Eine statistische Analyse des Netzwerks des internationalen Waffenhandels von 1950-2012

Christoph Jansen und Christian Schmid

Ludwig-Maximilians-Universität

28. Oktober 2014

Die Datengrundlage

Stockholm International Peace Research Institue (SIPRI)

- Die Daten stammen vom Stockholm International Peace Research Institute (SIPRI)

Stockholm International Peace Research Institue (SIPRI)

- Die Daten stammen vom Stockholm International Peace Research Institute (SIPRI)
- Gründung 1966 als Stiftung der schwedischen Regierung

Stockholm International Peace Research Institue (SIPRI)

- Die Daten stammen vom Stockholm International Peace Research Institute (SIPRI)
- Gründung 1966 als Stiftung der schwedischen Regierung
- Unabhängige internationale Forschungseinrichtung mit den Schwerpunkten Konfliktforschung und Rüstungskontrolle

Stockholm International Peace Research Institue (SIPRI)

- Die Daten stammen vom Stockholm International Peace Research Institute (SIPRI)
- Gründung 1966 als Stiftung der schwedischen Regierung
- Unabhängige internationale Forschungseinrichtung mit den Schwerpunkten Konfliktforschung und Rüstungskontrolle
- Hauptsitz: Stockholm, weitere Niederlassungen in Washington D.C. und Peking

Trend Indicator Value (TIV)

- Der *Trend Indicator Value (TIV)* ist eine (von SIPRI entwickelte) Kennzahl zur Messung der Intensität von Waffenhandel.

Trend Indicator Value (TIV)

- Der *Trend Indicator Value (TIV)* ist eine (von SIPRI entwickelte) Kennzahl zur Messung der Intensität von Waffenhandel.
- Beispielsweise erhält

Trend Indicator Value (TIV)

- Der *Trend Indicator Value (TIV)* ist eine (von SIPRI entwickelte) Kennzahl zur Messung der Intensität von Waffenhandel.
- Beispielsweise erhält
    - ein Leopard-2A4 Panzer einen TIV von 4 Millionen
    - ein Eurofighter einen TIV von 55 Millionen
    - ein U-Boot (Typ 209PN) einen TIV von 275 Millionen

Trend Indicator Value (TIV)

- Der *Trend Indicator Value (TIV)* ist eine (von SIPRI entwickelte) Kennzahl zur Messung der Intensität von Waffenhandel.
- Beispielsweise erhält
  - ein Leopard-2A4 Panzer einen TIV von 4 Millionen
  - ein Eurofighter einen TIV von 55 Millionen
  - ein U-Boot (Typ 209PN) einen TIV von 275 Millionen
- Warum wird nicht direkt der Verkaufspreis als Kennzahl verwendet?

Trend Indicator Value (TIV)

- Der *Trend Indicator Value (TIV)* ist eine (von SIPRI entwickelte) Kennzahl zur Messung der Intensität von Waffenhandel.
- Beispielsweise erhält
  - ein Leopard-2A4 Panzer einen TIV von 4 Millionen
  - ein Eurofighter einen TIV von 55 Millionen
  - ein U-Boot (Typ 209PN) einen TIV von 275 Millionen
- Warum wird nicht direkt der Verkaufspreis als Kennzahl verwendet?
  1. Oftmals unbekannt: Für Waffen(systeme) existiert kein offizieller Marktpreis
  2. Häufig nicht repräsentativ: Auch politische Erwägungen beeinflussen Preise

Die Datengrundlage I

Die Datengrundlage I

- Für jedes Jahr im Zeitraum 1950-2012 wurden für jede Nation der
  - Gesamt-Export-TIV
  - Gesamt-Import-TIV

  mit allen anderen (im entsprechenden Jahr existierenden) Nationen erfasst.

Die Datengrundlage I

- Für jedes Jahr im Zeitraum 1950-2012 wurden für jede Nation der
  - Gesamt-Export-TIV
  - Gesamt-Import-TIV

  mit allen anderen (im entsprechenden Jahr existierenden) Nationen erfasst.

- Beispielsweise liegen die Rohdaten für den Export der BRD in der folgenden Form vor:

	1950	...	2012
Afghanistan	TIV(BRD $\rightarrow$ AFG,1950)	...	TIV(BRD $\rightarrow$ AFG,2012)
$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$
Zimbabwe	TIV(BRD $\rightarrow$ ZIM,1950)	...	TIV(BRD $\rightarrow$ ZIM,2012)

Die Datengrundlage I

- Für jedes Jahr im Zeitraum 1950-2012 wurden für jede Nation der
  - Gesamt-Export-TIV
  - Gesamt-Import-TIV

  mit allen anderen (im entsprechenden Jahr existierenden) Nationen erfasst.

- Beispielsweise liegen die Rohdaten für den Export der BRD in der folgenden Form vor:

	1950	...	2012
Afghanistan	TIV(BRD $\to$ AFG,1950)	...	TIV(BRD $\to$ AFG,2012)
$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$
Zimbabwe	TIV(BRD $\to$ ZIM,1950)	...	TIV(BRD $\to$ ZIM,2012)

- Import-Rohdaten liegen in analoger Form vor, ersetze $\to$ durch $\leftarrow$.

Die Datengrundlage II

Die Datengrundlage II

- Daten in dieser Form (insbesondere für die Netzwerkanalyse) kaum verwertbar!

Die Datengrundlage II

- Daten in dieser Form (insbesondere für die Netzwerkanalyse) kaum verwertbar!
- Transformation wird vorgenommen: Man erhält für jedes Jahr $x \in \{1950, \ldots, 2012\}$ die Matrizen

EXP(x):=

	Afghanistan	...	Zimbabwe
Afghanistan	0	...	TIV(AFG $\rightarrow$ ZIM,x)
$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$
Zimbabwe	TIV(ZIM $\rightarrow$ AFG,x)	...	0

IMP(x):=

	Afghanistan	...	Zimbabwe
Afghanistan	0	...	TIV(AFG $\leftarrow$ ZIM,x)
$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$
Zimbabwe	TIV(ZIM $\leftarrow$ AFG,x)	...	0

Die Datengrundlage III

- Gute Überprüfungsmöglichkeit der Daten durch Spiegelung:

Die Datengrundlage III

- Gute Überprüfungsmöglichkeit der Daten durch Spiegelung:
  - Gilt IMP(x)= t(EXP(x)) für alle $x \in \{1950, \dots, 2012\}$?

Die Datengrundlage III

- Gute Überprüfungsmöglichkeit der Daten durch Spiegelung:
  - Gilt IMP(x)= t(EXP(x)) für alle $x \in \{1950, \dots, 2012\}$?
  - Ergebnis: Für einige (wenige) Jahre sind (kleine) Fehler in den Daten. Diese sind aber vernachlässigbar, da es sich offenbar um Tippfehler handelt.

Die Datengrundlage III

- Gute Überprüfungsmöglichkeit der Daten durch Spiegelung:
  - Gilt IMP(x)= t(EXP(x)) für alle $x \in \{1950, \ldots, 2012\}$?
  - Ergebnis: Für einige (wenige) Jahre sind (kleine) Fehler in den Daten. Diese sind aber vernachlässigbar, da es sich offenbar um Tippfehler handelt.
- Da IMP(x) und EXP(x) theoretisch die selbe Information enthalten, wird von jetzt an nur noch mit EXP(x) gearbeitet.

Die Datengrundlage III

- Gute Überprüfungsmöglichkeit der Daten durch Spiegelung:
  - Gilt IMP(x)= t(EXP(x)) für alle $x \in \{1950, \dots, 2012\}$?
  - Ergebnis: Für einige (wenige) Jahre sind (kleine) Fehler in den Daten. Diese sind aber vernachlässigbar, da es sich offenbar um Tippfehler handelt.
- Da IMP(x) und EXP(x) theoretisch die selbe Information enthalten, wird von jetzt an nur noch mit EXP(x) gearbeitet.
- Für jedes Jahr x lässt sich EXP(x) als ein gerichteter Graph auffassen.

Die Datengrundlage III

- Gute Überprüfungsmöglichkeit der Daten durch Spiegelung:
  - Gilt IMP(x)= t(EXP(x)) für alle $x \in \{1950, \dots, 2012\}$?
  - Ergebnis: Für einige (wenige) Jahre sind (kleine) Fehler in den Daten. Diese sind aber vernachlässigbar, da es sich offenbar um Tippfehler handelt.
- Da IMP(x) und EXP(x) theoretisch die selbe Information enthalten, wird von jetzt an nur noch mit EXP(x) gearbeitet.
- Für jedes Jahr x lässt sich EXP(x) als ein gerichteter Graph auffassen.

$\Rightarrow$ Mathematische Behandlung mit Hilfe der Graphentheorie

Die Datengrundlage IV

Supplier	Czech Rep.	Soviet Union	USA
Recipient	Eq. Guinea	Algeria	Canada
Designation	BMP-76		C-X
Weapon Type	Amoured vehicles	Ships	Aircraft
Number delivered	20	2	2
Number estimate	Yes	No	No
Order year	2005	1975	2007
Order year estimate	Yes	No	No
Delivery year	2007	1976	2008
Delivery year estimate	Yes	No	No
Status	Used	Used	New
TIV full unit	0.9	42.5	140
TIV deal unit value	0.36	17	140
TIV delivery value	7.2	34	280

Netzwerke als Graphen

Graphen

Definition 1

Sei V eine endliche Menge und $E \subset V \times V$. Dann heißt

$$G := (V, E)$$

endlicher gerichteter Graph auf $n := |V|$ Ecken. Die Elemente von

- V werden als *Ecken* (oder *Knoten*) bezeichnet
- E werden als *Kanten* bezeichnet

Graphen

Definition 1

Sei V eine endliche Menge und $E \subset V \times V$. Dann heißt

$$G := (V, E)$$

endlicher gerichteter Graph auf $n := |V|$ Ecken. Die Elemente von

- V werden als *Ecken* (oder *Knoten*) bezeichnet
- E werden als *Kanten* bezeichnet

- Für $v_1, v_2 \in V$ bedeutet $(v_1, v_2) \in E$ gerade, dass eine Kante von Ecke v_1 zu Ecke v_2 führt.

Graphen

Definition 1

Sei V eine endliche Menge und $E \subset V \times V$. Dann heißt

$$G := (V, E)$$

endlicher gerichteter Graph auf $n := |V|$ Ecken. Die Elemente von

- V werden als *Ecken* (oder *Knoten*) bezeichnet
- E werden als *Kanten* bezeichnet

- Für $v_1, v_2 \in V$ bedeutet $(v_1, v_2) \in E$ gerade, dass eine Kante von Ecke v_1 zu Ecke v_2 führt.
- *Gerichtet* bedeutet, dass die Richtung der Kante eine Rolle spielt, d.h. es gilt **nicht**

$$(v_1, v_2) \in E \Leftrightarrow (v_2, v_1) \in E$$

Adjazenzmatrix

Definition 2

Sei $G = (V, E)$ ein gerichteter Graph auf n Ecken und sei $V := \{v_1, \ldots, v_n\}$ eine Aufzählung der Ecken. Dann heißt $A \in \mathbb{R}^{n \times n}$ mit

$$a_{ij} = \begin{cases} 1 & \text{, falls } (v_i, v_j) \in E \\ 0 & \text{, sonst} \end{cases}$$

die *Adjazenzmatrix (AM)* des Graphen G.

Adjazenzmatrix

Definition 2

Sei $G = (V, E)$ ein gerichteter Graph auf n Ecken und sei $V := \{v_1, \ldots, v_n\}$ eine Aufzählung der Ecken. Dann heißt $A \in \mathbb{R}^{n \times n}$ mit

$$a_{ij} = \begin{cases} 1 & \text{, falls } (v_i, v_j) \in E \\ 0 & \text{, sonst} \end{cases}$$

die *Adjazenzmatrix (AM)* des Graphen G.

- Gilt $a_{ij} = 1$, so existiert eine Kante von Ecke i zu Ecke j im zugehörigen Graphen.

Adjazenzmatrix

Definition 2

Sei $G = (V, E)$ ein gerichteter Graph auf n Ecken und sei $V := \{v_1, \ldots, v_n\}$ eine Aufzählung der Ecken. Dann heißt $A \in \mathbb{R}^{n \times n}$ mit

$$a_{ij} = \begin{cases} 1 & \text{, falls } (v_i, v_j) \in E \\ 0 & \text{, sonst} \end{cases}$$

die *Adjazenzmatrix (AM)* des Graphen G.

- Gilt $a_{ij} = 1$, so existiert eine Kante von Ecke i zu Ecke j im zugehörigen Graphen.
- Jeder Graph kann eindeutig mit seiner AM identifiziert werden und umgekehrt.

Kennzahlen für Graphen

Definition 3

Sei $G = (V, E)$ ein gerichteter Graph auf n Ecken. Dann heißt

a) $\rho(G) := \frac{|E|}{n(n-1)}$ die Dichte des Graphen G.

Kennzahlen für Graphen

Definition 3

Sei $G = (V, E)$ ein gerichteter Graph auf n Ecken. Dann heißt

a) $\rho(G) := \frac{|E|}{n(n-1)}$ die Dichte des Graphen G.

Für $v \in V$ heißt

Kennzahlen für Graphen

Definition 3

Sei $G = (V, E)$ ein gerichteter Graph auf n Ecken. Dann heißt

a) $\rho(G) := \frac{|E|}{n(n-1)}$ die Dichte des Graphen G.

Für $v \in V$ heißt

b) $\deg^{in}(v) := |\{(v_1, v_2) \in E : v_2 = v\}|$ der *In-Degree* von v.
c) $\deg^{out}(v) := |\{(v_1, v_2) \in E : v_1 = v\}|$ der *Out-Degree* von v.

Kennzahlen für Graphen

Definition 3

Sei $G = (V, E)$ ein gerichteter Graph auf n Ecken. Dann heißt

a) $\rho(G) := \frac{|E|}{n(n-1)}$ die Dichte des Graphen G.

Für $v \in V$ heißt

b) $\deg^{in}(v) := |\{(v_1, v_2) \in E : v_2 = v\}|$ der *In-Degree* von v.

c) $\deg^{out}(v) := |\{(v_1, v_2) \in E : v_1 = v\}|$ der *Out-Degree* von v.

- Der Out-Degree einer Ecke v entspricht gerade der Anzahl der von v weggehenden Kanten.
- Der In-Degree zählt entsprechend die in v eingehenden Kanten.

Beispiel für einen Graphen

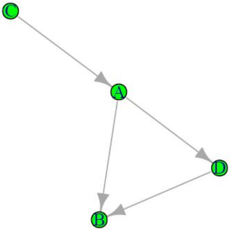
Sei $G = (V, E)$ mit

- $V = \{A, B, C, D\}$
- $E = \{(A, B), (A, D), (C, A), (D, B)\}$

Beispiel für einen Graphen

Sei $G = (V, E)$ mit

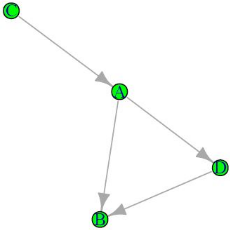
- $V = \{A, B, C, D\}$
- $E = \{(A, B), (A, D), (C, A), (D, B)\}$



Beispiel für einen Graphen

Sei $G = (V, E)$ mit

- $V = \{A, B, C, D\}$
- $E = \{(A, B), (A, D), (C, A), (D, B)\}$

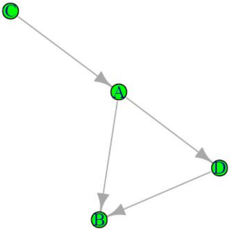


- Adjazenzmatrix $AM = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}$

Beispiel für einen Graphen

Sei $G = (V, E)$ mit

- $V = \{A, B, C, D\}$
- $E = \{(A, B), (A, D), (C, A), (D, B)\}$

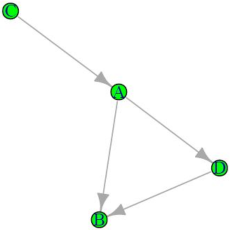


- Adjazenzmatrix $AM = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}$
- $\rho(G) := \frac{4}{12}$

Beispiel für einen Graphen

Sei $G = (V, E)$ mit

- $V = \{A, B, C, D\}$
- $E = \{(A, B), (A, D), (C, A), (D, B)\}$

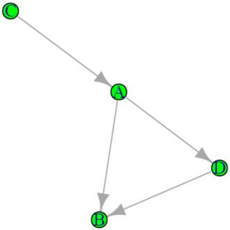


- Adjazenzmatrix $AM = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}$
- $\rho(G) := \frac{4}{12}$ $\qquad deg^{out}(A) = 2$

Beispiel für einen Graphen

Sei $G = (V, E)$ mit

- $V = \{A, B, C, D\}$
- $E = \{(A, B), (A, D), (C, A), (D, B)\}$



- Adjazenzmatrix $AM = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}$
- $\rho(G) := \frac{4}{12}$ $\quad \deg^{out}(A) = 2$ $\quad \deg^{in}(A) = 1$

Das Waffenhandelsnetzwerk als Graph

Für jedes Jahr $x \in \{1950, ..., 2012\}$ kann $\mathrm{EXP}(x)$ durch *Binarisierung* in eine Adjazenzmatrix $A(x)$ umgewandelt werden:

Das Waffenhandelsnetzwerk als Graph

Für jedes Jahr $x \in \{1950, ..., 2012\}$ kann $\text{EXP}(x)$ durch *Binarisierung* in eine Adjazenzmatrix $A(x)$ umgewandelt werden:

- $V := \{\text{Afghanistan}, ..., \text{Zimbabwe}\} \quad , \quad |V| = 218$

Das Waffenhandelsnetzwerk als Graph

Für jedes Jahr $x \in \{1950, ..., 2012\}$ kann $\text{EXP}(x)$ durch *Binarisierung* in eine Adjazenzmatrix $A(x)$ umgewandelt werden:

- $V := \{\text{Afghanistan}, ..., \text{Zimbabwe}\} \quad , \quad |V| = 218$
- $a_{ij}(x) = \begin{cases} 1 & , \text{ falls } (\text{EXP}(x))_{ij} > 0 \\ 0 & , \text{ sonst} \end{cases}$

Das Waffenhandelsnetzwerk als Graph

Für jedes Jahr $x \in \{1950, ..., 2012\}$ kann $\text{EXP}(x)$ durch *Binarisierung* in eine Adjazenzmatrix $A(x)$ umgewandelt werden:

- $V := \{\text{Afghanistan}, ..., \text{Zimbabwe}\} \quad , \quad |V| = 218$
- $a_{ij}(x) = \begin{cases} 1 & , \text{ falls } (\text{EXP}(x))_{ij} > 0 \\ 0 & , \text{ sonst} \end{cases}$

$\Rightarrow$ Für jedes Jahr erhält man einen gerichteten Graphen.

Das Waffenhandelsnetzwerk als Graph

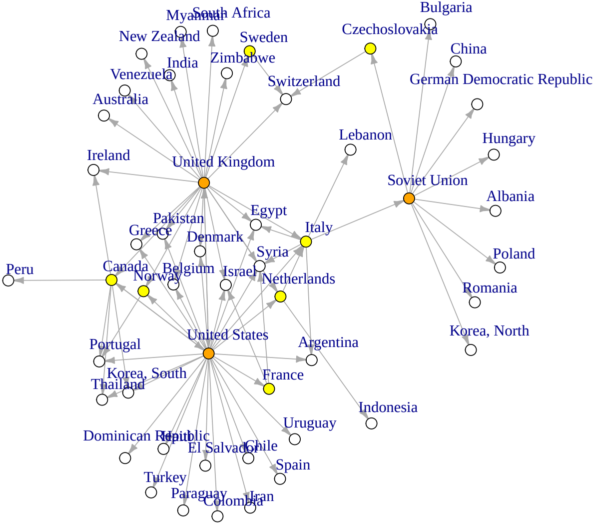
Für jedes Jahr $x \in \{1950, ..., 2012\}$ kann $\mathrm{EXP}(x)$ durch *Binarisierung* in eine Adjazenzmatrix $A(x)$ umgewandelt werden:

- $V := \{\text{Afghanistan}, ..., \text{Zimbabwe}\} \quad , \quad |V| = 218$
- $a_{ij}(x) = \begin{cases} 1 & , \text{ falls } (\mathrm{EXP}(x))_{ij} > 0 \\ 0 & , \text{ sonst} \end{cases}$

$\Rightarrow$ Für jedes Jahr erhält man einen gerichteten Graphen.

$\Rightarrow$ $a_{ij}(x) = 1$ bedeutet, dass Land i im Jahr x Waffen an Land j geliefert hat.

Reduziertes Waffenhandelsnetzwerk 1950



Deskriptive Analyse

Top-Exporteure

Die Top 10 der Exporteure in den Perioden 1950-1991 und 1992-2012 (vor und nach Zusammenbruch der UDSSR):

	Land	TIV
1	Soviet Union	461049.00
2	United States	438986.00
3	United Kingdom	107774.00
4	France	77960.00
5	Germany	40396.00
6	China	30659.00
7	Czechoslovakia	29113.00
8	Italy	19494.00
9	Switzerland	10613.00
10	Netherlands	10375.00

	Land	TIV
1	United States	184288.00
2	Russia	100475.00
3	Germany	36490.00
4	France	34777.00
5	United Kingdom	25353.00
6	China	15856.00
7	Netherlands	10481.00
8	Italy	9265.00
9	Ukraine	9020.00
10	Israel	8191.00

Top-Exporteure

Die Top 10 der Exporteure in den Perioden 1950-1991 und 1992-2012 (vor und nach Zusammenbruch der UDSSR):

	Land	TIV
1	Soviet Union	461049.00
2	United States	438986.00
3	United Kingdom	107774.00
4	France	77960.00
5	Germany	40396.00
6	China	30659.00
7	Czechoslovakia	29113.00
8	Italy	19494.00
9	Switzerland	10613.00
10	Netherlands	10375.00

	Land	TIV
1	United States	184288.00
2	Russia	100475.00
3	Germany	36490.00
4	France	34777.00
5	United Kingdom	25353.00
6	China	15856.00
7	Netherlands	10481.00
8	Italy	9265.00
9	Ukraine	9020.00
10	Israel	8191.00

- Der Gesamt-Export TIV der Top 10 entspricht
  - 97,8 % des Gesamt-Export TIVs aller Nationen in der ersten Periode
  - 85,8 % des Gesamt-Export TIVs aller Nationen in der zweiten Periode

Top-Importeure

Die Top 10 der Importeure in den Perioden 1950-1991 und 1992-2012:

	Land	TIV
1	India	66674.00
2	Germany	53652.00
3	Japan	46835.00
4	Iraq	45643.00
5	Egypt	42519.00
6	Iran	40658.00
7	Poland	38108.00
8	China	37098.00
9	Syria	36736.00
10	German D.R.	31982.00

	Land	TIV
1	India	37377.00
2	China	36732.00
3	Korea, South	25719.00
4	Turkey	22368.00
5	Saudi Arabia	20262.00
6	Taiwan	19424.00
7	Greece	17909.00
8	UAE	16088.00
9	Pakistan	15763.00
10	Egypt	15753.00

Top-Importeure

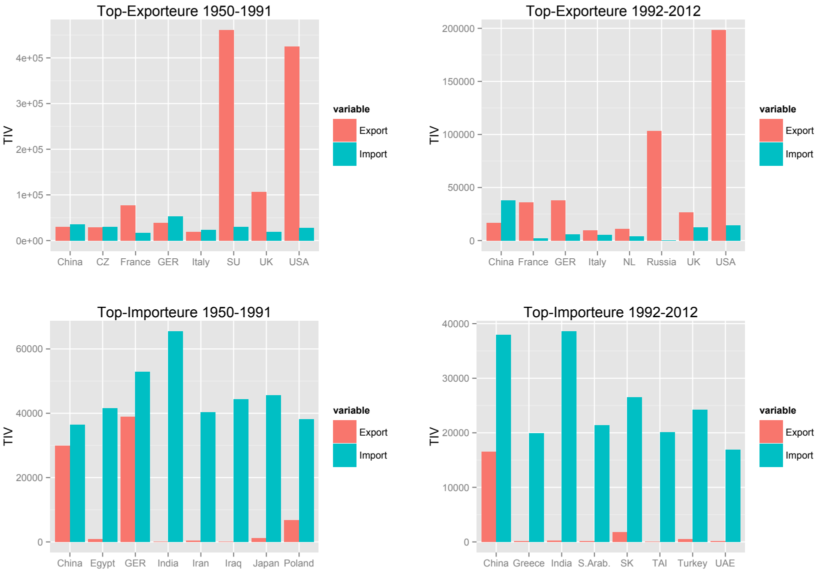
Die Top 10 der Importeure in den Perioden 1950-1991 und 1992-2012:

	Land	TIV
1	India	66674.00
2	Germany	53652.00
3	Japan	46835.00
4	Iraq	45643.00
5	Egypt	42519.00
6	Iran	40658.00
7	Poland	38108.00
8	China	37098.00
9	Syria	36736.00
10	German D.R.	31982.00

	Land	TIV
1	India	37377.00
2	China	36732.00
3	Korea, South	25719.00
4	Turkey	22368.00
5	Saudi Arabia	20262.00
6	Taiwan	19424.00
7	Greece	17909.00
8	UAE	16088.00
9	Pakistan	15763.00
10	Egypt	15753.00

- Der Gesamt-Import TIV der Top 10 entspricht
  - 35,7 % des Gesamt-Import TIVs aller Nationen in der ersten Periode
  - 45,0 % des Gesamt-Import TIVs aller Nationen in der zweiten Periode

Barplot der Top-Akteure nach TIV



Das Handelsnetzwerk

Das Handelsnetzwerk

Problem: Die Matrizen $\mathrm{EXP}(x)$ bzw. $A(x)$ enthalten für alle Jahre Nationen, welche zu diesem Zeitpunkt entweder

- noch nicht oder
- nicht mehr

existiert haben. Diese Länder verzerren das entsprechende Netzwerk.

Das Handelsnetzwerk

Problem: Die Matrizen EXP(x) bzw. $A(x)$ enthalten für alle Jahre Nationen, welche zu diesem Zeitpunkt entweder

- noch nicht oder
- nicht mehr

existiert haben. Diese Länder verzerren das entsprechende Netzwerk.

Lösungsvorschlag: Verwende in jedem Jahr das *Handelsnetzwerk* $\mathrm{EXP}^*(x)$ bzw. $A^*(x)$, d.h. das Netzwerk aller in diesem Jahr am Waffenhandel beteiligten Nationen.

Das Handelsnetzwerk

Problem: Die Matrizen $\mathrm{EXP}(x)$ bzw. $A(x)$ enthalten für alle Jahre Nationen, welche zu diesem Zeitpunkt entweder

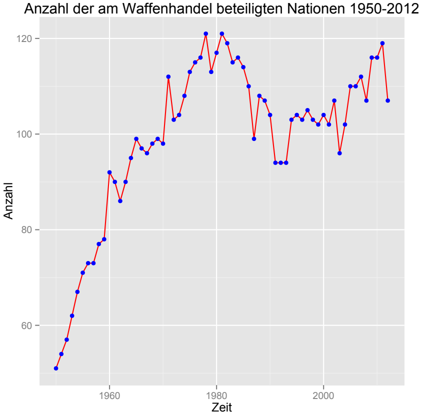
- noch nicht oder
- nicht mehr

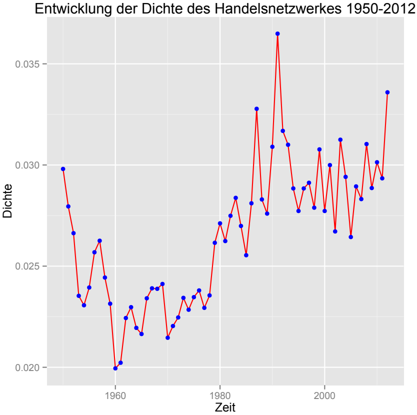
existiert haben. Diese Länder verzerren das entsprechende Netzwerk.

Lösungsvorschlag: Verwende in jedem Jahr das *Handelsnetzwerk* $\mathrm{EXP}^*(x)$ bzw. $A^*(x)$, d.h. das Netzwerk aller in diesem Jahr am Waffenhandel beteiligten Nationen.

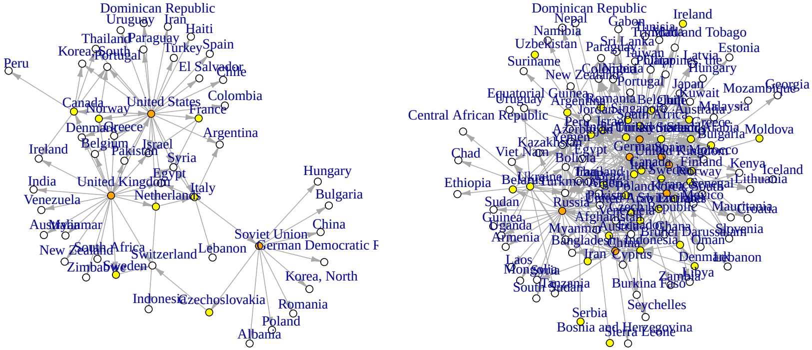
Vorsicht: Für zwei Jahre $x \neq y$ besitzen $A^*(x)$ und $A^*(y)$ i.A. unterschiedlich viele Knoten. Das ist bei der Interpretation zu beachten.

Beteiligte Nationen und Dichte des Handelsnetzwerks





Das Handelsnetzwerk 1950 und 2011

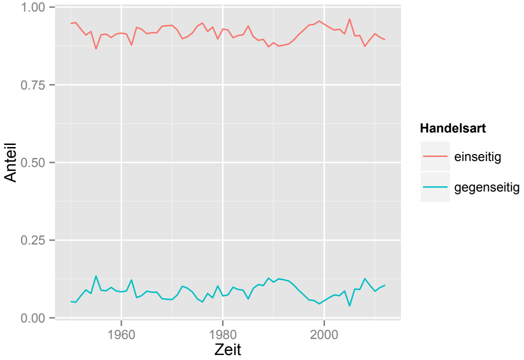


Charakterisitische Strukturen des Handelsnetzwerks I

Ist der Handel von Waffen eher einseitig (d.h. $a_{ij}(x) \neq a_{ji}(x)$) oder gegenseitig (d.h. $a_{ij}(x) = a_{ji}(x)$)?

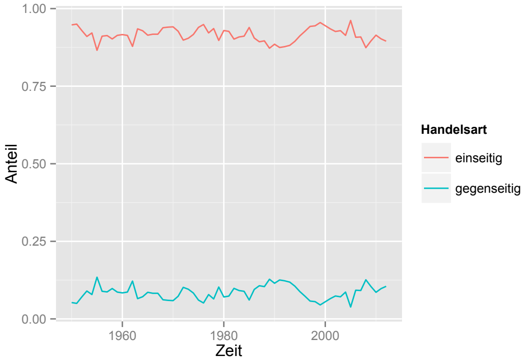
Charakterisitische Strukturen des Handelsnetzwerks I

Ist der Handel von Waffen eher einseitig (d.h. $a_{ij}(x) \neq a_{ji}(x)$) oder gegenseitig (d.h. $a_{ij}(x) = a_{ji}(x)$)?



Charakterisitische Strukturen des Handelsnetzwerks I

Ist der Handel von Waffen eher einseitig (d.h. $a_{ij}(x) \neq a_{ji}(x)$) oder gegenseitig (d.h. $a_{ij}(x) = a_{ji}(x)$)?



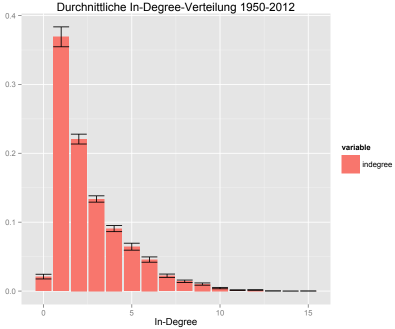
$\Rightarrow$ Der Großteil der Kanten verläuft nur in eine Richtung, d.h. die Mehrzahl importiert keine Waffen von Nationen, welche sie selbst mit Waffen beliefert.

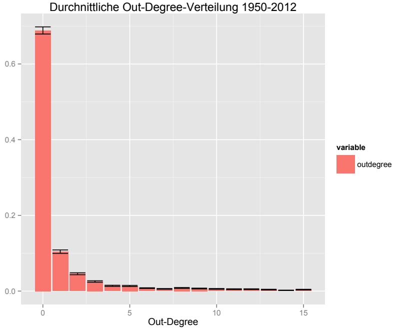
Charakterisitische Strukturen des Handelsnetzwerks II

Wie ist die Verteilung der Anzahl der Handelspartner über die Zeit?

Charakterisitische Strukturen des Handelsnetzwerks II

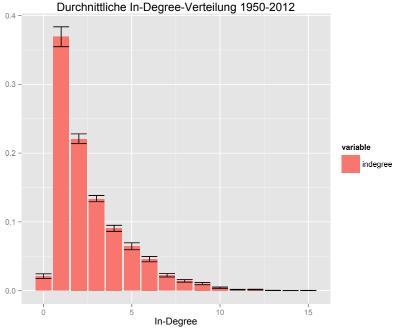
Wie ist die Verteilung der Anzahl der Handelspartner über die Zeit?

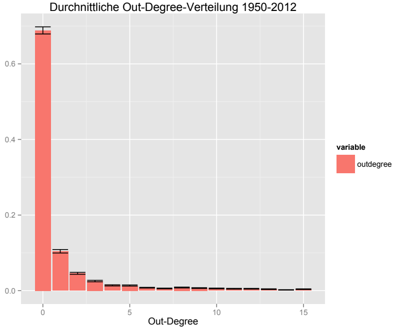




Charakterisitische Strukturen des Handelsnetzwerks II

Wie ist die Verteilung der Anzahl der Handelspartner über die Zeit?

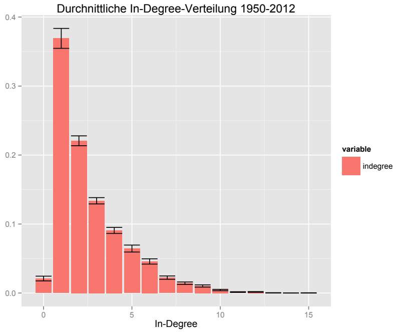




$\Rightarrow$ In jedem Jahr gibt es

Charakterisitische Strukturen des Handelsnetzwerks II

Wie ist die Verteilung der Anzahl der Handelspartner über die Zeit?

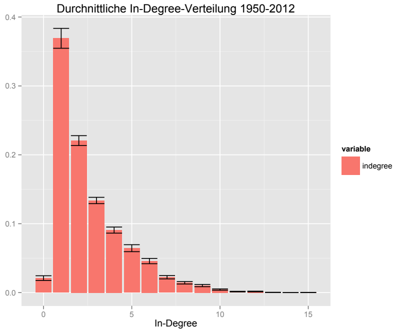


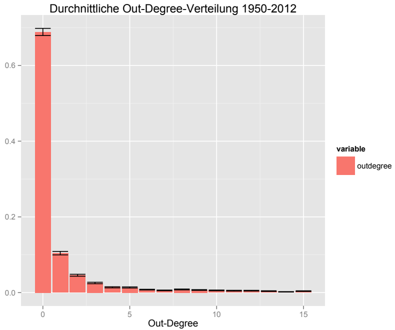
$\Rightarrow$ In jedem Jahr gibt es

- einen großen Anteil von Knoten mit In-Degree=1 bzw. Outdegree=0

Charakterisitische Strukturen des Handelsnetzwerks II

Wie ist die Verteilung der Anzahl der Handelspartner über die Zeit?

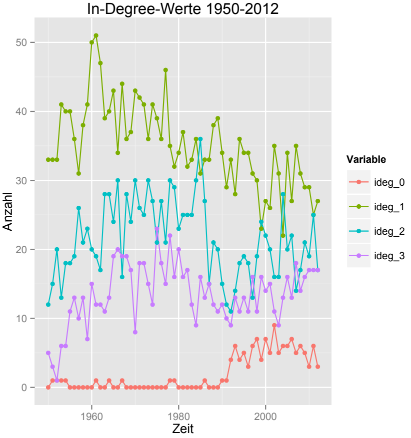


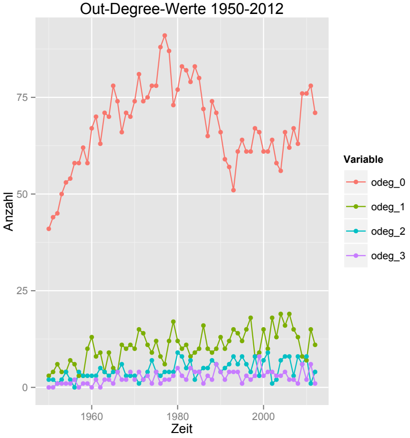


$\Rightarrow$ In jedem Jahr gibt es

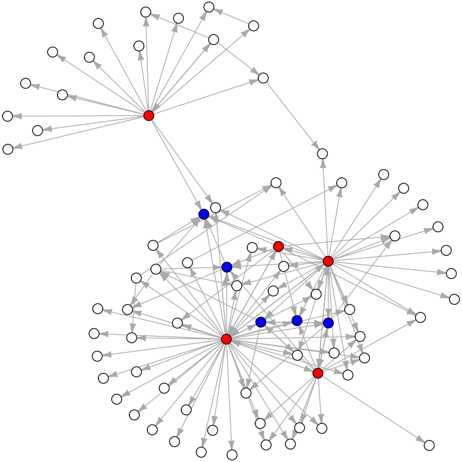
- einen großen Anteil von Knoten mit In-Degree=1 bzw. Outdegree=0
- einige wenige zentrale Akteure mit sehr hohem In- bzw. Out-Degree

Charakterisitische Strukturen des Handelsnetzwerks III





Charakterisitische Strukturen des Handelsnetzwerks IV



Das Exponential Random Graph Model (ERGM)

Das Modell

Idee: Fasse die AM des beobachteten Netzwerks A^{obs} als Ausprägung einer matrixwertigen Zufallsvariable Y auf.

Das Modell

Idee: Fasse die AM des beobachteten Netzwerks A^{obs} als Ausprägung einer matrixwertigen Zufallsvariable Y auf.

Definition 4 (ERGM)

$$\mathbb{P}_\theta(Y = A) = \frac{\exp(\theta^T \cdot \Gamma(A))}{\sum_{A^* \in \mathcal{A}(N)} \exp(\theta^T \cdot \Gamma(A^*))}$$

Hierbei bezeichnet

Das Modell

Idee: Fasse die AM des beobachteten Netzwerks A^{obs} als Ausprägung einer matrixwertigen Zufallsvariable Y auf.

Definition 4 (ERGM)

$$\mathbb{P}_\theta(Y = A) = \frac{\exp(\theta^T \cdot \Gamma(A))}{\sum_{A^* \in \mathcal{A}(N)} \exp(\theta^T \cdot \Gamma(A^*))}$$

Hierbei bezeichnet

- $\mathcal{A}(N) := \{A \in \mathbb{R}^{(N \times N)} : a_{ij} \in \{0, 1\},\ a_{ii} = 0\}$

Das Modell

Idee: Fasse die AM des beobachteten Netzwerks A^{obs} als Ausprägung einer matrixwertigen Zufallsvariable Y auf.

Definition 4 (ERGM)

$$\mathbb{P}_\theta(Y = A) = \frac{\exp(\theta^T \cdot \Gamma(A))}{\sum_{A^* \in \mathcal{A}(N)} \exp(\theta^T \cdot \Gamma(A^*))}$$

Hierbei bezeichnet

- $\mathcal{A}(N) := \{A \in \mathbb{R}^{(N \times N)} : a_{ij} \in \{0, 1\},\ a_{ii} = 0\}$
- $\theta \in \mathbb{R}^q$ einen Parametervektor

Das Modell

Idee: Fasse die AM des beobachteten Netzwerks A^{obs} als Ausprägung einer matrixwertigen Zufallsvariable Y auf.

Definition 4 (ERGM)

$$\mathbb{P}_\theta(Y = A) = \frac{\exp(\theta^T \cdot \Gamma(A))}{\sum_{A^* \in \mathcal{A}(N)} \exp(\theta^T \cdot \Gamma(A^*))}$$

Hierbei bezeichnet

- $\mathcal{A}(N) := \{A \in \mathbb{R}^{(N \times N)} : a_{ij} \in \{0, 1\},\ a_{ii} = 0\}$
- $\theta \in \mathbb{R}^q$ einen Parametervektor
- $\Gamma : \mathcal{A}(N) \to \mathbb{R}^q$, $A \mapsto (\Gamma_1(A), \ldots, \Gamma_q(A))^T$ Netzwerkstatistikenvektor

Das Modell

Idee: Fasse die AM des beobachteten Netzwerks A^{obs} als Ausprägung einer matrixwertigen Zufallsvariable Y auf.

Definition 4 (ERGM)

$$\mathbb{P}_\theta(Y = A) = \frac{\exp(\theta^T \cdot \Gamma(A))}{\sum_{A^* \in \mathcal{A}(N)} \exp(\theta^T \cdot \Gamma(A^*))}$$

Hierbei bezeichnet

- $\mathcal{A}(N) := \{A \in \mathbb{R}^{(N \times N)} : a_{ij} \in \{0,1\},\ a_{ii} = 0\}$
- $\theta \in \mathbb{R}^q$ einen Parametervektor
- $\Gamma : \mathcal{A}(N) \to \mathbb{R}^q\ ,\ A \mapsto (\Gamma_1(A), \ldots, \Gamma_q(A))^T$ Netzwerkstatistikenvektor
- $c(\theta) := \sum_{A^* \in \mathcal{A}(N)} \exp(\theta^T \cdot \Gamma(A^*))$ eine Normierungskonstante

Bemerkungen und Notationen

- Über $\Gamma(\cdot)$ können die am Netzwerk beobachteten Strukturen mit in die Modellierung aufgenommen werden (z.B. einseitiger Handel, hohe Anzahl von In-Degree=1 Knoten,...).

Bemerkungen und Notationen

- Über $\Gamma(\cdot)$ können die am Netzwerk beobachteten Strukturen mit in die Modellierung aufgenommen werden (z.B. einseitiger Handel, hohe Anzahl von In-Degree=1 Knoten,...).
- Die Wahl von $\Gamma(\cdot)$ beeinflusst das resultierende Modell also maßgeblich.

Bemerkungen und Notationen

- Über $\Gamma(\cdot)$ können die am Netzwerk beobachteten Strukturen mit in die Modellierung aufgenommen werden (z.B. einseitiger Handel, hohe Anzahl von In-Degree=1 Knoten,...).
- Die Wahl von $\Gamma(\cdot)$ beeinflusst das resultierende Modell also maßgeblich.
- Für ein Netzwerk A gilt:

Bemerkungen und Notationen

- Über $\Gamma(\cdot)$ können die am Netzwerk beobachteten Strukturen mit in die Modellierung aufgenommen werden (z.B. einseitiger Handel, hohe Anzahl von In-Degree=1 Knoten,...).
- Die Wahl von $\Gamma(\cdot)$ beeinflusst das resultierende Modell also maßgeblich.
- Für ein Netzwerk A gilt:
    - A_{ij}^{+} bzw. A_{ij}^{-} entsteht aus A, indem man $a_{ij} = 1$ bzw. $a_{ij} = 0$ setzt.

Bemerkungen und Notationen

- Über $\Gamma(\cdot)$ können die am Netzwerk beobachteten Strukturen mit in die Modellierung aufgenommen werden (z.B. einseitiger Handel, hohe Anzahl von In-Degree=1 Knoten,...).
- Die Wahl von $\Gamma(\cdot)$ beeinflusst das resultierende Modell also maßgeblich.
- Für ein Netzwerk A gilt:
  - A_{ij}^+ bzw. A_{ij}^- entsteht aus A, indem man $a_{ij} = 1$ bzw. $a_{ij} = 0$ setzt.
  - A_{ij}^c bezeichnet das Netzwerk A ohne a_{ij}, d.h. das *Restnetzwerk*.

Bemerkungen und Notationen

- Über $\Gamma(\cdot)$ können die am Netzwerk beobachteten Strukturen mit in die Modellierung aufgenommen werden (z.B. einseitiger Handel, hohe Anzahl von In-Degree=1 Knoten,...).
- Die Wahl von $\Gamma(\cdot)$ beeinflusst das resultierende Modell also maßgeblich.
- Für ein Netzwerk A gilt:
  - A_{ij}^{+} bzw. A_{ij}^{-} entsteht aus A, indem man $a_{ij} = 1$ bzw. $a_{ij} = 0$ setzt.
  - A_{ij}^{c} bezeichnet das Netzwerk A ohne a_{ij}, d.h. das *Restnetzwerk*.
  - Den Ausdruck $(\Delta A)_{ij} := \Gamma(A_{ij}^{+}) - \Gamma(A_{ij}^{-})$ bezeichnet man als *Change-Statistik*.

Interpretation der Modellparameter: Kantenebene

Es gilt der Zusammenhang:

$$\frac{\mathbb{P}_\theta(Y_{ij} = 1 | Y_{ij}^c = A_{ij}^c)}{\mathbb{P}_\theta(Y_{ij} = 0 | Y_{ij}^c = A_{ij}^c)} = \exp(\theta_1 (\Delta_1 A)_{ij}) \cdot \ldots \cdot \exp(\theta_q (\Delta_q A)_{ij})$$

Interpretation der Modellparameter: Kantenebene

Es gilt der Zusammenhang:

$$\frac{\mathbb{P}_\theta(Y_{ij} = 1 | Y_{ij}^c = A_{ij}^c)}{\mathbb{P}_\theta(Y_{ij} = 0 | Y_{ij}^c = A_{ij}^c)} = \exp(\theta_1 (\Delta_1 A)_{ij}) \cdot \ldots \cdot \exp(\theta_q (\Delta_q A)_{ij})$$

Ceteris-Paribus-Analyse: Vergrößert sich *nur* die k-te Change-Statistik um eine Einheit, so wird die bedingte Chance der Entstehung der Kante ij mit dem Faktor $\exp(\theta_k)$ multipliziert.

Interpretation der Modellparameter: Kantenebene

Es gilt der Zusammenhang:

$$\frac{\mathbb{P}_\theta(Y_{ij} = 1 | Y_{ij}^c = A_{ij}^c)}{\mathbb{P}_\theta(Y_{ij} = 0 | Y_{ij}^c = A_{ij}^c)} = \exp(\theta_1(\Delta_1 A)_{ij}) \cdot \ldots \cdot \exp(\theta_q(\Delta_q A)_{ij})$$

Ceteris-Paribus-Analyse: Vergrößert sich *nur* die k-te Change-Statistik um eine Einheit, so wird die bedingte Chance der Entstehung der Kante ij mit dem Faktor $\exp(\theta_k)$ multipliziert.

Dies führt zu folgender Interpretation des Parameters θ_k, $k \in \{1, \ldots, q\}$:

- Ist $\theta_k > 0$, so steigt die bedingte Chance der Dyadenentstehung.
- Ist $\theta_k = 0$, so bleibt die bedingte Chance unverändert.
- Ist $\theta_k < 0$, so sinkt die bedingte Chance.

Interpretation der Modellparameter: Netzwerkebene

Für eine Adjazenzmatrix A sei A^{k^-} ein Netzwerk mit

$$\Gamma_l(A^{k^-}) = \begin{cases} \Gamma_l(A) & \text{falls } l \in \{1, ..., q\} \setminus \{k\} \\ \Gamma_l(A) - 1 & \text{falls } l = k \end{cases}$$

Interpretation der Modellparameter: Netzwerkebene

Für eine Adjazenzmatrix A sei A^{k^-} ein Netzwerk mit

$$\Gamma_l(A^{k^-}) = \begin{cases} \Gamma_l(A) & \text{falls } l \in \{1, ..., q\} \setminus \{k\} \\ \Gamma_l(A) - 1 & \text{falls } l = k \end{cases}$$

Dann gilt der Zusammenhang

$$\frac{\mathbb{P}_\theta(Y = A)}{\mathbb{P}_\theta(Y = A^{k^-})} = \exp(\theta_k)$$

Interpretation der Modellparameter: Netzwerkebene

Für eine Adjazenzmatrix A sei A^{k^-} ein Netzwerk mit

$$\Gamma_l(A^{k^-}) = \begin{cases} \Gamma_l(A) & \text{falls } l \in \{1, ..., q\} \setminus \{k\} \\ \Gamma_l(A) - 1 & \text{falls } l = k \end{cases}$$

Dann gilt der Zusammenhang

$$\frac{\mathbb{P}_\theta(Y = A)}{\mathbb{P}_\theta(Y = A^{k^-})} = \exp(\theta_k)$$

$\Rightarrow$ Die relative Plausibilität, dass das Netzwerk A im Vergleich zu Netzwerk A^{k^-} entsteht beträgt gerade $\exp(\theta_k)$.

Interpretation der Modellparameter: Netzwerkebene

Für eine Adjazenzmatrix A sei A^{k^-} ein Netzwerk mit

$$\Gamma_l(A^{k^-}) = \begin{cases} \Gamma_l(A) & \text{falls } l \in \{1, ..., q\} \setminus \{k\} \\ \Gamma_l(A) - 1 & \text{falls } l = k \end{cases}$$

Dann gilt der Zusammenhang

$$\frac{\mathbb{P}_\theta(Y = A)}{\mathbb{P}_\theta(Y = A^{k^-})} = \exp(\theta_k)$$

$\Rightarrow$ Die relative Plausibilität, dass das Netzwerk A im Vergleich zu Netzwerk A^{k^-} entsteht beträgt gerade $\exp(\theta_k)$.

- Ist $\theta_k > 0$, so ist A plausibler als A^{k^-} .
- Ist $\theta_k = 0$, so sind sie gleich plausibel.
- Ist $\theta_k < 0$, so ist A^{k^-} plausibler als A.

Schätzung der Modellparameter I

Sei $A^{obs} \in \mathcal{A}(N)$ das beobachtete Netzwerk.

Schätzung der Modellparameter I

Sei $A^{obs} \in \mathcal{A}(N)$ das beobachtete Netzwerk.

$\Rightarrow$ Log-Likelihood

$$\text{loglik}(\theta) = \theta^T \cdot \Gamma(A^{obs}) - \log(c(\theta))$$

Schätzung der Modellparameter I

Sei $A^{obs} \in \mathcal{A}(N)$ das beobachtete Netzwerk.

$\Rightarrow$ Log-Likelihood

$$\text{loglik}(\theta) = \theta^T \cdot \Gamma(A^{obs}) - \log(c(\theta))$$

Problem: Schon für relativ kleines N lässt sich

$$c(\theta) = \sum_{A^* \in \mathcal{A}(N)} \exp(\theta^T \cdot \Gamma(A^*))$$

nicht mehr (in absehbarer Zeit) berechnen!

Schätzung der Modellparameter I

Sei $A^{obs} \in \mathcal{A}(N)$ das beobachtete Netzwerk.

$\Rightarrow$ Log-Likelihood

$$\text{loglik}(\theta) = \theta^T \cdot \Gamma(A^{obs}) - \log(c(\theta))$$

Problem: Schon für relativ kleines N lässt sich

$$c(\theta) = \sum_{A^* \in \mathcal{A}(N)} \exp(\theta^T \cdot \Gamma(A^*))$$

nicht mehr (in absehbarer Zeit) berechnen!

Grund: Beispielsweise enthält schon für ein Netzwerk mit 100 Knoten die Menge $\mathcal{A}(100)$ genau 2^{9900} Elemente.

Schätzung der Modellparameter II

Idee: Fixiere $\theta_0 \in \mathbb{R}^q$. Dann gilt der Zusammenhang

$$\frac{c(\theta)}{c(\theta_0)} = \mathbb{E}_{\theta_0}\left[\exp\left((\theta - \theta_0)^T \cdot \Gamma(Y)\right)\right]$$

Schätzung der Modellparameter II

Idee: Fixiere $\theta_0 \in \mathbb{R}^q$. Dann gilt der Zusammenhang

$$\frac{c(\theta)}{c(\theta_0)} = \mathbb{E}_{\theta_0}\left[\exp\left(\left(\theta - \theta_0\right)^T \cdot \Gamma(Y)\right)\right]$$

Simuliere nun via MCMC (z.B. *Metropolis-Hastings*) eine *große* Anzahl von Zufallsnetzwerken $A_1, \ldots, A_L$ aus der Verteilung von $\mathbb{P}_{\theta_0}$.

Schätzung der Modellparameter II

Idee: Fixiere $\theta_0 \in \mathbb{R}^q$. Dann gilt der Zusammenhang

$$\frac{c(\theta)}{c(\theta_0)} = \mathbb{E}_{\theta_0}\left[\exp\left((\theta - \theta_0)^T \cdot \Gamma(Y)\right)\right]$$

Simuliere nun via MCMC (z.B. *Metropolis-Hastings*) eine *große* Anzahl von Zufallsnetzwerken $A_1, ..., A_L$ aus der Verteilung von $\mathbb{P}_{\theta_0}$.

Nach dem *Gesetz der großen Zahlen* gilt dann

$$\frac{c(\theta)}{c(\theta_0)} \approx \frac{1}{L} \cdot \sum_{i=1}^{L} \exp\left((\theta - \theta_0)^T \cdot \Gamma(A_i)\right)$$

Schätzung der Modellparameter II

Idee: Fixiere $\theta_0 \in \mathbb{R}^q$. Dann gilt der Zusammenhang

$$\frac{c(\theta)}{c(\theta_0)} = \mathbb{E}_{\theta_0}\left[\exp\left(\left(\theta - \theta_0\right)^T \cdot \Gamma(Y)\right)\right]$$

Simuliere nun via MCMC (z.B. *Metropolis-Hastings*) eine *große* Anzahl von Zufallsnetzwerken $A_1, ..., A_L$ aus der Verteilung von $\mathbb{P}_{\theta_0}$.

Nach dem *Gesetz der großen Zahlen* gilt dann

$$\frac{c(\theta)}{c(\theta_0)} \approx \frac{1}{L} \cdot \sum_{i=1}^{L} \exp\left(\left(\theta - \theta_0\right)^T \cdot \Gamma(A_i)\right)$$

und damit

$$\text{loglik}(\theta) - \text{loglik}(\theta_0) \approx -\log\left(\frac{1}{L} \cdot \sum_{i=1}^{L} \exp\left(\left(\theta - \theta_0\right)^T \cdot \Gamma(A_i)\right)\right)$$

Inferentielle Analyse

Netzwerkstatistiken I

Ziel: Formuliere die gefundenen Strukturen als Netzwerkstatistiken $\Gamma_k(\cdot)$.

Netzwerkstatistiken I

Ziel: Formuliere die gefundenen Strukturen als Netzwerkstatistiken $\Gamma_k(\cdot)$.

- Einseitiger Handel:

$$\Gamma_{asym} : \mathcal{A}(N) \to \mathbb{R} \quad , \quad A \mapsto \# \text{ einseitiger Kanten}$$

Netzwerkstatistiken I

Ziel: Formuliere die gefundenen Strukturen als Netzwerkstatistiken $\Gamma_k(\cdot)$.

- Einseitiger Handel:

$$\Gamma_{asym} : \mathcal{A}(N) \to \mathbb{R} \quad , \quad A \mapsto \# \text{ einseitiger Kanten}$$

- In-Degree=1:

$$\Gamma_{ideg1} : \mathcal{A}(N) \to \mathbb{R} \quad , \quad A \mapsto \# \text{ In-Degree=1 Knoten}$$

Netzwerkstatistiken I

Ziel: Formuliere die gefundenen Strukturen als Netzwerkstatistiken $\Gamma_k(\cdot)$.

- Einseitiger Handel:

$$\Gamma_{asym} : \mathcal{A}(N) \to \mathbb{R} \quad , \quad A \mapsto \#\text{ einseitiger Kanten}$$

- In-Degree=1:

$$\Gamma_{ideg1} : \mathcal{A}(N) \to \mathbb{R} \quad , \quad A \mapsto \#\text{ In-Degree=1 Knoten}$$

- Anzahl Kanten:

$$\Gamma_{edges} : \mathcal{A}(N) \to \mathbb{R} \quad , \quad A \mapsto \#\text{ Kanten}$$

Netzwerkstatistiken II

Schließlich soll noch eine Statistik integriert werden, welche die (wenigen) Knoten mit hohem Out-Degree mit modelliert.

Netzwerkstatistiken II

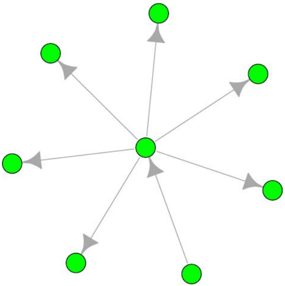
Schließlich soll noch eine Statistik integriert werden, welche die (wenigen) Knoten mit hohem Out-Degree mit modelliert.Verwende:

$$\Gamma_{dsp1}(A) := \left| \left\{ (v_1, v_2) \in V^2 : \exists! v_3 \in V \text{ s.t. } (v_1, v_3) \in E \wedge (v_3, v_2) \in E \right\} \right|$$

Netzwerkstatistiken II

Schließlich soll noch eine Statistik integriert werden, welche die (wenigen) Knoten mit hohem Out-Degree mit modelliert. Verwende:

$$\Gamma_{dsp1}(A) := |\{(v_1, v_2) \in V^2 : \exists! v_3 \in V \text{ s.t. } (v_1, v_3) \in E \wedge (v_3, v_2) \in E\}|$$



Ein ERGM für das Handelsnetzwerk

- Sei $N(x)$ die Anzahl der Knoten des Handelsnetzwerks im Jahr x.

Ein ERGM für das Handelsnetzwerk

- Sei $N(x)$ die Anzahl der Knoten des Handelsnetzwerks im Jahr x.
- Für jedes Jahr $x \in \{1950, ..., 2012\}$ wird das Modell

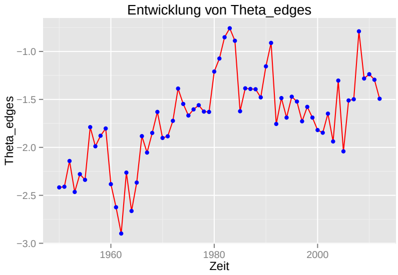
$$\mathbb{P}_\theta(Y = A) = \frac{\exp(\theta^T \cdot \Gamma(A))}{\sum_{A^* \in \mathcal{A}(N(x))} \exp(\theta^T \cdot \Gamma_1(A^*))}$$

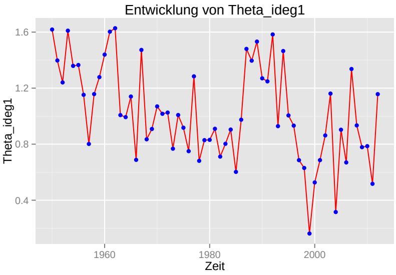
mit dem Statistikenvektor

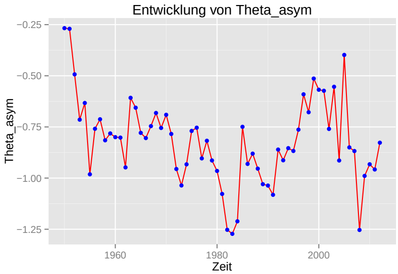
$$\Gamma(A) := (\Gamma_{edges}(A), \Gamma_{asym}(A), \Gamma_{ideg1}(A), \Gamma_{dsp1}(A))^T$$

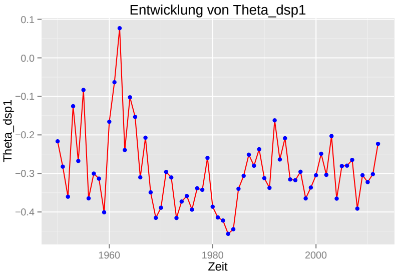
geschätzt.

Entwicklung der Koeffizientenschätzer über die Zeit

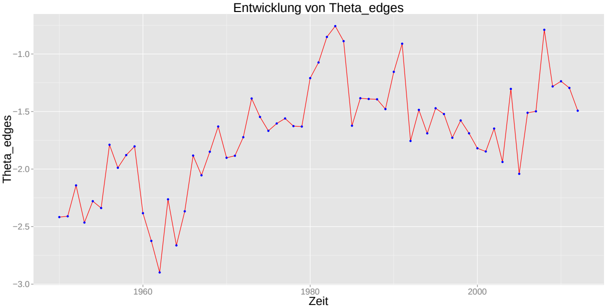




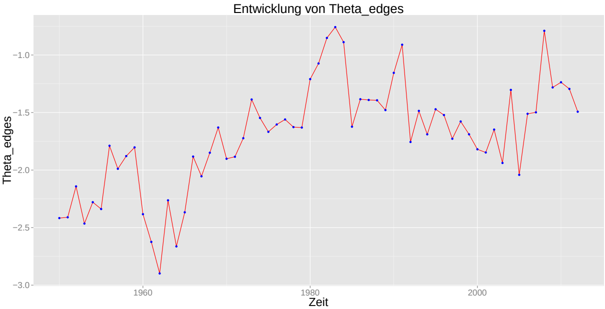




Interpretation von θ_{edges}

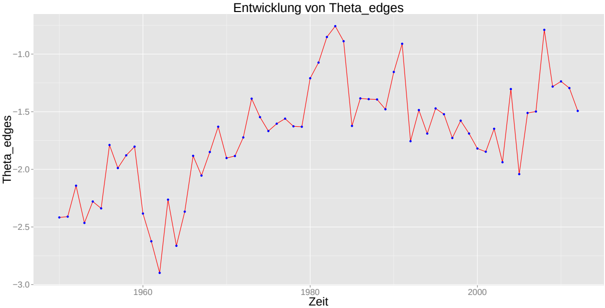


Interpretation von θ_{edges}



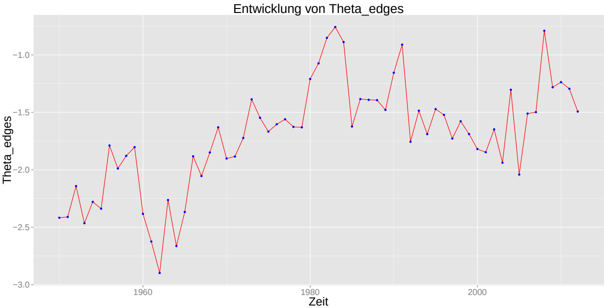
- Für alle Jahre besteht ein negativer Effekt.

Interpretation von θ_{edges}



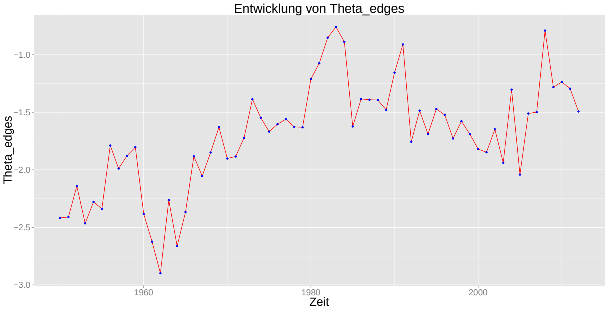
- Für alle Jahre besteht ein negativer Effekt.
- **Kantenebene:** Hier nicht möglich, da Change-Statistik konstant 1.

Interpretation von θ_{edges}



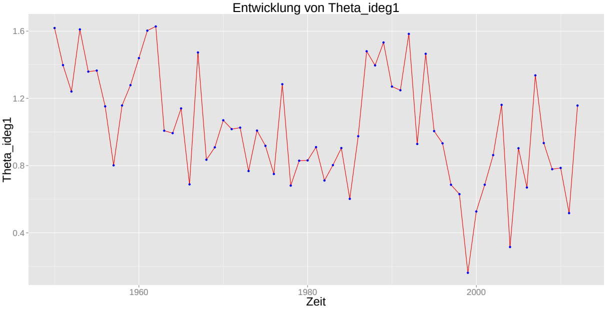
- Für alle Jahre besteht ein negativer Effekt.
- **Kantenebene:** Hier nicht möglich, da Change-Statistik konstant 1.
- **Netzwerkebene:** Das Netzwerk A^{edges-} ist immer plausibler als das Netzwerk A.

Interpretation von θ_{edges}

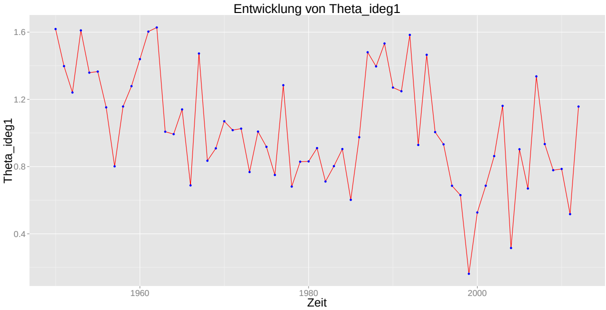


- Für alle Jahre besteht ein negativer Effekt.
- **Kantenebene:** Hier nicht möglich, da Change-Statistik konstant 1.
- **Netzwerkebene:** Das Netzwerk A^{edges-} ist immer plausibler als das Netzwerk A.

Interpretation von θ_{ideg1}

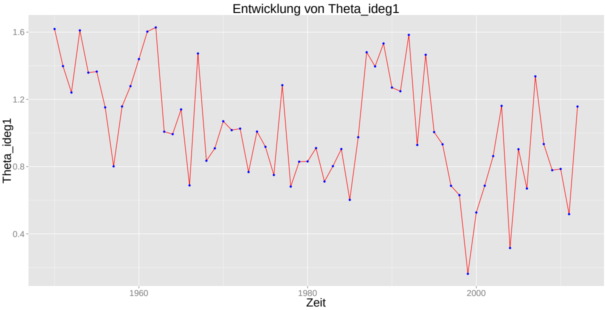


Interpretation von θ_{ideg1}



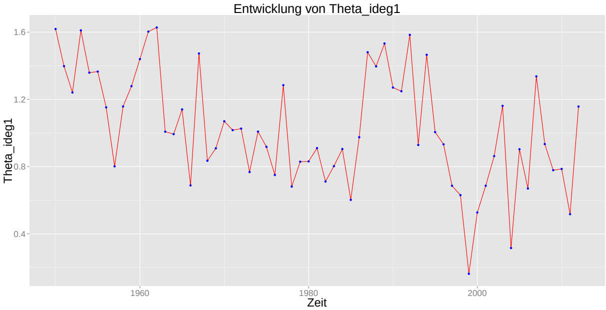
- Für alle Jahre besteht ein positiver Effekt.

Interpretation von θ_{ideg1}



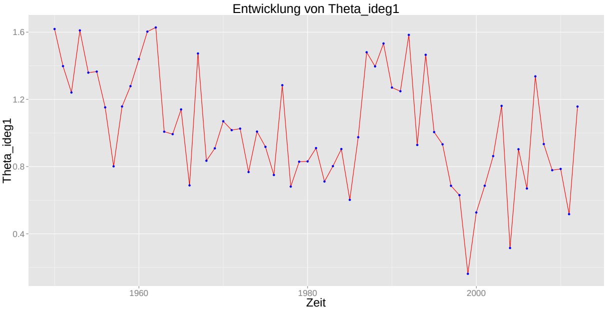
- Für alle Jahre besteht ein positiver Effekt.
- **Kantenebene:** Sind zwei Netzwerke A, B bekannt bis auf die Kante (i, j) und ist nur die $ideg1$-Change-Statistik von A um eins größer als die von B, so entsteht die Kante (i, j) eher in A.

Interpretation von θ_{ideg1}



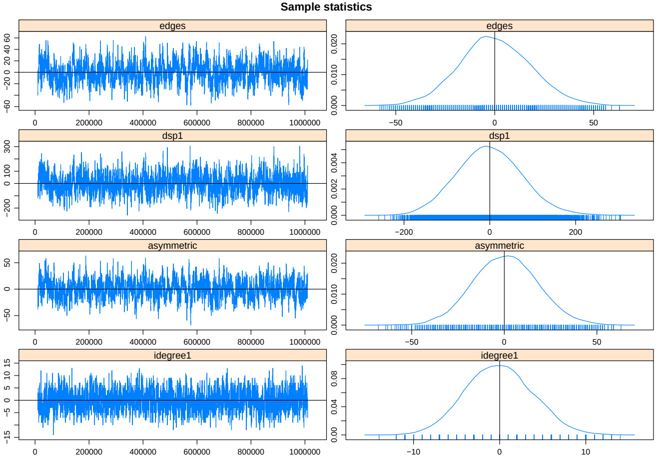
- Für alle Jahre besteht ein positiver Effekt.
- **Kantenebene:** Sind zwei Netzwerke A, B bekannt bis auf die Kante (i, j) und ist nur die $ideg1$-Change-Statistik von A um eins größer als die von B, so entsteht die Kante (i, j) eher in A.
- **Netzwerkebene:** Das Netzwerk A^{ideg1-} ist immer weniger plausibel als das Netzwerk A.

Interpretation von θ_{ideg1}

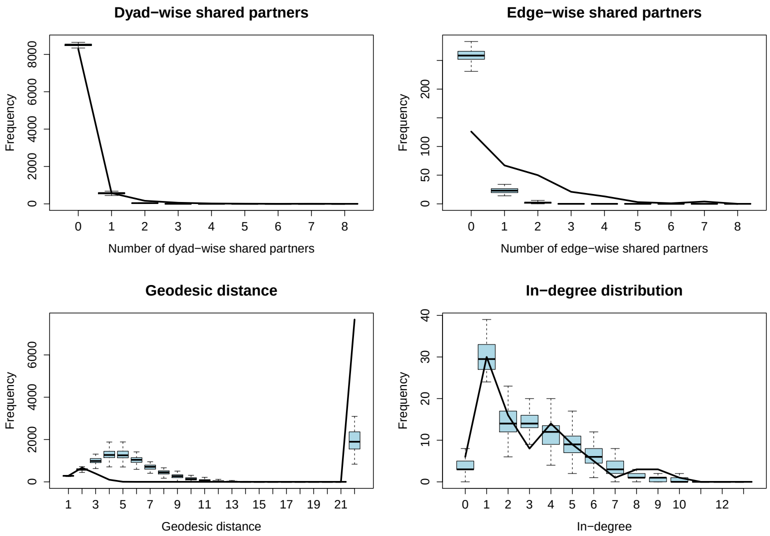


- Für alle Jahre besteht ein positiver Effekt.
- **Kantenebene:** Sind zwei Netzwerke A, B bekannt bis auf die Kante (i, j) und ist nur die $ideg1$-Change-Statistik von A um eins größer als die von B, so entsteht die Kante (i, j) eher in A.
- **Netzwerkebene:** Das Netzwerk A^{ideg1-} ist immer weniger plausibel als das Netzwerk A.

MCMC-Diagnose für 2012



Goodness-of-fit für 2012

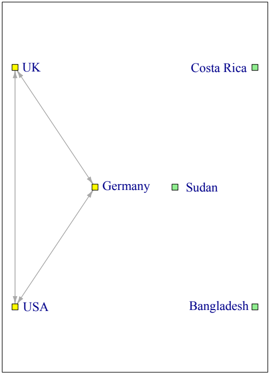


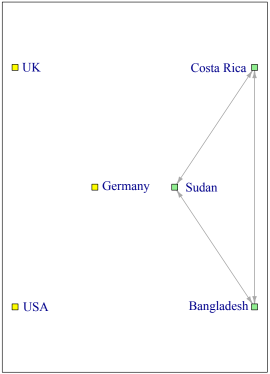
Strukturgleiche Netzwerke

Problem: Werden nur *endogene* Statistiken in das Modell aufgenommen, so erhalten strukturgleiche Netzwerke dieselbe Wahrscheinlichkeitsmasse.

Strukturgleiche Netzwerke

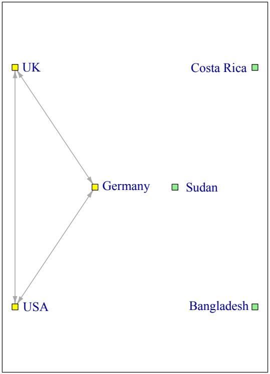
Problem: Werden nur *endogene* Statistiken in das Modell aufgenommen, so erhalten strukturgleiche Netzwerke dieselbe Wahrscheinlichkeitsmasse.

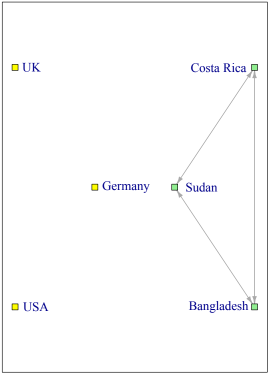




Strukturgleiche Netzwerke

Problem: Werden nur *endogene* Statistiken in das Modell aufgenommen, so erhalten strukturgleiche Netzwerke dieselbe Wahrscheinlichkeitsmasse.





Lösung: Integration von *exogenen* Statistiken (d.h. Kovariablen)

Kovariable: *Alliance Treaty Obligations and Provisions*

Kovariable: *Alliance Treaty Obligations and Provisions*

- Daten über Verteidigungsabkommen (VA) von der *Rice University*

Kovariable: *Alliance Treaty Obligations and Provisions*

- Daten über Verteidigungsabkommen (VA) von der *Rice University*
- Für jedes Jahr $x \in \{1969, ..., 2012\}$ liegt eine symmetrische Matrix $C(x)$ vor mit

$$c_{ij}(x) = \begin{cases} 1 & \text{, falls i und j haben VA} \\ 0 & \text{, sonst} \end{cases}$$

Kovariable: *Alliance Treaty Obligations and Provisions*

- Daten über Verteidigungsabkommen (VA) von der *Rice University*
- Für jedes Jahr $x \in \{1969, ..., 2012\}$ liegt eine symmetrische Matrix $C(x)$ vor mit

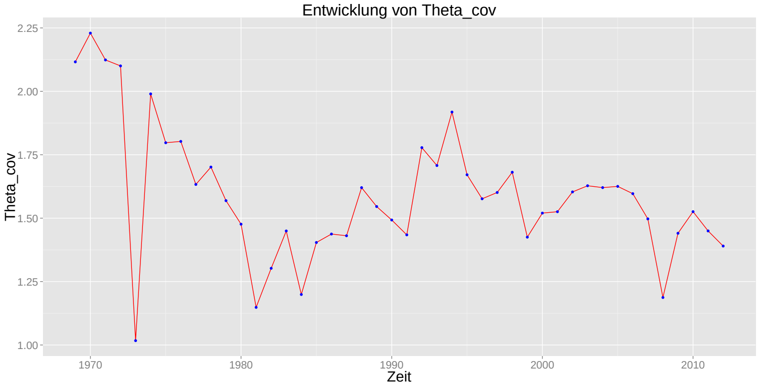
$$c_{ij}(x) = \begin{cases} 1 & \text{, falls i und j haben VA} \\ 0 & \text{, sonst} \end{cases}$$

- Diese können über die Statistik

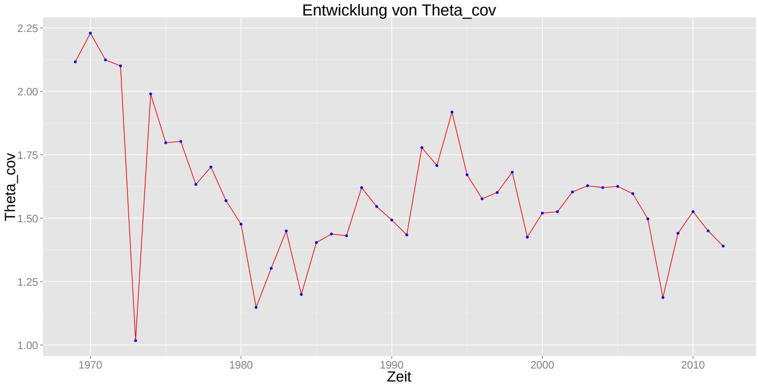
$$\Gamma_{C(x)} : \mathcal{A}(N(x)) \to \mathbb{R} \quad , \quad A \mapsto \sum_{i=1}^{N(x)} \sum_{j=1}^{N(x)} a_{ij} c(x)_{ij}$$

in das Modell integriert werden.

Entwicklung von θ_{VA}

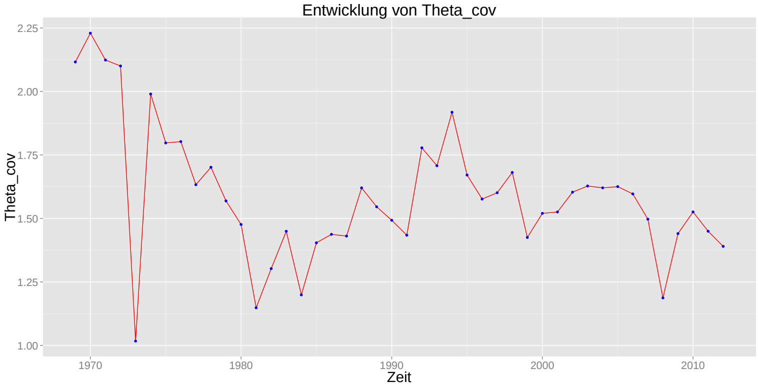


Entwicklung von θ_{VA}



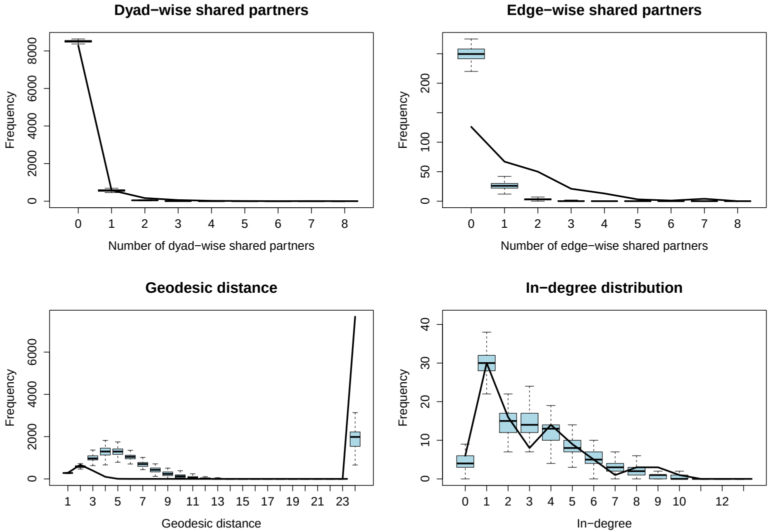
- Stark positiver Effekt über den gesamten Zeitraum.

Entwicklung von θ_{VA}

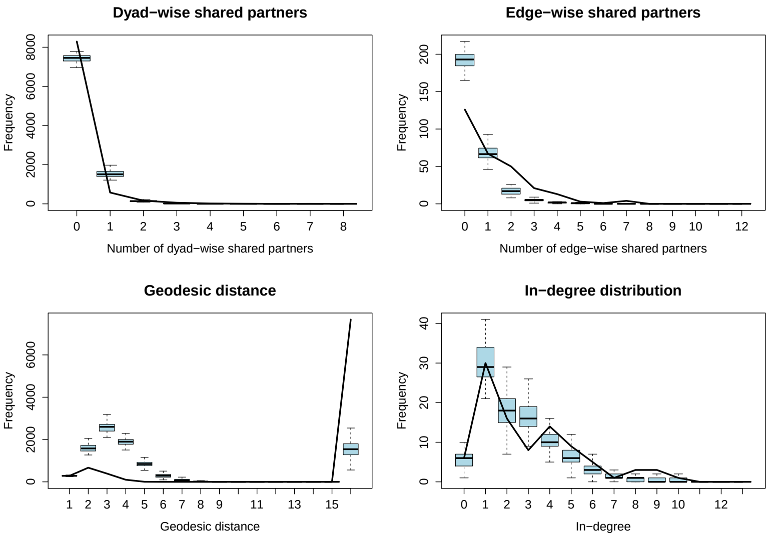


- Stark positiver Effekt über den gesamten Zeitraum.
- **Interpretation:** Von zwei strukturgleichen Netzwerken ist dasjenige plausibler, welches mehr Übereinstimmungen mit dem Netzwerk der VA aufweist.

Goodness-of-fit für 2012 mit Kovariable VA



GOF für 2012 mit Kovariable VA, BIP, Militärausgaben



Wie könnte das Modell verbessert werden?

Wie könnte das Modell verbessert werden?

- Einbinden weiterer Kovariablen, z.B.:

Wie könnte das Modell verbessert werden?

- Einbinden weiterer Kovariablen, z.B.:
  - *geographische Distanz*
  - *Konfliktnetzwerke*
  - *Handelsabhängikeiten*

Wie könnte das Modell verbessert werden?

- Einbinden weiterer Kovariablen, z.B.:
    - *geographische Distanz*
    - *Konfliktnetzwerke*
    - *Handelsabhängikeiten*
- Berücksichtigung der zeitlichen Struktur über *T(emporal) ERGMs*.

Wie könnte das Modell verbessert werden?

- Einbinden weiterer Kovariablen, z.B.:
  - *geographische Distanz*
  - *Konfliktnetzwerke*
  - *Handelsabhängikeiten*
- Berücksichtigung der zeitlichen Struktur über *T(emporal) ERGMs*.
- Berücksichtigung der Gewichtung über *G(eneralized) ERGMs*.

Wie könnte das Modell verbessert werden?

- Einbinden weiterer Kovariablen, z.B.:
  - *geographische Distanz*
  - *Konfliktnetzwerke*
  - *Handelsabhängikeiten*
- Berücksichtigung der zeitlichen Struktur über *T(emporal) ERGMs*.
- Berücksichtigung der Gewichtung über *G(eneralized) ERGMs*.
- Betrachtung von verkleinerten Netzwerken mit über die Zeit fixierten Knoten.

Vielen Dank für Ihre Aufmerksamkeit!