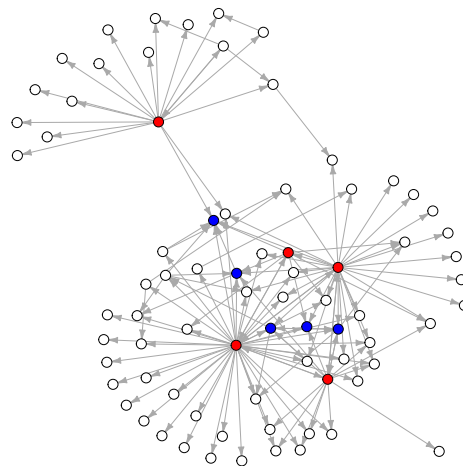


# Eine statistische Analyse des Netzwerks des internationalen Waffenhandels von 1950-2012

Bericht im Rahmen des statistischen Consultingprojekts



Verfasser: Christoph Jansen & Christian Schmid

Betreuer: Prof. Dr. Goeran Kauermann

Projektpartner: Prof. Dr. Paul Thurner

Abgabedatum: 13. Oktober 2014

Fakultät für Mathematik, Informatik und Statistik der  
Ludwig-Maximilians-Universität München

## **Zusammenfassung**

Das Netzwerk des internationalen Waffenhandels im Zeitraum 1950-2012 wird untersucht. Nach einer Fehleranalyse des vorliegenden Datensatzes, wird eine graphentheoretisch motivierte deskriptive Untersuchung des Netzwerks vorgenommen. Im Vordergrund steht hierbei vor allem das Auffinden von über den Gesamtzeitraum bestehenden charakteristischen Strukturen des Handelsnetzwerks. Anschließend wird das Exponential Random Graph Model (ERGM) eingeführt. Besonderer Fokus liegt hierbei auf Schätzung und Interpretation der Modellparameter. Die Grenzen des Modells werden diskutiert. Abschließend wird eine inferentielle Analyse der Daten mit Hilfe des ERGMs vorgenommen. Die zuvor gefundenen Charakteristika des Netzwerks können hierbei in die Modellierung einfließen.

## Inhaltsverzeichnis

<b>0</b>	<b>Einführung: Waffenhandel und Netzwerke</b>	<b>1</b>
<b>1</b>	<b>Datengrundlage und Forschungsfragen</b>	<b>2</b>
1.1	Das Stockholm International Peace Research Institute . . . . .	2
1.2	Die Datengrundlage . . . . .	2
1.3	Überprüfung der Daten . . . . .	6
<b>2</b>	<b>Theoretische Grundlage für die deskriptive Analyse</b>	<b>9</b>
2.1	Netzwerke als Graphen . . . . .	9
2.2	Deskriptive Kennziffern für Graphen . . . . .	11
<b>3</b>	<b>Deskriptive Analyse der SIPRI-Daten</b>	<b>17</b>
3.1	Betrachtung des Gesamtnetzwerks . . . . .	17
3.2	Bestimmung der zentralen Akteure . . . . .	23
3.3	Bestimmung der relevanten Effekte . . . . .	27
<b>4</b>	<b>Theoretische Grundlagen für die inferentielle Analyse</b>	<b>31</b>
4.1	Das Exponential Random Graph Model . . . . .	31
4.2	Grenzen des Modells . . . . .	41
<b>5</b>	<b>Inferentielle Analyse der SIPRI-Daten</b>	<b>44</b>
5.1	Einige Netzwerkstatistiken . . . . .	44
5.2	Modelle für das Handelsnetzwerk . . . . .	48
<b>6</b>	<b>Zusammenfassung der Ergebnisse und Ausblick</b>	<b>60</b>
<b>7</b>	<b>Kommentare zum elektronischen Anhang</b>	<b>61</b>
<b>8</b>	<b>Anhang</b>	<b>62</b>
8.1	Liste aller Nationen . . . . .	62
8.2	Liste aller nicht am Waffenhandel teilnehmender Nationen . . . . .	65
8.3	Unstimmigkeiten zwischen Im- und Export Daten . . . . .	66
8.4	Top 10 Nationen nach durchschnittlicher Closeness-Zentralität . . . . .	68
	<b>Literatur</b>	<b>69</b>

## 0 Einführung: Waffenhandel und Netzwerke

Warum sollten Daten zum internationalen Waffenhandel nicht (nur) mit statistischen Standardverfahren analysiert werden? Und: Was spricht für eine Behandlung der Daten mit den Mitteln der *statistischen Netzwerkanalyse*?

Die Antwort der ersten Frage hängt mit einer grundlegenden Annahme zusammen, welche viele statistische Modelle gemeinsam haben, der *Unabhängigkeit der Beobachtungen*. Diese ist grundlegend für die *Maximum-Likelihood-Schätzung* der Modellparameter und damit in den meisten Fällen unentbehrlich: Ein Modell, dessen Parameter nicht geschätzt werden können ist nahezu nutzlos.

Ist diese Annahme auch in jedem Fall kritisch zu prüfen, so kann sie doch für viele Situationen als (zumindest approximativ) erfüllt angenommen werden.

Nicht so im Fall der Daten zum internationalen Waffenhandel: Befinden sich zwei Nationen im Krieg miteinander, so wäre es undenkbar die Waffenimporte der einen Nation als unabhängig von denen der anderen anzusehen.

Vielmehr ist die Abhängigkeitsstruktur der einzelnen Akteure ein *systematischer* (und kein zufälliger) Bestandteil der Daten. Man spricht in diesem Zusammenhang auch von einer *relationalen Datenstruktur* (oder kurz *relationalen Daten*, vgl. [17]).

Dies führt unmittelbar zur Beantwortung der zweiten Frage: Die statistische Netzwerkanalyse ermöglicht die Modellierung genau jener systematischen Abhängigkeitsstrukturen. Dies geschieht, indem die Modelle die Abhängigkeiten nicht länger als Ungenauigkeiten oder Messfehler behandeln, sondern sie als einen zentralen Bestandteil des zu modellierenden Phänomens begreifen.

Zum Aufbau der Arbeit: Kapitel 1 stellt die Datengrundlage vor und überprüft diese auf Unstimmigkeiten. In den Kapiteln 2 und 3 wird eine deskriptive Analyse des Datensatzes mit Hilfe graphentheoretischer Konzepte vorgenommen. In Kapitel 4 wird das *Exponential Random Graph Model* eingeführt und diskutiert. Dieses bietet schließlich in Kapitel 5 die Grundlage für die inferentielle Analyse des Datensatzes.

## 1 Datengrundlage und Forschungsfragen

Der vorliegende Bericht bezieht sich auf die Daten zum internationalen Waffenhandel, welche jedes Jahr von der schwedischen Forschungsorganisation *SIPRI* (*Stockholm International Peace Research Institute*) erhoben werden. Die Daten wurden von SIPRI an Prof. Paul Thurner weitergegeben, welcher im folgenden eine systematische Aufbereitung der Daten mit Hilfe des Datenbanksystems *Excel* in Auftrag gegeben hat. Anschließend wurden uns die aufbereiteten Daten zur weiteren Untersuchung überlassen. Im folgenden ersten Kapitel soll zunächst kurz das SIPRI vorgestellt werden. Im Anschluss soll genau auf die Struktur der Daten, wie sie an uns übergeben wurden, eingegangen werden. Schließlich werden die Daten auf Unstimmigkeiten überprüft.

### 1.1 Das Stockholm International Peace Research Institute

Das *Stockholm International Peace Research Institute* (*SIPRI*, deutsch: *Stockholmer internationales Friedensforschungsinstitut*) ist eine unabhängige, internationale Forschungseinrichtung, die ihren Fokus auf wissenschaftliche Arbeiten zu Themen wie Konfliktforschung, Auf- und Abrüstung sowie Rüstungskontrolle legt. Seit der Gründung 1966 in Form einer Stiftung der schwedischen Regierung, stellt SIPRI Daten sowie Auswertungen dieser Daten zusammen mit darauf basierenden Empfehlungen für politische Entscheidungsträger, Wissenschaftler, die Medien und die interessierte Öffentlichkeit bereit.

SIPRIs Untersuchungen zur Rüstungsstärke hatten maßgeblichen Anteil für die Abrüstungsverhandlungen zwischen den Ost- und Westmächten zu Zeiten des Kalten Krieges. SIPRI zählt daher nicht nur aufgrund des 1982 überreichten UNESCO-Preises für Friedenserziehung zu den weltweit angesehensten Friedensforschungsinstituten. Das Institut pflegt aus diesem Grund auch Kontakte zu weiteren wissenschaftlichen Einrichtungen sowie internationalen Organisationen überall auf der Welt. Zu den Einflussreichsten gehören zweifelsohne die United Nations und die Europäische Union. Neben dem Hauptsitz in Stockholm hat SIPRI weitere Niederlassungen in Peking und Washington D.C. Für weitergehende Informationen sei auf [16] verwiesen.

### 1.2 Die Datengrundlage

SIPRIs Datensatz *Statistical Data on Arms Transfer* bezieht sich auf den tatsächlich durchgeführten Handel von Großwaffen (d.h. Panzer, Kampfflugzeuge, etc.) bzw.

Wehrsystemen zwischen zwei Ländern. Der Handel von Kleinwaffen (d.h. Pistolen, Gewehre, etc.) ist im Datensatz nicht erfasst. Es liegen für jedes Kalenderjahr von 1950 bis 2012 Daten vor, die dokumentieren von welchem Land zu welchem Land Waffen geliefert und welche Mengen dabei transportiert wurden. Dies bedeutet, dass für jede Nation der jährliche Waffenimport und Waffenexport mit jeder anderen Nation erfasst ist.

Um den Handel von Waffen vergleichen zu können, hat SIPRI eine eigens für diesen Zweck angepasste Maßeinheit entwickelt, den sogenannten *Trend-Indicator Value (TIV)*. Den tatsächlich gezahlten Geldbetrag als Maßeinheit zu wählen erweist sich als nicht sinnvoll, da dieser oftmals nicht eindeutig zu ermitteln ist. Der Grund dafür kann darin liegen, dass der Verkaufspreis schlicht unbekannt ist oder der Waffenhandel im Zuge weiterer Geschäftsabwicklungen durchgeführt wurde und somit eine eindeutige Rückverfolgung des Preises nicht möglich ist. Erschwerend kommt hinzu, dass für die meisten Waffensysteme keine Marktpreise existieren. Diese werden individuell mit dem Geschäftspartner ausgehandelt, so dass der gezahlte Preis nicht zwangsläufig den tatsächlichen Wert widerspiegelt. Für einen Leopard-2A4 Panzer wurde daher zum Beispiel ein TIV von 4 Millionen, für einen Eurofighter ein TIV von 55 Millionen und für ein Type 209PN U-Boot ein TIV von 275 Millionen festgelegt.

Der TIV basiert somit lediglich auf den Produktionskosten einer Standardware und beabsichtigt den militärischen Wert der gehandelten Güter widerzuspiegeln. Waffen, deren Produktionskosten nicht bekannt sind werden mit den Produktionskosten von Waffen verglichen, welche bezüglich Größe, Produktionsjahr und Gebrauchseigenschaften wie Gewicht, Geschwindigkeit etc., ähnlich sind.

Weiterhin gilt für Waffen, die gebraucht weiterverkauft werden, dass diesen 40 Prozent des Neuwertes zugeschrieben wird. Daher gehen zum Beispiel 43 überschüssige Leopard-2A4 Panzer, welche im Jahr 2009 von Deutschland nach Chile verkauft wurden, für jeweils  $0.4 \cdot 4 = 1,6$  Millionen TIV und damit insgesamt  $1.6 \cdot 43 = 68.8$  Millionen TIV in die Datenbank ein. Für Waffen, welche zwar gebraucht weiterverkauft, davor jedoch merklich generalüberholt bzw. saniert wurden, wird ein TIV von 66 Prozent des Originalwertes veranschlagt. Generell beabsichtigt SIPRI mit den Daten geeignete Maßzahlen zu liefern, um den Handel zwischen unterschiedlichen Regionen der Welt zu unterschiedlichen Zeitpunkten vergleichen zu können. Aus diesem Grund wird die Hauptpriorität darauf gelegt sicherzustellen, dass das TIV-System über die Zeit konsistent bleibt.

In Fällen, in denen kein eindeutiger Importeur und/oder kein eindeutiger Exporteur einer Waffenlieferung mit einem vertretbaren Grad an Sicherheit ausgemacht werden kann, wird die Lieferung gesondert notiert. Diese nicht eindeutig zuweisbaren Daten werden in diesem Projekt nicht berücksichtigt. Auch erfassen die Daten ausschließlich den weltweiten *Waffenhandel*. Waffensysteme die eine Nation für den Eigenbedarf herstellt, werden daher in diesem Datensatz ebenfalls nicht berücksichtigt.

Die Daten liegen in Form von Exceldateien vor. Dabei gibt es für jede der 218 Nationen, welche zu mindestens einem Zeitpunkt im Zeitraum von 1950 – 2012 existiert hat, zwei Datensätze: Der erste Datensatz dokumentiert die jährlichen Exporttätigkeiten (*supplier*) einer Nation mitsamt Empfängerstaaten und TIV in Millionen. Der zweite Datensatz dokumentiert die jährlichen Importtätigkeiten (*recipient*) einer Nation mitsamt Zulieferern und TIV in Millionen. An dieser Stelle sollte erwähnt werden, dass der *supplier*-Datensatz exakt die selben Informationen wie der *recipient*-Datensatz enthalten sollte, da der Export-TIV der Nation  $A$  an die Nation  $B$  aus dem Jahr  $x$  (*supplier*-Datensatz) dem Import-TIV der Nation  $B$  von der Nation  $A$  aus dem Jahr  $x$  entspricht. Es wird sich im Unterkapitel 1.3 jedoch herausstellen, dass der *recipient*-Datensatz fehlerbehafteter ist als der *supplier*-Datensatz. Aus diesem Grund bildet der *supplier*-Datensatz die Grundlage für die weiteren Analysen.

Um mit diesem Datensatz arbeiten zu können, mussten die Daten in eine handliche Form gebracht werden. Dafür werden die einzelnen Exceldateien mit Hilfe der *Datenaufbereitung*-Funktion (siehe elektornischer Anhang (EA)) zunächst zurecht geschnitten und dann in einer Liste gespeichert. Anschließend kann mit der  $AM(x, dens)$ -Funktion (siehe EA) für jedes beliebige Jahr  $x$  zwischen 1950 bis 2012 die Adjazenzmatrix (siehe Definition 3) des Gesamtnetzwerks erstellt werden. Jeder Nation wird zunächst eine Zeile bzw. eine Spalte in alphabetischer Reihenfolge zugeordnet. Die Einträge in der  $i$ -ten Zeile bzw.  $i$ -ten Spalte geben somit den Export bzw. Import der  $i$ -ten Nation in der Länderliste (siehe Anhang 8.1) an die jeweilig anderen Nationen wider. Die Daten wurden hierbei von SIPRI so erhoben, dass eine 1 im Eintrag  $AM_{ij}(x)$  bedeutet, dass Nation  $i$  im Jahr  $x$  Waffen im Wert größer gleich 500.000 TIV an Nation  $j$  geliefert hat und eine 0, das keine Waffenlieferung vom Wert größer gleich 500.000 TIV von Nation  $i$  an Nation  $j$  getätigt wurde.

Auf Basis der Adjazenzmatrix mit 218 Nationen reguliert der Dichteparameter  $dens$  in der  $AM$ -Funktion die Größe des Netzwerkes, indem nur noch Nationen mit einem

Out- bzw. Indegree größer gleich  $dens$  im Jahr  $x$  eingang in die Adjazenzmatrix finden. Setzt man den Dichteparameter  $dens = 0$  erhält man die Adjazenzmatrix aller 218 Nationen. Setzt man den Dichteparameter  $dens = 1$  erhält man zum Beispiel die Adjazenzmatrix aller am Netzwerk aktiv beteiligten Nationen, d.h. die Zeilen und Spalten der Nationen die im betrachteten Jahr weder exportiert noch importiert haben fallen somit aus der Adjazenzmatrix heraus. Setzt man den Dichteparameter  $dens = 2$  beinhaltet die Adjazenzmatrix nur noch Nationen, die an mindestens zwei weiteren Nationen exportiert bzw. von mindestens zwei Nationen Waffen importiert hat.  $dens = 3$  erstellt eine Adjazenzmatrix der Nationen, die an mindestens drei weitere Nationen Waffen exportiert bzw. von mindestens drei Nationen Waffen importiert haben.

Die Adjazenzmatrix  $AM(x, dens)$  mit Dichteparameter  $dens = 0$  für das Jahr  $x$  enthält sowohl Zeilen und Spalten von Nationen, welche im Jahr  $x$  tatsächlich existierten als auch Zeilen und Spalten von Nationen, welche im Jahr  $x$  nicht mehr oder noch nicht existierten. Somit findet sich zum Beispiel in der Adjazenzmatrix  $AM(2012, 0)$  eine Spalte und eine Zeile für die Deutsche Demokratische Republik wieder, auch wenn diese zu diesem Zeitpunkt nicht mehr existierte. Setzt man den Dichteparameter jedoch auf eine natürliche Zahl größer null, fallen die Zeilen und Spalten der DDR (71) heraus. Wie im Absatz 1.3 genauer erläutert wird, wurden die jährlichen Export- und Import-TIV aller Nationen, welche nicht den kompletten Zeitraum von 1950 - 2012 Bestand hatten, auf eventuelle nicht mögliche Exporte bzw. Importe überprüft. So sollten zum Beispiel für die DDR im Zeitraum 1991 - 2012 keine Daten für sowohl Export als auch Import vorliegen.

Die zweite grundlegende Funktion ist der  $TIVM(x)$ -Befehl (siehe EA) für ein Jahr  $x$  von 1950 - 2012. Abgesehen von dem nicht existierenden Dichteparameter funktioniert diese wie der  $AM$ -Befehl, mit dem Unterschied, dass bei Existenz einer Kante zwischen Nationen  $i$  und  $j$  nicht nur eine 1 im Eintrag steht, sondern der im betrachteten Jahr  $x$  gelieferte TIV von  $i$  nach  $j$ .  $TIVM$  liefert somit eine mit dem TIV gewichtete Adjazenzmatrix. Der Eintrag  $TIVM[72,67]=8$  aus dem Jahr 2012 bedeutet somit, dass Deutschland (72) im Jahr 2012 insgesamt Waffen im Wert von 8 Millionen TIV an Frankreich (67) geliefert hat.

Die  $AM$ -Funktion sowie die  $TIVM$ -Funktion sind die Grundlage für alle weiteren Betrachtungen.



### 1.3 Überprüfung der Daten

Bevor begonnen werden kann mit den Daten eine deskriptive Analyse durchzuführen beziehungsweise Inferenz zu betreiben, sollte der Datensatz zunächst auf Fehler überprüft werden. Da die Daten, wie schon in Absatz 1.2 behandelt, aus zwei Datensätzen bestehen, die im Grunde den selben Informationsgehalt besitzen, lohnt sich ein Vergleich der beiden Datensätze. Wenn eine Nation  $i$  in einem Jahr  $x$  als Waffenimporteur der Nation  $j$  aufgelistet wird, dann sollte die Nation  $j$  auch als Waffenexporteur der Nation  $i$  im Jahr  $x$  gelistet sein. Aus diesem Grund sollte die mit dem TIV gewichtete Adjazenzmatrix, die auf dem *supplier*-Datensatz beruht und in den Zeilen den Waffenexporteur und in den Spalten den Waffenimporteur angibt, gleich der mit dem TIV gewichteten transponierten Adjazenzmatrix sein, die auf dem *recipient*-Datensatz beruht.

Eine Überprüfung (siehe elektronischer Anhang) ergibt, dass in den Jahren 1960-1966, 1969-1988, 1990, 1991, 1995-2002, 2005, 2006, 2009 und 2010 die Adjazenzmatrix des *supplier*-Datensatzes nicht mit der Adjazenzmatrix des *recipient*-Datensatzes übereinstimmt. In der Tabelle im Anhang (8.3) wurden für die aufgelisteten ungleichen Adjazenzmatrizen die genauen Stellen ermittelt, aufgrund welcher die beiden Matrizen nicht übereinstimmen. Zudem wurden die Werte beider Matrizen dokumentiert. In der ersten Spalte steht die jeweilige Jahreszahl, die Einträge in den *supplier*-Spalten geben den Wert in der gewichteten Adjazenzmatrix wieder, die auf der Basis des *supplier*-Datensatzes beruht und die Einträge in den *recipient*-Spalten geben den Wert wieder, der auf der Basis des *recipient*-Datensatzes berechnet wurde. Anhand der *Koordinate*-Spalte kann die genaue Stelle der *supplier*-Adjazenzmatrix ermittelt werden, die sich von der *recipient*-Adjazenzmatrix unterscheidet. Die erste Zahl steht für die Zeilenzahl, die zweite Zahl steht für die Spaltenzahl in der sich die *supplier*-Matrix von der transponierten *recipient*-Matrix unterscheidet. Anhand der Zeilen- bzw. Spaltenzahl und der Länderliste 8.1 im Anhang können die exakten Handelspartner für die jeweiligen ungleichen Matrixeinträge ermittelt werden.

Was bei der Betrachtung dieser Tabelle sofort ins Auge fällt ist, dass in der *recipient*-Spalte stets eine Null gelistet wird und dass es sich hierbei in den Adjazenzmatrizen ausschließlich um die Spalten 4 und 42 handelt. Wie in der Länderliste 8.1 aufgelistet befinden sich in der 4. Spalte eines Jahres  $x$  die Importaktivitäten von Algerien und in der 42. Spalte die Importaktivitäten der Demokratischen Republik Kongo. Da ausschließlich die Importaktivitäten dieser beiden Nationen im *supplier*- und *recipient*-Datensatz unterschiedlich sind und im Letzteren an den ungleichen

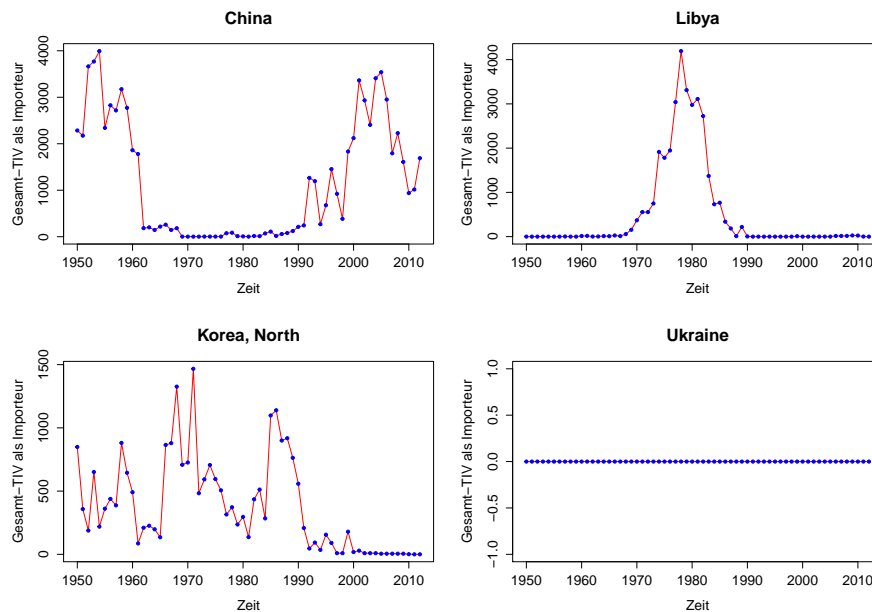


Abbildung 1: Importausgaben Chinas, Libyens, Nordkoreas und der Ukraine von 1950 - 2012

Stellen nur Nullen stehen, liegt die Folgerung nahe, dass im *recipient*-Datensatz an diesen Stellen ungenau gearbeitet wurde bzw. an dieser Stelle vergessen wurde, den Import-TIV einzutragen. Aus diesem Grund basiert die weitere Analyse der Daten, d.h. die deskriptive Analyse sowie die Inferenzanalyse ausschließlich auf dem *supplier*-Datensatz.

Im nächsten Schritt wurden die Daten auf inhaltliche Fehler überprüft. Dafür wurde die Funktion *sumtiv(nation, from, till, mode)* geschrieben, welche für eine bestimmte Nation und eine Zeitperiode eine Zeitreihe mit dem jährlichen Export- bzw. Import-TIV plottet. Der *mode*-Parameter in der *sumtiv*-Funktion steuert die Anzeige der Export- (*mode*=1) bzw. Import-TIV-Zeitreihe (*mode*=2).

Hauptziel der Analyse der Zeitreihen einer jeden Nation war es, verdächtige Zeitreihen zu erkennen und damit Länder zu bestimmen, die eventuell nicht ganz wahrheitsgetreu ihre Waffenexport und -importwerte an SIPRI berichten. Besonders ins Auge gefallen sind dabei die Importzeitreihen Chinas, Libyens, Nordkoreas und der Ukraine (siehe Abb. 1).

Bei der Importzeitreihe Chinas ist klar zu erkennen, dass die Importzahlen in den

Jahren von 1962 bis 1992 deutlich geringer sind als im restlichen Zeitraum. Ein ähnliches Phänomen ist an den Zeitreihen Libyens und auch Nordkoreas zu erkennen, die den starken Anschein erwecken, dass ab einem bestimmten Zeitpunkt kaum bzw. gar keine Daten zum Waffenimport mehr an SIPRI berichtet wurden. Diese Vermutung wird durch den ebenfalls von SIPRI bereitgestellten Datensatz zu den Militärausgaben jeweiliger Länder bekräftigt. In diesem Datensatz, der leider nur Militärausgaben vom Zeitraum 1988 bis 2013 führt, wird zugegeben, dass für Libyen und Nordkorea für die meisten Jahre kaum bzw. gar keine Zahlen zu den jährlichen Militärausgaben vorhanden sind. Die Zeitreihe der Ukraine ist in dem Sinne kritisch zu betrachten, dass allem Anschein nach überhaupt keine Waffen importiert wurden. Auch wenn das Land erst mit dem Zusammenbruch der Sowjetunion 1991 seine Unabhängigkeit erlangt hat und seitdem auch ein großer Hersteller von Waffen und Waffensystemen ist, erscheint es dennoch als unrealistisch, dass anscheinend gar nicht importiert wurde.

Im Zuge der Überprüfung der Daten auf inhaltliche Fehler wurden die Werte in den Zeitreihen auch dahingehend überprüft, ob zu Zeitpunkten in denen eine Nation noch nicht oder nicht mehr existierte auch tatsächlich keine Daten vorliegen. So sollten zum Beispiel für die Deutsche Demokratische Republik ab 1991 keine Angaben mehr vorhanden sein. In der Tabelle 8.3 im Anhang ist für jede Nation der Zeitraum des Bestehens aufgeführt, auf Grundlage dessen die Zeitreihen kontrolliert wurden. Es lässt sich sagen, dass die Daten dahingehend fehlerfrei sind.

## 2 Theoretische Grundlage für die deskriptive Analyse

In diesem Kapitel sollen die theoretischen Grundlagen für eine formale, mathematisierte Behandlung von Netzwerken besprochen werden. Dazu sollen Netzwerke zunächst mit bekannten mathematischen Strukturen, sogenannten *Graphen*, identifiziert werden. Im Anschluss sollen einige Kennzahlen für Graphen behandelt werden, welche potentiell geeignet sein könnten, um eine deskriptive Analyse von Netzwerkdaten zu erleichtern. Die Darstellung bezieht sich hierbei weitestgehend auf [14], [5] sowie [13].

### 2.1 Netzwerke als Graphen

Zunächst soll der für die Netzwerkanalyse zentrale Begriff des *Graphen* definiert werden. Hierbei kann dann noch weiter zwischen *ungerichteten* und *gerichteten* Graphen unterschieden werden. Da für die späteren Analysen jedoch ausschließlich gerichtete Graphen betrachtet werden, soll sich hier auf diese beschränkt werden.

**Definition 1.** Sei  $V$  eine endliche Menge und  $E \subset V \times V$ . Dann wird über das Paar  $G := (V, E)$  ein *endlicher gerichteter Graph* festgelegt. Die Mengen  $V$  und  $E$  bezeichnet man in diesem Zusammenhang als *Eckenmenge* und *Kantenmenge*. Ihre Elemente werden entsprechend als *Ecken* und *Kanten* bezeichnet.

Die eben definierten Graphen stellen nun das ideale Werkzeug dar, um (aus welcher praktischen Anwendung auch immer gewonnene) Netzwerke mathematisch zu beschreiben: Während die Elemente der Eckenmenge die am Netzwerk beteiligten Akteure (Institutionen, Länder etc.) symbolisieren, steht jedes Element der Kantenmenge für eine bestehende Beziehung zwischen den beiden Ecken, welche durch es verbunden werden.

Bei der Betrachtung von gerichteten Graphen ist es dabei möglich, Netzwerke zu modellieren, in welchen Beziehungen auch einseitig sein können. Betrachtet man beispielsweise den Graphen, dessen Eckenmenge alle Länder der Welt enthält und dessen Kantenmenge genau dann eine Kante zwischen Land  $i$  und Land  $j$  enthält, wenn  $i$  in einem bestimmten Jahr Waffen an  $j$  geliefert hat. Hierbei handelt es sich um ein gerichtetes Netzwerk: Der Umstand, dass  $i$  nach  $j$  liefert impliziert nicht automatisch die umgekehrte Lieferroute.

Um bei den weiteren Betrachtungen über eine einheitliche Terminologie zu verfügen, sollen in der folgenden Definition noch einige Begriffe eingeführt werden.

**Definition 2.** Sei  $G = (V, E)$  ein endlicher gerichteter Graph. Dann:

- a) Für eine Kante  $e := (v_1, v_2) \in E$  heißt  $v_1$  der *Fuß* und  $v_2$  die *Spitze* von  $e$ . Die Ecken  $v_1$  und  $v_2$  bezeichnet man als *Endpunkte* von  $e$ .
- b) Die Zahlen  $N_V := |V|$  und  $N_E := |E|$  heißen *Ordnung* und *Größe* von  $G$ .
- c) Zwei Ecken  $v_1, v_2 \in V$  heißen *adjazent*, falls  $(v_1, v_2) \in E$  oder  $(v_2, v_1) \in E$  gilt.
- d) Zwei Kanten  $e_1, e_2 \in E$  heißen *adjazent*, falls ein  $v \in V$  existiert, dass Endpunkt von  $e_1$  und  $e_2$  ist.
- e) Eine Ecke  $v \in V$  und eine Kante  $e \in E$  heißen *inzident*, falls  $v$  einer der Endpunkte von  $e$  ist.
- f) Sei  $v \in V$  eine Ecke. Dann heißen die Zahlen

$$\deg^{in}(v) := |\{(v_1, v_2) \in E : v_2 = v\}|$$

$$\deg^{out}(v) := |\{(v_1, v_2) \in E : v_1 = v\}|$$

der *innere* und *äussere Grad* von  $v$ .

Die folgende Definition ermöglicht es, die abstrakte mathematische Struktur des Graphen mit der vertrauten Struktur einer Matrix zu identifizieren. Dies hat, insbesondere für die rechnerische Behandlung von Netzwerken, große Vorteile.

**Definition 3.** Sei  $G := (V, E)$  ein endlicher gerichteter Graph. Sei weiterhin durch  $V = \{v_1, \dots, v_{N_v}\}$  eine Aufzählung der Eckenmenge von  $G$  gegeben. Dann heißt die Matrix  $A = (a_{ij}) \in \mathbb{R}^{N_v \times N_v}$  mit

$$a_{ij} = \begin{cases} 1 & , \text{ falls } (v_i, v_j) \in E \\ 0 & , \text{ sonst} \end{cases}$$

die *Adjazenzmatrix* des Graphen  $G$ .

*Bemerkung.* Ein Graph ist durch die Angabe seiner Adjazenzmatrix vollständig bestimmt und umgekehrt. Die beiden Darstellungen können somit als unterschiedliche Betrachtungsweisen des selben Objekts angesehen werden.

## 2.2 Deskriptive Kennziffern für Graphen

Die im vorherigen Abschnitt eingeführten Graphen können als mathematische Repräsentationen für real existierende Netzwerke, wie etwa Handelsnetzwerke zwischen bestimmten Ländern, soziale Netzwerke oder Warentransfernetzwerke verwendet werden. Eine strukturelle Untersuchung des mathematischen Objekts des Graphen hat also auch eine strukturelle Untersuchung des potentiell durch ihn repräsentierten Netzwerkes zur Folge. Aus diesem Grund sollen in diesem Abschnitt einige deskriptive Kennzahlen für Graphen zusammengestellt werden, die dann als Maße für z.B. die Wichtigkeit einer Ecke innerhalb eines Netzwerkes verwendet werden können.

Beginnen wir jedoch zunächst mit einem globalen Netzwerkmerkmal. Ein Netzwerk wird als vollständig bezeichnet, wenn alle möglichen Kanten im Netzwerk enthalten sind. Die Anzahl der möglichen Kanten in einem Netzwerk hängt von der Eckenmenge ab. Ein gerichtetes Netzwerk mit  $n$  Ecken wird als vollständig bezeichnet, wenn die Mächtigkeit der Kantenmenge  $n(n - 1)$  beträgt. Für jede der  $n$  Ecken existiert eine gerichtete Kante zu den restlichen  $n - 1$  Ecken.

**Definition 4.** Sei  $G = (V, E)$  ein endlicher gerichteter Graph. Die *Dichte*  $\rho(G)$  von  $G$  ist definiert als

$$\rho(G) = \frac{|E|}{n(n - 1)}$$

wobei  $n := |V|$  und  $n(n - 1)$  die Anzahl der maximal möglichen Kanten bezeichnet.

Die Dichte eines Graphen ist durch das Verhältnis zwischen der Zahl der vorhandenen Kanten zur Zahl der möglichen Kanten definiert. Ein vollständiger Graph hat somit die Dichte  $\rho = 1$ . Je spärlicher ein Graph verbunden ist, desto kleiner wird  $\rho$ . Sollten in einem Graphen keine Kanten vorhanden sein, so ist  $\rho = 0$ .

Als nächstes sollen einige Zentralitätsmaße betrachtet werden. Die Zentralität ist ein graphenanalytisches Konzept, welches die Wichtigkeit von Akteuren (Ecken) in einem Graphen behandelt, zum Beispiel welcher Akteur am Schalthebel der Macht sitzt bzw. wie viel Einfluss ein Akteur im Netzwerk ausüben kann. Intuitiv wird schnell klar, dass im Netzwerk (Stern) in Abbildung 2 der Akteur  $A$  am zentralsten liegt, da er Verbindungen zu allen anderen Akteuren im Netzwerk besitzt. Gleichzeitig wird ebenfalls deutlich, dass alle anderen Akteure zum selben Grad dezentral positioniert sind, da sie jeweils nur eine Kante zu Akteur  $A$  besitzen. Das andere Extrem ist Netzwerk (Kreis). Die Akteure sind in einem Kreis angeordnet und besitzen jeweils zwei Verbindungen zu ihren Nachbarn. In diesem Netzwerk liegt kein Akteur zentraler als ein Anderer.

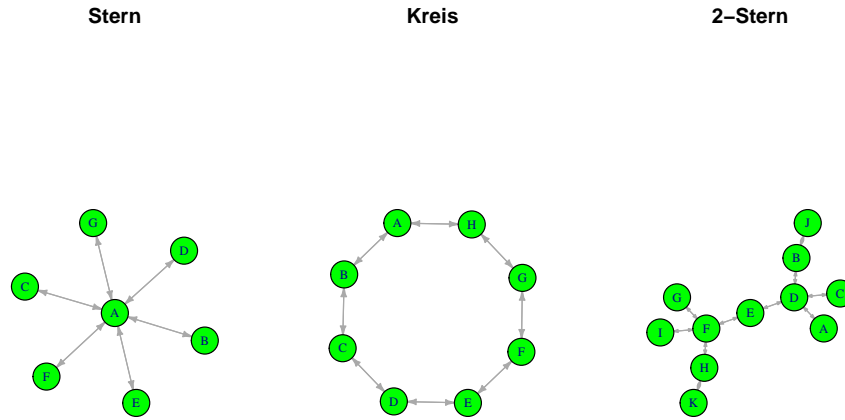


Abbildung 2: Das Sternnetzwerk, das Kreisnetzwerk und das 2-Sternnetzwerk

Betrachtet man jedoch das 2-Sternnetzwerk ist auf dem ersten Blick nicht mehr so schnell klar, welcher der Akteure nun der zentralste Akteur ist. Offensichtlich ist, dass es sich dabei nicht um die Akteure  $A, C, G, I, J, K$  handeln kann, da diese als sogenannte Satellitenakteure agieren. Es handelt sich dabei um Akteure, die jeweils nur mit einem anderen Akteur in Beziehung stehen.

Als erstes sehr einfaches Zentralitätsmaß kann man den inneren bzw. äußeren Grad im Verhältnis zur Anzahl weiterer Ecken im Netzwerk betrachten:

**Definition 5.** Sei  $G = (V, E)$  ein endlicher gerichteter Graph und  $v \in V$ .

a) Die *Degree-in-Zentralität* von  $v$  ist definiert als

$$C_D^{in}(v) = \frac{deg^{in}(v)}{n - 1}$$

b) Die *Degree-out-Zentralität* von  $v$  ist definiert als

$$C_D^{out}(v) = \frac{deg^{out}(v)}{n - 1}$$

Ein Akteur wie Akteur  $A$  im Sternnetzwerk, der Beziehungen zu allen anderen Akteu-

ren im Netzwerk besitzt erhält die Degree-in-Zentralität bzw. Degree-out-Zentralität 1. Einem Akteur mit keinerlei Beziehungen wird das Maß 0 zugeschrieben. Im 2-Sternnetzwerk besitzen die Ecken  $D$  und  $F$  jeweils das Maß  $\frac{2}{5}$  und damit eine größere Maßzahl als alle anderen Ecken im Netzwerk. Betrachtet man jedoch das Degree-in- bzw. Degree-out-Zentralitätsmaß der Ecken  $B$  bzw.  $H$  und  $E$ , so erkennt man, dass alle drei Ecken Maß  $\frac{1}{5}$  haben.

Intuitiv würde man allerdings  $E$  aufgrund seiner Position im Netzwerk eine größere Zentralität zuschreiben als den Ecken  $B$  und  $H$ . Hier wird ein bedeutender Nachteil des Degree-Zentralitätsmaßes deutlich: Da lediglich der Grad der Ecken gezählt wird, bleibt eine globale Betrachtung des Netzwerkes unberücksichtigt. Um diesen Faktor in ein neues Zentralitätsmaß einfließen lassen zu können, werden zunächst weitere Definitionen eingeführt:

**Definition 6.** Sei  $G = (V, E)$  ein endlicher gerichteter Graph.

- a) Ein *Weg* von  $v_0$  nach  $v_l$  auf  $G$  ist eine Sequenz  $(v_0, e_1, v_1, e_2, \dots, v_{l-1}, e_l, v_l)$ , wobei  $v_i \in V$  für alle  $i = 0, \dots, l$  und  $e_i \in E$  für alle  $i = 1, \dots, l$  und die Endpunkte von  $e_i$  gegeben sind durch  $(v_{i-1}, v_i)$ .
- b) Ein Weg heißt *Pfad*, falls in ihm keine Ecke mehrfach vorkommt.
- c) Die Zahl  $l$  heißt die *Länge* des Weges bzw. Pfades.

**Definition 7.** Sei  $G = (V, E)$  ein endlicher gerichteter Graph und  $v_1, v_2 \in V$ . Die *geodätische Distanz*  $\text{dist}(v_1, v_2)$  zwischen den Ecken  $v_1$  und  $v_2$  ist die Länge  $l$  eines beliebigen kürzesten Pfades von  $v_1$  nach  $v_2$ . Existiert kein solcher Pfad, setze  $\text{dist}(v_1, v_2) := n$  mit  $n := |V|$ .

Die geodätische Distanz zwischen zwei Ecken ist die Länge eines der kürzesten Pfade zwischen jenen Ecken. Das der kürzeste Pfad in keinster Weise eindeutig sein muss, kann man sich schnell anhand des Kreisnetzwerkes verdeutlichen: Die Länge des kürzesten Weges zwischen den Ecken  $A$  und  $E$  ist 4, jedoch ist der kürzeste Pfad nicht eindeutig bestimmt.

Mit der Definition der geodätischen Distanz kann man nun ein weiteres Zentralitätsmaß, die Closeness-Zentralität, definieren, indem man für eine Ecke  $v \in V$  die geodätische Distanz zu allen anderen Ecken im Netzwerk aufsummiert und dessen Kehrwert betrachtet.



**Definition 8.** Sei  $G = (V, E)$  ein endlicher gerichteter Graph und  $v \in V$ .

a) Die *Closeness-in-Zentralität* von  $v$  ist definiert als

$$c_{Cl}^{in}(v) = \frac{1}{\sum_{u \in V} \text{dist}(u, v)} \quad u \neq v$$

b) Die *Closeness-out-Zentralität* von  $v$  ist definiert als

$$c_{Cl}^{out}(v) = \frac{1}{\sum_{u \in V} \text{dist}(v, u)} \quad u \neq v$$

In einem Netzwerk mit  $|V| = n$  Ecken besitzt ein Akteur maximale Closeness-Zentralität, sollte diese  $\frac{1}{n-1}$  sein. Dies bedeutet, dass dieser Akteur direkt mit jedem weiteren Akteur im Netzwerk in Beziehung steht. Akteur  $A$  im Sternnetzwerk ist ein solcher Akteur. Ein Akteur besitzt in einem Netzwerk dahingegen minimale Zentralität, sollte dieser eine Closeness-Zentralität von  $\frac{1}{n(n-1)}$  zugewiesen bekommen. Dies bedeutet, der Akteur steht in keiner gerichteten Beziehung zu irgendeinem der anderen Akteure. Bezüglich der Closeness-Zentralität haben Akteure  $D$  und  $F$  im 2-Sternnetzwerk eine Zentralität von  $\frac{1}{21}$ , wohingegen Akteur  $E$  eine Zentralität von  $\frac{1}{20}$  vorzuweisen hat. Nach der Closeness-Zentralität ist somit Akteur  $E$  zentraler positioniert als  $D$  und  $F$ . Auch ist mithilfe dieser Definition, im Gegensatz zur Degree-Zentralität, eine Unterscheidung zwischen  $E$  und  $B$  bzw.  $H$  möglich, da diese lediglich eine Closeness-Zentralität von  $\frac{1}{28}$  aufweisen. Um den Wertebereich nun auf  $[0, 1]$  zu normieren, multipliziert man  $c_{CL}^{in}(v)$  bzw.  $c_{CL}^{out}(v)$  mit  $n - 1$  und definiert

- $C_{CL}^{in}(v) := c_{CL}^{in}(v)(n - 1) = \frac{n-1}{\sum_{u \in V} \text{dist}(u, v)}$
- $C_{CL}^{out}(v) := c_{CL}^{out}(v)(n - 1) = \frac{n-1}{\sum_{u \in V} \text{dist}(v, u)}$

als die normierte Closness-in- bzw. Closeness-out-Zentralität.

Die beiden bisher behandelten Zentralitätsmaße basieren auf der Betrachtung der Dyaden des interessierenden Akteurs. Der Unterschied in der Betrachtungsweise ist jener, ob nur direkte oder auch indirekte Beziehungen des Akteurs erfasst werden sollen. Ein Akteur mit einer hohen Closeness- oder Degree-Zentralität kann mithilfe weniger Mittler viele weitere Akteure im Netzwerk erreichen. Er profitiert von vielen direkten bzw. kurzen indirekten Wegen zu den anderen Akteuren. Diese beiden Zentralitätsmaße messen daher in gewisser Weise die Unabhängigkeit des betrachteten Akteurs von anderen Akteuren im Netzwerk. Das dritte Zentralitätsmaß, das hier behandelt werden soll, basiert auf einer gegenteiligen Herangehensweise: Die

Betweenness-Zentralität misst inwiefern andere Akteure vom betrachteten Akteur abhängig sind. Je häufiger ein Akteur eine Mittlerrolle zwischen zwei anderen Akteuren im Netzwerk einnimmt, desto höher ist dessen Betweenness-Zentralität.

**Definition 9.** Sei  $G = (V, E)$  ein endlicher gerichteter Graph und  $v \in V$ . Die *Betweenness-Zentralität* von  $v$  ist definiert als

$$c_B(v) = \sum_{s \neq t \neq v \in V} \frac{\sigma(s, t|v)}{\sigma(s, t)}$$

wobei

- $\sigma(s, t|v)$  die Anzahl der kürzesten Pfade von  $s$  nach  $t$  ist, die  $v$  enthalten.
- $\sigma(s, t) = \sum_{v \in V} \sigma(s, t|v)$  die Anzahl aller kürzesten Pfade von  $s$  nach  $t$  ist.

Das Betweenness-Zentralitätsmaß basiert auf der Wahrscheinlichkeit, dass die Kommunikation zwischen zwei Akteuren  $s$  und  $t$  im Netzwerk über Akteur  $v$  verläuft.  $\frac{\sigma(s, t|v)}{\sigma(s, t)}$  beschreibt somit das Verhältnis der Anzahl der kürzesten Pfade von  $s$  nach  $t$  über  $v$  zur Anzahl kürzester Pfade von  $s$  nach  $t$  überhaupt. Betrachtet man diesbezüglich zum Beispiel die Anzahl kürzester Pfade von  $A$  nach  $E$  im Kreisnetzwerk, so zählt man  $\sigma(A, E) = 2$ . Die Anzahl kürzester Pfade von  $A$  nach  $E$  die über  $C$  führen beläuft sich dahingegen auf  $\sigma(A, E|C) = 1$  und somit ergibt sich das Verhältnis zwischen der Anzahl kürzester Pfade über  $C$  und der allgemeinen Anzahl kürzester Pfade auf  $\frac{\sigma(A, E|C)}{\sigma(A, E)} = \frac{1}{2}$ . Um nun die Betweenness-Zentralität von  $C$  im Kreisnetzwerk zu berechnen muss dieses Verhältnis für jedes Paar  $(i, j)$  mit  $i, j \in \{A, B, D, E, F, G, H\}, i \neq j$  aufsummieren.

In einem Netzwerk mit  $|V| = n$  Akteuren gibt es insgesamt  $n(n - 1)$  verschiedene Paare. Da jedoch die Betweenness-Zentralität einer dieser Akteure bestimmt werden soll, fallen weitere  $2(n - 1)$  dieser Paare weg. Insgesamt erhält man somit  $n(n - 1) - 2(n - 1) = n^2 - 3n + 2$  verschiedene Summanden und damit berechnet sich die normierte Betweenness-Zentralität mittels

$$C_B(v) := \frac{c_B(v)}{n^2 - 3n + 2}$$

Betrachtet man diesbezüglich wieder das 2-Sternnetzwerk, so kann man sich leicht vergewissern, dass die Akteure  $A, C, G, I, J, K$  eine Betweenness-Zentralität von 0 zugewiesen bekommen. Interessiert man sich für die Betweenness-Zentralität von  $F$ , so kann nachgezählt werden, dass sich  $F$  insgesamt 60-mal auf dem kürzesten Pfad zwischen zwei weiteren Akteuren befindet. Insgesamt erhält man somit für

$F$  und aufgrund der Symmetrie ebenfalls für  $D$  eine Betweenness-Zentralität von  $\frac{60}{11^2-3*11+2} = \frac{2}{3}$ . Im Gegensatz zur Closeness-Zentralität wird dem Akteur  $E$  mittels des Betweenness-Zentralitätsmaßes wiederum ein kleinerer Wert als für  $D$  oder  $F$  zugewiesen. Die Betweenness-Zentralität von  $E$  beläuft sich auf  $\frac{50}{90} = \frac{5}{9}$ . Dies bedeutet, dass die Akteure im 2-Sternnetzwerk weniger abhängig von  $E$  als von  $D$  oder  $F$  sind.

### 3 Deskriptive Analyse der SIPRI-Daten

In diesem Kapitel soll eine deskriptive Analyse der von SIPRI zu Verfügung gestellten Daten vorgenommen werden. Diese stellt insbesondere folgende Aspekte in den Vordergrund: Zunächst wird das gesamte Netzwerk des internationalen Waffenhandels beschrieben und visualisiert. Hierbei sind vor allem diese Fragestellungen von Interesse:

- Wie verändert sich das Netzwerk über die Zeit?
- Wie ist diese Veränderung quantifizierbar?

Im Anschluss sollen die für das Handelsnetzwerk bedeutensten Länder sowie die Länder, die sich nicht bzw. kaum am Waffenhandel beteiligen, ermittelt werden. Da die Bedeutsamkeit eines Landes natürlich stark von der Wahl eines entsprechenden Bedeutsamkeitskriteriums abhängt, werden Länderrankings bezüglich verschiedener solcher Kriterien durchgeführt. Betrachtet werden:

- Die größten Import-Nationen (bezüglich ihres Import-TIVs über eine Periode).
- Die größten Export-Nationen (bezüglich ihres Export-TIVs über eine Periode).
- Die größten Import-Nationen (bezüglich der Anzahl der an das Land liefernden Länder über eine Periode, d.h. der über die Periode aufsummierte In-Degree des betreffenden Landes ).
- Die größten Export-Nationen (bezüglich der Anzahl der von dem Land belieferten Länder über eine Periode, d.h. der über die Periode aufsummierte Out-Degree des betreffenden Landes).

Im dritten Abschnitt soll sich dann auf die tatsächlichen *Handelsnetzwerke* eines Jahres oder einer Periode beschränkt werden. Als Handelsnetzwerk wird hierbei das Netzwerk aller am Waffenhandel aktiv beteiligten Nationen bezeichnet. Durch die Analyse der resultierenden Netzwerke sollen insbesondere die für das Netzwerk (zu jeder Zeit) charakteristischen Strukturen (z.B. gegenseitiger Handel) identifiziert werden. Diese können dann für die inferentielle Analyse in Form von *Netzwerkstatistiken* in das Modell mit aufgenommen werden.

#### 3.1 Betrachtung des Gesamtnetzwerks

Bei dem Netzwerk der internationalen Waffenhandelsbeziehungen handelt es sich um ein *gewichtetes Netzwerk*, d.h. zusätzlich zu der Information, ob eine Kante zwischen

zwei Ländern vorliegt oder nicht, sind die Kanten auch noch unterschiedlich stark gewichtet. Die Gewichtung richtet sich hierbei direkt nach der Höhe des TIVs. Die Verallgemeinerung der Adjazenzmatrix aus Definition 3 auf gewichtete Netzwerke erfolgt dann kanonisch: Statt in jedem Eintrag der Matrix nur entweder 0 für keine Kante oder 1 für Kante zuzulassen, werden jetzt in den einzelnen Einträgen die konkreten TIVs gespeichert. Die resultierende *gewichtete Adjazenzmatrix* hat dann die Form

$$G = (g_{ij})_{i,j=1,\dots,N} \quad , \quad g_{ij} \in \mathbb{R}^+ \quad \forall i, j = 1, \dots, N$$

Der Eintrag  $g_{ij}$  ist hierbei der Export-TIV von Land  $i$  nach Land  $j$ .

Für viele Zwecke (insbesondere für die inferentielle Analyse der Netzwerke) ist es jedoch erforderlich, die eigentlich gewichteten Netzwerke zu *binarisieren*, d.h. die gewichtete Adjazenzmatrix mittels einer geeigneten Vorschrift in eine normale Adjazenzmatrix zu transformieren. Um dies zu erreichen bieten sich jedoch mehrere Möglichkeiten an. Die einfachste Möglichkeit ist die folgende:

Man konstruiert eine klassische Adjazenzmatrix  $A$  aus der gewichteten Adjazenzmatrix  $G$  mittels der Vorschrift

$$a_{ij} = \begin{cases} 0 & \text{falls } g_{ij} = 0 \\ 1 & \text{sonst} \end{cases}$$

Dieser sehr einfachen Lösung könnte nun allerdings entgegengehalten werden, dass die resultierende Darstellung des Netzwerkes nicht mehr in der Lage ist, zwischen einem Großim- bzw. exporteur und einem Kleinim- bzw. exporteur zu unterscheiden. Um diesem Einwand entgegen zu wirken, könnte man auch die folgende Transformationsvorschrift verwenden:

Wähle einen *Threshold-Wert*  $c$  und setze

$$a_{ij} = \begin{cases} 0 & \text{falls } g_{ij} \leq c \\ 1 & \text{sonst} \end{cases}$$

Über die zusätzliche Verwendung eines Threshold-Parameters  $c$ , können nun Kleinst-exporteure in unserem Modell unberücksichtigt bleiben. Dies kann unter Umständen sinnvoll sein, birgt aber auch eine gewisse Willkür in sich: Wie ist  $c$  adäquat zu wählen?

In den Datensatz von SIPRI ist dieses Problem nun folgendermaßen eingegangen: Für alle Länder, welche in einem bestimmten Jahr an ein bestimmtes anderes Land einen Export-TIV von weniger als 500000 aufweisen, wurde die entsprechende Zelle

mit dem Wert Null versehen. Die Daten wurden also bereits mit einer vorgegebenen Schranke erhoben. Diese soll nun auch für die hier vorgenommene Binarisierung verwendet werden, d.h. es ergibt sich die Adjazenzmatrix  $A = (a_{ij})_{i,j=1,\dots,218}$ , wobei

$$a_{ij} = \begin{cases} 0 & \text{falls } g_{ij} \leq 500000 \\ 1 & \text{sonst} \end{cases}$$

Wegen der eindeutigen Identifizierbarkeit von Graphen mit ihrer Adjazenzmatrix wird auf diese Weise für jedes Jahr 1950,..., 2012 ein gerichtetes, binäres Netzwerk (oder ein Graph) auf 218 Ecken definiert. Damit kann nun auch mit der systematischen deskriptiven Analyse der jeweiligen Netzwerke begonnen werden.

Eine erste interessante Fragestellung ist die nach der Veränderung der Dichte des Waffenhandelsnetzwerkes über die Zeit. Problematisch ist hierbei allerdings, dass sich über den gesamten Zeitraum Nationen im Netzwerk befinden, welche in einem bestimmten Jahr nicht mehr bzw. noch nicht existiert haben. Diesem Problem kann nun wie folgt entgegengewirkt werden: In jedem Jahr wird nur die Dichte des Handelsnetzwerkes, also das Netzwerk aller in diesem Jahr aktiv am Waffenhandel beteiligten Nationen, betrachtet. Dieser Ansatz hat allerdings zur Konsequenz, dass die Dichtewerte für jedes Jahr auf einem Netzwerk auf *unterschiedlich* vielen Knoten errechnet werden: Nicht in jedem Jahr hat sich die gleiche Anzahl von Nationen am Waffenhandel beteiligt. Da die Zahl der möglichen Kanten in einem Netzwerk mit steigender Knotenzahl jedoch *exponentiell* (und nicht *linear*) anwächst, ist beim Vergleich zweier Dichtewerte erhöhte Vorsicht geboten. Zusätzlich zu den Dichten sollte also immer die Größe des Handelsnetzwerkes im betreffenden Jahr berücksichtigt werden. Die entsprechenden Zeitreihen sind in Abbildung 3 dargestellt.

Auf der linken Seite von Abbildung 3 ist die Zeitreihe der Knotenanzahl des Handelsnetzwerkes über den Zeitraum 1950-2012 dargestellt. Es ist zu erkennen, dass zwischen 1950-1981 ein stetiger Anstieg von am Handel beteiligten Nationen zu verzeichnen ist. Während im Jahr 1950 nur 51 Nationen aktiv beteiligt waren, sind es im Jahr 1981 bereits 121. In den darauf folgenden zehn Jahren fiel die Anzahl der beteiligten Länder wiederum stetig. Der Tiefpunkt war in Jahren 1991-1993 erreicht: Nur noch 94 Nationen waren am Waffenhandel beteiligt. Es fällt auf, dass dieser Zeitraum mit dem Zerfall der UdSSR zusammenfällt. Seit 1994 ist eine leichten Schwankungen unterworfenen positive Tendenz zu erkennen.

Auf der rechten Seite von Abbildung 3 ist die Zeitreihe der Dichten des jeweiligen

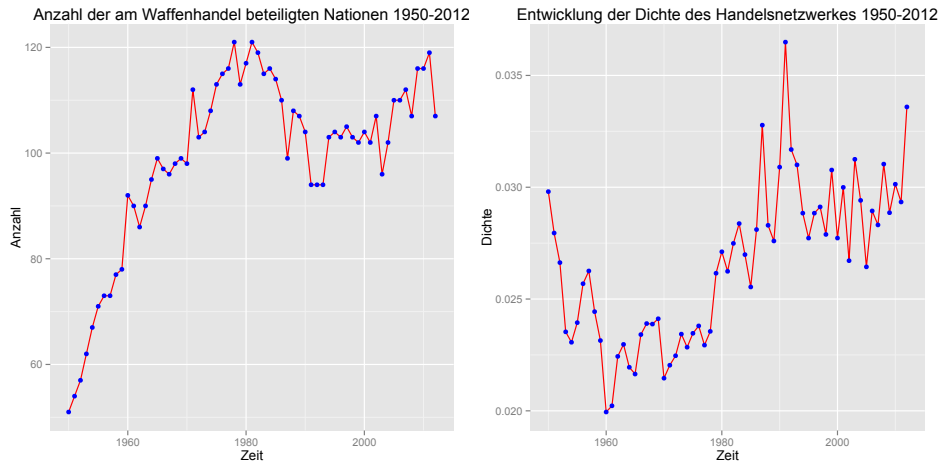


Abbildung 3: Die Entwicklung der Größe des Handelsnetzwerks (links) und der Dichte  $\rho$  des Handelsnetzwerks (rechts) über den Zeitraum 1950-2012.

Handelsnetzwerks abgebildet. Da aber die verschiedenen Netzwerke auf unterschiedlichen Knotenzahlen basieren, kann die Abbildung nur zur Informationsgewinnung in den einzelnen Jahren herangezogen werden. Einen Trend zur Verdichtung des Netzwerks aus ihr abzuleiten wäre, ohne tiefere Argumentation, eine Missinterpretation.

Um das zu veranschaulichen, betrachte man die Dichtewerte der Handelsnetzwerke aus den Jahren 1950 und 2011. Es fällt auf, dass beide Netzwerke eine Dichte von approximativ 0.03 aufweisen. Die beiden Netzwerke sind in Abbildung 4 dargestellt. Man sieht sofort, dass beide Netzwerke eine grundlegend andere Struktur aufweisen. Insbesondere wirkt das Netzwerk von 2011 intuitiv wesentlich dichter. Dies wird durch die obigen Dichtewerte aufgrund der unterschiedlichen Knotenzahl nicht adäquat repräsentiert.

In Abbildung 5 ist noch die Zeitreihe der Anzahl der Kanten des Handelsnetzwerks im Zeitraum 1950-2012 dargestellt. Jede Kante repräsentiert hierbei eine Handelsbeziehung zwischen zwei Nationen. Diese erinnert in ihrer Form stark an die Zeitreihe der teilnehmenden Nationen. Es sei noch darauf verwiesen, dass sich aus je zwei der dargestellten Zeitreihen die dritte errechnen lässt. In Abbildung 6 sind zudem noch einige Netzwerke im Wandel der Zeit dargestellt: Für jede betrachtete Dekade wurde ein Repräsentant ausgewählt.

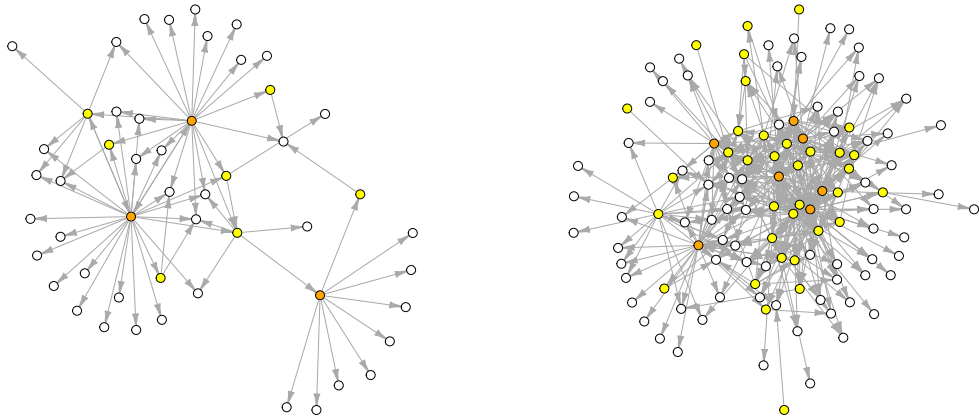


Abbildung 4: Links: Handelsnetzwerk 1950, Rechts: Handelsnetzwerk 2011. Ähnliche Dichte, aber unterschiedliche Knotenzahl.

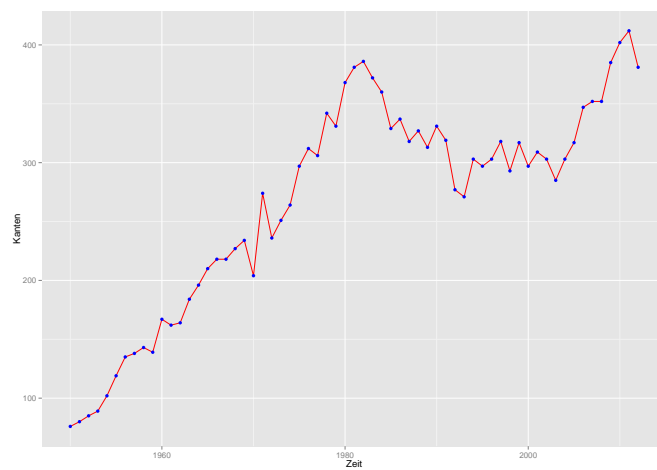


Abbildung 5: Zeitreihe der Anzahl der Kanten im Handelsnetzwerk von 1950-2012.



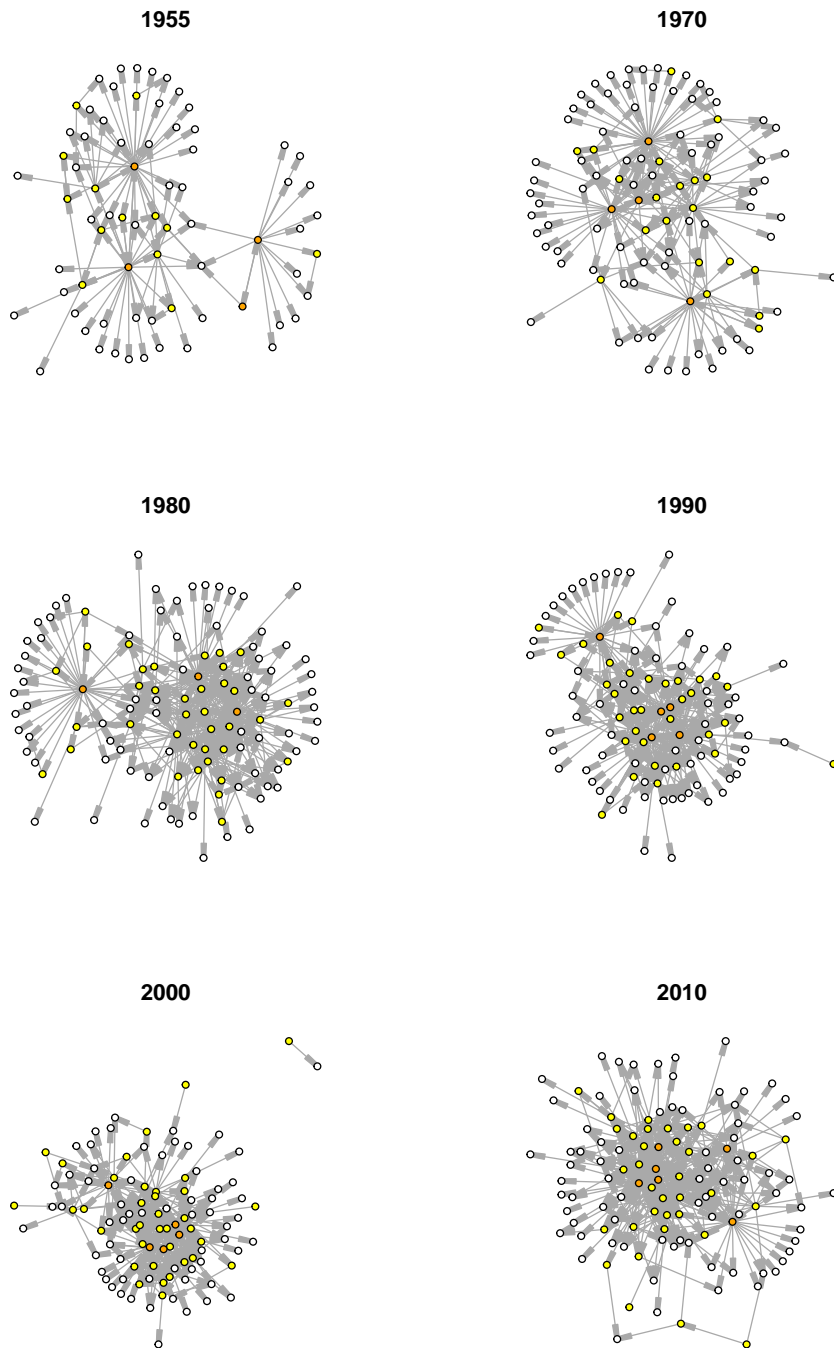


Abbildung 6: Das Handelsnetzwerk im Wandel der Zeit.

### 3.2 Bestimmung der zentralen Akteure

In diesem Abschnitt sollen diejenigen Nationen identifiziert werden, welche über den betrachteten Gesamtzeitraum von 1950-2012 die zentralen Akteure darstellen. Um den Zerfall der Sowjetunion hierbei adäquat zu berücksichtigen, wird der Gesamtzeitraum jeweils in die Perioden 1950-1991 und 1992-2012 aufgeteilt.

Als erstes Kriterium zur Messung der Bedeutsamkeit einer Nation für das Handelsnetzwerk wird der über die jeweilige Periode aufsummierte TIV der betreffenden Nation herangezogen. Hierbei wird weiter zwischen Im- und Export-TIV unterschieden. In den Abbildungen 30 und 9 sind jeweils die zehn größten Im- und Export-Nationen in den einzelnen Perioden aufgelistet. Weiter visualisiert Abbildung 7 das Verhältnis von Im- und Export-TIV der größten Exporteure und der größten Importeure.

Als auffällig erweist sich hierbei vor allem die große Dominanz einiger weniger Nationen im Export: In der Periode 1950-1991 besitzen die USA und die Sowjetunion zusammen einen fast doppelt so großen Export-TIV wie alle anderen Nationen gemeinsam. Die Top 10 der Waffenexporteure der ersten Periode decken zusammen rund 97,8 % des weltweiten Gesamtexports ab. Eine ähnliches Bild ergibt sich für den Export-TIV der USA und Russland in der Periode 1992-2012. Allerdings greifen in dieser Periode auch Deutschland und Frankreich stärker in den Waffenexport ein. Ausserdem erwähnenswert ist, dass alle großen Exporteure (mit Ausnahme der Ukraine in der zweiten Periode) auch einen nicht unerheblichen Import-TIV aufweisen.

Ein anderes Bild ergibt sich für die größten Waffen-Importeure: Als größte Importeure lassen sich für die Periode 1950-1991 Deutschland und Indien und für die Periode 1992-2012 Indien und China nennen. Allerdings ist der Import-TIV weit gleichmäßiger auf mehrere Nationen verteilt. In der ersten bzw. zweiten Periode entspricht der Gesamt-Import-TIV der Top 10 lediglich 35,7 % bzw. 45,0 %. Es fällt zudem auf, dass die großen Importeure (mit Ausnahme derer, die selbst auch zu den Großexporteuren zählen) in beiden Perioden kaum am Waffen-Export beteiligt waren.

Als ein weiteres Kriterium für die Bedeutsamkeit einer Nation im Netzwerk des internationalen Waffenhandels, könnte ihr In- bzw. Out-Degree, d.h. die Anzahl der diese Nation beliefernden Länder bzw. die Anzahl der von dieser Nation belieferten Länder, herangezogen werden. Hierbei soll wieder zwischen den gleichen Perioden wie oben unterschieden werden.

Technisch wird hierbei wie folgt vorgegangen: Für alle Jahre in der betreffenden Periode werden die Adjazenzmatrizen komponentenweise addiert. Anschließend wird jeder von Null verschiedene Eintrag der resultierenden Matrix zu einer Eins umge-

wandelt. Auf diese Weise erhält man erneut eine Adjazenzmatrix. Eine Null an der Stelle  $(i, j)$  dieser Matrix bedeutet dann, dass Nation  $i$  in der betrachteten Periode niemals an Nation  $j$  exportiert hat. Entsprechend bedeutet eine Eins an der Stelle  $(i, j)$ , dass Nation  $i$  Nation  $j$  in der betreffenden Periode *mindestens* einmal beliefert hat. Das Ergebnis ist in Abbildung 10 dargestellt.

Bemerkenswert ist hierbei vor allem der Umstand, dass die Nationen mit der größten Anzahl an Handelspartnern (sowohl im Im- als auch im Export) im Allgemeinen nicht die Länder mit dem größten Import- oder Export-TIV sind.

Als Beispiele für Länder, die sehr viele unterschiedliche Länder beliefern, aber bezüglich ihres Gesamt-Export-TIVs nicht zu den Großexporteuren zählen sind in der Periode 1950-1991 insbesondere die Schweiz und Kanada zu nennen. Zwischen 1992-2012 fallen Israel, Frankreich und die Ukraine diesbezüglich besonders auf.

Beim Import ist dieser Effekt sogar noch gravierender: Nationen, welche insgesamt von sehr vielen unterschiedlichen Ländern Waffen importieren, haben keinesfalls immer einen sehr großen Import-TIV. Besonders auffällig sind hier die Länder Sudan, Marokko, Nigeria, Iran und Iraq, welche Waffenmengen mit geringen TIV von sehr vielen verschiedenen Exporteuren beziehen.

Insgesamt ist es tatsächlich schwierig auszumachen, bei welchen Nationen es sich um besonders zentrale Akteure des internationalen Waffenhandels handelt: Je nachdem welches Kriterium zugrunde gelegt wird, erhält man eine andere Auswahl. Des Weiteren ist die hier betrachtete Auswahl auf keinen Fall vollständig, d.h. legt man andere Bedeutsamkeitskriterien zu Grunde, wird man aller Voraussicht nach andere Nationen erhalten. Im Anhang 8.4 finden sich noch die Top 10 Nationen, wenn als Kriterium die durchschnittliche normierte Closeness-In bzw. Closeness-Out Zentralität zugrunde gelegt wird. Hierbei ergibt sich wiederum eine andere Rangordnung.



Abbildung 7: Die Abbildung zeigt das Verhältnis von Im- und Exportverhalten der größten Exporteure (oben) und größten Importeure (unten), jeweils in den Perioden 1950-1991 und 1992-2012.

	Land	TIV		Land	TIV
1	Soviet Union	461049.00	1	United States	184288.00
2	United States	438986.00	2	Russia	100475.00
3	United Kingdom	107774.00	3	Germany	36490.00
4	France	77960.00	4	France	34777.00
5	Germany	40396.00	5	United Kingdom	25353.00
6	China	30659.00	6	China	15856.00
7	Czechoslovakia	29113.00	7	Netherlands	10481.00
8	Italy	19494.00	8	Italy	9265.00
9	Switzerland	10613.00	9	Ukraine	9020.00
10	Netherlands	10375.00	10	Israel	8191.00

Abbildung 8: Der aufsummierte Export-TIV in den Perioden 1950-1991 (links) und 1992-2012 (rechts).

	Land	TIV
1	India	66674.00
2	Germany	53652.00
3	Japan	46835.00
4	Iraq	45643.00
5	Egypt	42519.00
6	Iran	40658.00
7	Poland	38108.00
8	China	37098.00
9	Syria	36736.00
10	German D.R.	31982.00

	Land	TIV
1	India	37377.00
2	China	36732.00
3	Korea, South	25719.00
4	Turkey	22368.00
5	Saudi Arabia	20262.00
6	Taiwan	19424.00
7	Greece	17909.00
8	UAE	16088.00
9	Pakistan	15763.00
10	Egypt	15753.00

Abbildung 9: Der aufsummierte Import-TIV in den Perioden 1950-1991 (links) und 1992-2012 (rechts).



Abbildung 10: Die Abbildung zeigt das Verhältnis der Anzahl der Im- und Exportpartner der Nationen mit der größten Anzahl an Exportpartnern (oben) und der Nationen mit der größten Anzahl an Importpartnern (unten), jeweils in den Perioden 1950-1992 und 1993-2012.

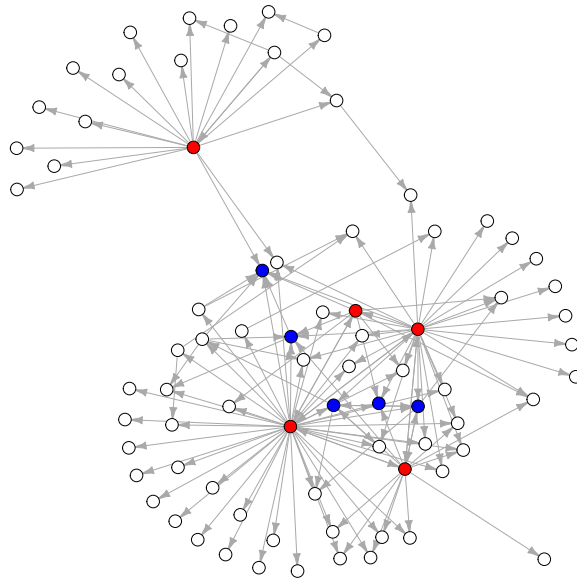


Abbildung 11: Handelsnetzwerk aus dem Jahr 1960. Die roten Knoten repräsentieren die Nationen mit einem Out-Degree Wert von mehr als 3. Entsprechend symbolisieren die blauen Knoten die Nationen mit einem In-Degree Wert von mehr als 3.

### 3.3 Bestimmung der relevanten Effekte

In diesem Abschnitt sollen einige für das Netzwerke charakteristische Strukturen identifiziert werden. Ist der Handel oft gegenseitig, d.h. kaufen Nationen oft Waffen von Nationen, welchen sie auch selbst Waffen verkaufen? Gibt es viele Nationen, die nur Kaufen, aber nicht Verkaufen? Und wenn ja, von wie vielen Nationen? Welche charakteristischen Strukturen verändern sich über die Zeit und welche bleiben stabil?

Das Ziel ist dann, die gefundenen Strukturen in Form von Netzwerkstatistiken mit in die Modellierung in Kapitel 5 einzubeziehen und so ein möglichst passendes Modell generieren zu können.

Betrachten wir zunächst beispielhaft das Handelsnetzwerk aus dem Jahr 1960. Dieses ist in Abbildung 11 dargestellt. Was ist nun charakteristisch für dieses Netzwerk?

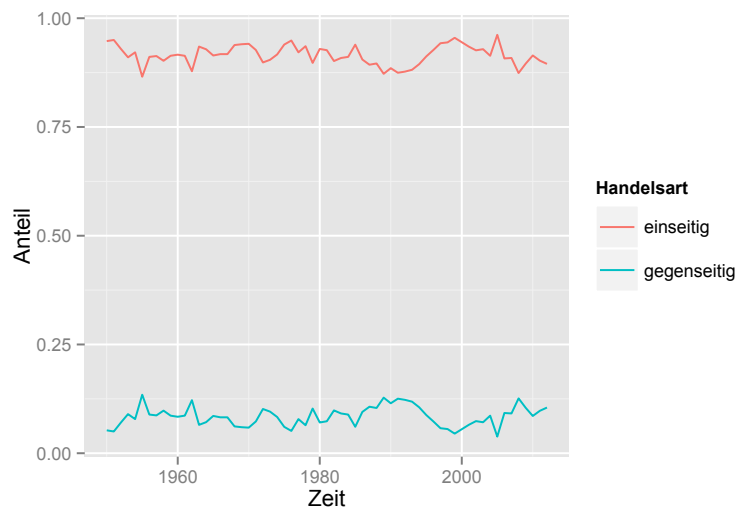


Abbildung 12: Anteil der einseitigen Kanten (rot) bzw. der beidseitigen Kanten (blau) an der Gesamtzahl bestehender Kanten. Die Funktionswerte der blauen und der roten Kurve summieren sich für jedes Jahr zu eins auf.

Zuerst fällt auf, dass viele Kanten nicht beidseitig, sondern nur in eine Richtung verlaufen. Dies bedeutet, dass in diesem speziellen Netzwerk überwiegend kein gegenseitiger Handel betrieben wird, also die Mehrzahl der Nationen keine Waffen von Nationen importiert, welche sie selbst mit Waffen beliefert. Jedes gute Modell des Waffenhandelsnetzwerks aus dem Jahr 1960 sollte diese strukturelle Eigenschaft berücksichtigen. Um zu sehen, ob es sich hierbei um eine Eigenschaft handelt, welche die Handelsnetzwerke über die Zeit teilen, zeigt Abbildung 12 den Anteil der einseitigen Kanten an den insgesamt bestehenden Kanten sowie den Anteil der beidseitigen Kanten an den insgesamt bestehenden Kanten. Man sieht deutlich, dass in jedem Jahr der Anteil der einseitigen Kanten deutlich überwiegt, mit einem Tiefstwert von circa 88 % im Jahr 1955. Das Phänomen des einseitigen Handels scheint also charakteristisch für das Netzwerk über den gesamten Zeitraum zu sein und sollte bei der Modellierung berücksichtigt werden.

Eine weitere Auffälligkeit in Abbildung 11 stellen die vielen Nationen dar, welche ausschließlich Waffen importieren, ohne aber selbst Waffen zu exportieren. Um einzusehen, dass auch dies keine alleinige Eigenschaft des Handelsnetzwerks im Jahr 1960 ist, sondern sich in vergleichbarer Intensität in den Handelsnetzwerken der übrigen Jahre wiederfindet, ist rechts in Abbildung 13 die durchschnittliche Out-Degree-Verteilung des Handelsnetzwerkes über den Gesamtzeitraum dargestellt.

Man sieht direkt, dass das Handelsnetzwerk über die Zeit einen hohen Anteil von Knoten mit einem Outdegree von Null aufweist. Zusätzlich sieht man, dass dieser hohe Anteil von Outdegree=0 Knoten über die Zeit auch nur geringen Schwankungen unterworfen ist. Diese Knoten spiegeln nun aber genau die oben angesprochenen reinen Import-Nationen wider: Ein Outdegree von Null bedeutet ja gerade, dass von der entsprechenden Nation keine Kante ausgeht. Auch diese Beobachtung scheint also über die Zeit stabil zu sein.

Betrachten wir nun die linke Hälfte von Abbildung 13: Diese zeigt die durchschnittliche In-Degree Verteilung des Handelsnetzwerkes über den Gesamtzeitraum. Auffällig ist hier insbesondere der hohe durchschnittliche Anteil der In-Degree=1 Knoten. Auch dieser ist wieder über den Gesamtzeitraum nur geringen Schwankungen unterworfen. Offenbar sind also auch solche Knoten für das Handelsnetzwerk charakteristisch, die nur Waffen von genau einem Land beziehen. Solche Knoten werden auch gelegentlich als *Satelliten* bezeichnet.

In Abbildung 14 sind die Anzahl der Nationen mit einem In-Degree von 0,1,2,3 (links) bzw. die Anzahl der Nationen mit einem Out-Degree von 0,1,2,3 (rechts) über den Zeitraum 1950-2012 dargestellt.

Eine weitere strukturelle Eigenschaft des Netzwerkes aus Abbildung 11 ist, dass eine Reihe von Knoten existiert, von welchen eine verhältnismäßig hohe Anzahl von Kanten ausgeht. Als Beispiele sind hier die roten Knoten in Abbildung 11 zu nennen. Auch diese Phänomen kann über den Gesamtzeitraum von 1950-2012 in vergleichbarer Form beobachtet werden. Unabhängig davon in welchem Jahr von 1950-2012 man das Netzwerk betrachtet, man wird immer mindestens zwei Nationen finden, welche eine überdurchschnittlich große Anzahl an Nationen mit Waffen beliefert.



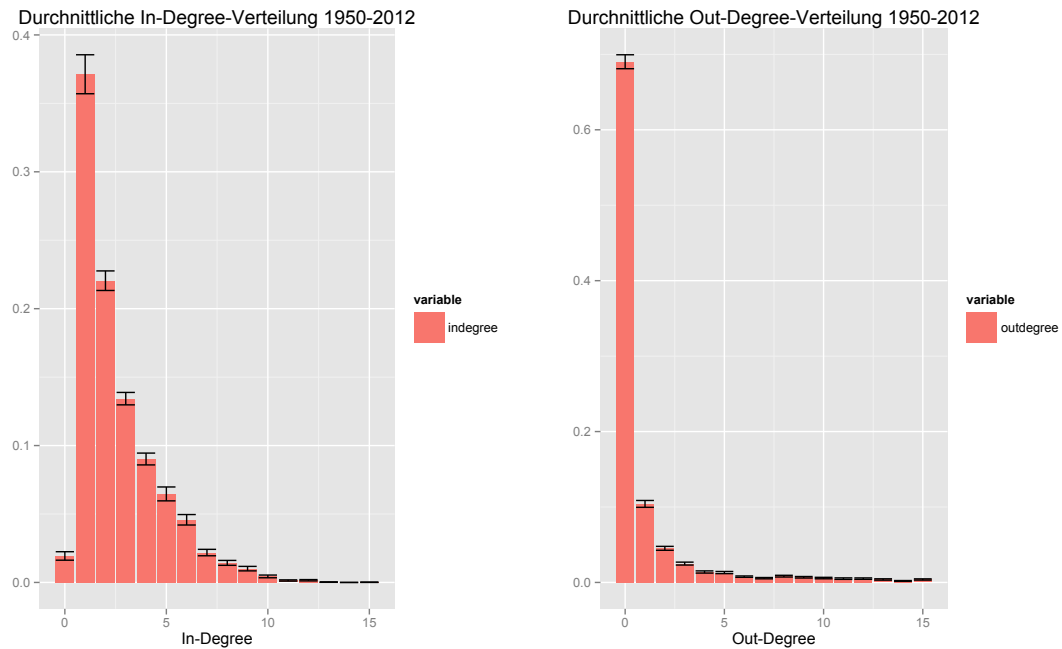


Abbildung 13: Die durchschnittliche In-Degree Verteilung (links) bzw. Out-Degree Verteilung (rechts) im Zeitraum 1950-2012. Jeweils 90 % der jeweiligen Degree Werte lagen innerhalb der schwarzen Balken.

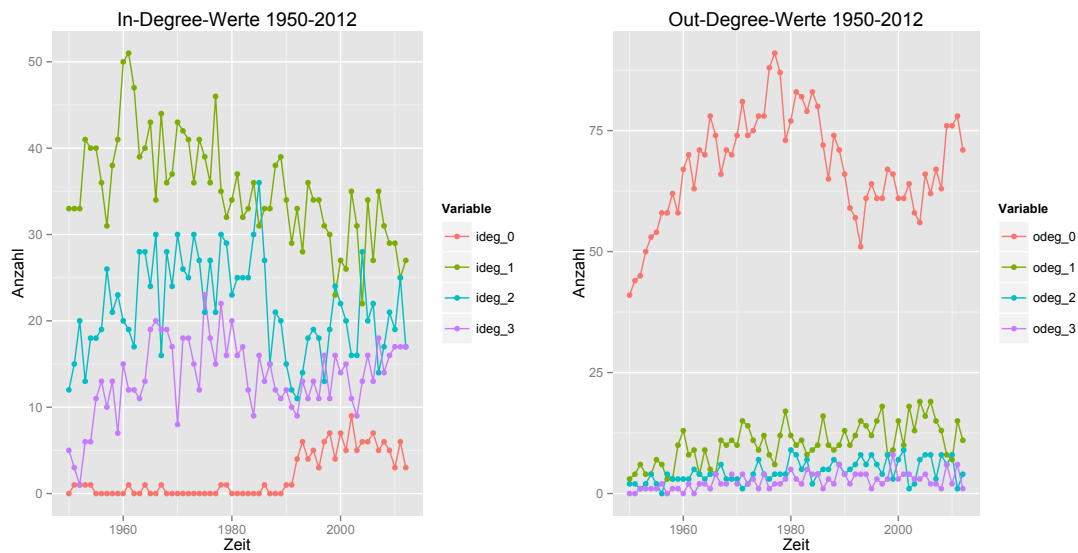


Abbildung 14: Die Zeitreihen der einzelnen In- bzw. Out-Degree Werte über den Gesamtzeitraum.

## 4 Theoretische Grundlagen für die inferentielle Analyse

In diesem Kapitel soll das *Exponential Random Graph Model (ERGM)* vorgestellt werden. Zunächst wird hierbei das Modell und seine Grundkomponenten sowie einige direkte Folgerungen besprochen. Anschließend werden Verfahren zur Schätzung der Modellparameter hergeleitet. Schließlich sollen zwei verschiedene Interpretationsansätze für die Modellparameter behandelt werden. Im zweiten Abschnitt werden die Grenzen des Modells aufgezeigt. Wir folgen hierbei weitestgehend [4] und [11]. Weitere Quellen sind im Text gesondert gekennzeichnet.

### 4.1 Das Exponential Random Graph Model

#### Das Modell

Das ERGM stellt ein Wahrscheinlichkeitsmodell für binäre gerichtete Netzwerke dar, d.h. es werden zunächst weder eventuelle Gewichtungen, noch der zeitliche Wandel des Netzwerkes mit in die Modellierung einbezogen. Die Grundidee ist hierbei die folgende: Ein (gerichtetes) Netzwerk auf  $N$  Knoten kann nach Definition 3 gedacht werden als eine Adjazenzmatrix  $A = (a_{ij}) \in \mathbb{R}^{N \times N}$ , wobei  $a_{ij} \in \{0, 1\}$  für alle  $(i, j) \in \{0, \dots, N\}^2$ . Hierbei bedeutet  $a_{ij} = 1$ , dass eine Kante von Knoten  $i$  zu Knoten  $j$  führt, während  $a_{ij} = 0$  anzeigt, dass diese Kante nicht existiert. Da das Modell keine Schleifen vorsieht, gilt  $a_{ii} = 0$  für alle  $i \in \{1, \dots, N\}$ . Weiterhin notiere

$$\mathcal{A}(N) := \left\{ A \in \mathbb{R}^{(N \times N)} : a_{ij} \in \{0, 1\}, a_{ii} = 0 \right\}$$

die Menge aller gerichteten Netzwerke ohne Schleifen auf  $N$  Knoten. Sei nun

$$Y : \Omega \rightarrow \mathcal{A}(N) \quad , \quad \omega \mapsto (Y_{ij}(\omega))_{i,j=1,\dots,N}$$

eine Zufallsvariable. Wir modellieren eine Wahrscheinlichkeitsfunktion von  $Y$  auf  $\mathcal{A}(N)$ :

$$\mathbb{P}_\theta(Y = A) = \frac{\exp(\theta^T \cdot \Gamma(A))}{\sum_{A^* \in \mathcal{A}(N)} \exp(\theta^T \cdot \Gamma(A^*))} \quad (1)$$

Hierbei bezeichnet

- $\theta \in \mathbb{R}^q$  einen  $q$ -dimensionalen Parametervektor.
- $\Gamma : \mathcal{A}(N) \rightarrow \mathbb{R}^q$  ,  $A \mapsto (\Gamma_1(A), \dots, \Gamma_q(A))^T$  eine  $q$ -dimensionale Funktion verschiedener Netzwerkstatistiken.

- $c(\theta) := \sum_{A^* \in \mathcal{A}(N)} \exp(\theta^T \cdot \Gamma(A^*))$  eine Normierungskonstante die sicherstellt, dass durch (1) eine Wahrscheinlichkeitsfunktion auf  $\mathcal{A}$  festgelegt wird.

Ein konkretes Netzwerk wird also als Ausprägung einer matrixwertigen Zufallsvariable aufgefasst, deren Eintrittswahrscheinlichkeiten mithilfe von Gleichung (1) modelliert werden können. Eine Schlüsselrolle kommt hierbei der Funktion  $\Gamma$  zu: Die Entscheidung welche Netzwerkstatistiken mit in die Modellierung aufgenommen werden sollen, beeinflusst das resultierende Wahrscheinlichkeitsmodell maßgeblich. Eine geeignete Auswahl hat über sorgfältige deskriptive Analyse des beobachteten Netzwerkes zu erfolgen.

Da die Adjazenzmatrix  $A$  als Ausprägung einer Zufallsvariable  $Y$  aufgefasst wird, können die einzelnen Einträge  $a_{ij}$  von  $A$  als Ausprägungen einzelner Bernoulli-Variable  $Y_{ij}$  aufgefasst werden. Diese Sichtweise erlaubt folgende Berechnungen bezüglich der bedingten Verteilung der  $Y_{ij}$ :

$$\begin{aligned} \frac{\mathbb{P}_\theta(Y_{ij} = 1 | Y_{ij}^c = A_{ij}^c)}{\mathbb{P}_\theta(Y_{ij} = 0 | Y_{ij}^c = A_{ij}^c)} &= \frac{\mathbb{P}_\theta(Y_{ij} = 1, Y_{ij}^c = A_{ij}^c)}{\mathbb{P}_\theta(Y_{ij} = 0, Y_{ij}^c = A_{ij}^c)} \\ &= \frac{\mathbb{P}_\theta(Y = A_{ij}^+)}{\mathbb{P}_\theta(Y = A_{ij}^-)} \\ &= \frac{\exp(\theta^T \cdot \Gamma(A_{ij}^+))}{\exp(\theta^T \cdot \Gamma(A_{ij}^-))} \\ &= \exp(\theta^T \cdot (\Gamma(A_{ij}^+) - \Gamma(A_{ij}^-))) \end{aligned}$$

Dies impliziert die folgende Gleichung:

$$\text{logit}(\mathbb{P}_\theta(Y_{ij} = 1 | Y_{ij}^c = A_{ij}^c)) = \theta^T \cdot (\Gamma(A_{ij}^+) - \Gamma(A_{ij}^-)) \quad (2)$$

Hierbei wurden die folgenden Notationen verwendet:

- $A_{ij}^+$  entsteht aus  $A$ , indem man  $a_{ij} = 1$  setzt.
- $A_{ij}^-$  entsteht aus  $A$ , indem man  $a_{ij} = 0$  setzt.
- Die Bedingung  $Y_{ij}^c = A_{ij}^c$  steht abkürzend für:  $Y_{pq} = a_{pq}$  für alle  $(p, q) \in \{1, \dots, N\}^2$  mit  $(p, q) \neq (i, j)$ .
- Den Ausdruck  $(\Delta A)_{ij} := \Gamma(A_{ij}^+) - \Gamma(A_{ij}^-)$  bezeichnet man als *Change-Statistik*. Die  $k$ -te Komponente von  $(\Delta A)_{ij}$  erfasst gerade den Unterschied der Netzwerke  $A_{ij}^+$  und  $A_{ij}^-$  auf der  $k$ -ten ins Modell integrierten Statistik.

Wie wir später noch genauer sehen werden, können über die Funktion  $\Gamma(\cdot)$  auch *Kovariableninformationen* in das Modell aufgenommen werden. Je nachdem, ob eine ins Modell integrierte Statistik externe Kovariableninformationen verwendet oder auf rein strukturellen Netzwerkmerkmalen basiert, unterscheidet man zwischen *exogenen* und *endogenen* Netzwerkstatistiken.

### Schätzung der Modellparameter

Doch wie kann nun der Parametervektor  $\theta$  geschätzt werden? Eine erste Idee wäre die folgende: Man trifft eine Unabhängigkeitsannahme für die *Dyaden*, d.h. man nimmt an, die einzelnen Zufallsvariablen  $Y_{ij}$  innerhalb der Zufallsmatrix  $Y$  seien paarweise unabhängig. In diesem Fall reduziert sich Gleichung (2) dann zu

$$\text{logit}(\mathbb{P}_\theta(Y_{ij} = 1)) = \theta^T \cdot (\Delta A)_{ij} \quad (3)$$

Dies entspricht dem Ansatz einer *logistischen Regression*, wobei die Beobachtungen der abhängigen Variablen einfach als Kantenwerte der beobachteten Adjazenzmatrix gegeben sind und die Beobachtungen der Kovariablenwerte als Auswertungen jeder einzelnen Change-Statistik. Es liegt also folgende Datenstruktur vor:

$$(a_{ij}, (\Delta(A))_{ij}) \quad \text{für } i, j \in \{1, \dots, N\}$$

Die Schätzung von  $\theta$  kann dann wie gewöhnlich über Maximum-likelihood-Schätzung gewonnen werden. Die sich ergebende Likelihoodfunktion hat dann die folgende Form (wobei Gründen der Platzersparnis die Abkürzung  $\delta_{ij} := (\Delta A)_{ij}$  verwendet wird):

$$\text{lik}(\theta) = \mathbb{P}_\theta(Y = A) = \prod_{i,j} \frac{\exp(\theta^T \delta_{ij})}{1 + \exp(\theta^T \delta_{ij})} \quad (4)$$

Das Problem an diesem naiven Schätzverfahren ist nun, dass sich die getroffene Unabhängigkeitsannahme der Dyaden in nahezu keiner Anwendung als haltbar erweist. Dies ist ein systematisches Problem: Das Vorliegen von Netzwerkdaten ist untrennbar verbunden mit dem Vorliegen von *relationalen Daten*, welche ja schon per Definition als nicht unabhängig voneinander angenommen werden dürfen. Ignoriert man diese Abhängigkeitsstruktur wissentlich und verwendet dennoch die Gleichung (4) zur Schätzung von  $\theta$ , so spricht man von *Pseudo-Likelihood-Schätzung*. Diese tendiert aber dazu die Standardfehler zu unterschätzen.

Die eigentlich naheliegendere Herangehensweise ist, die Parameter direkt mit Hilfe der sich aus Gleichung (1) ergebenden Log-Likelihoodfunktion zu schätzen. Diese

hat die folgende Form:

$$\text{loglik}(\theta) = \theta^T \cdot \Gamma(A) - \log(c(\theta)) \quad (5)$$

wobei  $A$  das beobachtete Netzwerk bezeichne. Für den Vektor von Netzwerkstatistiken kann für die Schätzung nun ohne Einschränkung die Annahme

$$\Gamma(A) = 0 \quad (6)$$

getroffen werden. Dies geht aus folgendem Grund: Gilt (6) nicht für unseren gewählten Vektor von Netzwerkstatistiken  $\Gamma(\cdot)$ , so ersetze  $\Gamma(\cdot)$  in (1) durch die neue Netzwerkstatistik

$$\Gamma^*(\cdot) := \Gamma(\cdot) - \Gamma(A)$$

Durch diese Ersetzung bleibt die Wahrscheinlichkeitsfunktion von  $Y$  unverändert, denn es gilt (einfaches Nachrechnen):

$$\frac{\exp(\theta^T \cdot \Gamma(A))}{c(\theta)} = \frac{\exp(\theta^T \cdot \Gamma^*(A))}{c^*(\theta)}$$

mit  $c^*(\theta) := \sum_{A^* \in \mathcal{A}(N)} \exp(\theta^T \cdot \Gamma^*(A^*))$ . Das bedeutet gerade, dass eine *Zentrierung* des Vektors von Netzwerkstatistiken, die Wahrscheinlichkeitsfunktion der Netzwerkvariablen  $Y$  unverändert lässt. Folglich kann im Zusammenhang mit der Likelihoodfunktion (5) die Vektorstatistik immer als um das beobachtete Netzwerk zentriert angenommen werden.

Aufgrund von Annahme (6) ergibt sich dann aus (5) die vereinfachte Log-Likelihoodfunktion

$$\text{loglik}(\theta) = -\log(c(\theta)) \quad (7)$$

Das Problem an der Parameterschätzung mithilfe von (7) ist allerdings, dass zur Schätzung der Term

$$c(\theta) := \sum_{A^* \in \mathcal{A}(N)} \exp(\theta^T \cdot \Gamma(A^*))$$

ausgewertet werden muss, der die gewichteten Netzwerkstatistiken über alle möglichen Netzwerke auf  $N$  Knoten aufsummiert. Dies erweist sich schon bei relativ geringen Knotenzahlen als gigantischer computationaler Aufwand und ist für Netzwerke mit hoher Knotenzahl nicht mehr in vernünftiger Zeit bewältigbar. Der Grund für dieses Unvermögen liegt in der entstehenden kombinatorischen Explosion: Auf

$N$  Knoten können theoretisch

$$2^{2 \cdot \binom{N}{2}} = 2^{N(N-1)}$$

verschiedene gerichtete Netzwerke entstehen. Dies führt beispielsweise für ein vergleichsweise kleines Netzwerk auf 100 Knoten dazu, dass der Term  $c(\theta)$  bereits  $2^{9900}$  Summanden besitzt. Eine astronomisch große Zahl!

Für hinreichend große Netzwerke entfällt somit die Möglichkeit, die Schätzung der Parameter direkt mithilfe der Likelihoodfunktion vorzunehmen.

Ein Ausweg aus dieser Situation bietet die folgende Überlegung: Wähle einen festen Parametervektor  $\theta_0 \in \Theta$  aus dem zugrunde liegenden Parameterraum  $\Theta$  und berechne für  $\theta \in \Theta$  den Erwartungswert

$$\begin{aligned} \mathbb{E}_{\theta_0} \left[ \exp \left( (\theta - \theta_0)^T \cdot \Gamma(Y) \right) \right] &= \sum_{A \in \mathcal{A}(N)} \exp \left( (\theta - \theta_0)^T \cdot \Gamma(A) \right) \cdot \mathbb{P}_{\theta_0}(Y = A) \\ &= \sum_{A \in \mathcal{A}(N)} \exp \left( (\theta - \theta_0)^T \cdot \Gamma(A) \right) \cdot \frac{\exp(\theta_0^T \cdot \Gamma(A))}{c(\theta_0)} \\ &= \frac{1}{c(\theta_0)} \sum_{A \in \mathcal{A}(N)} \exp \left( \theta^T \cdot \Gamma(A) \right) \\ &= \frac{c(\theta)}{c(\theta_0)} \end{aligned}$$

Es folgt die Gleichung

$$\frac{c(\theta)}{c(\theta_0)} = \mathbb{E}_{\theta_0} \left[ \exp \left( (\theta - \theta_0)^T \cdot \Gamma(Y) \right) \right] \quad (8)$$

Die Gleichung (8) eröffnet nun die folgende Möglichkeit: Zieht man in geeigneter Weise  $L$  Zufallsnetzwerke  $A_1, \dots, A_L$  aus der Verteilung  $\mathbb{P}_{\theta_0}$ , so gilt nach dem *Gesetz der großen Zahlen* der folgende Zusammenhang:

$$\frac{1}{L} \cdot \sum_{i=1}^L \exp \left( (\theta - \theta_0)^T \cdot \Gamma(A_i) \right) \xrightarrow{\mathbb{P}_{\theta_0}} \mathbb{E}_{\theta_0} \left[ \exp \left( (\theta - \theta_0)^T \cdot \Gamma(Y) \right) \right] = \frac{c(\theta)}{c(\theta_0)} \quad (9)$$

Für eine hinreichend große Anzahl  $L$  von Zufallsnetzwerken, ist also die folgende Approximation sinnvoll:

$$\frac{c(\theta)}{c(\theta_0)} \approx \frac{1}{L} \cdot \sum_{i=1}^L \exp \left( (\theta - \theta_0)^T \cdot \Gamma(A_i) \right) \quad (10)$$

Diese Approximation können wir nun verwenden, um eine Approximation für die Log-Likelihoodfunktion (7) zu bestimmen:

$$\begin{aligned}
 \text{loglik}(\theta) - \text{loglik}(\theta_0) &= -\log(c(\theta)) + \log(c(\theta_0)) \\
 &= -\log\left(\frac{c(\theta)}{c(\theta_0)}\right) \\
 &= -\log\left(\mathbb{E}_{\theta_0}\left[\exp\left((\theta - \theta_0)^T \cdot \Gamma(Y)\right)\right]\right) \\
 &\approx -\log\left(\frac{1}{L} \cdot \sum_{i=1}^L \exp\left((\theta - \theta_0)^T \cdot \Gamma(A_i)\right)\right)
 \end{aligned}$$

Leitet man diese approximative Gleichung auf beiden Seiten nach dem Vektor  $\theta$  ab, so ergibt sich eine approximative Score-Funktion:

$$s(\theta) \approx -\frac{\partial}{\partial \theta} \log\left(\frac{1}{L} \cdot \sum_{i=1}^L \exp\left((\theta - \theta_0)^T \cdot \Gamma(A_i)\right)\right) \quad (11)$$

Mit dieser approximativen Score-Funktion kann dann verfahren werden wie gewohnt, d.h. sie kann mit zum Beispiel dem *Newton-Raphson-Algorithmus* iterativ approximativ optimiert werden. Auf diese Weise können dann approximative Maximum-Likelihood-Schätzer der Parameter gewonnen werden.

So schön das auch klingen mag, drängt sich doch eine unmittelbare Frage auf: Wie kommt man zu hinreichend vielen geeigneten Ziehungen  $A_1, \dots, A_L$  aus der Verteilung  $\mathbb{P}_{\theta_0}$ ?

Hierzu verwendet man sogenannte *Markov Chain Monte Carlo (MCMC)*-Verfahren. Worum es sich bei diesen handelt und wie sie genau funktionieren soll im folgenden behandelt werden.

## Simulation von Zufallsnetzwerken

Um die im vorherigen Abschnitt hergeleitete approximative Likelihoodfunktion berechnen zu können, benötigt man eine hinreichend große Anzahl von Zufallsnetzwerken aus der Verteilung  $\mathbb{P}_{\theta_0}$  der matrixwertigen Zufallsvariable  $Y$ . Um diese zu erhalten bedient man sich sogenannter *MCMC-Verfahren*.

Unabhängig von der Wahl des konkreten Verfahrens, ist die gemeinsame Grundidee hierbei die folgende:

Man konstruiert eine *Markov-Kette*  $(Y_t)_{t \in \mathbb{N}}$  auf der Menge aller Netzwerke auf  $N$  Knoten  $\mathcal{A}(N)$ , deren *stationäre Verteilung* gerade der Verteilung  $\mathbb{P}_{\theta_0}$  entspricht. Es

kann dann gezeigt werden, dass jede konkrete Realisation (oder *Trajektorie*)

$$(A_t)_{t \in \mathbb{N}} := (Y_t(\omega))_{t \in \mathbb{N}}$$

dieses stochastischen Prozesses das Konvergenzresultat (9) erfüllt (für diese Version des *Gesetzes der großen Zahlen für Markov-Ketten* sei auf [15] verwiesen). Folglich können dann auch hinreichend große Teilfolgen von  $(A_t)_{t \in \mathbb{N}}$  für die entsprechende Approximation (10) verwendet werden.

Doch wie können nun geeignete Trajektorien von Markov-Ketten auf  $\mathcal{A}(N)$  konstruiert werden? Zur Beantwortung dieser Frage sollen im Folgenden zwei übliche Konstruktionsalgorithmen angegeben werden, der *Gibbs-Sampler* und der *Metropolis-Hastings-Algorithmus*.

#### *Gibbs-Sampler*

Zunächst wählt man eine Startmatrix  $A^{(0)} \in \mathcal{A}(N)$  (z.B. könnte das beobachtete Netzwerk gewählt werden). Anschließend wird die Länge  $L$  der entsprechenden Teilfolge festgelegt. Für  $k \in \{0, \dots, L-1\}$  verfährt man nun rekursiv wie folgt (hierbei bezeichnet  $A^{(k)}$  das Netzwerk in der  $k$ -ten Iteration):

1. Ziehe zufällig eine Kante  $(i, j)$  mit  $i \neq j$  von  $A^{(k)}$ .
2. Berechne gemäß Gleichung (13) den Wert

$$\pi := \mathbb{P}_\theta(Y_{ij} = 1 | Y_{ij}^c = (A_{ij}^{(k)})^c)$$

3. Ziehe Zufallszahl  $Z$  aus  $\text{Bin}(1, \pi)$ . Falls

- $Z = 0$ , definiere  $A^{(k+1)}$  via

$$a_{pq}^{(k+1)} = \begin{cases} 0 & \text{falls } (p, q) = (i, j) \\ a_{pq}^{(k)} & \text{falls } (p, q) \neq (i, j) \end{cases}$$

- $Z = 1$ , definiere  $A^{(k+1)}$  via

$$a_{pq}^{(k+1)} = \begin{cases} 1 & \text{falls } (p, q) = (i, j) \\ a_{pq}^{(k)} & \text{falls } (p, q) \neq (i, j) \end{cases}$$



4. Beginne mit  $A^{(k+1)}$  bei Schritt 1.

Der geschilderte Algorithmus liefert einem dann eine Folge von Zufallsnetzwerken  $A^{(0)}, \dots, A^{(L)}$ . Da die Startmatrix allerdings beliebig gewählt war und die ersten Netzwerke noch stark von der Wahl dieser abhängen (es wird pro Iteration nur eine Kante verändert!), werden üblicherweise noch die ersten  $B$  Netzwerke, wobei  $N \ll B \ll L$ , als sogenannte *Burn-in-Phase* verworfen.

#### *Metropolis-Hastings-Algorithmus*

Wieder wird eine Startmatrix  $A^{(0)} \in \mathcal{A}(N)$  gewählt (z.B. das beobachtete Netzwerk). Für  $k \in \{0, \dots, L-1\}$  verfährt man nun rekursiv wie folgt:

1. Ziehe zufällig eine Kante  $(i, j)$  mit  $i \neq j$  von  $A^{(k)}$ .
2. Berechne gemäß Gleichung (2) den Wert

$$\pi := \frac{\mathbb{P}_\theta(Y_{ij} \neq a_{ij}^{(k)} | Y_{ij}^c = A_{ij}^c)}{\mathbb{P}_\theta(Y_{ij} = a_{ij}^{(k)} | Y_{ij}^c = A_{ij}^c)}$$

3. Setze  $\delta := \min\{1, \pi\}$  und ziehe eine Zufallszahl  $Z$  aus  $\text{Bin}(1, \delta)$ . Falls
  - $Z = 0$ , setze  $A^{(k+1)} := A^{(k)}$
  - $Z = 1$ , definiere  $A^{(k+1)}$  via

$$a_{pq}^{(k+1)} = \begin{cases} 1 - a_{pq}^{(k)} & \text{falls } (p, q) = (i, j) \\ a_{pq}^{(k)} & \text{falls } (p, q) \neq (i, j) \end{cases}$$

4. Beginne mit  $A^{(k+1)}$  bei Schritt 1.

Auch hier verwirft man in der Burn-in-Phase wieder die ersten  $B$  Netzwerke.

#### **Interpretation der Modellparameter**

Nachdem in den vorhergehenden Abschnitten gezeigt wurde, wie man den Koeffizienten-Vektor  $\theta \in \mathbb{R}^q$ , d.h. den Vektor der Modellparameter, schätzen kann, stellt sich nun die Frage nach einer geeigneten Interpretation. Um diese Frage zu beantworten, unterscheiden wir im Folgenden zwei unterschiedliche Interpretationsansätze, einen auf Kanten- und einen auf Netzwerkebene. Wie folgen hierbei weitgehend [2].

### Interpretation auf Kantenebene

Um einen Zusammenhang zwischen dem Koeffizienten-Vektor  $\theta$  und der Entstehenswahrscheinlichkeit  $\mathbb{P}_\theta(Y_{ij} = 1 | Y_{ij}^c = A_{ij}^c)$  herstellen zu können, betrachte man die folgende Überlegung:

Wegen (2) gilt

$$\text{logit}(\mathbb{P}_\theta(Y_{ij} = 1 | Y_{ij}^c = A_{ij}^c)) = \theta^T \cdot (\Gamma(A_{ij}^+) - \Gamma(A_{ij}^-))$$

Dies ist äquivalent zur Gleichung

$$\mathbb{P}_\theta(Y_{ij} = 1 | Y_{ij}^c = A_{ij}^c) = \text{logit}^{-1}(\theta^T \cdot (\Gamma(A_{ij}^+) - \Gamma(A_{ij}^-))) \quad (12)$$

Unter Verwendung der Abkürzung  $(\Delta A)_{ij} := \Gamma(A_{ij}^+) - \Gamma(A_{ij}^-)$  und der Umkehrfunktion der Logit-Funktion

$$\text{logit}^{-1}(x) = \frac{\exp(x)}{1 + \exp(x)}$$

folgt hieraus die Beziehung

$$\mathbb{P}_\theta(Y_{ij} = 1 | Y_{ij}^c = A_{ij}^c) = \frac{\exp(\theta^T \cdot (\Delta A)_{ij})}{1 + \exp(\theta^T \cdot (\Delta A)_{ij})} \quad (13)$$

Damit lässt sich nun folgende Rechnung für die auf das Restnetzwerk bedingte *Chance* des Entstehens der Dyade  $ij$  durchführen:

$$\begin{aligned} \frac{\mathbb{P}_\theta(Y_{ij} = 1 | Y_{ij}^c = A_{ij}^c)}{\mathbb{P}_\theta(Y_{ij} = 0 | Y_{ij}^c = A_{ij}^c)} &= \frac{\mathbb{P}_\theta(Y_{ij} = 1 | Y_{ij}^c = A_{ij}^c)}{1 - \mathbb{P}_\theta(Y_{ij} = 1 | Y_{ij}^c = A_{ij}^c)} \\ &= \frac{\frac{\exp(\theta^T \cdot (\Delta A)_{ij})}{1 + \exp(\theta^T \cdot (\Delta A)_{ij})}}{1 - \frac{\exp(\theta^T \cdot (\Delta A)_{ij})}{1 + \exp(\theta^T \cdot (\Delta A)_{ij})}} \\ &= \frac{\frac{\exp(\theta^T \cdot (\Delta A)_{ij})}{1 + \exp(\theta^T \cdot (\Delta A)_{ij})}}{\frac{1}{1 + \exp(\theta^T \cdot (\Delta A)_{ij})}} \\ &= \exp(\theta^T \cdot (\Delta A)_{ij}) \end{aligned}$$

Mit dem Zusammenhang

$$\theta^T \cdot (\Delta A)_{ij} = \sum_{l=1}^q \theta_l \cdot (\Delta_l A)_{ij}$$

folgt dann insgesamt

$$\begin{aligned} \frac{\mathbb{P}_\theta(Y_{ij} = 1 | Y_{ij}^c = A_{ij}^c)}{\mathbb{P}_\theta(Y_{ij} = 0 | Y_{ij}^c = A_{ij}^c)} &= \exp\left(\sum_{l=1}^q \theta_l \cdot (\Delta_l A)_{ij}\right) \\ &= \prod_{l=1}^q \exp(\theta_l \cdot (\Delta_l A)_{ij}) \end{aligned}$$

Kompakt zusammengefasst ergibt sich

$$\frac{\mathbb{P}_\theta(Y_{ij} = 1 | Y_{ij}^c = A_{ij}^c)}{\mathbb{P}_\theta(Y_{ij} = 0 | Y_{ij}^c = A_{ij}^c)} = \exp(\theta_1 (\Delta_1 A)_{ij}) \cdot \dots \cdot \exp(\theta_q (\Delta_q A)_{ij}) \quad (14)$$

Gleichung (14) ermöglicht nun eine *Ceteris-Paribus-Analyse* der Modell-Parameter: Vergrößert sich die  $k$ -te Change-Statistik  $(\Delta_k A)_{ij}$  um eine Einheit auf  $(\Delta_k A)_{ij} + 1$ , während alle anderen Change-Statistiken unverändert bleiben, so wird die auf das Restnetzwerk bedingte Chance der Entstehung der Dyade  $ij$  mit dem Faktor  $\exp(\theta_k)$  multipliziert.

Dies führt zu folgender Interpretation des Parameters  $\theta_k$ ,  $k \in \{1, \dots, q\}$ :

- Ist  $\theta_k > 0$ , so steigt die bedingte Chance der Dyadenentstehung.
- Ist  $\theta_k = 0$ , so bleibt die bedingte Chance unverändert.
- Ist  $\theta_k < 0$ , so sinkt die bedingte Chance.

Die Parameter-Interpretation erfolgt also nahezu analog zu derjenigen, welche in der logistischen Regressionsanalyse vorgenommen wird (vgl. hierfür etwa [7]). Wie später noch ausführlicher behandelt wird, ist in unserem Fall allerdings erhöhte Vorsicht geboten: Nicht in jedem Fall kann eine Erhöhung der Change-Statistik als inhaltlich sinnvoll angenommen werden. Betrachtet man z.B. die Netzwerkstatistik

$$\Gamma_1(A) := \text{Anzahl der Ecken mit In-Degree 1}$$

so kann die zur Dyade  $ij$  gehörige Change-Statistik  $(\Delta_1 A)_{ij}$  nur Werte in  $\{-1, 0, 1\}$  annehmen. Die Change-Statistik kann sich folglich nie um mehr als eine Einheit ändern.

### Interpretation auf Netzwerkebene

Die gerade behandelte Interpretation der Parameter bezieht sich auf die Entstehenswahrscheinlichkeit von Dyaden, geschieht also auf Kantenebene. Im folgenden soll

eine Parameter-Interpretation gegeben werden, welche sich auf das gesamte Netzwerk bezieht. Hierfür müssen zunächst eine neue Notation eingeführt werden: Für eine Adjazenzmatrix  $A$  sei  $A^{k-}$  ein Netzwerk (im Allgemeinen nicht eindeutig), für welches die  $k$ -te Netzwerkstatistik um eine Einheit kleiner ist als die von Netzwerk  $A$ , während alle anderen Statistiken die selben Werte aufweisen, formal:

$$\Gamma_l(A^{k-}) = \begin{cases} \Gamma_l(A) & \text{falls } l \in \{1, \dots, q\} \setminus \{k\} \\ \Gamma_l(A) - 1 & \text{falls } l = k \end{cases}$$

Betrachtet man nun die Chance der Entstehung des Netzwerkes  $A$  im Vergleich zu  $A^{k-}$ , so ergibt sich mit Gleichung (1) folgender Zusammenhang:

$$\begin{aligned} \frac{\mathbb{P}_\theta(Y = A)}{\mathbb{P}_\theta(Y = A^{k-})} &= \frac{\sum_{l=1}^q \theta_l \cdot \Gamma_l(A)}{\sum_{l=1}^q \theta_l \cdot \Gamma_l(A^{k-})} \\ &= \frac{\exp(\theta_k \cdot \Gamma_k(A))}{\exp(\theta_k \cdot (\Gamma_k(A) - 1))} \\ &= \exp(\theta_k) \end{aligned}$$

Kompakt zusammengefasst ergibt sich

$$\frac{\mathbb{P}_\theta(Y = A)}{\mathbb{P}_\theta(Y = A^{k-})} = \exp(\theta_k) \quad (15)$$

Gleichung (15) lässt sich nun wie folgt interpretieren: Die relative Plausibilität, dass das Netzwerk  $A$  im Vergleich zu Netzwerk  $A^{k-}$  entsteht beträgt gerade  $\exp(\theta_k)$ . Je größer also der Wert  $\exp(\theta_k)$  ist, desto plausibler erscheint das Netzwerk  $A$  im Vergleich zu  $A^{k-}$ .

## 4.2 Grenzen des Modells

In diesem Abschnitt soll kurz auf einige gravierende Limitationen des ERGMs eingegangen werden. Hierbei kann man grob zwischen computationalen und strukturellen Limitationen unterscheiden.

Die computationalen Schwierigkeiten resultieren daraus, dass (wie in vorherigen Abschnitten besprochen) die Likelihood-Funktion nicht exakt bestimmt werden kann und stattdessen auf eine MCMC-basierte Approximation zurückgegriffen werden muss. Ob die oben besprochenen MCMC-Algorithmen (Gibbs-Sampler, Metropolis-Hastings) aber tatsächlich eine Markov-Kette produzieren, deren stationäre Verteilung der Verteilung von unserem Zufallsnetzwerk  $Y$  entspricht, hängt stark von der Wahl der in das Modell integrierten Netzwerkstatistiken ab. Wählt man ungeeignete

Statistiken, so tendiert die produzierte Markov-Kette oftmals zu den extremen Netzwerken (d.h. dem Netzwerk mit allen möglichen Kanten oder dem leeren Netzwerk) und das entsprechende MCMC-Sample von Netzwerken kann nicht als Sample aus der Verteilung von  $Y$  angenommen werden. Da aber die oben besprochene Idee der approximativen Likelihood-Schätzung auf genau dieser Annahme basiert, können die auf diese Weise produzierten Parameterschätzer nicht mehr sinnvoll verwendet werden. Man spricht in diesem Zusammenhang auch von *degeneracy*, also der *Fehlspezifikation* des Modells. Für eine tiefergehende Betrachtung des degeneracy-Problems sei auf [10] verwiesen.

Betrachten wir nun die strukturellen Limitationen: Eine schwerwiegende Einschränkung ist, das mit Hilfe des ERGMs keine zeitliche Entwicklung eines Netzwerkes modelliert werden kann. Somit ist es nicht möglich, das klassische ERGM zu verwenden, um zukünftige Netzwerke zu prognostizieren. Diesem Problem kann mit Hilfe des *Temporal Exponential Random Graph Models (TERGM)* entgegengewirkt werden, welches die Entstehungswahrscheinlichkeit eines Netzwerkes zum Zeitpunkt  $t$ , gegeben der Netzwerke zu den vergangenen  $k$  Zeitpunkten, modelliert.

Eine Erweiterung des klassischen ERGMs auf nicht binäre, also gewichtete Netzwerke, stellen die *Generalized Exponential Random Graph Models (GERGM)* dar.

Ein weiteres strukturelles Problem steckt in einer Annahme, die implizit bei der Modellierung durch ERGMs getroffen wird: Die Zuordnung  $\mathbb{P}_\theta(Y = A)$  der Wahrscheinlichkeitsmasse für die Ausprägung  $A$  hängt nach Gleichung (1) nur über  $\Gamma(A)$  von der konkreten Realisation  $A$  ab. Das heißt aber, dass zwei unterschiedliche Netzwerke  $A_1$  und  $A_2$  für die  $\Gamma(A_1) = \Gamma(A_2)$  gilt, die selbe Wahrscheinlichkeitsmasse erhalten. Dies ist aber immer dann problematisch, wenn man ausschließlich endogene Statistiken in das Modell integriert, da diese rein auf die Struktur des Netzwerks bezogen sind und nicht zwischen einzelnen Knoten unterscheiden. Beispielsweise erhielten in einem rein endogenen ERGM ohne exogene Kovariablen die beiden in Abbildung 15 dargestellten Netzwerke die selbe Wahrscheinlichkeitsbewertung, da sie in allen nicht knotenspezifischen, rein strukturellen Netzwerkstatistiken übereinstimmen. Dies ist natürlich kontraintuitiv, da das linke Netzwerk von einem inhaltlichen Standpunkt eine weit höhere Wahrscheinlichkeitsmasse erhalten sollte. Da endogene Netzwerkstatistiken aber nur strukturelle Netzwerkmerkmale erfassen können, kann man mit ihrer Hilfe die Vergabe von Wahrscheinlichkeitsmasse nicht knotenspezifisch modellieren. Dieser Effekt kann durch Hinzunahme von Netzwerkstatistiken, welche exogene, knotenspezifische Kovariablen einbeziehen abgeschwächt werden. Beispielsweise könnte eine externe Statistik integriert werden, welche für ein gegebenes Netzwerk die Anzahl der Übereinstimmungen mit einem externen anderen Netzwerk zählt. Ist



Abbildung 15: Zwei unterschiedliche, jedoch strukturgleiche Graphen. Mit Hilfe endogener Netzwerkstatistiken kann nicht zwischen den beiden unterschieden werden.

das Netzwerk auf welchem die entsprechende Statistik ausgewertet wird dem externen Netzwerk hinreichend ähnlich, so kann hiermit eine Unterscheidung zwischen verschiedenen *Knotenkonfigurationen* ermöglicht werden.

Wie das genau funktioniert und welche Statistiken sich überhaupt zur Modellierung des Waffenhandelsnetzwerkes eignen könnten, soll im nächsten Kapitel behandelt werden.

## 5 Inferentielle Analyse der SIPRI-Daten

### 5.1 Einige Netzwerkstatistiken

In Kapitel 3.3 wurde auf einige strukturelle Eigenschaften der Handelsnetzwerke der Jahre 1950 - 2012 eingegangen. Ziel dieses Abschnitts ist es, die charakteristischen Strukturen der Handelsnetzwerke in Form von Netzwerkstatistiken zu definieren, um diese mit in die Modellierung aufnehmen zu können. Die Netzwerkstatistik welche die Rolle des Intercepts im ERGM einnimmt und deswegen Eingang in jedes Modell finden sollte, ist die Anzahl der Kanten des Netzwerk. Der Grund weshalb das Einbeziehen der Kantenanzahl dem Intercept gleichkommt lässt sich schnell vor Augen führen, wenn man nochmals Gleichung 2 aus Kapitel 4.1 betrachtet.

$$\text{logit}(\mathbb{P}_\theta(Y_{ij} = 1 | Y_{ij}^c = A_{ij}^c)) = \theta^T \cdot (\Gamma(A_{ij}^+) - \Gamma(A_{ij}^-))$$

Da die Anzahl der Kanten des Netzwerkes  $A_{ij}^+$  stets um eins größer ist als die Anzahl der Kanten des Netzwerkes  $A_{ij}^-$ , ergibt sich für die Change-Statistik der Kantenanzahl immer der Wert 1. Der dieser Change-Statistik zugeordnete Parameter  $\theta_{edges}$  fließt somit für jedes Netzwerk in gleicher Weise ein.

Wie bereits in Kapitel 4.1 eingeführt, ist eine Netzwerkstatistik  $\Gamma_i(A)$  eine Abbildung von der Menge aller möglichen Netzwerke auf  $N$  Knoten in die reellen Zahlen  $\mathbb{R}$ . Die Anzahl der Kanten lässt sich somit formal definieren als

$$\Gamma_{edges} : \mathcal{A}(N) \rightarrow \mathbb{R} \quad , \quad A \mapsto \sum_{i=1}^N \sum_{j=1}^N a_{ij} \quad (16)$$

Auf diese Netzwerkstatistik kann im R-Paket *ergm* über den ERGM-Term *edges* zugegriffen werden.

Eine weitere auffällige Struktur im Handelsnetzwerk ist jene, dass im Falle eines existierenden Waffenhandels zwischen zwei Nationen in den meisten Fällen kein gegenseitiges Beliefern von Waffen zu erkennen ist, sondern Nation welche eine andere Nation mit Waffen beliefern in der Regel selbst von dieser Nation keine Waffen beziehen. Die Anzahl der einseitigen Kanten eines Netzwerkes lässt sich mittels der Netzwerkstatistik  $\Gamma_{asym}$  auf welches in R mit *asymmetric* zugegriffen werden kann, definieren als:

$$\Gamma_{asym} : \mathcal{A}(N) \rightarrow \mathbb{R} \quad , \quad A \mapsto \sum_{i=1}^N \sum_{j=1}^N a_{ij}(1 - a_{ji}) \quad (17)$$

Diese Statistik erhöht sich um den Wert 1, wenn die gerichtete Kante  $a_{ij} = 1$  ist und somit im Netzwerk vorhanden ist und die entgegen gerichtete Kante  $a_{ji}$  nicht existiert und somit in der Adjazenzmatrix den Wert 0 annimmt. Die Statistik welche die Anzahl der beidseitigen Kanten eines Netzwerkes zählt wird im *ergm* Paket mit *mutual* bezeichnet und definiert sich als

$$\Gamma_{mut} : \mathcal{A}(N) \rightarrow \mathbb{R} \quad , \quad A \mapsto \sum_{i=1}^N \sum_{j=1}^N a_{ij} a_{ji} \quad (18)$$

Betrachtet man die Abbildung 13 aus Kapitel 3.3, so liegt der Schluss nahe, dass auch die Anzahl der Knoten mit einem In-Degree von 1 und die Anzahl der Knoten mit einem Out-Degree von 0 als Statistik in das Modell eingehen sollte. Im *ergm*-Paket sind diese Statistiken mittels *idegree(k)* und *odegree(k)* vorhanden. Diese Statistiken zählen die Anzahl an Knoten eines Netzwerkes welche einen In-Degree von  $k$  bzw. einen Out-Degree von  $k$  besitzen. Mittels *idegree* und *odegree* kann somit die Anzahl der Knoten mit jedem beliebigen In- bzw. Out-Degree  $k \in \mathbb{N}_0$  gezählt werden. Als Netzwerkstatistik formuliert ergibt sich:

$$\Gamma_{ideg(k)} : \mathcal{A}(N) \rightarrow \mathbb{R} \quad , \quad A \mapsto \sum_{i=1}^N \left[ \mathbb{1}_{\{k\}} \left( \sum_{j=1}^N a_{ji} \right) \right] \quad (19)$$

$$\Gamma_{odeg(k)} : \mathcal{A}(N) \rightarrow \mathbb{R} \quad , \quad A \mapsto \sum_{i=1}^N \left[ \mathbb{1}_{\{k\}} \left( \sum_{j=1}^N a_{ij} \right) \right] \quad (20)$$

Hierbei bezeichnet  $\mathbb{1}_{\{k\}}$  die Indikatorfunktion und somit ergibt sich für den Wert innerhalb der runden Klammer eine 1 sollte ein Knoten  $i$  einen In- bzw. Out-Degree von  $k$  besitzen oder 0 sollte der In- bzw. Out-Degree ungleich  $k$  sein. Summiert man diese Werte über alle Knoten auf, ergibt sich die Anzahl der Knoten mit einem In- bzw. Out-Degree von  $k$ .

Die nächste strukturelle Eigenschaft auf die in Kapitel 3.3 eingegangen wurde ist jene, dass es einige im Netzwerk zentrale Nationen gibt, welche an viele andere Nationen Waffen exportieren. Eine häufig gebrauchte Statistik, die zunächst den Anschein erweckt, diese sternförmige Form des Netzwerkes festzuhalten ist die Out-Star- $k$  bzw. In-Star- $k$  Statistik, wobei  $k \in \mathbb{N}$ . Diese Statistik zählt die Anzahl an  $k$ -Out-Stars bzw.  $k$ -In-Stars in einem Netzwerk, wobei ein  $k$ -Out-Star eine Menge von  $k$  unterschiedlichen Ecken ist, welche allesamt Endpunkt einer gerichteten Kante von ein und derselben weiteren Ecke sind. Analog definiert sich die  $k$ -In-Star Statistik als Menge von  $k$  unterschiedlichen Ecken welche allesamt Startpunkt eines gerichteten



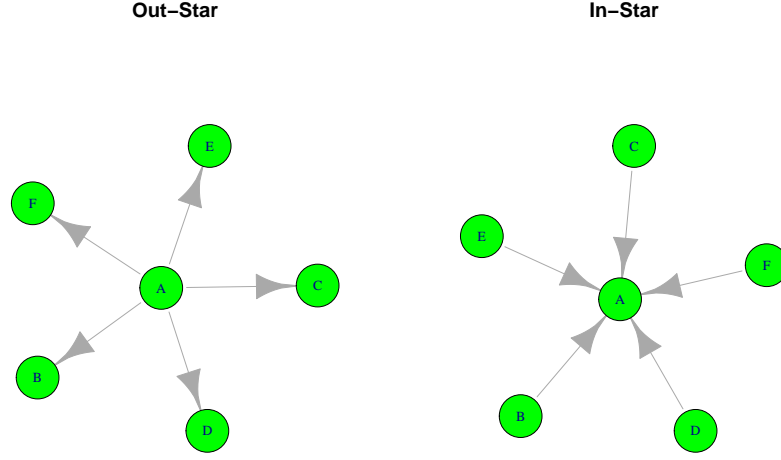


Abbildung 16: Visualisierung des Out-Star und des In-Star Effekts

Graphen zu einer weiteren Ecke sind.

Betrachtet man das linke Netzwerk aus Abbildung 16, so sind in diesem ein 5-Out-Star, fünf 4-Out-Stars, zehn 3-Out-Stars, zehn 2-Out-Stars und 5 1-Out-Stars enthalten. Eine analoge Verteilung erhält man bezüglich der In-Stars im rechten Netzwerk aus Abbildung 16. An dieser Stelle sei vermerkt, dass es sich bei der Anzahl an 1-In-Stars bzw 1-Out-Stars um die Anzahl der Kanten in einem Netzwerk handelt. Formal lassen sich diese Netzwerkstatistiken schreiben als:

$$\Gamma_{ostar(k)} : \mathcal{A}(N) \rightarrow \mathbb{R} \quad , \quad A \mapsto \sum_{m=k}^{N-1} \left\{ \binom{m}{k} \sum_{j=1}^N \left[ \mathbb{1}_{\{m\}} \left( \sum_{i=1}^N a_{ji} \right) \right] \right\} \quad (21)$$

$$\Gamma_{istar(k)} : \mathcal{A}(N) \rightarrow \mathbb{R} \quad , \quad A \mapsto \sum_{m=k}^{N-1} \left\{ \binom{m}{k} \sum_{j=1}^N \left[ \mathbb{1}_{\{m\}} \left( \sum_{i=1}^N a_{ij} \right) \right] \right\} \quad (22)$$

Anzumerken ist, dass die Star-Statistiken stark auf den Degree-Statistiken basieren. Mittels näherer Betrachtung lässt sich erkennen, dass die komplette Formel für die In- bzw. Out-Degree Statistik in der Formel für die In- bzw Out-Star Statistik enthalten ist. Mithilfe der Degree-Statistiken wird zunächst die Anzahl der Ecken mit einem In-bzw. Out Degree von m gezählt. Eine Kante mit einem In- bzw. Out-Degree

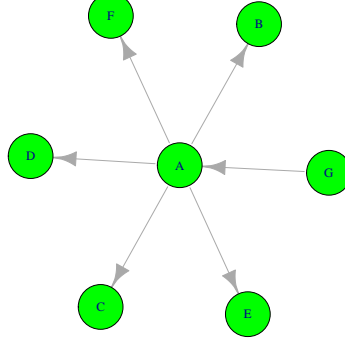


Abbildung 17: Visualisierung des DSP(1)-Effekts

von  $m$  ist Zentrum von  $\binom{m}{k}$   $k$ -In-Stars bzw.  $k$ -Out-Stars. Auf diese Statistiken kann im *ergm*-Paket mittels *istar*( $k$ ) und *ostar*( $k$ ) zugegriffen werden.

Die *dyadwise-shared-partner-k* Statistik ist eine weitere nützliche Statistik und die letzte, die in diesem Kapitel eingeführt werden soll. Diese Statistik zählt die Anzahl an Knotenpaaren  $(i,j)$ , für welche  $i$  und  $j$  genau  $k$  gemeinsame Nachbarn besitzen. Zudem müssen  $i$  und  $j$  durch einen über  $k$  gerichteten Pfad verbindbar sein. Betrachtet man zum Beispiel das Netzwerk in Abbildung 17 so sind in diesem 5 dyadwise-shared-partner-1 Statistiken, aber keine einzige dyadwise-shared-partner- $l$  Statistik mit  $l > 1$  enthalten. Die Ecken B und G besitzen zum Beispiel genau einen gemeinsamen Nachbarn, nämlich A. Allerdings gibt es für kein Knotenpaar mehr als einen gemeinsamen Nachbarn. Für die Statistik ergibt sich:

$$\Gamma_{dsp(k)} : \mathcal{A}(N) \rightarrow \mathbb{R} \quad , \quad A \mapsto \sum_{i=1}^N \sum_{j=1}^N \left[ \mathbf{1}_k \left( \sum_{m=1}^N a_{im} a_{mj} \right) \right] \quad (23)$$

Auf die dyad-shared-partner Statistik kann mit  $dsp(k)$  zurückgegriffen werden. Mit Hilfe der Einschränkung  $a_{ij} = 1$  lässt sich analog die *edgewise-shared-partner-k* Statistik  $esp(k)$  und mit  $a_{ij} = 0$  die *nonegewise-shared-partner-k* Statistik  $nsp(k)$  definieren.

## 5.2 Modelle für das Handelsnetzwerk

Basierend auf den in Abschnitt 3.3 beobachteten strukturellen Eigenschaften des Handelsnetzwerks und den im vorherigen Abschnitt eingeführten Netzwerkstatistiken, soll nun für jedes Jahr ein geeignetes ERGM generiert werden. Hierbei wird jeweils das Handelsnetzwerk und nicht das Gesamtnetzwerk des betreffenden Jahres betrachtet. Dies geschieht aus verschiedenen Gründen:

- Durch Beschränkung auf das Netzwerk aller tatsächlich am Handel beteiligten Nationen in jedem Jahr, werden Nationen, welche zu diesem noch nicht bzw. nicht mehr existierten automatisch ausgeschlossen. Somit gehen insbesondere auch die Nationen, welche sich zu keinem Zeitpunkt am Handel beteiligt haben in keines der Modelle ein (vgl. Anhang 8.1 und 8.2).
- Betrachtet man das Netzwerk in unterschiedlichen Jahren, so wird deutlich, dass in jedem Jahr eine Vielzahl der existierenden Nationen keine Verbindung zum tatsächlichen Handelsnetzwerk aufweisen. Das Ziel ist es allerdings, das Netzwerk der handelnden Nationen in jedem Jahr zu modellieren.
- Versuche, verschiedene ERGMs auf das Gesamtnetzwerk anzupassen, scheitern an degeneracy-Problemen: Durch die vielen isolierten Knoten werden die Strukturen, welche das Handelsnetzwerk charakterisieren zu stark in den Hintergrund gedrängt (für die Erläuterung eines ähnlichen Effekts für die Statistik  $istar(2)$  sei auf [10] verwiesen).

Wir verwenden also ab jetzt für jedes Jahr das Handelsnetzwerk. Zu beachten ist hierbei, dass sich die Handelsnetzwerke unterschiedlicher Jahre in der Regel in der Anzahl der Knoten unterscheiden, da nicht in jedem Jahr die selben Nationen am Waffenhandel beteiligt waren.

Als erster Versuch wird das Modell

$$\mathbb{P}_\theta(Y = A) = \frac{\exp(\theta^T \cdot \Gamma_1(A))}{\sum_{A^* \in \mathcal{A}(N(x))} \exp(\theta^T \cdot \Gamma_1(A^*))}$$

mit dem Statistikenvektor

$$\Gamma_1(A) := (\Gamma_{edges}(A), \Gamma_{asym}(A), \Gamma_{ideg(1)}(A), \Gamma_{odeg(0)}(A), \Gamma_{ostar(2)}(A))^T \quad (24)$$

angepasst, wobei  $N(x)$  die Anzahl der Knoten im Handelsnetzwerk im Jahr

$$x \in \{1950, \dots, 2012\}$$

bezeichnet. Für dieses kann allerdings auf Grund von degeneracy-Problemen in keinem Jahr von 1950-2012 eine sinnvolle approximative Likelihoodschätzung der Modellparameter vorgenommen werden. Der durch den MCMC-Algorithmus konstruierte stochastische Prozess besitzt als stationäre Verteilung nicht die durch das Modell definierte Verteilung der Zufallsvariablen  $Y$ .

Um zu sehen, welche Statistiken für die Degeneration verantwortlich sind, soll im folgenden ein ERGM für jede der oben integrierten Statistiken separat angepasst werden. Die Statistik  $\Gamma_{edges}$  ist dabei in jedem der Modelle enthalten, da sie, wie im vorherigen Abschnitt beschrieben, als eine Art Intercept fungiert.

Die *mcmc.diagnostics* der jeweiligen Modelle sind in den Abbildungen 18 - 23 jeweils exemplarisch für das Jahr 2012 dargestellt. Für die übrigen Jahre ergibt sich ein vergleichbares Bild.

Die Abbildungen sind hierbei jeweils wie folgt zu interpretieren: Die linke Seite zeigt für jede in das jeweilige Modell integrierte Statistik die Werte, welche diese Statistik auf den via MCMC simulierten Netzwerken annimmt (man nennt diese Abbildungen auch *trace plots*). Diese Werte sind hierbei um den Wert der jeweiligen Statistik auf dem beobachteten Netzwerk zentriert. Die rechte Seite zeigt die empirische Dichtefunktion über den möglichen (zentrierten) Zuständen der betreffenden Statistik, basierend auf den simulierten Netzwerken. Für eine detailliertere Erklärung sei auf [12] verwiesen.

Wie sieht nun also eine gute MCMC-Diagnose aus? Die empirische Dichtefunktion sollte für jede zentrierte integrierte Statistik  $\Gamma_*$  symmetrisch um Null verlaufen, da der Erwartungswert der zentrierten Statistik

$$\Gamma_*(\cdot) - \Gamma(A_{obs})$$

gerade Null betragen sollte. Ist dies nicht der Fall, so weichen die konstruierten Netzwerke in der betreffenden Statistik systematisch vom beobachteten Netzwerk ab und können somit nicht als aus der selben Verteilung stammend angenommen werden. Zusätzlich sollten die Trajektorien auf der rechten Seite weder eine Abhängigkeitsstruktur erkennbar werden lassen, noch konstant auf einem Wert verharren. Ersteres wäre ein Indikator dafür, dass der konstruierte stochastische Prozess die Markov-Eigenschaft verletzt, letzteres dafür, dass er konstant auf einem Netzwerk verharrt.

Zunächst zu Abbildung 18: Die Abbildung zeigt die MCMC-Diagnose des ERGMs mit den Statistiken  $\Gamma_{edges}$  und  $\Gamma_{ideg(1)}$ . Diese sieht für beide Statistiken unbedenklich aus, da die empirischen Dichten jeweils symmetrisch um Null verlaufen und die trace plots auf der linken Seite weder Abhängigkeitsstrukturen erkennen lassen,

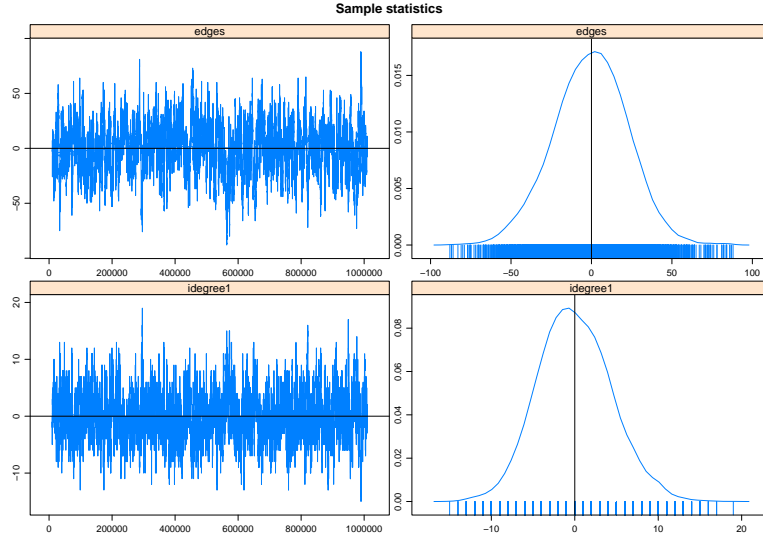


Abbildung 18: MCMC-Diagnose für das ERGM mit  $\Gamma_{edges}$  und  $\Gamma_{ideg(1)}$ .

noch konstant auf einem Wert verbleiben. Somit ist  $\Gamma_{ideg(1)}$  nicht für die Degeneration verantwortlich und sollte auch weiterhin in das Modell integriert werden.

Zu Abbildung 19: Die Abbildung zeigt die MCMC-Diagnose des ERGMs mit den Statistiken  $\Gamma_{edges}$  und  $\Gamma_{odeg(0)}$ . Hier lassen sich sowohl starke Abhängigkeitsstrukturen in den trace plots als auch eine nicht um Null verlaufende empirische Dichtefunktion beobachten. Beides sind starke Indikatoren für eine Degeneration des Modells. Somit sollte  $\Gamma_{odeg(0)}$  aus dem Modell genommen werden.

Zu Abbildung 20: Die Abbildung zeigt die MCMC-Diagnose des ERGMs mit den Statistiken  $\Gamma_{edges}$  und  $\Gamma_{ostar(2)}$ . Auch hier beobachtet man eine nicht um Null verlaufende empirische Dichtefunktion: Die via MCMC-simulierten Netzwerke weichen durchschnittlich um ca. 670 Kanten und 34700  $ostar(2)$  vom beobachteten Netzwerk ab. Folglich sollte auch  $ostar(2)$  aus dem Modell genommen werden.

Zu Abbildung 21: Die Abbildung zeigt die MCMC-Diagnose des ERGMs mit den Statistiken  $\Gamma_{edges}$  und  $\Gamma_{asym}$ . Diese sieht wie schon beim ersten Modell (Abbildung 18) für beide Statistiken unbedenklich aus.

Von den in das Modell integrierten Statistiken führen nur  $\Gamma_{edges}$ ,  $\Gamma_{ideg(1)}$  und  $\Gamma_{asym}$  nicht zu einer Degeneration in der Modellschätzung. Will man trotzdem die in Abschnitt 3.3 beobachtete charakteristische Struktur der einigen wenigen Großex-

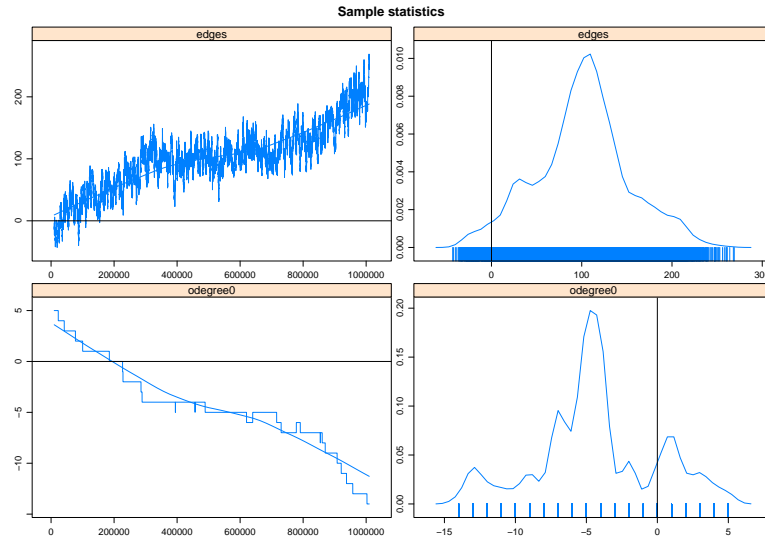


Abbildung 19: MCMC-Diagnose für das ERGM mit  $\Gamma_{edges}$  und  $\Gamma_{odeg(0)}$ .

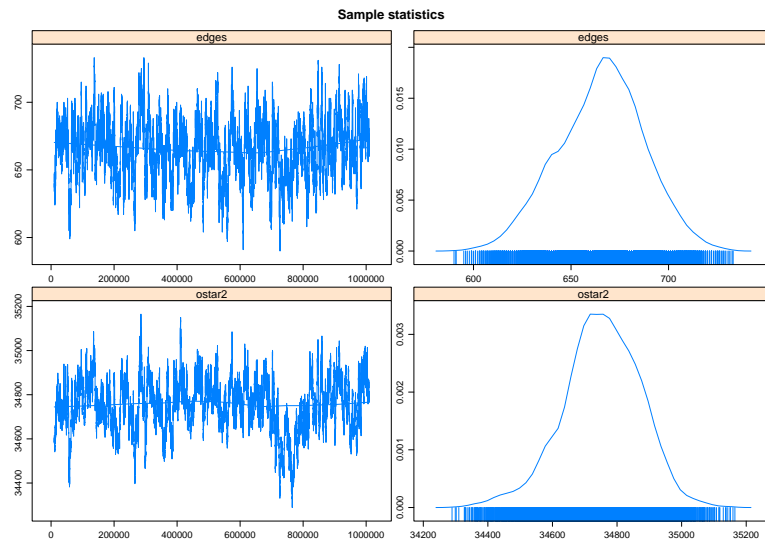
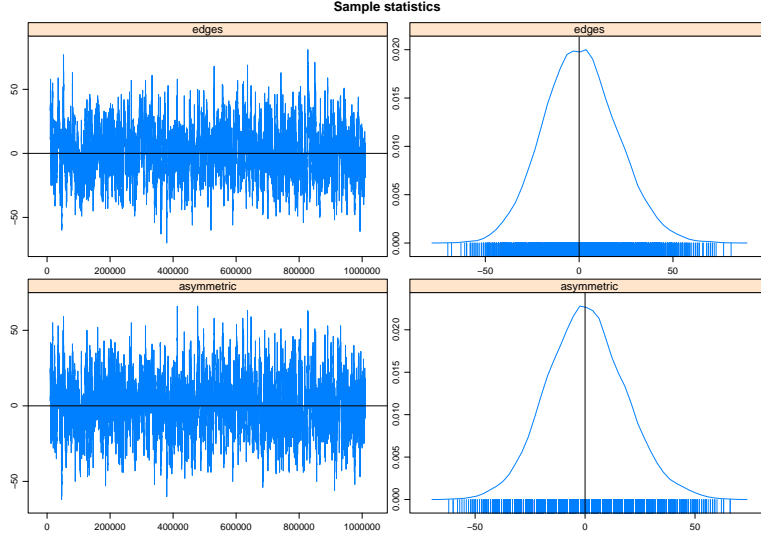


Abbildung 20: MCMC-Diagnose für das ERGM mit  $\Gamma_{edges}$  und  $\Gamma_{ostar(2)}$ .


 Abbildung 21: MCMC-Diagnose für das ERGM mit  $\Gamma_{edges}$  und  $\Gamma_{asym}$ .

porteur des Handelsnetzwerk modellieren, so muss eine Alternative Statistik, welche einen ähnlichen Effekt beschreibt neu in das Modell aufgenommen werden. Geeignet hierfür ist die im vorherigen Abschnitt eingeführte Statistik  $\Gamma_{dsp(1)}$ , also die Anzahl der Knotenpaare, welche genau einen gemeinsamen Nachbarn besitzen. Auch durch diese Statistik wird die sternförmige Struktur bei der Modellierung berücksichtigt.

Überprüfen wir also zunächst die MCMC-Diagnose des ERGMs mit

$$\Gamma_2(A) := (\Gamma_{edges}(A), \Gamma_{dsp(1)}(A))^T \quad (25)$$

Diese ist in Abbildung 22 dargestellt. Man sieht das die Schätzung des Modells nicht degeneriert und  $dsp(1)$  somit zusätzlich aufgenommen werden kann.

Als nächster Versuch wird also ein ERGM mit dem Statistikenvektor

$$\Gamma_3(A) := (\Gamma_{edges}(A), \Gamma_{asym}(A), \Gamma_{deg(1)}(A), \Gamma_{dsp(1)}(A))^T \quad (26)$$

angepasst. Die zugehörige MCMC-Diagnose ist in Abbildung 23 dargestellt. Man sieht deutlich, dass keine Degeneration vorliegt. Das Modell führt also zu einer sinnvollen approximativen Likelihoodschätzung des Koeffizientenvektors

$$\theta := (\theta_{edges}, \theta_{deg(1)}, \theta_{asym}, \theta_{dsp(1)})^T$$

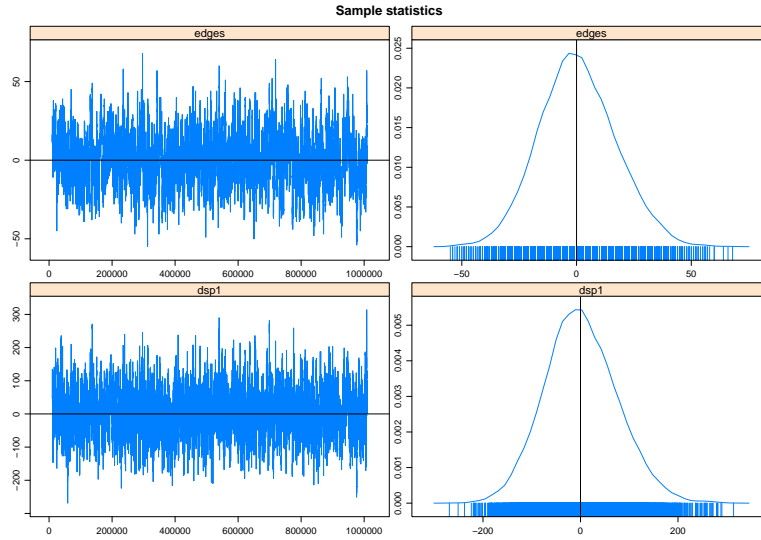


Abbildung 22: MCMC-Diagnose für das ERGM mit  $\Gamma_{edges}$  und  $\Gamma_{dsp(1)}$ .

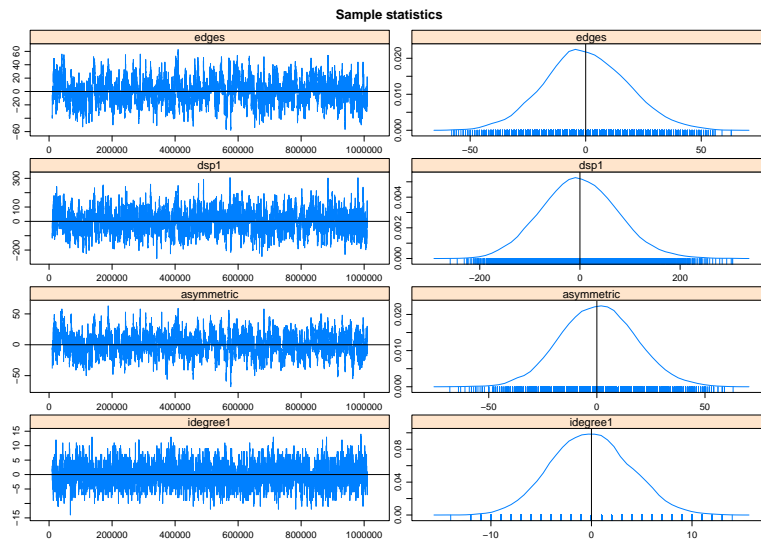


Abbildung 23: MCMC-Diagnose für das ERGM mit  $\Gamma_{edges}$ ,  $\Gamma_{asym}$ ,  $\Gamma_{ideg(1)}$  und  $\Gamma_{dsp(1)}$ .



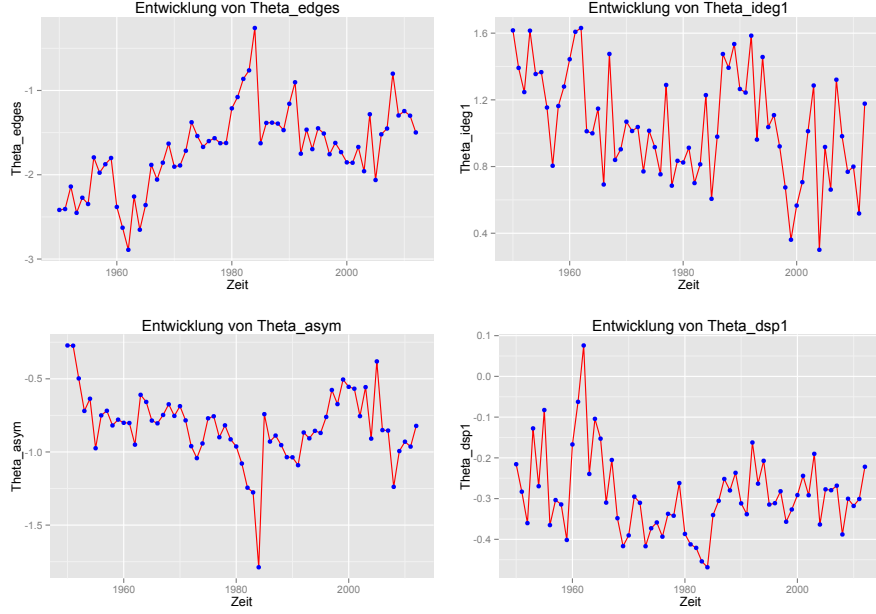


Abbildung 24: Zeitreihen der geschätzten Parameter der Statistiken  $\Gamma_{edges}$ ,  $\Gamma_{asym}$ ,  $\Gamma_{ideg(1)}$  und  $\Gamma_{dsp(1)}$  von 1950-2012.

Das Modell mit dem Parametervektor  $\theta$  führt für jedes Jahr  $x$  zu ähnlich guten MCMC-Diagnosen. Es stellt sich daher als nächstes die Frage, wie sich die im Modell geschätzten Parameter über die Zeit verändern. Diese Zeitreihen erfasst Abbildung 24. Es ist zu erkennen, dass über den gesamten Zeitraum die geschätzten Parameter für die Statistiken  $\Gamma_{edges}$ ,  $\Gamma_{asym}$  und  $\Gamma_{dsp(1)}$  einen negativen Effekt und die Statistik  $\Gamma_{ideg(1)}$  einen positiven Effekt aufweist.

Interpretieren wir zunächst den positiven Effekt der Statistik  $\Gamma_{ideg(1)}$ . Auf Kanten-ebene bedeutet dies, dass für zwei Netzwerke  $A$  und  $B$ , die bis auf die Kante  $(i, j)$  bekannt sind, wobei nur die Change-Statistik

$$(\Delta_{ideg(1)}A)_{ij} := \Gamma_{ideg(1)}(A_{ij}^+) - \Gamma_{ideg(1)}(A_{ij}^-)$$

von  $A$  um eins größer ist als die Change-Statistik

$$(\Delta_{ideg(1)}B)_{ij} := \Gamma_{ideg(1)}(B_{ij}^+) - \Gamma_{ideg(1)}(B_{ij}^-)$$

von  $B$  ist, während alle anderen Change-Statistiken von  $A$  und  $B$  identisch sind, die Kante  $(i, j)$  eher in Netzwerk  $A$  entsteht. Die Interpretation auf Netzwerkebene ist et-

was griffiger: Für zwei Netzwerke  $A$  und  $A^{deg(1)-}$  ist das Netzwerk  $A^{deg(1)-}$ , dessen In-Degree=1 Anzahl um eins kleiner ist als die des Netzwerkes  $A$  (wobei die beiden Netzwerke auf allen anderen Statistiken gleich sind), immer weniger plausibel. Grob gesprochen teilt unser Modell also Netzwerken eine größere Wahrscheinlichkeitsmasse zu, welche eine höhere Anzahl von Knoten mit einem In-Degree von eins aufweisen.

Als nächstes soll der negative Effekt von  $\Gamma_{edges}$  interpretiert werden. Auf Kantenebene ist keine Interpretation möglich, da keine Netzwerke existieren, deren Change-Statistiken für die Anzahl an Kanten sich um eins unterscheiden. Die Change-Statistik für die Anzahl an Kanten ist in jedem Netzwerk gleich eins. Es bleibt somit noch die Interpretation auf Netzwerkebene. Für zwei Netzwerke  $A$  und  $A^{edges-}$  ist das Netzwerk mit einer Kante weniger, wobei alle anderen Statistiken auf den Netzwerken gleich sind, plausibler als das Netzwerk mit einer Kante mehr. Grob gesprochen tendiert unser Modell also zu dünner besetzten Netzwerken (d.h. zu Netzwerken mit wenigen Kanten). Ganz analog lassen sich die Statistiken  $\Gamma_{asym}$  und  $\Gamma_{dsp(1)}$  interpretieren. Für beide ist zudem eine Interpretation auf Kantenebene möglich.

Für das Modell konnten nun erfolgreich Parameter geschätzt werden. Doch ist das Modell auch gut? Um das beurteilen zu können sind in Abbildung 25 die *goodness-of-fit* Plots für die *Hyperstatistiken* Dyadwise-Shared-Partners, Edgewise-Shared-Partners, geodätische Distanz und In-Degree Verteilung exemplarisch für das Jahr 2012 dargestellt. Wieder sehen die entsprechenden Bilder für die übrigen Jahre sehr ähnlich aus. Die Plots sind hierbei wie folgt zu verstehen: Nachdem, wie in Kapitel 4 beschrieben, mit Hilfe von MCMC-Algorithmen der approximative Likelihood-Schätzer  $\hat{\theta}$  für  $\theta$  bestimmt worden ist, will man untersuchen, wie ähnlich die Verteilung  $\mathbb{P}_{\hat{\theta}}$  der Verteilung  $\mathbb{P}_{\theta}$  ist. Hierfür wird wiederum MCMC-basiert eine große Anzahl von Netzwerken aus der Verteilung  $\mathbb{P}_{\hat{\theta}}$  simuliert und anschließend anhand oben erwähnter Hyperstatistiken mit den Hyperstatistiken auf dem beobachteten Netzwerk verglichen.

Die fette schwarze Linie repräsentiert den Wert der jeweiligen Hyperstatistik im beobachteten Netzwerk. Der durch die Boxplots begrenzte Bereich, gibt den Bereich an, in welchem 95 % der Hyperstatistikwerte der simulierten Netzwerke liegen.

Gut ist ein Modell also dann, wenn die schwarze Linie innerhalb der Boxplots verläuft. Sogar noch besser ist, wenn die schwarze Linie jeweils nahe dem im Boxplot dargestellten Median verläuft und die einzelnen Boxen dabei jeweils möglichst schmal sind. Eine detaillierte Interpretationsbeschreibung der *goodness-of-fit* Plots findet sich beispielsweise in [11], zur genauen Interpretation von Boxplots generell

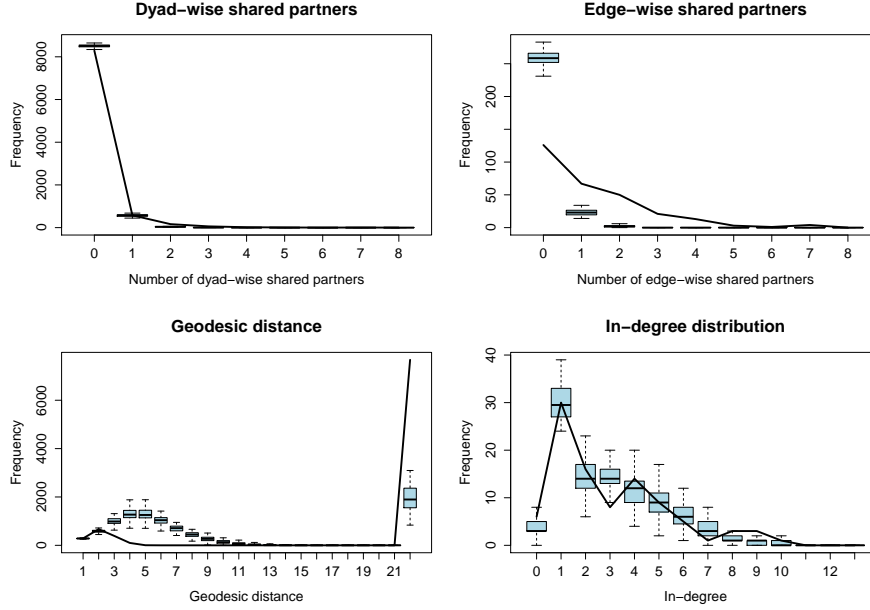


Abbildung 25: Goodness-of-fit Plot für das Modell mit  $\Gamma_{edges}$ ,  $\Gamma_{asym}$ ,  $\Gamma_{ideg(1)}$  und  $\Gamma_{dsp(1)}$ .

sei auf [6] verwiesen.

Kommen wir nun zur Interpretation von Abbildung 25: Betrachtet man zunächst den goodness-of-fit für die Hyperstatistik In-Degree, so lässt sich erkennen, dass die durchschnittlichen In-Degree Werte der simulierten Netzwerke nahe der des beobachteten Netzwerks verlaufen. Die geschätzte Verteilung  $\mathbb{P}_{\hat{\theta}}$  produziert also Zufallsnetzwerke, deren In-Degree-Verteilung die unseres beobachteten Netzwerks gut widerspiegelt. Auffällig ist hierbei, dass die Anzahl der In-Degree=1 Knoten des beobachteten Netzwerks exakt dem Median der Anzahlen von In-Degree=1 der simulierten Netzwerke entspricht. Dies ist allerdings nicht verwunderlich, da die Statistik  $\Gamma_{ideg(1)}$  in das Modell aufgenommen wurde. Auch die Verteilung der Dyadwise-Shared-Partners wird sehr gut durch die simulierten Hyperstatistiken widergespiegelt. Großen Anteil hat hierfür die in das Modell integrierte Statistik  $\Gamma_{dsp(1)}$ .

Ein anderes Bild ergibt sich für die zwei übrigen Hyperstatistiken: Die simulierten Netzwerke unterscheiden sich drastisch vom beobachteten Netzwerk bezüglich ihrer Verteilung der geodätischen Distanzen und der Verteilung der Edgewise-Shared-Partners. Die geschätzte Verteilung  $\mathbb{P}_{\hat{\theta}}$  approximiert die wahre Verteilung  $\mathbb{P}_{\theta}$  also nur ungenügend. Als besonders auffällig erweist sich der goodness-of-fit Plot der geodätischen Distanz: In unserem beobachteten Netzwerk sind ca. 80% der Knoten-

paare nicht durch einen gerichteten Pfad verbunden, bei den simulierten Netzwerken liegt der Anteil der unverbundenen Knotenpaare in 95% der Fälle nur zwischen 5% und 30%. Diesem Problem könnte vermutlich entgegengewirkt werden, indem eine Netzwerkstatistik in das Modell mit aufgenommen wird, welche die geodätische Distanz berücksichtigt. Leider ist unseres Wissens nach keine derartige Statistik in  $R$  implementiert.

Ein weiteres generelles Problem mit unserem Modell wurde bereits in Kapitel 4 theoretisch besprochen: Integriert man nur endogene Netzwerkstatistiken, so weist das geschätzte Modell *strukturgleichen* Netzwerken dieselbe Wahrscheinlichkeitsmasse zu. Dieser Effekt kann durch Integration von Kovariablen abgeschwächt werden. Aus diesem Grund wurde für die Jahre 1969-2003 zusätzlich zum Handelsnetzwerk das Netzwerk der *Verteidigungsabkommen* (VA) der jeweiligen Nationen mit in das Modell aufgenommen. Die Daten stammen von der frei zugänglichen Datenbank der Rice University (für nähere Informationen siehe [1] oder [3]).

Für jedes Jahr  $x \in \{1969, \dots, 2012\}$  liegt eine symmetrische Matrix  $C(x)$  mit

$$c_{ij}(x) = \begin{cases} 1 & , \text{ falls } i \text{ und } j \text{ haben VA} \\ 0 & , \text{ sonst} \end{cases}$$

vor, in welcher eine 1 an der Stelle  $(i, j)$  bzw.  $(j, i)$  bedeutet, dass zwischen den Nationen  $i$  und  $j$  ein Verteidigungsabkommen besteht. Diese kann über die Statistik

$$\Gamma_{C(x)} : \mathcal{A}(N(x)) \rightarrow \mathbb{R} \quad , \quad A \mapsto \sum_{i=1}^{N(x)} \sum_{j=1}^{N(x)} a_{ij} c(x)_{ij} \quad (27)$$

mit in das jeweilige Modell aufgenommen werden. Anschaulich gesprochen zählt  $\Gamma_{C(x)}(A)$  gerade die Kanten im Netzwerk  $A$ , welche zwischen Nationen verlaufen, die ein Verteidigungsabkommen geschlossen haben (d.h. diejenigen Handelströme, die zwischen Nationen verlaufen, welche ein VA besitzen).

Als nächstes wurde also für jedes Jahr ein Modell mit den Statistiken

$$\Gamma_4(A) := (\Gamma_{edges}(A), \Gamma_{asym}(A), \Gamma_{ideg(1)}(A), \Gamma_{dsp(1)}(A), \Gamma_{C(x)}(A))^T \quad (28)$$

angepasst. Die Zeitreihe des zugehörigen Koeffizientenschätzers ist in Abbildung 26 dargestellt. Man sieht sofort, dass die Kovariable über den gesamten Zeitraum einen stark positiven Effekt aufweist. Dies lässt sich nun wie folgt interpretieren: Von zwei strukturgleichen Netzwerken ist dasjenige plausibler, welches mehr Übereinstimmung

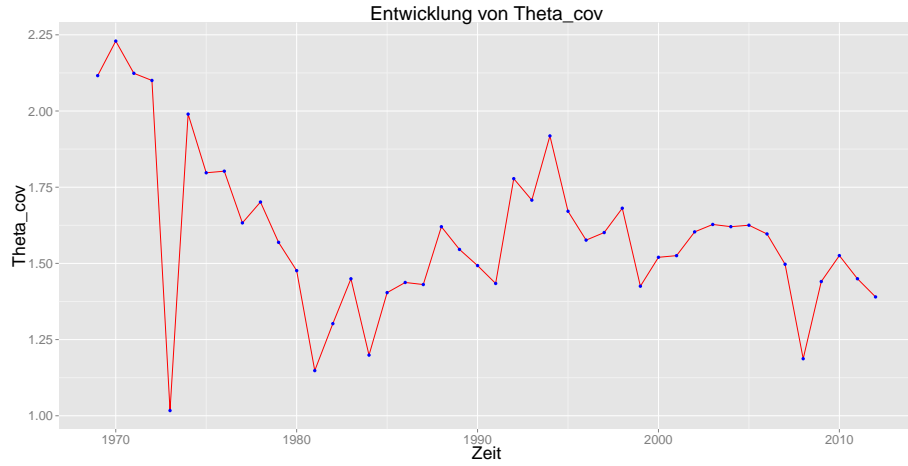


Abbildung 26: Zeitreihe des geschätzten Kovariablenparameters  $\theta_{cov}$ .

gen mit dem Netzwerk der VA aufweist. Das geschätzte Modell weist also demjenigen Netzwerk größere Wahrscheinlichkeitsmasse zu, welches der Struktur des VA Netzwerks ähnlicher ist.

Abbildung 27 zeigt die goodness-of-fit Plots des Modells mit dem Statistikenvektor  $\Gamma_4$  exemplarisch für das Jahr 2012. Man sieht, dass jedoch keine (anhand der integrierten Hyperstatistiken) erkennbare Veränderung der Plots stattgefunden hat. Die aus der Verteilung  $\mathbb{P}_{\hat{\theta}}$  simulierten Netzwerke sind also nach wie vor verbesserungswürdig.

Um das Modell zu verbessern, wurden (jedoch nur für das Jahr 2012) weitere Kovariableninformationen eingeholt:

- *Militärausgaben*: Für jede 2012 am Handelsnetzwerk beteiligte Nation wurden die Militärausgaben in US-Dollar erfasst. Diese sind frei verfügbar auf der Homepage von SIPRI zu finden (siehe [9]).
- *Bruttoinlandsprodukt (BIP)*: Für jede 2012 am Handelsnetzwerk beteiligte Nation wurden das BIP in US-Dollar erfasst. Die Daten stammen vom *National Bureau of Economic Research (NBER)* (siehe [8]).

Abbildung 28 zeigt die goodness-of-fit Plots des Modells mit dem Statistikenvektor  $\Gamma_4$  und den zusätzlichen Kovariablen *Militärausgaben* und *Bruttoinlandsprodukt* für das Jahr 2012. Insbesondere für die Hyperstatistik Edgewise-Shared-Partners sieht man eine deutliche Verbesserung des Modells. Auch die Varianz der geodätischen Distanz hat sich leicht verbessert.

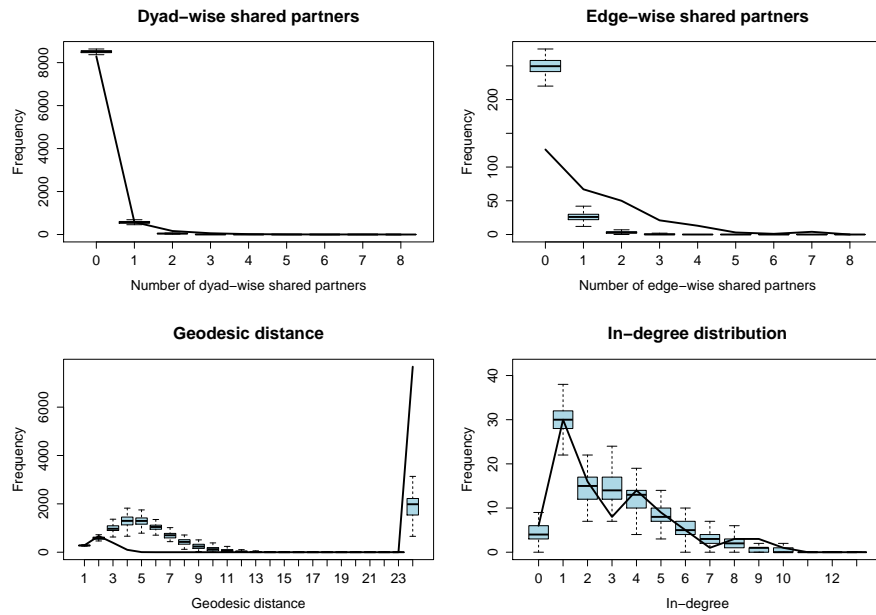


Abbildung 27: Goodness-of-fit Diagnose des Modells mit  $\Gamma_4$  für das Jahr 2012.

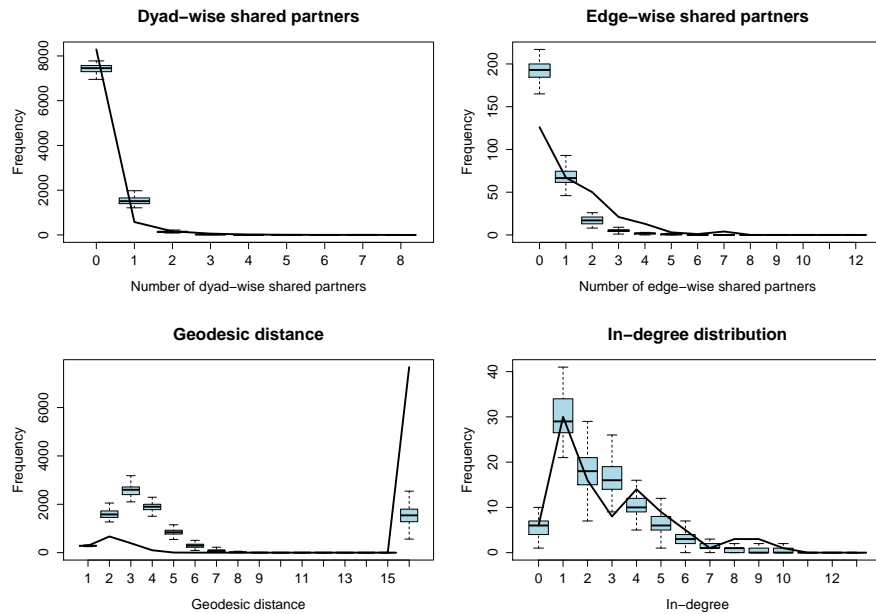


Abbildung 28: Goodness-of-fit Diagnose des Modells mit  $\Gamma_4$  und den zusätzlichen Kovariablen *Militärausgaben* und *Bruttoinlandsprodukt* für das Jahr 2012.

## 6 Zusammenfassung der Ergebnisse und Ausblick

In diesem Bericht wurden Daten zum internationalen Waffenhandel untersucht. Im ersten Kapitel wurde die Datengrundlage auf Fehler überprüft. Bei der Spiegelung des Import- und des Exportdatensatzes zeigte sich, dass diese nur in Ausnahmefällen voneinander abwichen. Diskrepanzen waren nur bei den Nationen Algerien und Demokratische Republik Kongo zu erkennen. Diese waren stets derart, dass die betreffenden Nationen keine Angaben zum Import machten, während an sie liefernde Nationen Handel dokumentierten.

Anschließend wurde eine deskriptive Analyse des Exportdatensatzes vorgenommen. Insbesondere fiel hierbei die große Dominanz einiger weniger Nationen im Weltwaffenhandel auf: In den Perioden vor und nach Fall des eisernen Vorhangs, hatten die Top 10 Exporteure einen Anteil von 97,8 % bzw. 85,8 % am gesamt durchgeführten Waffenexport. Zudem lies sich beobachten, dass, obwohl die Anzahl der im Waffenhandel aktiven Nationen über die Zeit massiv zugenommen hat, einige charakteristische Strukturen des Netzwerks über den gesamten Zeitraum erhalten bleiben.

Schließlich wurde eine inferentielle Analyse mit Hilfe des ERGMs vorgenommen. Es stellte sich heraus, dass sich die in R implementierten ERGM-Terme `edges`, `dsp(1)`, `asymmetric`, `idegree(1)` eignen, um das Handelsnetzwerk zu modellieren. Weiter verbessert werden konnte das Modell durch die Integration exogener Kovariableninformationen: Es wurden Daten zu Verteidigungspakten zwischen Nationen, dem Bruttoinlandsprodukt der einzelnen Nationen und den Militärausgaben der einzelnen Nationen verwendet.

Aller Voraussicht nach, könnte das Modell durch Integration weiterer Kovariablen weiter verbessert werden. Vorschläge hierfür wären beispielsweise Daten zur geographischen Distanz zwischen den einzelnen Nationen, Daten zur Konfliktsituation zwischen den einzelnen Nationen sowie Daten zu Handelsabhängigkeiten.

Wie bereits im Kapitel 4.2 behandelt, könnte zudem die zeitliche Struktur sowie die Gewichtung der Daten mit Hilfe von TERGM bzw. GERGM Ansätzen berücksichtigt werden. Interessant wäre sicherlich auch eine Betrachtung von verkleinerten Netzwerken mit über die Zeit fixierten Knoten. Dies würde eine Interpretation deutlich vereinfachen, jedoch die Struktur des Netzwerkes teilweise substantiell verändern.

## 7 Kommentare zum elektronischen Anhang

In diesem Abschnitt sollen die wichtigsten für den Bericht geschriebenen Funktionen und Codes jeweils kurz erläutert werden. Diese greifen an verschiedenen Stellen auf die R-Pakete *igraph*, *statnet*, *reshape*, *gridExtra* und *ggplot2* zu. Die jeweiligen Programme finden sich im elektronischen Anhang.

- **Datenaufbereitung(x)**: Eingegeben wird der Pfad der Excel-Datei einer Nation für Im- oder Export. Die Funktion liest die Datei in R ein, wandelt sie in einen *data.frame* um und entfernt überflüssige Spalten und Zeilen.
- **AM(x,dens)**: Nachdem alle Exportdateien in alphabetischer Reihenfolge mittels **Datenaufbereitung** in der Liste *fl* abgespeichert wurden, erzeugt die Funktion **AM** eine Adjazenzmatrix gewünschter Größe für ein beliebiges Jahr. Siehe hierzu auch Abschnitt 1.2.
- **TIVM(x)**: Für ein Jahr *x* wird die mit dem TIV geichtete Adjazenzmatrix erzeugt.
- **NET(time,st,rt,trade,store)**: Plottet für ein Jahr *time* das Netzwerk aller Nationen, welche mindestens einen Export-TIV von *st* oder einen Import-TIV von *rt* aufweisen. Der *trade* Parameter steuert, ob im visualisierten Netzwerk die Hauptexporteure (*trade*=1) oder die Hauptimporteure (*trade*=2) farblich gekennzeichnet werden. Setzt man den *store* Parameter gleich 1, so werden zusätzlich zugeschnittene Adjazenzmatrix und zugeschnittene gewichtete Adjazenzmatrix ausgegeben.
- **TOPPERIODS(number,from,till)**: Gibt eine Liste der Top *number* Exporteure in der Periode von *from* bis *till* aus. Analog funktioniert die Funktion **TOPPERIODR(number,from,till)** für die Top-Importeure.
- **TOPSUP(from,till,number)**: Gibt eine Liste der Top *number* Exporteure nach Anzahl der belieferten Nationen aus. Analog funktioniert die Funktion **TOPPREC(from,till,number)** für den Import.

Des Weiteren befinden sich im elektronischen Anhang eine Vielzahl weiterer Programme, die insbesondere zur Erstellung der im Bericht verwendeten Graphiken und zum Rechnen der Modelle gebraucht werden. Es wurde versucht, den jeweiligen Dateien vielsagende Titel zu geben, sodass schnell die Richtigen gefunden werden können. Zudem sind die einzelnen Codes auskommentiert.



## 8 Anhang

### 8.1 Liste aller Nationen

ID	Nation	Jahre	ID	Nation	Jahre
1	Abkhazia	seit 1992	31	Burundi	seit 1962
2	Afghanistan		32	Cambodia	seit 1953
3	Albania		33	Cameroon	seit 1960
4	Algeria	seit 1962	34	Canada	
5	Andorra		35	Cape Verde	seit 1975
6	Angola	seit 1975	36	Central African Republic	seit 1960
7	Antigua and Barbuda	seit 1981	37	Chad	seit 1960
8	Argentina		38	Chile	
9	Armenia		39	China	
10	Aruba		40	Colombia	
11	Australia		41	Comoros	seit 1975
12	Austria		42	Congo, Democratic Repubic of	seit 1960
13	Azerbaijan	seit 1991	43	Congo, Republic of	seit 1960
14	Bahamas, the	seit 1973	44	Cook Islands	seit 1965
15	Bahrain	seit 1971	45	Costa Rica	
16	Bangladesh	seit 1971	46	Cote d'Ivoire	seit 1960
17	Barbados	seit 1966	47	Croatia	seit 1991
18	Belarus	seit 1991	48	Cuba	
19	Belgium		49	Cyprus	seit 1960
20	Belize	seit 1981	50	Cyprus, Northern	seit 1983
21	Benin	seit 1961	51	Czech Republic	seit 1993
22	Bhutan		52	Czechoslovakia	bis 1992
23	Biafra	1967-1970	53	Darfur	
24	Bolivia		54	Denmark	
25	Bosnia and Herzegovina	seit 1992	55	Djibouti	seit 1977
26	Botswana	seit 1966	56	Dominica	seit 1978
27	Brazil		57	Dominican Republic	
28	Brunei Darussalam		58	Ecuador	
29	Bulgaria		59	Egypt	
30	Burkina Faso	seit 1960	60	El Salvador	

ID	Nation	Jahre	ID	Nation	Jahre
61	Equatorial Guinea	seit 1968	96	Kenya	seit 1963
62	Eritrea	seit 1993	97	Kiribati	seit 1979
63	Estonia	seit 1991	98	Korea, North	
64	Ethiopia		99	Korea, North	
65	Fiji	seit 1970	100	Kosovo	seit 2008
66	Finland		101	Kuwait	seit 1961
67	France		102	Kyrgyzstan	seit 1991
68	Gabon	seit 1960	103	Laos	
69	Gambia	seit 1965	104	Latvia	seit 1991
70	Georgia	seit 1991	105	Lebanon	
71	German Democratic Republic	1949-1990	106	Lesotho	seit 1966
72	Germany		107	Liberia	
73	Ghana	seit 1957	108	Libya	seit 1951
74	Greece		109	Liechtenstein	
75	Grenada	seit 1974	110	Lithuania	seit 1990
76	Guatemala		111	Luxembourg	
77	Guinea	seit 1958	112	Macedonia, FYROM	seit 1991
78	Guinea-Bissau	seit 1973	113	Madagasacar	seit 1960
79	Guyana	seit 1966	114	Malawi	seit 1964
80	Haiti		115	Malaysia	seit 1957
81	Honduras		116	Maldives	seit 1965
82	Hungary		117	Mali	seit 1960
83	Iceland		118	Malta	seit 1964
84	India		119	Marshall Islands, the	seit 1986
85	Indonesia		120	Mauritania	seit 1960
86	Iran		121	Mauritius	seit 1968
87	Iraq		122	Mexico	
88	Ireland		123	Micronesia	seit 1986
89	Israel		124	Moldova	seit 1991
90	Italy		125	Monaco	
91	Jamaica	seit 1962	126	Mongolia	
92	Japan		127	Montenegro	seit 2006
93	Jordan		128	Morocco	seit 1956
94	Katanga		129	Mozambique	seit 1975
95	Kazakhstan	seit 1991	130	Myanmar	

ID	Nation	Jahre	ID	Nation	Jahre
131	Namibia		166	Sierra Leone	seit 1961
132	Nauru	seit 1968	167	Singapore	seit 1965
133	Nepal		168	Slovakia	seit 1993
134	Netherlands		169	Slovenia	seit 1991
135	New Zealand		170	Solomon Islands	
136	Nicaragua		171	Somalia	seit 1960
137	Niger	seit 1960	172	Somaliland	seit 1991
138	Nigeria	seit 1960	173	South Africa	
139	Niue	seit 1974	174	South Ossetia	
140	Norway		175	South Sudan	seit 2005
141	Oman		176	Soviet Union	until 1991
142	Pakistan		177	Spain	
143	Palau	seit 1994	178	Sri Lanka	
144	Palestine		179	Sudan	seit 1956
145	Panama		180	Suriname	seit 1975
146	Papua New Guinea	seit 1975	181	Swaziland	seit 1968
147	Paraguay		182	Sweden	
148	Peru		183	Switzerland	
149	Philippines, the		184	Syria	
150	Poland		185	Taiwan	
151	Portugal		186	Tajikistan	seit 1991
152	Qatar		187	Tanzania	seit 1961
153	Romania		188	Thailand	
154	Russia	seit 1992	189	Timor-Leste	seit 2002
155	Rwanda	seit 1962	190	Togo	seit 1960
156	Saint Kitts and Nevis	seit 1983	191	Tonga	seit 1970
157	Saint Lucia	seit 1979	192	Trans-Dniester	seit 1990
158	Saint Vincent and the Grenadines	seit 1979	193	Trinidad and Tobago	seit 1962
159	Samoa	seit 1962	194	Tunisia	seit 1956
160	San Marino		196	Turkey	
161	Sao Tome and Principe	seit 1975	197	Turkmenistan	seit 1991
162	Saudi Arabia		197	Tuvalu	seit 1978
163	Senegal	seit 1960	198	Uganda	seit 1962
164	Serbia	seit 1992	199	Ukraine	seit 1991
165	Seychelles	seit 1976	200	United Arab Emirates	seit 1971

ID	Nation	Jahre	ID	Nation	Jahre
201	United Kingdom		210	Viet Nam, South	bis 1976
202	United States		211	Western Sahara	seit 1976
203	Uruguay		212	Yemen	
204	Uzbekistan	seit 1991	213	Yemen, North	
205	Vanuatu	seit 1980	214	Yemen, South	
206	Vatican (Holy See)		215	Yugoslavia, SFRo	bis 1992
207	Venezuela		216	Zambia	seit 1964
208	Viet Nam	seit 1976	217	Zanzibar	seit 1963
209	Viet Nam, North	bis 1976	218	Zimbabwe	

## 8.2 Liste aller nicht am Waffenhandel teilnehmender Nationen

1	Abkhazia	11	Niue
2	Andorra	12	Saint Lucia
3	Antigua and Barbuda	13	San Marino
4	Cook Islands	14	Sao Tome and Principe
5	Darfur	15	Somaliland
6	Dominica	16	South Ossetia
7	Kosovo	17	Trans-Dniester
8	Liechtenstein	18	Vatican (Holy See)
9	Monaco	19	Viet Nam, North
10	Nauru	20	Zanzibar

### 8.3 Unstimmigkeiten zwischen Im- und Export Daten

Jahr	Koordinate	supplier	recipient	Koordinate	supplier	recipient
1960	(19,42)	2	0			
1961	(202,42)	9	0			
1962	(19,42)	2	0	(86,42)	3	0
	(201,42)	3	0	(202,42)	5	0
1963	(201,42)	3	0	(202,42)	27	0
1964	(19,42)	1	0	(89,42)	3	0
	(90,42)	2	0	(202,42)	81	0
1965	(67,42)	4	0	(90,42)	3	0
	(202,42)	22	0			
1966	(34,42)	3	0	(67,42)	7	0
1969	(90,42)	24	0	(201,42)	4	0
1970	(90,42)	16	0	(201,42)	3	0
1971	(67,42)	74	0	(90,42)	3	0
	(153,42)	6	0	(202,42)	72	0
1972	(67,42)	15	0			
1973	(39,42)	1	0	(67,42)	5	0
1974	(39,42)	1	0	(98,42)	11	0
1975	(39,42)	25	0	(67,42)	271	0
	(98,42)	7	0	(202,42)	89	0
1976	(34,42)	40	0	(39,42)	90	0
	(202,42)	2	0			
1977	(202,42)	31	0			
1978	(39,42)	28	0	(67,42)	9	0
1979	(90,42)	13	0	(201,42)	2	0

Jahr	Koordinate	supplier	recipient	Koordinate	supplier	recipient
1980	(90,42)	8	0	(201,42)	1	0
1981	(39,42)	6	0	(67,42)	5	0
1982	(39,42)	5	0	(67,42)	10	0
1983	(67,42)	5	0			
1984	(67,42)	16	0			
1985	(90,42)	1	0			
1986	(90,42)	1	0			
1987	(39,42)	18	0	(202,42)	18	0
1988	(39,4)	5	0	(59,42)	1	0
1990	(39,4)	45	0	(59,42)	3	0
1991	(39,4)	80	0			
1995	(39,4)	5	0			
1996	(67,42)	34	0	(164,42)	20	0
1997	(18,42)	1	0	(164,42)	5	0
1998	(108,42)	10	0			
1999	(70,42)	48	0			
2000	(39,4)	11	0	(70,42)	72	0
	(199,42)	21	0			
2001	(39,4)	12	0			
2002	(39,4)	15	0	(19,42)	14	0
2005	(73,42)	19	0			
2006	(39,4)	61	0	(199,42)	17	0
2009	(202,42)	28	0			
2010	(39,4)	18	0	(199,42)	152	0

### 8.4 Top 10 Nationen nach durchschnittlicher Closeness-Zentralität

	Land	Mean-In-Closeness		Land	Mean-In-Closeness
1	India	0.004696	1	Pakistan	0.004863
2	Iraq	0.004672	2	India	0.004843
3	Yugoslavia	0.004667	3	UAE	0.004825
4	Pakistan	0.004660	4	Turkey	0.004824
5	Iran	0.004651	5	Egypt	0.004797
6	Egypt	0.004647	6	Indonesia	0.004793
7	Peru	0.004642	7	Greece	0.004793
8	Indonesia	0.004641	8	Chile	0.004791
9	Turkey	0.004634	9	Saudi Arabia	0.004787
10	Finland	0.004631	10	Thailand	0.004786

Abbildung 29: Die Top 10 bezüglich der durchschnittlichen normierten Closeness-In Zentralität in den Perioden 1950-1991 (links) und 1992-2012 (rechts).

	Land	Mean-Out-Closeness		Land	Mean-Out-Closeness
1	United States	0.006781	1	United States	0.007026
2	France	0.006598	2	France	0.006687
3	United Kingdom	0.006557	3	Germany	0.006634
4	Canada	0.005994	4	United Kingdom	0.006580
5	Germany	0.005676	5	Israel	0.006568
6	Italy	0.005617	6	Italy	0.006313
7	Netherlands	0.005385	7	Canada	0.006020
8	Switzerland	0.005148	8	Switzerland	0.005881
9	Soviet Union	0.005121	9	Sweden	0.005683
10	Czechoslovakia	0.005039	10	Russia	0.005547

Abbildung 30: Die Top 10 bezüglich der durchschnittlichen normierten Closeness-Out Zentralität in den Perioden 1950-1991 (links) und 1992-2012 (rechts).

## Literatur

- [1] Brett Ashley Leeds. Alliance treaty obligations and provisions (atop), 2005 (zuletzt aufgerufen am 11.10.2014). <http://atop.rice.edu/>.
- [2] S. J. Cranmer and B. A. Desmarais. Inferential network analysis with exponential random graph models. *Political Analysis*, 19(1):66–86, 2011.
- [3] S. J. Cranmer, B. A. Desmarais, and E. J. Menninga. Complex dependencies in the alliance network. *Conflict Management and Peace Science*, 29(3):279–313, 2012.
- [4] David R. Hunter, Mark S. Handcock, Carter T. Butts, Steven M. Goodreau, and Martina Morris. ergm: A package to fit, simulate and diagnose exponential-family models for networks. *Journal of Statistical Software*, 24(3):1–29, 2008.
- [5] Reinhard Diestel. *Graphentheorie*. Springer-Lehrbuch. Springer, Berlin [u.a.], 3., neu bearb. und erw. Aufl. edition, 2006.
- [6] Ludwig Fahrmeir. *Statistik: Der Weg zur Datenanalyse*. Springer-Lehrbuch. Springer, Berlin and Heidelberg, 7., neu bearb. Aufl. edition, 2010.
- [7] Ludwig Fahrmeir, Thomas Kneib, and Stefan Lang. *Regression: Modelle, Methoden und Anwendungen ; mit 51 Tabellen*. Statistik und ihre Anwendungen. Springer, Berlin and Heidelberg, 2007.
- [8] Robert C. Feenstra, Robert Imklaar, and Marcel Timmer. The next generation of the penn world table, 2013 (zuletzt aufgerufen am 11.10.2014). [www.nber.org/papers/w19255](http://www.nber.org/papers/w19255).
- [9] Aude-Emanuelle Fleurant, Samuel Perlo-Freeman, and Noel Kelly. Sipri military expenditure database, 2014 (zuletzt aufgerufen am 11.10.2014). [www.sipri.org/research/armaments/milex/milex\\_database](http://www.sipri.org/research/armaments/milex/milex_database).
- [10] Mark S. Handcock. Assessing degeneracy in statistical models of social networks, 2003. <https://www.csss.washington.edu/Papers/wp39.pdf>.
- [11] David R. Hunter, Steven M. Goodreau, and Mark S. Handcock. Goodness of fit of social network models. *Journal of the American Statistical Association*, 103(481):248–258, 2008.



- [12] David R. Hunter and Mark S. Handcock. Inference in curved exponential family models for networks. *Journal of Computational and Graphical Statistics*, 15(3):565–583, 2006.
- [13] Dorothea Jansen. *Einführung in die Netzwerkanalyse: Grundlagen, Methoden, Forschungsbeispiele*. Lehrbuch. VS, Verl. für Sozialwiss., Wiesbaden, 3., überarb. Aufl edition, 2006.
- [14] Eric D. Kolaczyk. *Statistical analysis of network data: Methods and models*. Springer series in statistics. Springer, New York and London, 2009.
- [15] S. P. Meyn and R. L. Tweedie. *Markov chains and stochastic stability*. Communications and control engineering series. Cambridge University Press, Cambridge and New York, 2nd ed edition, 2009.
- [16] SIPRI. About sipri, 2014 (zuletzt aufgerufen am 11.10.2014). [www.sipri.org/about](http://www.sipri.org/about).
- [17] Stanley Wasserman and Katherine Faust. *Social network analysis: Methods and applications*, volume 8 of *Structural analysis in the social sciences*. Cambridge University Press, Cambridge and New York, 1994.