

Grafos

PhD. Félix Oscar Fernández Peña.

Introducción

En ocasiones:

- Se requiere tener acceso a un nodo determinado a partir de más de un nodo de la estructura.
- Existen varios caminos entre un nodo y otro.

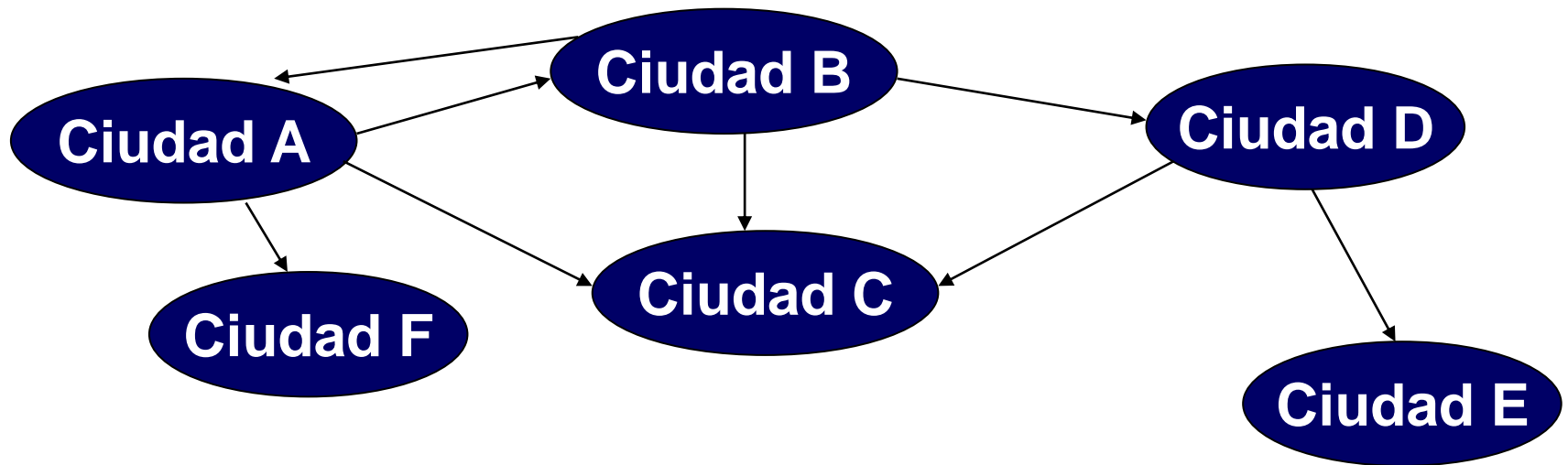
Ejemplos:

- Una red hidráulica,
- Caminos entre ciudades,
- Afinidad entre miembros de un colectivo.

Contenido

- Definición de grafo.
- Operaciones sobre grafos.
- Representación matricial de grafos.
- Representación vectorial.
- Representación enlazada.

Introducción



Caminos entre ciudades

Grafos

Un **grafo** (en inglés **graph**) es un T.D.A. que representa un conjunto finito N de nodos, llamados **vértices**, relacionados entre sí por un conjunto R de **arcos**.

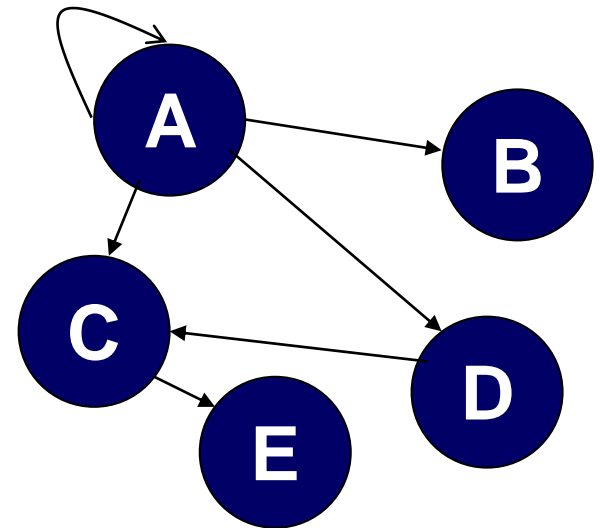
Grafo con 5 vértices y 6 arcos.

- **Vértices del Grafo**

$$N = \{ A, B, C, D, E \}$$

- **Arcos del Grafo**

$$R = \{ (A, A), (A, B), (A, D), (A, C), (D, C), (C, E) \}$$



Grafos: Aclaraciones

- Si el conjunto N es vacío, el grafo será **vacío**.
- Cada **arco** de un grafo establece una **única relación entre dos nodos**.
- No existe restricción en la relación que establece un arco, o sea, **un nodo puede estar relacionado consigo mismo** o con otro nodo.
- Cada arco se representa a través de un par, donde cada elemento determina uno de los nodos.

Observación

Dado que no hay restricciones en cuanto a los arcos de un grafo, todas las estructuras vistas con anterioridad pueden ser consideradas como un grafo.

Ejemplo, una lista lineal puede ser vista como un grafo donde cada nodo está relacionado con exactamente un nodo distinto de él.

Clasificación de los Grafos

Un grafo es ***no orientado*** o ***no dirigido*** (en inglés ***not directed*** o ***not oriented graph***) si el hecho de que el arco (N_j, N_k) pertenezca a R **implica** que el arco (N_k, N_j) pertenece a R , para todo j y k .

- Es irrelevante el sentido de las saetas en los arcos.
- Al representarlos, los arcos se grafican sin saeta.
- El arco que los relaciona aparece una sola vez en el conjunto R de arcos del grafo.

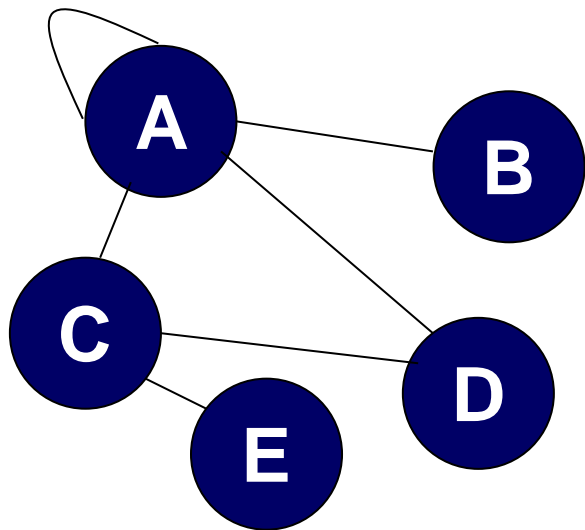
Si el grafo es no orientado, al arco se le llama ***arista***.

Clasificación de los Grafos

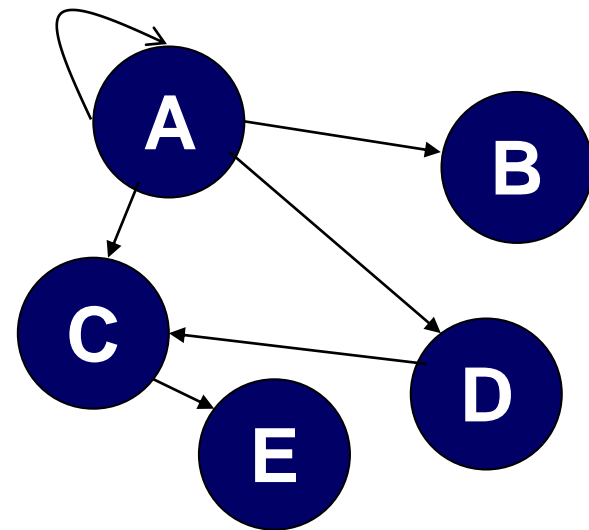
Un grafo es **orientado** o **dirigido** (en inglés: **oriented graph** o **directed graph**) si el hecho de que el arco (N_j, N_k) pertenezca a R **no implica** que el arco (N_k, N_j) pertenece también a R , para todo j y k .

- El sentido de las saetas en los arcos es importante.
- Es importante la dirección del arco, o sea, el nodo **origen** del arco y el nodo **destino**.
- El hecho que exista un arco de N_j a N_k no implica que exista de N_k a N_j .

Clasificación de los Grafos



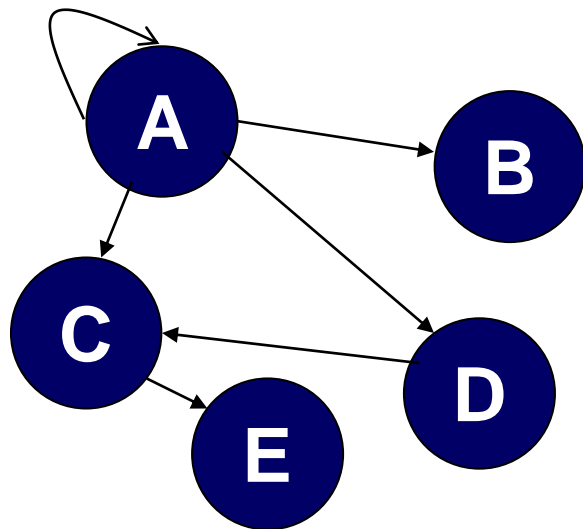
**Grafo No Orientado
o No Dirigido**



**Grafo Orientado o
Dirigido**

Adyacencia

El nodo n es **adyacente** al m , si **existe un arco o arista** de m a n .



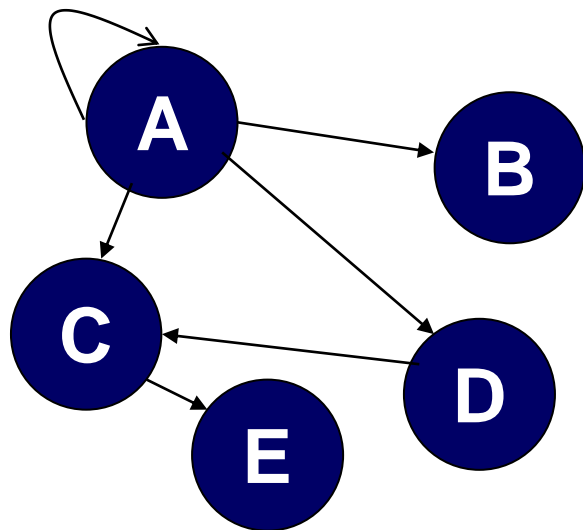
Adyacencia:

- B es adyacente a A
- D es adyacente a A
- C es adyacente a A
- A es adyacente a A
- C es adyacente a D
- E es adyacente a C

Incidencia

El vértice n es ***incidente al arco o arista*** x , si n es uno de los vértices relacionados con el arco o *arista* x . Del mismo modo, se dice que el arco o *arista* x es ***incidente al vértice*** n .

Así, todos los arcos que llegan o salen de un nodo son incidentes a él



Incidencia:

- B es incidente al arco (A,B)
- (A,B) es incidente a B

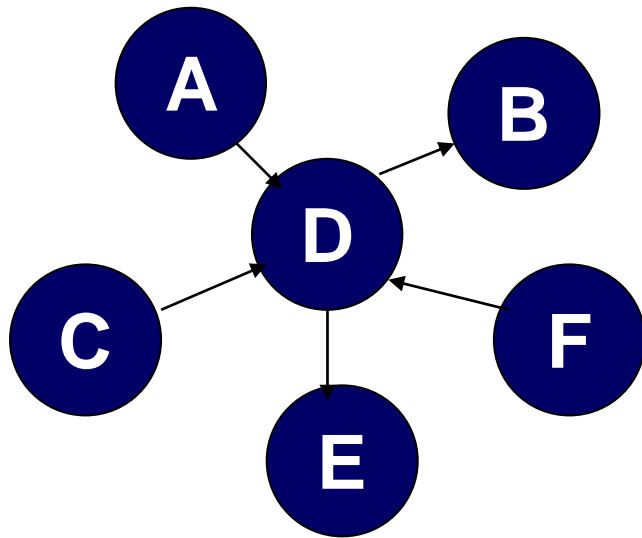
Grado de un Vértice

El ***grado de un vértice*** n es el número de **arcos o aristas** incidentes a él.

En el caso de los grafos orientados, el ***grado de entrada*** de un vértice n es el número de arcos que llegan a él y el ***grado de salida*** de un vértice n es el número de arcos que salen de él.

Por lo tanto, el **grado de un vértice** es la suma de los grados de entrada y de salida del vértice.

Grado de un Vértice



Sobre el Nodo D:

- Grado de Entrada: 3
- Grado de Salida: 2
- Grado del Nodo: 5

Ponderando arcos y vértices

En muchas aplicaciones resulta de interés asignar valores de ponderación, también llamados **pesos**, a los arcos o a los vértices, obteniéndose así:

- Grafos ponderados por los arcos
- Grafos ponderados por los vértices

Ejemplo: Grafo ponderado por los arcos

Problema del agente viajero

Un agente necesita repartir paquetes en diferentes ciudades. Se sabe en qué ciudades el agente debe repartir los paquetes, así como la distancia entre cada ciudad y las otras.

El problema consiste en saber cuál es la mejor ruta a seguir por el agente para repartir todos los paquetes.

Ejemplo: Grafo ponderado por los arcos

El problema se puede modelar con un grafo, donde:

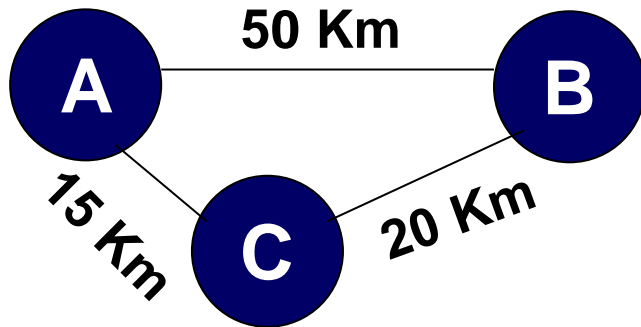
- Las ciudades son vértices.
- Los caminos entre las ciudades son arcos.

Si para todas las ciudades se cumple que la distancia entre una ciudad origen y una ciudad destino y la distancia de la ciudad destino a la ciudad origen es la misma, entonces, se puede utilizar un grafo no orientado.

Podemos ponderar los arcos con la distancia que existe entre las ciudades.

Ejemplo: Grafo ponderado por los arcos

El agente debe visitar tres ciudades A, B y C, partiendo de la ciudad A. Entre las ciudades A y B hay 50 km, entre las ciudades B y C hay 20 km y entre las ciudades A y C hay 15 km.



Caminos:

A-B-C: 70 Km

A-C-B: 35 Km

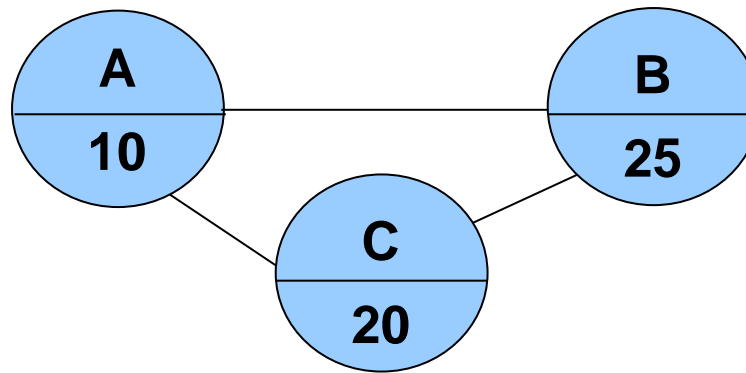
El camino más corto es de A a C y de C a B.

Ejemplo: Grafo ponderado por los vértices

Se tiene una secuencia de actividades, de las que se conoce su duración y se quiere saber, en un momento dado, en qué orden debieran realizarse, de forma tal que se realicen primero las de menor duración.

- Las actividades se pueden representar por los vértices de un grafo no orientado.
- En cada vértice se puede almacenar la duración de la actividad como factor de ponderación.

Ejemplo: Grafo ponderado por los vértices

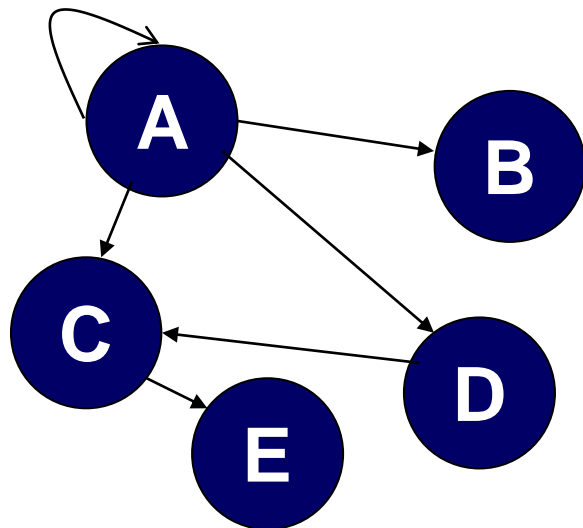


Resulta más conveniente realizar la actividad A, luego la C y, por último, la B.

Camino entre nodos

Existe un ***camino de longitud k*** desde el nodo A al B , si existe una secuencia de $k+1$ nodos n_1, n_2, \dots, n_{k+1} , donde $n_1 = A$, $n_{k+1} = B$ y (n_i, n_{i+1}) son adyacentes para todo i entre 1 y k .

En un grafo no orientado, al camino se le llama ***cadena***.



Caminos entre los nodos A y C:

Camino de longitud 1: (A,C)

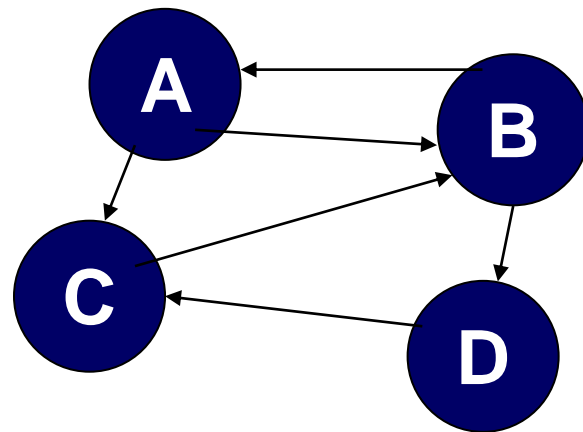
Camino de longitud 2: (A,D,C)

Camino de longitud 2: (A,A,C)

Camino de longitud 3: (A,A,D,C)

Ejemplo: Camino entre nodos

¿Existe un camino de longitud mayor que 1 entre los nodos C y B?

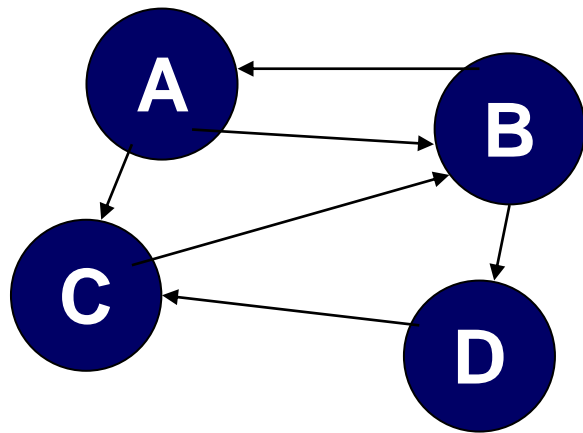


- Camino de longitud 3: (C, B, A, B)
- Camino de longitud 4: (C, B, A, C, B)
- Camino de longitud 5: (C, B, A, B, A, B)

Camino simple

Entre dos nodos existe un ***camino simple*** si todos los vértices, excepto posiblemente el primero y el último, son distintos dos a dos.

O sea, un camino simple es aquel en el que no se repiten los arcos.



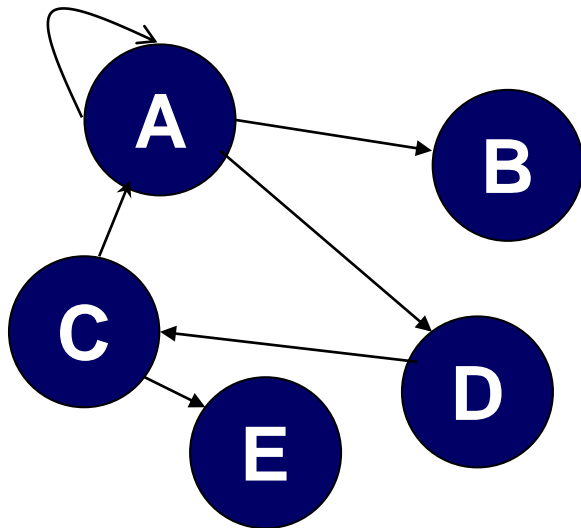
Ejemplo:

(A, B, D)

(A, B, A, C)

Camino simple

Un **ciclo**, o también **circuito**, es un camino simple de cualquier longitud de un nodo a sí mismo. Si el ciclo es de longitud 1, entonces se denomina *bucle* o *lazo*.



Ejemplo:

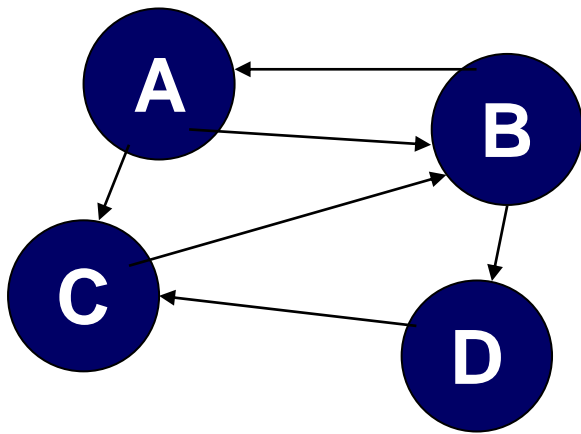
Ciclo: A,D,C,A

Bucle: A,A

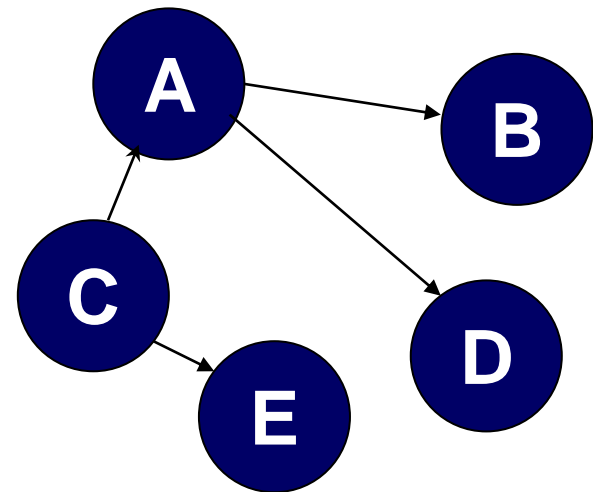
Grafo cíclico y acíclico

Si un grafo contiene al menos un ciclo se llama **cíclico**.

Un *grafo* **acíclico** es aquel que no tiene ningún circuito o ciclo.



Grafo cíclico



Grafo acíclico

Operaciones sobre Grafos

- Construir un grafo dada la información de sus vértices. (Convenio: se crea inicialmente vacío).
- Verificar si un grafo está vacío o no.
- Insertar vértices y arcos.
- Eliminar vértices y arcos.
- Dados dos vértices, determinar si son adyacentes.
- Dado un vértice, determinar cuáles vértices son adyacentes a él.

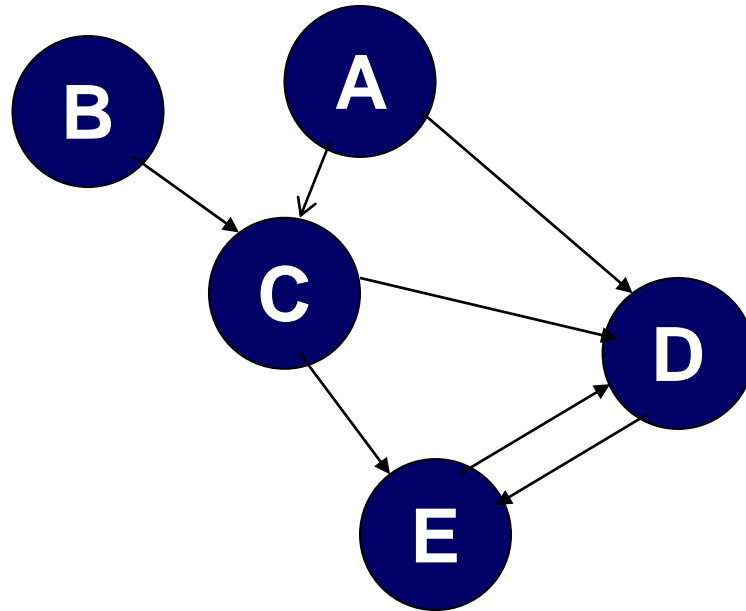
Operaciones sobre Grafos

- Dados dos vértices, determinar un camino de longitud k entre ellos.
- Dado un vértice, determinar otros vértices que tienen arcos incidentes a él.
- Determinar si el grafo es cíclico.

Representación matricial de Grafos

- La representación matricial permite establecer si hay relación entre cada vértice del grafo y los demás.
- Para ello, se utiliza una matriz cuadrada.
- Se utiliza un arreglo bidimensional.
- Esto significa que la representación matricial es una representación secuencial.

Representación matricial de Grafos



A partir de un grafo, siempre es posible definir un orden arbitrario de los nodos.

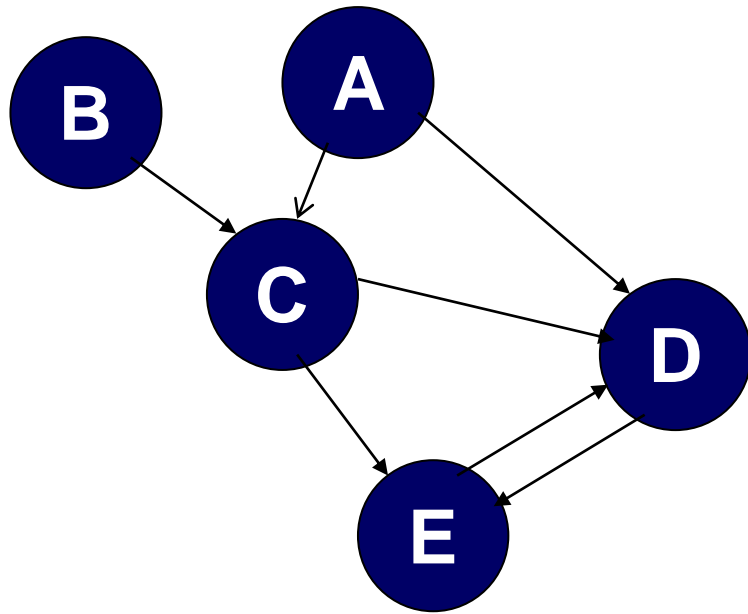
A	B	C	D	E
0	1	2	3	4

Matriz de Adyacencia

La **matriz de adyacencia** representa para cada nodo cuáles son sus vértices adyacentes.

- Cada fila y cada columna de la matriz se corresponde con un vértice en particular.
- Los elementos de la matriz son booleanos
- Si el elemento (i, j) es verdadero, existe un arco que va del vértice i al vértice j y, si el elemento (i, j) es falso, no existe arco del vértice i al vértice j .
- Si el grafo es no orientado, si existe el arco del vértice i al vértice j y existe el arco del vértice j al vértice i .

Representación matricial de Grafos



Matriz de Adyacencia

Vértices

A	B	C	D	E
---	---	---	---	---

0 1 2 3 4

	0	1	2	3	4
0	0	0	1	1	0
1	0	0	1	0	0
2	0	0	0	1	1
3	0	0	0	0	1
4	0	0	0	1	0

Problemas

La representación de la matriz de adyacencia de un grafo exige conocer por adelantado la cantidad de nodos del grafo.

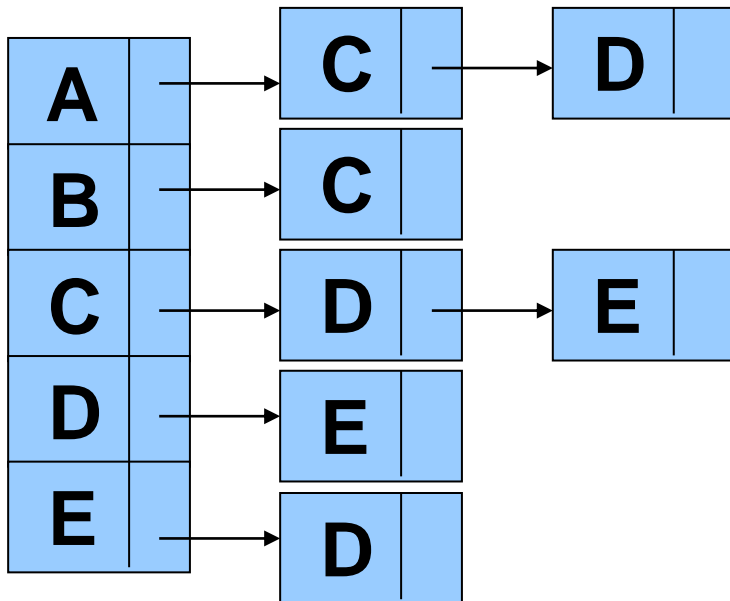
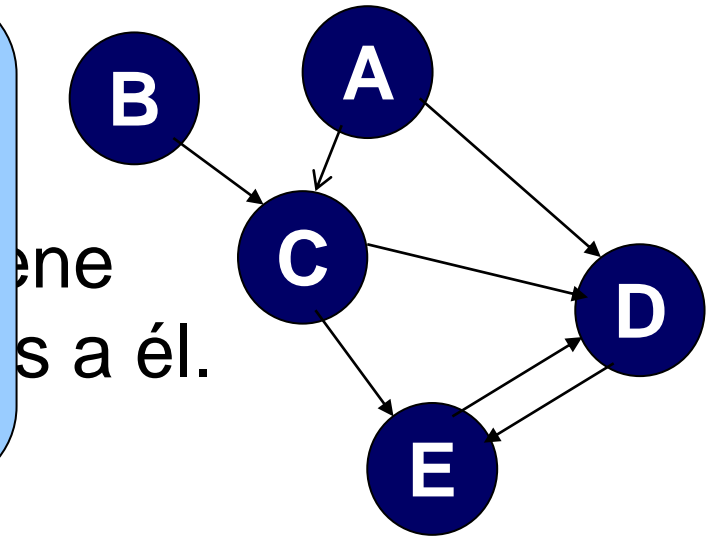
Esta representación no es suficientemente flexible cuando la cantidad de vértices varía con relativa frecuencia o cuando la estructura del grafo cambia durante la ejecución de la aplicación que lo usa. Esto implica crear la matriz cada vez que se inserte o elimine un nuevo nodo.

Problema: Solución costosa en tiempo y recursos.

Representación enlazada de Grafos

Problemas

- Es difícil saber cuántos arcos llegan a un nodo
- Se repite la información del vértice



- Las listas pueden ser indistintamente vectores, listas enlazadas o una combinación.
- El grafo está vacío si no existen vértices.

Representación enlazada de Grafos

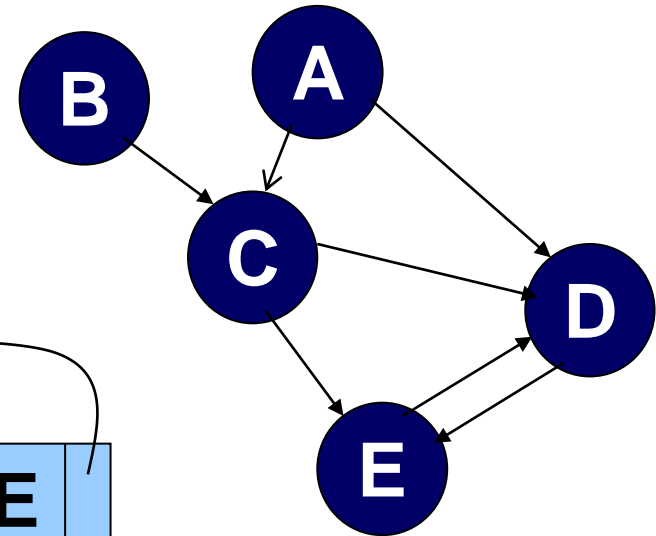
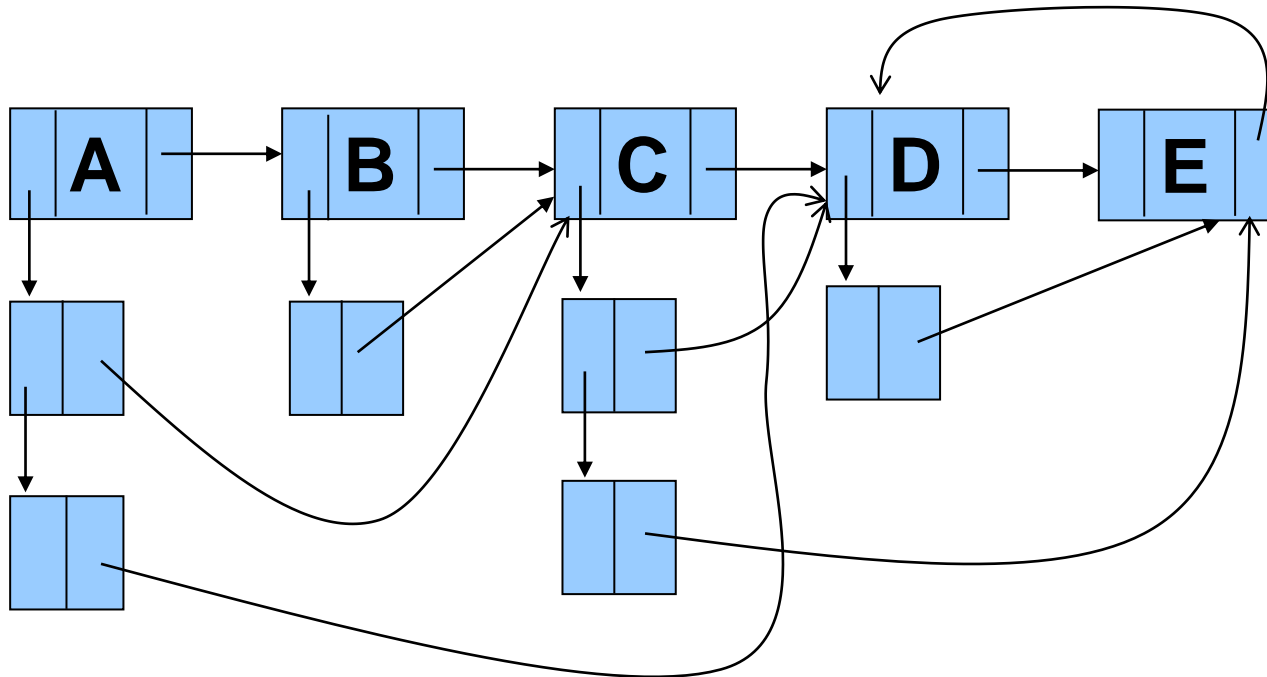
Variante 2: Representación con multilistas

- Cada **vértice** se representa a través de un nodo que contiene:
 - Apuntador a su información,
 - Apuntador a una lista de arcos
 - Apuntador al siguiente vértice en la lista
- Cada **arco** se representa por un nodo que contiene:
 - Apuntador al nodo de su vértice destino

Representación enlazada de Grafos

Variante 2: Representación multienlazada

- El grafo está vacío si no hay vértices.



Representación enlazada de Grafos

Contador de referencia: forma parte de la información de los vértices y mantiene actualizado la cantidad de arcos llegan a él.

- Los contadores de referencia facilitan algunas operaciones del grafo:
- Al eliminar un vértice se deben decrementar los contadores de referencia de los vértices adyacentes. Si el contador del vértice adyacente se hace cero, se puede eliminar ese vértice si la lista de arcos está vacía.

Implementación

La representación con multilistas de grafos debe considerar si el grafo es ponderado por los vértices o por los arcos.

En estos casos habría que agregar a los nodos de vértices y arcos respectivamente el peso o factor de ponderación.

•Conclusiones

- La representación matricial permite establecer si hay relación entre cada vértice del grafo y los demás
(memoria estática).
- El número de operaciones sobre los grafos caracterizan la riqueza de la propia estructura.
- Problema: agente viajero.
 - Aplicación de las Metaheurísticas.
- La representación con multilista implica trabajar con memoria dinámica.