

# Internationaler Waffenhandel

Die Anwendung neuer Verfahren der statistischen Netzwerkanalyse

**Projektpartner:** Prof. Dr. Paul W. Thurner

**Betreuer:** Prof. Dr. Göran Kauermann

**Referent:** Felix Loewe

Ludwig-Maximilians-Universität München  
Institut für Statistik

17. September 2015

- 1 Einleitung
- 2 Einführung in die Graphentheorie
- 3 Datensituation
- 4 Deskriptive Analyse
  - Netzwerkmaßzahlen
  - Degree-Sequenz
  - Zentrale Akteure
  - Visualisierungen
- 5 Inferentielle Analyse
  - ERGM - Exponential Random Graph Model
    - Simulation von Zufallsgraphen
    - Schätzung der Modellparameter
  - Anwendung des ERGM
  - Vergleich mit Großwaffenhandel
- 6 Fazit

# 1 Einleitung

# Was ist ein Netzwerk?

Ein Netzwerk besteht aus *Akteuren* und ihren *Verbindungen*

## Anwendungsgebiete:

- **Biologie:** DNA
- **Soziologie:** Freundesnetzwerk, Kollegenkreis
- **Politik:** internationale Beziehungen
- **Informatik:** Internet, Facebook, LAN

## 2 Einführung in die Graphentheorie

## Notation:

- $G = (V, E)$  ... ein *Graph*

## Notation:

- $G = (V, E)$  ... ein *Graph*
- $V = \{1, \dots, N_V\}$  ... Menge der *Knoten*

## Notation:

- $G = (V, E)$  ... ein *Graph*
- $V = \{1, \dots, N_V\}$  ... Menge der *Knoten*
- $E = \{(i, j) | i, j \in V, i \neq j\}$  ... Menge der *Kanten*



## Notation:

- $G = (V, E)$  ... ein *Graph*
- $V = \{1, \dots, N_V\}$  ... Menge der *Knoten*
- $E = \{(i, j) | i, j \in V, i \neq j\}$  ... Menge der *Kanten*
- $A \in N_V \times N_V$  ... eine *Nachbarschaftsmatrix*

$$a_{ij} = \begin{cases} 1, & ij \in E \\ 0, & ij \notin E \end{cases}$$

## Notation:

- $G = (V, E)$  ... ein *Graph*
- $V = \{1, \dots, N_V\}$  ... Menge der *Knoten*
- $E = \{(i, j) | i, j \in V, i \neq j\}$  ... Menge der *Kanten*
- $A \in N_V \times N_V$  ... eine *Nachbarschaftsmatrix*

$$a_{ij} = \begin{cases} 1, & ij \in E \\ 0, & ij \notin E \end{cases}$$

## Begriffe:

- *Gerichteter* vs. *ungerichteter* Graph

## Notation:

- $G = (V, E)$  ... ein *Graph*
- $V = \{1, \dots, N_V\}$  ... Menge der *Knoten*
- $E = \{(i, j) | i, j \in V, i \neq j\}$  ... Menge der *Kanten*
- $A \in N_V \times N_V$  ... eine *Nachbarschaftsmatrix*

$$a_{ij} = \begin{cases} 1, & ij \in E \\ 0, & ij \notin E \end{cases}$$

## Begriffe:

- *Gerichteter* vs. *ungerichteter* Graph
- (In-/Out-) *Degree*

## Notation:

- $G = (V, E)$  ... ein *Graph*
- $V = \{1, \dots, N_V\}$  ... Menge der *Knoten*
- $E = \{(i, j) | i, j \in V, i \neq j\}$  ... Menge der *Kanten*
- $A \in N_V \times N_V$  ... eine *Nachbarschaftsmatrix*

$$a_{ij} = \begin{cases} 1, & ij \in E \\ 0, & ij \notin E \end{cases}$$

## Begriffe:

- *Gerichteter* vs. *ungerichteter* Graph
- (In-/Out-) *Degree*
- *Dichte*:  $den(G) = \frac{|E_G|}{N_V(N_V-1)(/2)}$

# 3 Datensituation

*NISAT*-Datenbank (Norwegian Initiative on Small Arms Transfers)  
von *PRIO* (Peace Research Institute Oslo)

## Kantenliste mit den Variablen:

- Ländernamen von Importeur und Exporteur
- Correlates of War Code
- Jahr
- Monetärer Wert in US\$
- Waffentyp
- Datenquelle

## Dimensionen:

- 239 Länder
- 20 Jahre
- 109522 Waffentransaktionen

# 4 Deskriptive Analyse

# Netzwerkmaßzahlen

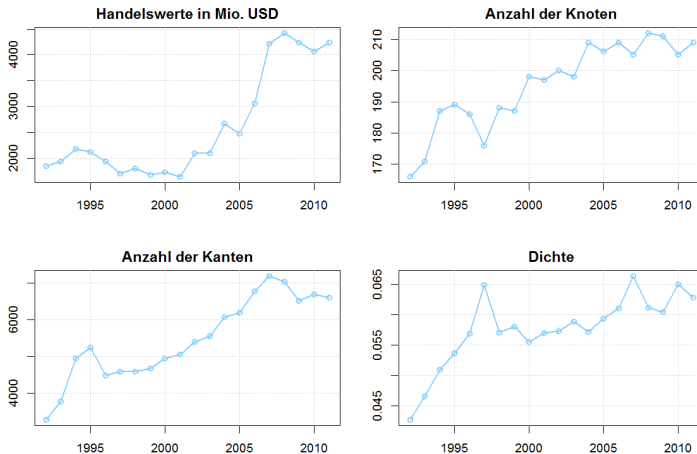


Abbildung: Netzwerkmaßzahlen des Kleinwaffenhandels von 1992 bis 2011



# Degree-Sequenz

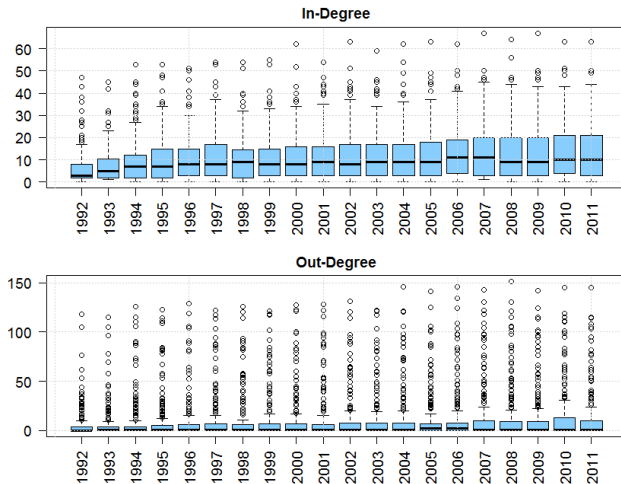


Abbildung: In-/ Out- Degree der Länder von 1992 bis 2011

# Zentrale Akteure I

Platz	Land	Exportvol. [Mrd.]
1	USA	9.2
2	Italy	7.9
3	Germany	4.6
4	Brazil	3.7
5	Austria	2.7
6	United Kingdom	2
7	Belgium	1.8
8	Switzerland	1.5
9	Russia	1.4
10	Czech Republic	1.4

Platz	Land	Importvol. [Mrd.]
1	USA	16
2	Germany	2.3
3	France	2.3
4	Canada	1.9
5	United Kingdom	1.8
6	Saudi Arabia	1.7
7	Belgium	1.2
8	Spain	1.2
9	Australia	1.2
10	Turkey	1

**Tabelle:** Summierte Handelswerte der Top-Exporteure und Top-Importeure des Netzwerkes von 1992 bis 2011

# Zentrale Akteure II

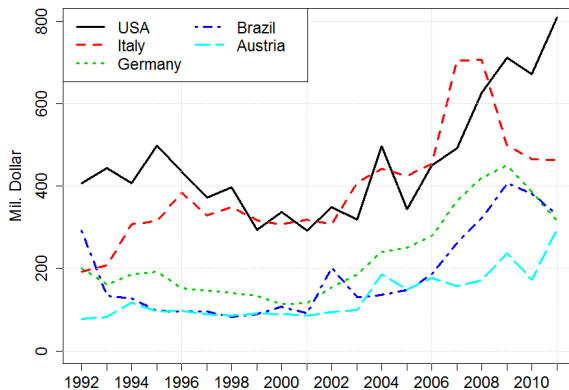
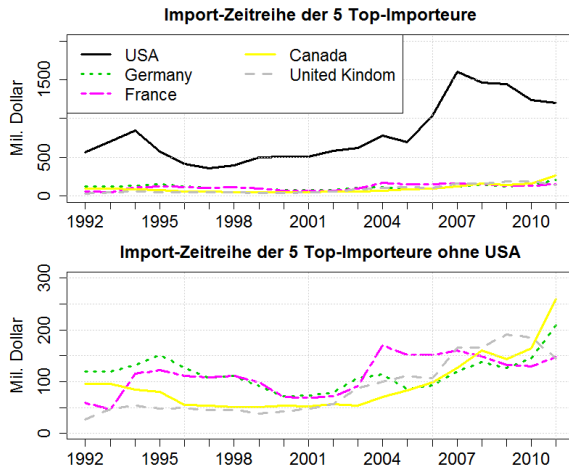


Abbildung: Zeitreihen der jährlichen Handelswerte der Top-Exporteure von 1992 bis 2011

# Zentrale Akteure III



**Abbildung:** Zeitreihen der jährlichen Handelswerte der Top-Importeure von 1992 bis 2011

# Zentrale Akteure IV

Platz	Land	Exportvol. / BIP pro Kopf
1	China	114735
2	Brazil	53225
3	Italy	48862
4	Spain	40822
5	Germany	38039
6	Turkey	36174
7	South Korea	29131
8	United States	26539
9	India	24615
10	Austria	23149

Platz	Land	Importvol. / BIP pro kopf
1	Tanzania	54562
2	Thailand	49636
3	India	32416
4	Pakistan	30290
5	South Korea	27208
6	China	25402
7	Indonesia	24268
8	Kenya	22907
9	Malaysia	22330
10	Bukina Faso	22183

**Tabelle:** Summierte Handelswerte der Top-Exporteure und Top-Importeure relativ zum BIP pro Kopf des Netzwerkes von 1992 bis 2011

# Visualisierungen 1

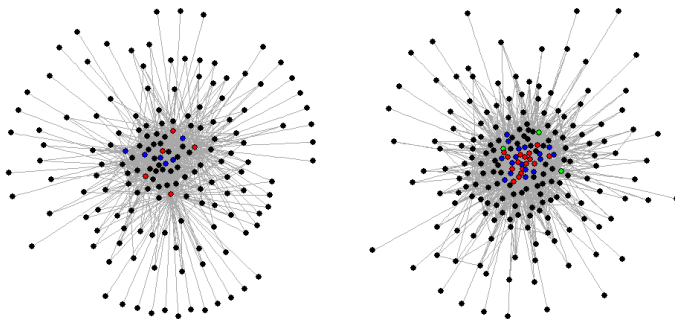


Abbildung: Netzwerk des Kleinwaffenhandels 1992 (li.) und 2011(re.)

Indegree > 30; Outdegree > 30, Indegree & Outdegree > 30

Abbildung: Handelsströme zwischen den Kontinenten von 1992 bis 2011

# 5 Inferentielle Analyse



$$P_{\theta, \mathcal{X}}(X = x) = \frac{\exp \{ \theta^T g(x) \}}{\kappa(\theta, \mathcal{X})} \quad (1)$$

mit

- $X$ , Zufällige Nachbarschaftsmatrix
  - $x \in \mathcal{X}$ , Menge aller möglichen Netzwerke
  - $\theta \in \Omega \subset \mathbb{R}^q$ , Vektor der Modellparameter
  - $g(x)$ ,  $q$ -Vektor aus Statistiken basierend auf der Nachbarschaftsmatrix  $x$
- 
- **Problem:**  $\kappa(\theta, \mathcal{X}) = \sum_{x \in \mathcal{X}} \exp \{ \theta^T g(x) \}$ ,  $|\mathcal{X}| = 2^{n(n-1)}$   
 $\implies$  Analytische Lösung nicht möglich.

**Simulation einer Sequenz von Graphen aus Zielverteilung  $P_{\theta}(x)$  via Makrov Chain Monte Carlo Algorithmus:**

## **Simulation einer Sequenz von Graphen aus Zielverteilung $P_{\theta}(x)$ via Makrov Chain Monte Carlo Algorithmus:**

1. Beliebiges Netzwerk mit fester Knotenzahl  $N$  als Startpunkt.

## Simulation einer Sequenz von Graphen aus Zielverteilung $P_\theta(x)$ via Makrov Chain Monte Carlo Algorithmus:

- 1 Beliebiges Netzwerk mit fester Knotenzahl  $N$  als Startpunkt.
- 2 Aus dem aktuellen Graphen  $x^{(m-1)}$  wird ein zufälliges Knotenpaar  $i, j$  ( $i, j \in 1, \dots, N$ ) ausgewählt.

## Simulation einer Sequenz von Graphen aus Zielverteilung $P_\theta(x)$ via Makrov Chain Monte Carlo Algorithmus:

- 1 Beliebiges Netzwerk mit fester Knotenzahl  $N$  als Startpunkt.
- 2 Aus dem aktuellen Graphen  $x^{(m-1)}$  wird ein zufälliges Knotenpaar  $i, j$  ( $i, j \in 1, \dots, N$ ) ausgewählt.
- 3 Vorgeschlagener Graph:  $x^* = x^{(m-1)}$  bis auf  $x_{ij}^{(m-1)} = 1 - x_{ij}^{(m-1)}$ .

## Simulation einer Sequenz von Graphen aus Zielverteilung $P_\theta(x)$ via Makrov Chain Monte Carlo Algorithmus:

- 1 Beliebiges Netzwerk mit fester Knotenzahl  $N$  als Startpunkt.
- 2 Aus dem aktuellen Graphen  $x^{(m-1)}$  wird ein zufälliges Knotenpaar  $i, j$  ( $i, j \in 1, \dots, N$ ) ausgewählt.
- 3 Vorgeschlagener Graph:  $x^* = x^{(m-1)}$  bis auf  $x_{ij}^{(m-1)} = 1 - x_{ij}^{(m-1)}$ .
- 4 Akzeptanz mit der Wahrscheinlichkeit  $\min\{1, \frac{P_\theta(x^*)}{P_\theta(x^{(m-1)})}\}$ .

## Simulation einer Sequenz von Graphen aus Zielverteilung $P_\theta(x)$ via Makrov Chain Monte Carlo Algorithmus:

- 1 Beliebiges Netzwerk mit fester Knotenzahl  $N$  als Startpunkt.
- 2 Aus dem aktuellen Graphen  $x^{(m-1)}$  wird ein zufälliges Knotenpaar  $i, j$  ( $i, j \in 1, \dots, N$ ) ausgewählt.
- 3 Vorgeschlagener Graph:  $x^* = x^{(m-1)}$  bis auf  $x_{ij}^{(m-1)} = 1 - x_{ij}^{(m-1)}$ .
- 4 Akzeptanz mit der Wahrscheinlichkeit  $\min\{1, \frac{P_\theta(x^*)}{P_\theta(x^{(m-1)})}\}$ .
- 5 Bei Akzeptanz  $x^{(m)} = x^*$  und  $x^{(m)} = x^{(m-1)}$  sonst.
- 6 Iteration der Schritte 2 - 5.

## Simulation einer Sequenz von Graphen aus Zielverteilung $P_\theta(x)$ via Makrov Chain Monte Carlo Algorithmus:

- ➊ Beliebiges Netzwerk mit fester Knotenzahl  $N$  als Startpunkt.
  - ➋ Aus dem aktuellen Graphen  $x^{(m-1)}$  wird ein zufälliges Knotenpaar  $i, j$  ( $i, j \in 1, \dots, N$ ) ausgewählt.
  - ➌ Vorgeschlagener Graph:  $x^* = x^{(m-1)}$  bis auf  $x_{ij}^{(m-1)} = 1 - x_{ij}^{(m-1)}$ .
  - ➍ Akzeptanz mit der Wahrscheinlichkeit  $\min\{1, \frac{P_\theta(x^*)}{P_\theta(x^{(m-1)})}\}$ .
  - ➎ Bei Akzeptanz  $x^{(m)} = x^*$  und  $x^{(m)} = x^{(m-1)}$  sonst.
  - ➏ Iteration der Schritte 2 - 5.
- Algorithmus ist unabhängig vom Startpunkt bei ausreichendem *Burn In*.
  - Algorithmus ermöglicht unabhängige Ziehungen aus gleicher Kette durch *Thinning*.



Ziel: Zentrierung der Statistiken der simulierten Netzwerke über denen des beobachteten Netzwerkes:

$$E_{\theta}(g(X)) - g(x_{obs}) = 0 \quad (2)$$

- **Problem:**  $E_{\theta}(g(X)) = \sum_{x \in \mathcal{X}} g(x) P_{\theta}(x)$
- **Lösung:** *Importance Sampling*

Ziel: Zentrierung der Statistiken der simulierten Netzwerke über denen des beobachteten Netzwerkes:

$$E_{\theta}(g(X)) - g(x_{obs}) = 0 \quad (2)$$

- **Problem:**  $E_{\theta}(g(X)) = \sum_{x \in \mathcal{X}} g(x) P_{\theta}(x)$
- **Lösung:** *Importance Sampling*
  - ① Ziehung einer großen Stichprobe von Graphen auf Basis eines vorläufigen Parametervektors  $\tilde{\theta}$ .

Ziel: Zentrierung der Statistiken der simulierten Netzwerke über denen des beobachteten Netzwerkes:

$$E_{\theta}(g(X)) - g(x_{obs}) = 0 \quad (2)$$

- **Problem:**  $E_{\theta}(g(X)) = \sum_{x \in \mathcal{X}} g(x) P_{\theta}(x)$
- **Lösung:** *Importance Sampling*
  - ① Ziehung einer großen Stichprobe von Graphen auf Basis eines vorläufigen Parametervektors  $\tilde{\theta}$ .
  - ② Benutzung gewichteter Stichprobendurchschnitte der Statistiken.

Ziel: Zentrierung der Statistiken der simulierten Netzwerke über denen des beobachteten Netzwerkes:

$$E_{\theta}(g(X)) - g(x_{obs}) = 0 \quad (2)$$

- **Problem:**  $E_{\theta}(g(X)) = \sum_{x \in \mathcal{X}} g(x) P_{\theta}(x)$
- **Lösung:** *Importance Sampling*
  - ➊ Ziehung einer großen Stichprobe von Graphen auf Basis eines vorläufigen Parametervektors  $\tilde{\theta}$ .
  - ➋ Benutzung gewichteter Stichprobendurchschnitte der Statistiken.
  - ➌ Erzeugen einer Sequenz von Parametern  $\tilde{\theta}, \theta^{(1)}, \theta^{(2)}, \dots, \theta^{(G)}$  durch *Fisher Scoring*.

Ziel: Zentrierung der Statistiken der simulierten Netzwerke über denen des beobachteten Netzwerkes:

$$E_{\theta}(g(X)) - g(x_{obs}) = 0 \quad (2)$$

- **Problem:**  $E_{\theta}(g(X)) = \sum_{x \in \mathcal{X}} g(x) P_{\theta}(x)$
- **Lösung:** *Importance Sampling*
  - ➊ Ziehung einer großen Stichprobe von Graphen auf Basis eines vorläufigen Parametervektors  $\tilde{\theta}$ .
  - ➋ Benutzung gewichteter Stichprobendurchschnitte der Statistiken.
  - ➌ Erzeugen einer Sequenz von Parametern  $\tilde{\theta}, \theta^{(1)}, \theta^{(2)}, \dots, \theta^{(G)}$  durch *Fisher Scoring*.
  - ➍ Neustart mit  $\theta^{(G)}$  als  $\tilde{\theta}$ .

**Problem :** Hohe Wahrscheinlichkeit auf unrealistischen Netzwerken (z.B. volles oder leeres Netzwerk) führt zur Divergenz des Schätz-Algorithmus.

**Problem :** Hohe Wahrscheinlichkeit auf unrealistischen Netzwerken (z.B. volles oder leeres Netzwerk) führt zur Divergenz des Schätz-Algorithmus.

## Ursachen:

- Instabilität von einfachen Zählstatistiken
- fehlende exogene Unterscheidungsmerkmale für Knoten und Kanten
- Beschränkung auf lineare Effekte der Statistiken unrealistisch

**Problem :** Hohe Wahrscheinlichkeit auf unrealistischen Netzwerken (z.B. volles oder leeres Netzwerk) führt zur Divergenz des Schätz-Algorithmus.

## Ursachen:

- Instabilität von einfachen Zählstatistiken
- fehlende exogene Unterscheidungsmerkmale für Knoten und Kanten
- Beschränkung auf lineare Effekte der Statistiken unrealistisch

## Lösungsansatz:

- Aufnahme von exogenen Kovariablen
- Aufnahme von nicht linearen Einflüssen durch  
*Curved Exponential Family Models*



- **Geometrically Weighted Degree (GWD):**

$$u(x, \phi_s) = e^{\phi_s} \sum_{i=1}^{n-1} \left\{ 1 - (1 - e^{-\phi_s})^i \right\} D_i(x) \quad (3)$$

- Kombination aus Zählstatistiken  $D_i(x)$
- Abhängig von zusätzlichen Decay-Parameter  $\phi$

- **Geometrically Weighted Degree (GWD):**

$$u(x, \phi_s) = e^{\phi_s} \sum_{i=1}^{n-1} \left\{ 1 - (1 - e^{-\phi_s})^i \right\} D_i(x) \quad (3)$$

- Kombination aus Zählstatistiken  $D_i(x)$
- Abhängig von zusätzlichen Decay-Parameter  $\phi$

- **Geometrically Weighted Edgewise Shared Partners (GWESP):**

$$v(x, \phi_t) = e^{\phi_t} \sum_{i=1}^{n-2} \left\{ 1 - (1 - e^{-\phi_t})^i \right\} EP_i(x) \quad (4)$$

- **Geometrically Weighted Dyadic Shared Partners (GWDSP):**

$$w(x, \phi_p) = e^{\phi_p} \sum_{i=1}^{n-2} \left\{ 1 - (1 - e^{-\phi_p})^i \right\} DP_i(x) \quad (5)$$

## Endogene Statistiken

- edges
- mutual
- gwesp
- gwdsp
- gwidegree
- gwodegree

## Exogene Statistiken

- nodecov(CINC)
- nodecov(GDP)
- nodecov(Conflict)
- absdiff(Polity)
- nodefactor(Continent)

Tabelle: Summary von Modell 1 (1996)

ergm-term	Estimate	Std.Error	p-Value
edges	-6.111e+00	2.281e-01	<1e-04 ***
mutual	2.120e+00	9.507e-02	<1e-04 ***
gwidegree	1.895e+00	4.818e-01	<1e-04 ***
gwodegree	-1.311e+00	3.307e-01	<1e-04 ***
gwesp.fixed.0.2	2.641e+00	1.778e-01	<1e-04 ***
gwdsp.fixed.0.2	-5.686e-02	6.008e-03	<1e-04 ***
nodeicov.ext_cinc	3.071e+00	1.291e+00	0.01740 *
nodeocov.ext_cinc	-5.967e+00	1.361e+00	<1e-0 ***
nodeicov.ext_gdp	3.479e-06	2.099e-06	0.09749 .
nodeocov.ext_gdp	4.392e-06	1.586e-06	0.00562 **
nodeicov.ext_conflict	2.310e-02	1.704e-02	0.17530
nodeocov.ext_conflict	-1.398e-01	2.763e-02	<1e-04 ***
nodeifactor.Continent.America	6.645e-02	6.799e-02	0.32839
nodeifactor.Continent.Asien	9.525e-02	6.473e-02	0.14116
nodeifactor.Continent.Europe	5.353e-03	7.312e-02	0.94164
nodeifactor.Continent.Oceania	-2.323e-02	1.136e-01	0.83795
nodeofactor.Continent.America	2.055e-01	6.589e-02	0.00182 **
nodeofactor.Continent.Asien	1.494e-01	6.452e-02	0.02055 *
nodeofactor.Continent.Europe	8.579e-01	7.226e-02	<1e-04 ***
nodeofactor.Continent.Oceania	2.311e-01	9.602e-02	0.01611 *
absdiff.ext_polity	-9.360e-03	3.249e-03	0.00397 **

**Annahme:**

$X^{(1)}$  und  $X^{(2)}$  seien Netzwerke mit identischen Statistiken bis auf Statistik  $g_i(X)$  und

$$\delta_i(X) = g_i(X^{(1)}) - g_i(X^{(2)})$$

.

**Dann gilt:**

$$\frac{P(X^{(1)})}{P(X^{(2)})} = \exp(\theta_i \delta_i(X))$$

**Annahme:**

$X^{(1)}$  und  $X^{(2)}$  seien Netzwerke mit identischen Statistiken bis auf Statistik  $g_i(X)$  und

$$\delta_i(X) = g_i(X^{(1)}) - g_i(X^{(2)})$$

.

**Dann gilt:**

$$\frac{P(X^{(1)})}{P(X^{(2)})} = \exp(\theta_i \delta_i(X))$$

⇒ Für positives  $\delta_i(X)$  gilt also:

- Ist  $\theta_i > 0$ , so ist  $X^{(1)}$  plausibler als  $X^{(2)}$ .
- Ist  $\theta_i = 0$ , so sind sie gleich plausibel.
- Ist  $\theta_i < 0$ , so ist  $X^{(2)}$  plausibler als  $X^{(1)}$ .

# Interpretation der Parameter 2

## Parameterwerte:

- **Edges** -6.111: Tendenz zu wenigen Kanten.
- **Mutual** 2.120: Tendenz zu gegenseitigen Handel.
- **nodeicov(CINC)** 3.071: „Mächtige“ Länder als Importland wahrscheinlich.
- **nodeocov(CINC)** -5.967: „Mächtige“ Länder als Exportland unwahrscheinlich.
- **nodeicov(GDP) & nodeocov(GDP)**  $> 0$ : Wirtschaftsstarke Länder als Handelspartner wahrscheinlich.
- **nodeocov(Conflict)** -0.1398: In Konflikte verwickelte Länder als Exporteure unwahrscheinlich.
- **nodeofactor(Continent)**  $> 0$ : Europäische Länder als Exporteure am wahrscheinlichsten, Afrikanische Länder als Exporteure am unwahrscheinlichsten.
- **absdiff(Polity)** -0.00936: Handel zwischen Ländern mit geringem Unterschied im Demokratiescore wahrscheinlich.

# Interpretation der Parameter 2

## Parameterwerte:

- **Edges** -6.111: Tendenz zu wenigen Kanten.
- **Mutual** 2.120: Tendenz zu gegenseitigen Handel.
- **nodeicov(CINC)** 3.071: „Mächtige“ Länder als Importland wahrscheinlich.
- **nodeocov(CINC)** -5.967: „Mächtige“ Länder als Exportland unwahrscheinlich.
- **nodeicov(GDP) & nodeocov(GDP)**  $> 0$ : Wirtschaftsstarke Länder als Handelspartner wahrscheinlich.
- **nodeocov(Conflict)** -0.1398: In Konflikte verwickelte Länder als Exporteure unwahrscheinlich.
- **nodeofactor(Continent)**  $> 0$ : Europäische Länder als Exporteure am wahrscheinlichsten, Afrikanische Länder als Exporteure am unwahrscheinlichsten.
- **absdiff(Polity)** -0.00936: Handel zwischen Ländern mit geringem Unterschied im Demokratiescore wahrscheinlich.



# Interpretation der Parameter 2

## Parameterwerte:

- **Edges** -6.111: Tendenz zu wenigen Kanten.
- **Mutual** 2.120: Tendenz zu gegenseitigen Handel.
- **nodeicov(CINC)** 3.071: „Mächtige“ Länder als Importland wahrscheinlich.
- **nodeocov(CINC)** -5.967: „Mächtige“ Länder als Exportland unwahrscheinlich.
- **nodeicov(GDP) & nodeocov(GDP)**  $> 0$ : Wirtschaftsstarke Länder als Handelspartner wahrscheinlich.
- **nodeocov(Conflict)** -0.1398: In Konflikte verwickelte Länder als Exporteure unwahrscheinlich.
- **nodeofactor(Continent)**  $> 0$ : Europäische Länder als Exporteure am wahrscheinlichsten, Afrikanische Länder als Exporteure am unwahrscheinlichsten.
- **absdiff(Polity)** -0.00936: Handel zwischen Ländern mit geringem Unterschied im Demokratiescore wahrscheinlich.

# Interpretation der Parameter 2

## Parameterwerte:

- **Edges** -6.111: Tendenz zu wenigen Kanten.
- **Mutual** 2.120: Tendenz zu gegenseitigen Handel.
- **nodeicov(CINC)** 3.071: „Mächtige“ Länder als Importland wahrscheinlich.
- **nodeocov(CINC)** -5.967: „Mächtige“ Länder als Exportland unwahrscheinlich.
- **nodeicov(GDP) & nodeocov(GDP)** > 0: Wirtschaftsstarke Länder als Handelspartner wahrscheinlich.
- **nodeocov(Conflict)** -0.1398: In Konflikte verwickelte Länder als Exporteure unwahrscheinlich.
- **nodeofactor(Continent)** > 0: Europäische Länder als Exporteure am wahrscheinlichsten, Afrikanische Länder als Exporteure am unwahrscheinlichsten.
- **absdiff(Polity)** -0.00936: Handel zwischen Ländern mit geringem Unterschied im Demokratiescore wahrscheinlich.

# Interpretation der Parameter 2

## Parameterwerte:

- **Edges** -6.111: Tendenz zu wenigen Kanten.
- **Mutual** 2.120: Tendenz zu gegenseitigen Handel.
- **nodeicov(CINC)** 3.071: „Mächtige“ Länder als Importland wahrscheinlich.
- **nodeocov(CINC)** -5.967: „Mächtige“ Länder als Exportland unwahrscheinlich.
- **nodeicov(GDP) & nodeocov(GDP)**  $> 0$ : Wirtschaftsstarke Länder als Handelspartner wahrscheinlich.
- **nodeocov(Conflict)** -0.1398: In Konflikte verwickelte Länder als Exporteure unwahrscheinlich.
- **nodeofactor(Continent)**  $> 0$ : Europäische Länder als Exporteure am wahrscheinlichsten, Afrikanische Länder als Exporteure am unwahrscheinlichsten.
- **absdiff(Polity)** -0.00936: Handel zwischen Ländern mit geringem Unterschied im Demokratiescore wahrscheinlich.

# Interpretation der Parameter 2

## Parameterwerte:

- **Edges** -6.111: Tendenz zu wenigen Kanten.
- **Mutual** 2.120: Tendenz zu gegenseitigen Handel.
- **nodeicov(CINC)** 3.071: „Mächtige“ Länder als Importland wahrscheinlich.
- **nodeocov(CINC)** -5.967: „Mächtige“ Länder als Exportland unwahrscheinlich.
- **nodeicov(GDP) & nodeocov(GDP)**  $> 0$ : Wirtschaftsstarke Länder als Handelspartner wahrscheinlich.
- **nodeocov(Conflict)** -0.1398: In Konflikte verwickelte Länder als Exporteure unwahrscheinlich.
- **nodeofactor(Continent)**  $> 0$ : Europäische Länder als Exporteure am wahrscheinlichsten, Afrikanische Länder als Exporteure am unwahrscheinlichsten.
- **absdiff(Polity)** -0.00936: Handel zwischen Ländern mit geringem Unterschied im Demokratiescore wahrscheinlich.

# Interpretation der Parameter 2

## Parameterwerte:

- **Edges** -6.111: Tendenz zu wenigen Kanten.
- **Mutual** 2.120: Tendenz zu gegenseitigen Handel.
- **nodeicov(CINC)** 3.071: „Mächtige“ Länder als Importland wahrscheinlich.
- **nodeocov(CINC)** -5.967: „Mächtige“ Länder als Exportland unwahrscheinlich.
- **nodeicov(GDP) & nodeocov(GDP)**  $> 0$ : Wirtschaftsstarke Länder als Handelspartner wahrscheinlich.
- **nodeocov(Conflict)** -0.1398: In Konflikte verwickelte Länder als Exporteure unwahrscheinlich.
- **nodeofactor(Continent)**  $> 0$ : Europäische Länder als Exporteure am wahrscheinlichsten, Afrikanische Länder als Exporteure am unwahrscheinlichsten.
- **absdiff(Polity)** -0.00936: Handel zwischen Ländern mit geringem Unterschied im Demokratiescore wahrscheinlich.

# Interpretation der Parameter 2

## Parameterwerte:

- **Edges** -6.111: Tendenz zu wenigen Kanten.
- **Mutual** 2.120: Tendenz zu gegenseitigen Handel.
- **nodeicov(CINC)** 3.071: „Mächtige“ Länder als Importland wahrscheinlich.
- **nodeocov(CINC)** -5.967: „Mächtige“ Länder als Exportland unwahrscheinlich.
- **nodeicov(GDP) & nodeocov(GDP)**  $> 0$ : Wirtschaftsstarke Länder als Handelspartner wahrscheinlich.
- **nodeocov(Conflict)** -0.1398: In Konflikte verwickelte Länder als Exporteure unwahrscheinlich.
- **nodeofactor(Continent)**  $> 0$ : Europäische Länder als Exporteure am wahrscheinlichsten, Afrikanische Länder als Exporteure am unwahrscheinlichsten.
- **absdiff(Polity)** -0.00936: Handel zwischen Ländern mit geringem Unterschied im Demokratiescore wahrscheinlich.

## **Curved ERGM Terms am Beispiel von Geometrically Weighted Degree (GWD):**

## Curved ERGM Terms am Beispiel von Geometrically Weighted Degree (GWD):

- Annahme: Hinzufügen einer Kante ändert nur Degree  $k$  eines Knotens.  
 $(D_k, D_{k+1}) \rightarrow (D_k - 1, D_{k+1} + 1)$



## Curved ERGM Terms am Beispiel von Geometrically Weighted Degree (GWD):

- Annahme: Hinzufügen einer Kante ändert nur Degree  $k$  eines Knotens.  
 $(D_k, D_{k+1}) \rightarrow (D_k - 1, D_{k+1} + 1)$
- $\frac{p_{after}}{p_{before}} = \exp(\theta \rho^k)$  ,  $\rho = 1 - e^{-\phi}$

## Curved ERGM Terms am Beispiel von Geometrically Weighted Degree (GWD):

- Annahme: Hinzufügen einer Kante ändert nur Degree  $k$  eines Knotens.  
 $(D_k, D_{k+1}) \rightarrow (D_k - 1, D_{k+1} + 1)$
- $\frac{p_{after}}{p_{before}} = \exp(\theta \rho^k)$  ,  $\rho = 1 - e^{-\phi}$

⇒ Interpretation der beiden Parameter:

## Curved ERGM Terms am Beispiel von Geometrically Weighted Degree (GWD):

- Annahme: Hinzufügen einer Kante ändert nur Degree  $k$  eines Knotens.  
 $(D_k, D_{k+1}) \rightarrow (D_k - 1, D_{k+1} + 1)$
- $\frac{p_{\text{after}}}{p_{\text{before}}} = \exp(\theta \rho^k)$  ,  $\rho = 1 - e^{-\phi}$

### ⇒ Interpretation der beiden Parameter:

- $\theta > 0$ : Tendenz zum Hinzufügen von Kanten
- $\theta < 0$ : Tendenz zum Löschen von Kanten

## Curved ERGM Terms am Beispiel von Geometrically Weighted Degree (GWD):

- Annahme: Hinzufügen einer Kante ändert nur Degree  $k$  eines Knotens.  
 $(D_k, D_{k+1}) \rightarrow (D_k - 1, D_{k+1} + 1)$
- $\frac{p_{\text{after}}}{p_{\text{before}}} = \exp(\theta \rho^k)$  ,  $\rho = 1 - e^{-\phi}$

### ⇒ Interpretation der beiden Parameter:

- $\theta > 0$ : Tendenz zum Hinzufügen von Kanten
- $\theta < 0$ : Tendenz zum Löschen von Kanten
- $\phi \rightarrow 0$ : Tendenz verschwindet schnell
- $\phi \rightarrow \infty$ : Tendenz bleibt konstant

# Interpretation der Parameter 4

- **GWIDEGREE** 1.895: Tendenz zu vielen Importpartnern.
  - **GWODEEGREE** -1.211: Tendenz zu wenigen Exportpartnern.
  - **GWESP** 2.641: Tendenz zur Schließung von Dreiecken.
  - **GWDSP** -0.05686: Tendenz gegen Schließung von offenen Dreiecken.
- 
- **DECAY** 0.2: Tendenz verschwindet schnell.

Decay Parameter durch Ausprobieren festgelegt, da freie Schätzung sehr langsam.

# Interpretation der Parameter 4

- **GWIDEGREE** 1.895: Tendenz zu vielen Importpartnern.
- **GWODEEGREE** -1.211: Tendenz zu wenigen Exportpartnern.
- **GWESP** 2.641: Tendenz zur Schließung von Diecken.
- **GWDSP** -0.05686: Tendenz gegen Schließung von offenen Dreiecken.
  
- **DECAY** 0.2: Tendenz verschwindet schnell.

Decay Parameter durch Ausprobieren festgelegt, da freie Schätzung sehr langsam.

# Interpretation der Parameter 4

- **GWIDEGREE** 1.895: Tendenz zu vielen Importpartnern.
- **GWODEEGREE** -1.211: Tendenz zu wenigen Exportpartnern.
- **GWESP** 2.641: Tendenz zur Schließung von Dreiecken.
- **GWDSP** -0.05686: Tendenz gegen Schließung von offenen Dreiecken.
  
- **DECAY** 0.2: Tendenz verschwindet schnell.

Decay Parameter durch Ausprobieren festgelegt, da freie Schätzung sehr langsam.

# Interpretation der Parameter 4

- **GWIDEGREE** 1.895: Tendenz zu vielen Importpartnern.
  - **GWODEEGREE** -1.211: Tendenz zu wenigen Exportpartnern.
  - **GWESP** 2.641: Tendenz zur Schließung von Dreiecken.
  - **GWDSP** -0.05686: Tendenz gegen Schließung von offenen Dreiecken.
- 
- **DECAY** 0.2: Tendenz verschwindet schnell.

Decay Parameter durch Ausprobieren festgelegt, da freie Schätzung sehr langsam.



# Interpretation der Parameter 4

- **GWIDEGREE** 1.895: Tendenz zu vielen Importpartnern.
  - **GWODEEGREE** -1.211: Tendenz zu wenigen Exportpartnern.
  - **GWESP** 2.641: Tendenz zur Schließung von Dreiecken.
  - **GWDSP** -0.05686: Tendenz gegen Schließung von offenen Dreiecken.
- 
- **DECAY** 0.2: Tendenz verschwindet schnell.

Decay Parameter durch Ausprobieren festgelegt, da freie Schätzung sehr langsam.

# Interpretation der Parameter 4

- **GWIDEGREE** 1.895: Tendenz zu vielen Importpartnern.
  - **GWODEEGREE** -1.211: Tendenz zu wenigen Exportpartnern.
  - **GWESP** 2.641: Tendenz zur Schließung von Dreiecken.
  - **GWDSP** -0.05686: Tendenz gegen Schließung von offenen Dreiecken.
- 
- **DECAY** 0.2: Tendenz verschwindet schnell.

Decay Parameter durch Ausprobieren festgelegt, da freie Schätzung sehr langsam.

- **MCMC-Diagnose** zur Überprüfung der simulierten Netzwerke
  - MCMC Algorithmus konvergiert
  - $\Rightarrow$  Statistiken schwanken um Mittelwert

- **MCMC-Diagnose** zur Überprüfung der simulierten Netzwerke
  - MCMC Algorithmus konvergiert
  - $\Rightarrow$  Statistiken schwanken um Mittelwert
- **Goodness of Fit - Plot** zur Überprüfung der Güte des Modells
  - Simulation von Netzwerken aus geschätzten Modell
  - Stimmen die Statistiken der Simulierten Netzwerke mit den tatsächlich beobachteten Statistiken überein?

# MCMC Diagnose

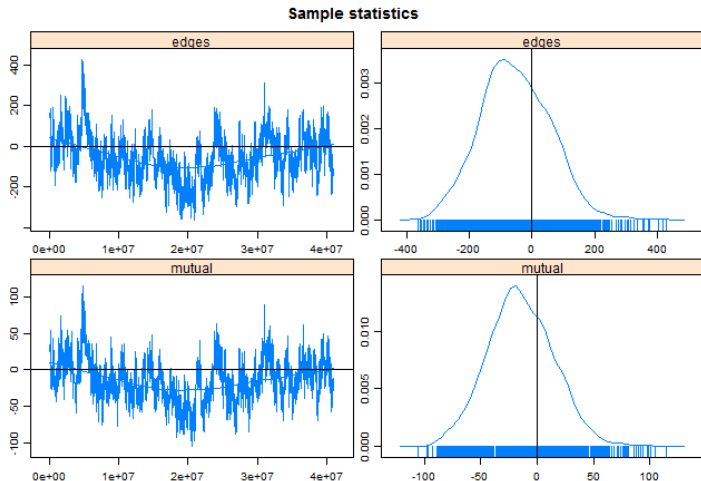
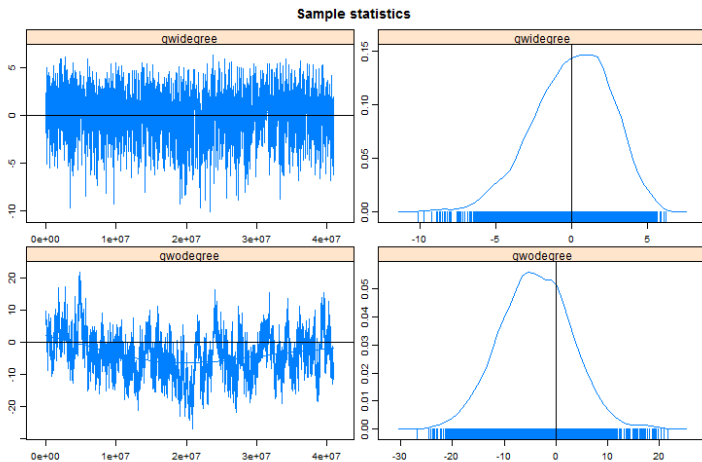


Abbildung: MCMC Diagnose von Modell 1 (1996) - edges und mutual

# MCMC Diagnose 2



**Abbildung:** MCMC Diagnose von Modell 1 (1996) - qwidegree und gwodegree

# Goodness of Fit

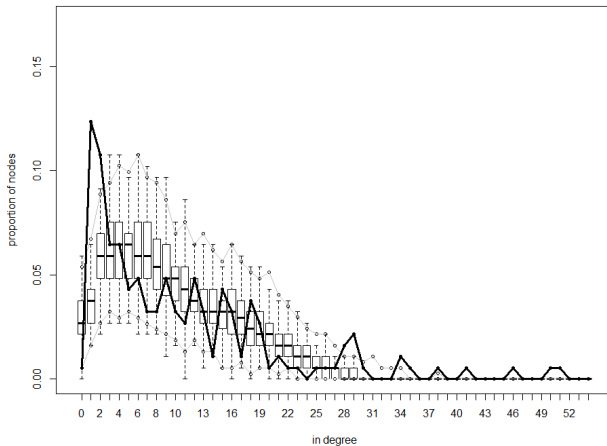


Abbildung: Goodness of Fit von Modell 1 (1996) - In Degree

# Goodness of Fit 2

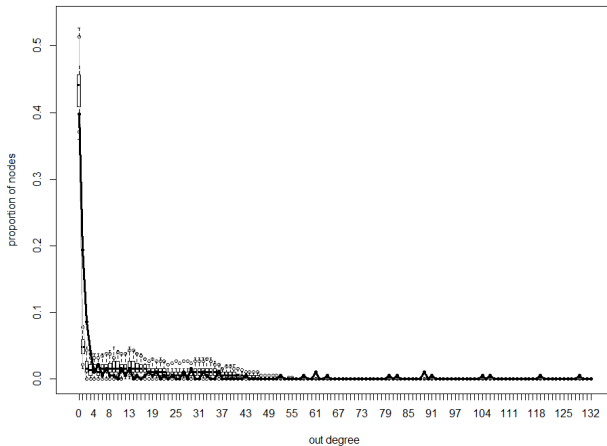


Abbildung: Goodness of Fit von Modell 1 (1996) - Out Degree



# Goodness of Fit 3

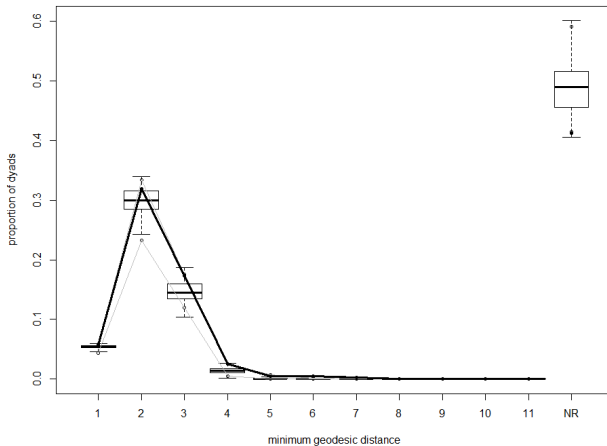


Abbildung: Goodness of Fit von Modell 1 (1996) - Minimum Geodesic Distance

# Goodness of Fit 4

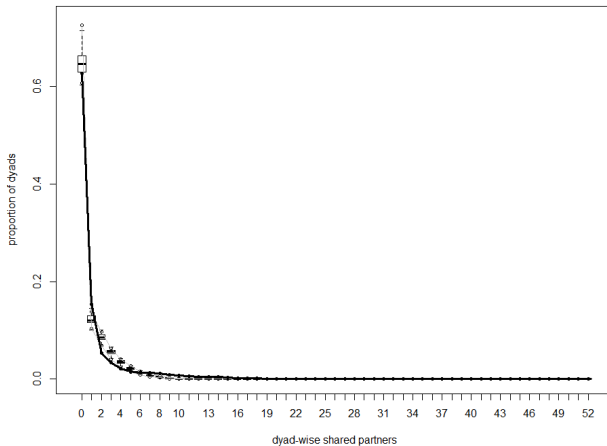


Abbildung: Goodness of Fit von Modell 1 (1996) - Dyadwise Shared Partners

# Goodness of Fit 5

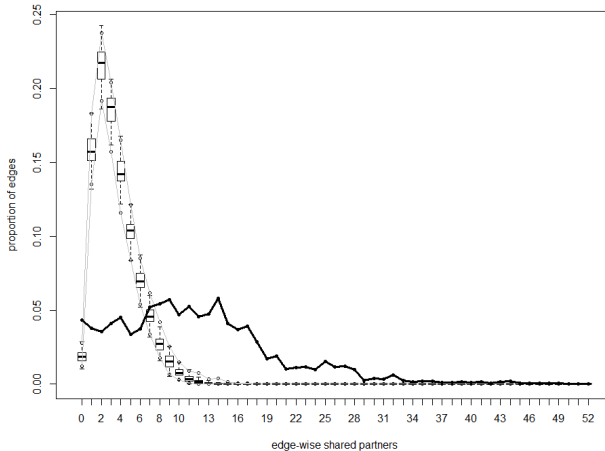


Abbildung: Goodness of Fit von Modell 1 (1996) - Edgewise Shared Partners

- Instabilität bezüglich Wahl der Statistiken, Jahr und Decay-Parameter
- Sehr lange Rechenzeit bei Einbindung von Kantenattributen und freiem Decay-Parameter
- Wahl der richtigen Statistiken schwierig / nicht eindeutig

**Idee:** Anwendung von Modell aus Vorgängerarbeit (Großwaffenhandel) auf Daten des Kleinwaffenhandels

⇒ funktioniert in keinem der 20 Jahre.

⇒ Netzwerke des Kleinwaffenhandels und Großwaffenhandels haben strukturelle Unterschiede

# Vergleich mit Großwaffenhandel

## Unterschiede:

Merkmal	Großwaffen	Kleinwaffen
<b>Zeitraum</b>	1950 -2012	1992 -2011
<b>Anzahl Nationen</b>	218	239
<b>Anzahl Transaktionen</b>	ca. 300-400 pro Jahr	ca. 4000-7000 pro Jahr
<b>Dichte</b>	0.025 - 0.035	0.045 - 0.065

## Gemeinsamkeiten:

- Degree Verteilung
- Zentrale Akteure
- Ansteigender Trend

## 6 Fazit

## Netzwerkdaten über Handel mit Kleinwaffen von 1992 bis 2011

### **Fazit:**

- Zentrale Akteure dominieren den Handel
- Trend: mehr Handel, mehr beteiligte Nationen, größere Ausgaben
- Modellierung mit ERGM schwierig

### **Mögliche Verbesserungen:**

- Einbeziehung zusätzlicher Kovariablen
- Testen zusätzlicher Kombinationen von endogenen Statistiken und exogenen Kovariablen
- Berücksichtigung der zeitlichen Struktur durch Temporal Exponential Random Graph Model (TERGM)
- Modellierung von Teilnetzwerken



David R Hunter.

Curved exponential family models for social networks.  
*Social networks*, 29(2):216–230, 2007.



David R Hunter, Mark S Handcock, Carter T Butts, Steven M Goodreau, and Martina Morris.

ergm: A package to fit, simulate and diagnose exponential-family models for networks.  
*Journal of statistical software*, 24(3), 2008.



Eric D Kolaczyk and Gabor Csardi.

*Statistical Analysis of Network Data with R*.  
Springer New York, 2014.



Dean Lusher, Johan Koskinen, and Garry Robins.

*Exponential random graph models for social networks: Theory, methods, and applications*.  
Cambridge University Press, 2012.



Ende