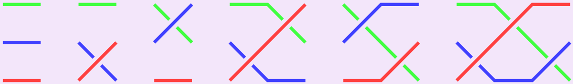


ε σ_1 σ_2 $\sigma_1\sigma_2$ $\sigma_2\sigma_1$ Δ_3

Montrer qu'il existe des PGCD et de PPCM : tresses simples

Que sont les tresses simples ?

Les tresses dont deux brins ne se croisent jamais deux fois.



ε σ_1 σ_2 $\sigma_1\sigma_2$ $\sigma_2\sigma_1$ Δ_3

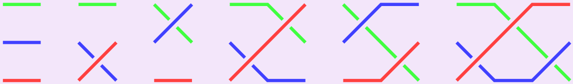
L'ensemble des tresses simples est :

1. clos par division à gauche et à droite.

Montrer qu'il existe des PGCD et de PPCM : tresses simples

Que sont les tresses simples ?

Les tresses dont deux brins ne se croisent jamais deux fois.



ε $\quad \sigma_1$ $\quad \sigma_2$ $\quad \sigma_1\sigma_2$ $\quad \sigma_2\sigma_1$ $\quad \Delta_3$

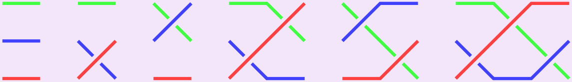
L'ensemble des tresses simples est :

1. clos par division à gauche et à droite.
2. en bijection avec les permutations.

Montrer qu'il existe des PGCD et de PPCM : tresses simples

Que sont les tresses simples ?

Les tresses dont deux brins ne se croisent jamais deux fois.



ε σ_1 σ_2 $\sigma_1\sigma_2$ $\sigma_2\sigma_1$ Δ_3

L'ensemble des tresses simples est :

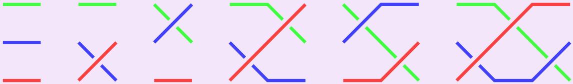
1. clos par division à gauche et à droite.
2. en bijection avec les permutations.

4	4
3	3
2	2
1	1

Montrer qu'il existe des PGCD et de PPCM : tresses simples

Que sont les tresses **simples** ?

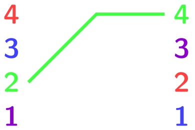
Les tresses dont deux brins ne se croisent jamais deux fois.



ε σ_1 σ_2 $\sigma_1\sigma_2$ $\sigma_2\sigma_1$ Δ_3

L'ensemble des tresses simples est :

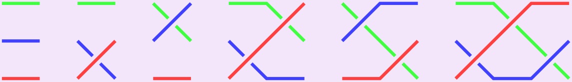
1. clos par division à gauche et à droite.
2. en bijection avec les permutations.



Montrer qu'il existe des PGCD et de PPCM : tresses simples

Que sont les tresses simples ?

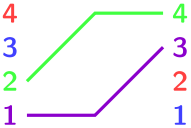
Les tresses dont deux brins ne se croisent jamais deux fois.



ε $\quad \sigma_1$ $\quad \sigma_2$ $\quad \sigma_1\sigma_2$ $\quad \sigma_2\sigma_1$ $\quad \Delta_3$

L'ensemble des tresses simples est :

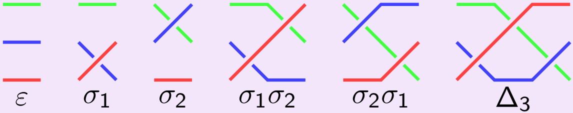
1. clos par division à gauche et à droite.
2. en bijection avec les permutations.



Montrer qu'il existe des PGCD et de PPCM : tresses simples

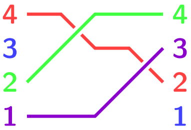
Que sont les tresses simples ?

Les tresses dont deux brins ne se croisent jamais deux fois.



L'ensemble des tresses simples est :

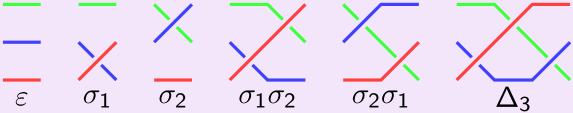
1. clos par division à gauche et à droite.
2. en bijection avec les permutations.



Montrer qu'il existe des PGCD et de PPCM : tresses simples

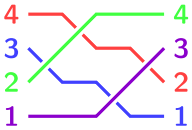
Que sont les tresses simples ?

Les tresses dont deux brins ne se croisent jamais deux fois.



L'ensemble des tresses simples est :

1. clos par division à gauche et à droite.
2. en bijection avec les permutations.



Divisibilité des tresses simples

Pour chaque tresse simple β, on note $\mathcal{L}(\beta)$ l'ensemble

$$\{(i,j) : i < j, \mathbf{brin}_{i\to} \text{ croise } \mathbf{brin}_{\to j}\}.$$

Théorème

Pour toutes les tresses simples β et γ, on a $\beta \preccurlyeq \gamma$ ssi $\mathcal{L}(\beta) \subseteq \mathcal{L}(\gamma)$.

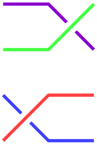
Divisibilité des tresses simples

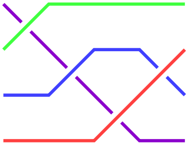
Pour chaque tresse simple β, on note $\mathcal{L}(\beta)$ l'ensemble

$$\{(i,j) : i < j, \mathbf{brin}_{i\rightarrow} \text{ croise } \mathbf{brin}_{\rightarrow j}\}.$$

Théorème

Pour toutes les tresses simples β et γ, on a $\beta \preccurlyeq \gamma$ ssi $\mathcal{L}(\beta) \subseteq \mathcal{L}(\gamma)$.





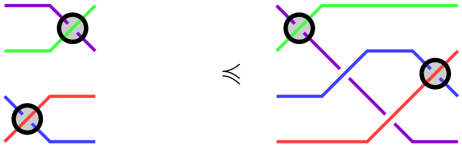
Divisibilité des tresses simples

Pour chaque tresse simple β, on note $\mathcal{L}(\beta)$ l'ensemble

$$\{(i,j) : i < j, \textbf{brin}_{i\rightarrow} \text{ croise } \textbf{brin}_{\rightarrow j}\}.$$

Théorème

Pour toutes les tresses simples β et γ, on a $\beta \preccurlyeq \gamma$ ssi $\mathcal{L}(\beta) \subseteq \mathcal{L}(\gamma)$.



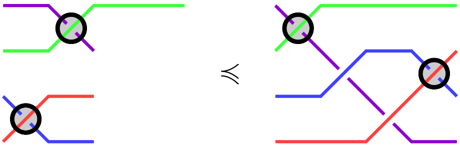
Divisibilité des tresses simples

Pour chaque tresse simple β, on note $\mathcal{L}(\beta)$ l'ensemble

$$\{(i,j) : i < j, \mathbf{brin}_{i\rightarrow} \text{ croise } \mathbf{brin}_{\rightarrow j}\}.$$

Théorème

Pour toutes les tresses simples β et γ, on a $\beta \preccurlyeq \gamma$ ssi $\mathcal{L}(\beta) \subseteq \mathcal{L}(\gamma)$.



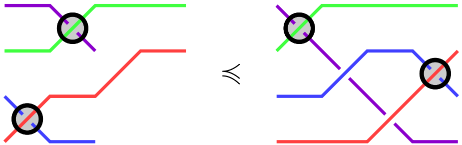
Divisibilité des tresses simples

Pour chaque tresse simple β, on note $\mathcal{L}(\beta)$ l'ensemble

$$\{(i,j) : i < j, \textbf{brin}_{i\to} \text{ croise } \textbf{brin}_{\to j}\}.$$

Théorème

Pour toutes les tresses simples β et γ, on a $\beta \preccurlyeq \gamma$ ssi $\mathcal{L}(\beta) \subseteq \mathcal{L}(\gamma)$.



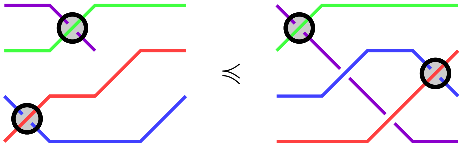
Divisibilité des tresses simples

Pour chaque tresse simple β, on note $\mathcal{L}(\beta)$ l'ensemble

$$\{(i,j) : i < j, \mathbf{brin}_{i\rightarrow} \text{ croise } \mathbf{brin}_{\rightarrow j}\}.$$

Théorème

Pour toutes les tresses simples β et γ, on a $\beta \preccurlyeq \gamma$ ssi $\mathcal{L}(\beta) \subseteq \mathcal{L}(\gamma)$.



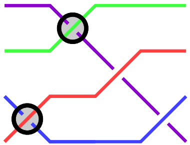
Divisibilité des tresses simples

Pour chaque tresse simple β, on note $\mathcal{L}(\beta)$ l'ensemble

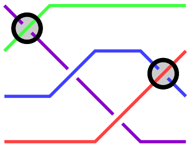
$$\{(i,j) : i < j, \mathbf{brin}_{i\to} \text{ croise } \mathbf{brin}_{\to j}\}.$$

Théorème

Pour toutes les tresses simples β et γ, on a $\beta \preccurlyeq \gamma$ ssi $\mathcal{L}(\beta) \subseteq \mathcal{L}(\gamma)$.



$\preccurlyeq$



Comment obtenir des PGCD et des PPCM ? 1/3

S'il vous plaît . . . dessine-moi un $\mathcal{L}(\beta)$

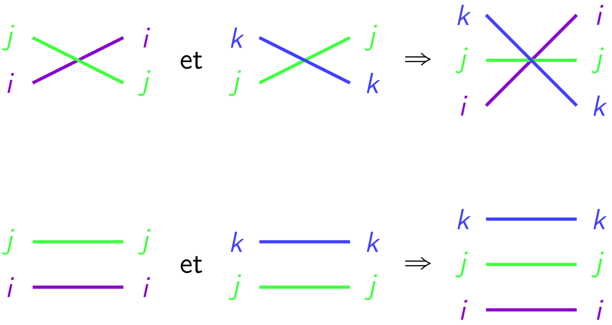
Un ensemble **S** est de la forme $\mathcal{L}(\beta)$ si et seulement si

Comment obtenir des PGCD et des PPCM ? 1/3

S'il vous plaît … dessine-moi un $\mathcal{L}(\beta)$

Un ensemble $\mathbf{S}$ est de la forme $\mathcal{L}(\beta)$ si et seulement si

- $(i, j) \in \mathbf{S}$ et $(j, k) \in \mathbf{S} \Rightarrow (i, k) \in \mathbf{S}$, et
- $(i, j) \in \mathbf{S}$ et $i < k < j \Rightarrow (i, k) \in \mathbf{S}$ ou $(k, j) \in \mathbf{S}$.



Comment obtenir des PGCD et des PPCM ? 1/3

S'il vous plaît ... dessine-moi un $\mathcal{L}(\beta)$

Un ensemble $\mathbf{S}$ est de la forme $\mathcal{L}(\beta)$ si et seulement si

- $(i, j) \in \mathbf{S}$ et $(j, k) \in \mathbf{S} \Rightarrow (i, k) \in \mathbf{S}$, et
- $(i, j) \in \mathbf{S}$ et $i < k < j \Rightarrow (i, k) \in \mathbf{S}$ ou $(k, j) \in \mathbf{S}$.

1. Choisir un $(i, i + 1)$ dans $\mathbf{S}$.

$$\mathbf{S} = \{(1, 2), (1, 4), (3, 4)\}$$

Comment obtenir des PGCD et des PPCM ? 1/3

S'il vous plaît … dessine-moi un $\mathcal{L}(\beta)$

Un ensemble $\mathbf{S}$ est de la forme $\mathcal{L}(\beta)$ si et seulement si

- $(i,j) \in \mathbf{S}$ et $(j,k) \in \mathbf{S} \Rightarrow (i,k) \in \mathbf{S}$, et
- $(i,j) \in \mathbf{S}$ et $i < k < j \Rightarrow (i,k) \in \mathbf{S}$ ou $(k,j) \in \mathbf{S}$.

1. Choisir un $(i, i+1)$ dans $\mathbf{S}$ et le supprimer.

$$\mathbf{S}' = \{(1,4),(3,4)\}$$

Comment obtenir des PGCD et des PPCM ? 1/3

S'il vous plaît . . . dessine-moi un $\mathcal{L}(\beta)$

Un ensemble $\mathbf{S}$ est de la forme $\mathcal{L}(\beta)$ si et seulement si

- $(i,j) \in \mathbf{S}$ et $(j,k) \in \mathbf{S} \Rightarrow (i,k) \in \mathbf{S}$, et
- $(i,j) \in \mathbf{S}$ et $i < k < j \Rightarrow (i,k) \in \mathbf{S}$ ou $(k,j) \in \mathbf{S}$.

1. Choisir un $(i, i+1)$ dans $\mathbf{S}$ et le supprimer.
2. Échanger les i et les $i+1$.

$$\mathbf{S}'' = \{(2,4),(3,4)\}$$

Comment obtenir des PGCD et des PPCM ? 1/3

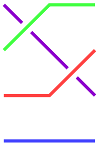
S'il vous plaît … dessine-moi un $\mathcal{L}(\beta)$

Un ensemble **S** est de la forme $\mathcal{L}(\beta)$ si et seulement si

- $(i, j) \in \mathbf{S}$ et $(j, k) \in \mathbf{S} \Rightarrow (i, k) \in \mathbf{S}$, et
- $(i, j) \in \mathbf{S}$ et $i < k < j \Rightarrow (i, k) \in \mathbf{S}$ ou $(k, j) \in \mathbf{S}$.

1. Choisir un $(i, i+1)$ dans **S** et le supprimer.
2. Échanger les i et les $i+1$.
3. Construire une tresse γ par récurrence sur $|\mathbf{S}|$.

$$\mathbf{S}'' = \{(2,4), (3,4)\}$$



Comment obtenir des PGCD et des PPCM ? 1/3

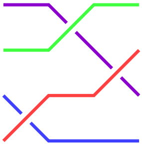
S'il vous plaît … dessine-moi un $\mathcal{L}(\beta)$

Un ensemble **S** est de la forme $\mathcal{L}(\beta)$ si et seulement si

- $(i, j) \in \mathbf{S}$ et $(j, k) \in \mathbf{S} \Rightarrow (i, k) \in \mathbf{S}$, et
- $(i, j) \in \mathbf{S}$ et $i < k < j \Rightarrow (i, k) \in \mathbf{S}$ ou $(k, j) \in \mathbf{S}$.

1. Choisir un $(i, i+1)$ dans **S** et le supprimer.
2. Échanger les i et les $i+1$.
3. Construire une tresse γ par récurrence sur $|\mathbf{S}|$.
4. On a $\mathbf{S} = \mathcal{L}(\sigma_i \gamma)$!

$$\mathbf{S} = \{(1,2), (1,4), (3,4)\}$$



Comment obtenir des PGCD et des PPCM ? 1/3

S'il vous plaît ... dessine-moi un $\mathcal{L}(\beta)$

Un ensemble **S** est de la forme $\mathcal{L}(\beta)$ si et seulement si

- $(i, j) \in \mathbf{S}$ et $(j, k) \in \mathbf{S} \Rightarrow (i, k) \in \mathbf{S}$, et
- $(i, j) \in \mathbf{S}$ et $i < k < j \Rightarrow (i, k) \in \mathbf{S}$ ou $(k, j) \in \mathbf{S}$.

1. Choisir un $(i, i + 1)$ dans **S** et le supprimer.
2. Échanger les i et les $i + 1$.
3. Construire une tresse γ par récurrence sur $|\mathbf{S}|$.
4. On a $\mathbf{S} = \mathcal{L}(\sigma_i \gamma)$!

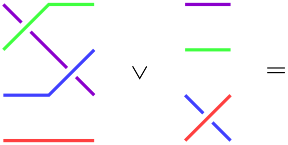
Bonus :

$\sigma_i \preccurlyeq \beta$ ssi $(i, i + 1) \in \mathcal{L}(\beta)$

Comment obtenir des PGCD et des PPCM ? 2/3

Des PGCD et des PPCM pour les tresses simples

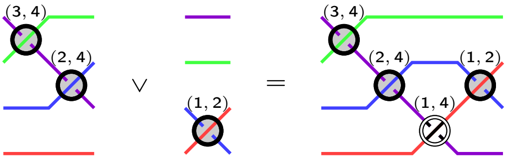
1. Les tresses simples ont des PPCM.



Comment obtenir des PGCD et des PPCM ? 2/3

Des PGCD et des PPCM pour les tresses simples

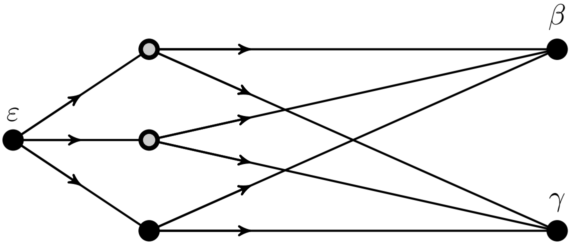
1. Les tresses simples ont des PPCM :
   $\mathcal{L}(\mathbf{PPCM}(\beta, \gamma)) = \mathbf{cl}(\mathcal{L}(\beta) \cup \mathcal{L}(\gamma))$.



Comment obtenir des PGCD et des PPCM ? 2/3

Des PGCD et des PPCM pour les tresses simples

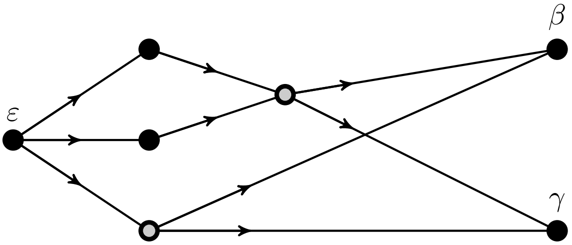
1. Les tresses simples ont des PPCM :
   $\mathcal{L}(\mathbf{PPCM}(\beta,\gamma)) = \mathbf{cl}(\mathcal{L}(\beta) \cup \mathcal{L}(\gamma))$.
2. Les tresses simples ont des PGCD :
   $\mathbf{PGCD}(\beta,\gamma) = \mathbf{PPCM}(\{\delta \mid \delta \preccurlyeq \beta \text{ et } \delta \preccurlyeq \gamma\})$.



Comment obtenir des PGCD et des PPCM ? 2/3

Des PGCD et des PPCM pour les tresses simples

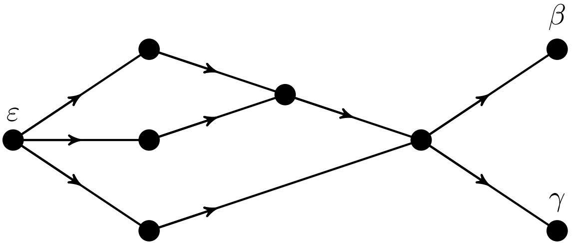
1. Les tresses simples ont des PPCM :
   $\mathcal{L}(\mathbf{PPCM}(\beta,\gamma)) = \mathbf{cl}(\mathcal{L}(\beta) \cup \mathcal{L}(\gamma))$.
2. Les tresses simples ont des PGCD :
   $\mathbf{PGCD}(\beta,\gamma) = \mathbf{PPCM}(\{\delta \mid \delta \preccurlyeq \beta \text{ et } \delta \preccurlyeq \gamma\})$.



Comment obtenir des PGCD et des PPCM ? 2/3

Des PGCD et des PPCM pour les tresses simples

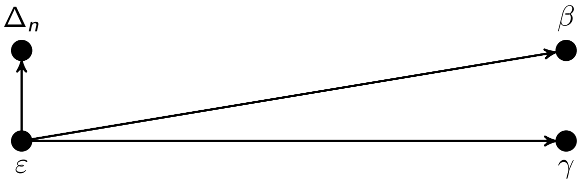
1. Les tresses simples ont des PPCM :
   $\mathcal{L}(\mathbf{PPCM}(\beta,\gamma)) = \mathbf{cl}(\mathcal{L}(\beta) \cup \mathcal{L}(\gamma))$.
2. Les tresses simples ont des PGCD :
   $\mathbf{PGCD}(\beta,\gamma) = \mathbf{PPCM}(\{\delta \mid \delta \preccurlyeq \beta \text{ et } \delta \preccurlyeq \gamma\})$.



Comment obtenir des PGCD et des PPCM ? 3/3

Des PGCD et des PPCM pour tous

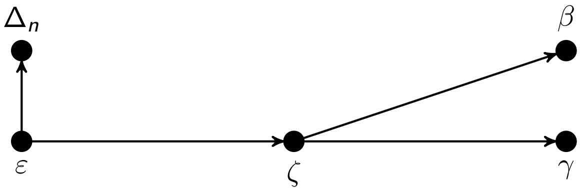
1. Les tresses positives ont des PGCD.



Comment obtenir des PGCD et des PPCM ? 3/3

Des PGCD et des PPCM pour tous

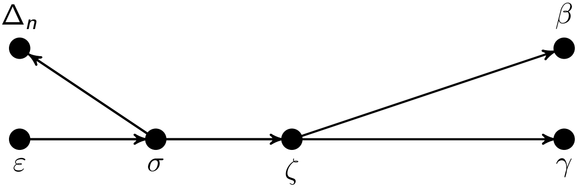
1. Les tresses positives ont des PGCD.



Comment obtenir des PGCD et des PPCM ? 3/3

Des PGCD et des PPCM pour tous

1. Les tresses positives ont des PGCD.

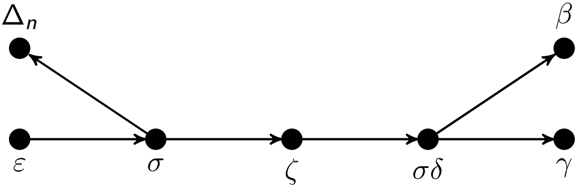


$$\sigma = \zeta \wedge \Delta_n$$

Comment obtenir des PGCD et des PPCM ? 3/3

Des PGCD et des PPCM pour tous

1. Les tresses positives ont des PGCD.

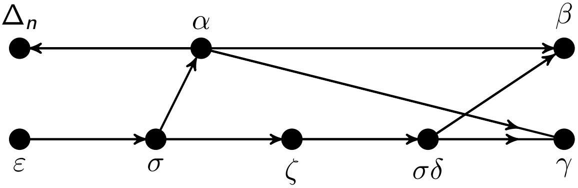


$$\sigma = \zeta \wedge \Delta_n$$
$$\delta = (\sigma^{-1}\beta) \wedge (\sigma^{-1}\gamma)$$

Comment obtenir des PGCD et des PPCM ? 3/3

Des PGCD et des PPCM pour tous

1. Les tresses positives ont des PGCD.

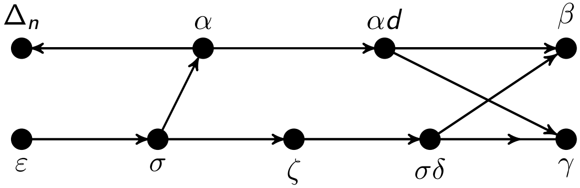


$$\sigma = \zeta \wedge \Delta_n$$
$$\delta = (\sigma^{-1}\beta) \wedge (\sigma^{-1}\gamma)$$
$$\alpha = \beta \wedge \gamma \wedge \Delta_n$$

Comment obtenir des PGCD et des PPCM ? 3/3

Des PGCD et des PPCM pour tous

1. Les tresses positives ont des PGCD.

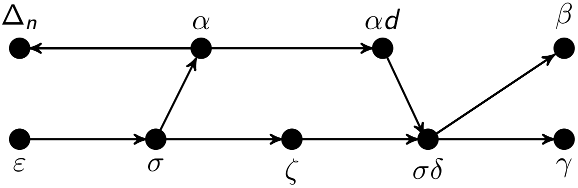


$$\begin{aligned}
\sigma &= \zeta \wedge \Delta_n \\
\delta &= (\sigma^{-1}\beta) \wedge (\sigma^{-1}\gamma) \\
\alpha &= \beta \wedge \gamma \wedge \Delta_n \\
d &= (\alpha^{-1}\beta) \wedge (\alpha^{-1}\gamma)
\end{aligned}$$

Comment obtenir des PGCD et des PPCM ? 3/3

Des PGCD et des PPCM pour tous

1. Les tresses positives ont des PGCD.

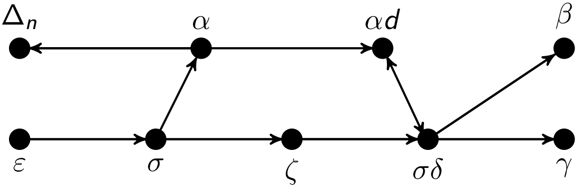


$$
\begin{aligned}
\sigma &= \zeta \wedge \Delta_n \\
\delta &= (\sigma^{-1}\beta) \wedge (\sigma^{-1}\gamma) \\
\alpha &= \beta \wedge \gamma \wedge \Delta_n \\
d &= (\alpha^{-1}\beta) \wedge (\alpha^{-1}\gamma)
\end{aligned}
$$

Comment obtenir des PGCD et des PPCM ? 3/3

Des PGCD et des PPCM pour tous

1. Les tresses positives ont des PGCD.



$$\sigma = \zeta \wedge \Delta_n$$
$$\delta = (\sigma^{-1}\beta) \wedge (\sigma^{-1}\gamma)$$
$$\alpha = \beta \wedge \gamma \wedge \Delta_n$$
$$d = (\alpha^{-1}\beta) \wedge (\alpha^{-1}\gamma)$$

Comment obtenir des PGCD et des PPCM ? 3/3

Des PGCD et des PPCM pour tous

1. Les tresses positives ont des PGCD.
2. Les tresses positives ont des PPCM :
   $\textbf{PPCM}(\beta, \gamma) = \textbf{PGCD}(\{\delta \mid \beta \preccurlyeq \delta, \gamma \preccurlyeq \delta\})$.

Trois lemmes

3. $\sigma_i \Delta_n \Delta_n = \Delta_n \Delta_n \sigma_i$ pour tout i

Comment obtenir des PGCD et des PPCM ? 3/3

Des PGCD et des PPCM pour tous

1. Les tresses positives ont des PGCD.
2. Les tresses positives ont des PPCM :
   $\mathbf{PPCM}(\beta, \gamma) = \mathbf{PGCD}(\{\delta \mid \beta \preccurlyeq \delta, \gamma \preccurlyeq \delta\})$.

Trois lemmes

3. $\sigma_i \Delta_n \Delta_n = \Delta_n \Delta_n \sigma_i$ pour tout i
4. $\beta \Delta_n^2 = \Delta_n^2 \beta$ pour toute tresse β

$$\sigma_1 \sigma_3 \sigma_2 \sigma_1 \Delta_n^2 = \sigma_1 \sigma_3 \sigma_2 \Delta_n^2 \sigma_1 = \ldots = \Delta_n^2 \sigma_1 \sigma_3 \sigma_2 \sigma_1$$

Comment obtenir des PGCD et des PPCM ? 3/3

Des PGCD et des PPCM pour tous

1. Les tresses positives ont des PGCD.
2. Les tresses positives ont des PPCM :
   $\mathbf{PPCM}(\beta, \gamma) = \mathbf{PGCD}(\{\delta \mid \beta \preccurlyeq \delta, \gamma \preccurlyeq \delta\})$.

Trois lemmes

3. $\sigma_i \Delta_n \Delta_n = \Delta_n \Delta_n \sigma_i$ pour tout i
4. $\beta \Delta_n^2 = \Delta_n^2 \beta$ pour toute tresse β
5. $\beta \preccurlyeq \Delta_n^{2|\beta|}$ pour toute tresse β

$$\sigma_1\sigma_3\sigma_2\sigma_1 \preccurlyeq \sigma_1\sigma_3\sigma_2\Delta_n^2 = \Delta_n^2\sigma_1\sigma_3\sigma_2 \preccurlyeq \Delta_n^2\sigma_1\sigma_3\Delta_n^2 \preccurlyeq \ldots \preccurlyeq \Delta_n^8$$

Merci !