Nous allons présenter deux résultats qui sont essentiels au traitement du signal. Le premier résultat est un théorème qui traite de la convergence point par point de la série de Fourier et qui introduit le noyau de Dirichlet, une quantité importante à l'application et à l'approximation par la série de Fourier.

Définition 1. *On appelle le noyau de Dirichlet*

$$D_N(t) = \frac{1}{2\pi} \sum_{n=-N}^{n=N} e^{int} \tag{1}$$

On commence par un lemme technique sur le noyau de Dirichlet.

Lemme 1. *On peut simplifier le noyau de Dirichlet et calculer son intégrale :*

$$D_N(t) = \frac{sin(t(N+\frac{1}{2}))}{2\pi sin(\frac{t}{2})} \tag{2}$$

$$\int_{-\pi}^{\pi} D_N(t)dt = 1 \tag{3}$$

Démonstration.

$$2\pi D_N(t) = ...e^{-i2t} + e^{-it} + 1 + e^{it} + e^{i2t} = ... = 1 + \sum_{n=1}^{N} e^{int} + \sum_{n=1}^{N} e^{-int}$$

On utilise la formule d'Euler $e^{it} = cos(t) + isin(t)$ pour arriver à

$$2\pi D_N(t) = 1 + 2\sum_{n=1}^{N} cos(nt)$$

On peut ici calculer l'intégrale de D_N :

$$\frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} 1 + 2\sum_{n=1}^{N} cos(nt)dt = \frac{2\pi + 0}{2\pi} = 1$$

On multiplie des deux côtés par $sin(\frac{t}{2})$:

$$2\pi sin\left(\frac{t}{2}\right) D_N(t) = sin\left(\frac{t}{2}\right) + 2\sum_{n=1}^{N} cos(nt) sin\left(\frac{t}{2}\right)$$

On utilise l'identité trigonométrique $cos(a)sin(b) = \frac{sin(a+b)-sin(a-b)}{2}$:

$$2\pi sin\left(\frac{t}{2}\right) D_N(t) = sin\left(\frac{t}{2}\right) + \sum_{n=1}^{N} sin\left(nt + \frac{t}{2}\right) - sin\left(nt - \frac{t}{2}\right)$$

En développant la somme on remarque qu'elle est téléscopique et qu'il ne reste que le premier et le dernier terme :

$$2\pi sin\left(\frac{t}{2}\right)D_N(t) = sin\left(\frac{t}{2}\right) - sin\left(\frac{t}{2}\right) + sin\left(Nt + \frac{t}{2}\right)$$

$$\Leftrightarrow 2\pi D_N(t) = \frac{sin(Nt + \frac{t}{2})}{2\pi sin(\frac{t}{2})}$$

$$\Leftrightarrow D_N(t) = \frac{sin(t(N + \frac{1}{2}))}{2\pi sin(\frac{t}{2})}$$

□

Théorème 1 (Jordan-Dirichlet)**.** *Soit $f \in C_{2\pi} \cap C^1_M$ et sa série de Fourier associée :*

$$S_N(x) = \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(x+t)\sum_{n=-N}^{n=N} e^{int}dt. \tag{4}$$

Alors la série de Fourier converge vers :

$$\lim_{N\to\infty} S_N(x) = \lim_{\epsilon\to 0}\frac{f(x+\epsilon)+f(x-\epsilon)}{2} = \frac{f(x^+)+f(x^-)}{2} \tag{5}$$

Si on a de plus que f est continue en x, alors la série de Fourier de f en x converge vers $f(x)$.

Démonstration. Pour un point $f(x)$, on peut calculer $S_N(x)$:

$$S_N(x) = \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(x+t)\sum_{n=-N}^{n=N} e^{int}dt$$

On veut montrer que pour tout x :

$$u_N(x) = S_N(x) - \frac{f(x^+)+f(x^-)}{2} \to 0$$

On peut se ramener par un changement de variable à $x = 0$.

$$S_N(0) = \sum_{n=-N}^{n=N}\frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(t)e^{int}dt$$

La **proposition 2** nous donne la convergence simple de la série de Fourier, donc on peut prendre une fonction g qui majore la série et appliquer le théorème de convergence dominée :

$$S_N(0) = \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(t)\sum_{n=-N}^{n=N} e^{int}dt$$

On a une expression pour le noyau de Dirichlet que l'on pourra utiliser dans l'intégrale :

$$S_N(0) = \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(t)\frac{sin(\frac{t}{2}(2N+1))}{sin(\frac{t}{2})dt}$$

On sait que $\int_{-\pi}^{\pi} D_N(t)dt = 1$, donc on peut écrire :

$$\frac{f(0^+)+f(0^-)}{2} = \int_{-\pi}^{\pi} D_N(t)\frac{f(0^+)+f(0^-)}{2}dt$$

Qui nous donne :

$$u_N(0) = \int_{-\pi}^{\pi}\left(f(t) - \frac{f(0^+)+f(0^-)}{2}\right)D_N(t)dt$$

On cherche à utiliser le lemme de Riemann-Lebesgue, on doit donc montrer que la fonction $h(t) = \frac{f(t)-\frac{f(0^+)+f(0^-)}{2}}{sin(\frac{t}{2})}$ est intégrable près de 0. Comme $f(t)$ est C^1_M et que l'on est dans l'intégrale, on peut l'écrire comme la moyenne de ses limites $f(t) = \frac{f(t^+)+f(t^-)}{2}$ et calculer la limite de $t \to 0$:

$$\lim_{t\to 0}\frac{\frac{f(t^+)+f(t^-)}{2} - \frac{f(0^+)+f(0^-)}{2}}{sin\left(\frac{t}{2}\right)}$$

$$\Leftrightarrow \lim_{t\to 0}\frac{f(t^+)-f(0^+)+f(t^-)-f(0^-)}{2sin\left(\frac{t}{2}\right)}$$

On sait que quand $t \to 0$, on a l'équivalence $sin(t) \sim t$. On peut donc écrire :

$$\lim_{t\to 0}\frac{f(t^+)-f(0^+)}{t} + \frac{f(t^-)-f(0^-)}{t}$$

Qui nous donne par la formule de la dérivée :

$$\lim_{t\to 0} f'(t^+) + f'(t^-)$$

Une quantité que l'on sait bornée, car la fonction est dérivable par morceaux. Alors la fonction $h(t)$ est bornée sur tout l'intervalle. donc Riemann-Intégrable. On peut également simplifier le sinus restant lorsque N est beaucoup plus grand que t :

$$\lim_{N\to+\infty}\frac{Nt+\frac{t}{2}}{Nt}Nt = \lim_{N\to+\infty} 1 + \frac{2}{N} = 1$$

$$\Rightarrow u_N(0) = \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} h(t)sin(\frac{t}{2}(2N+1)) \sim \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} h(t)sin(Nt)$$

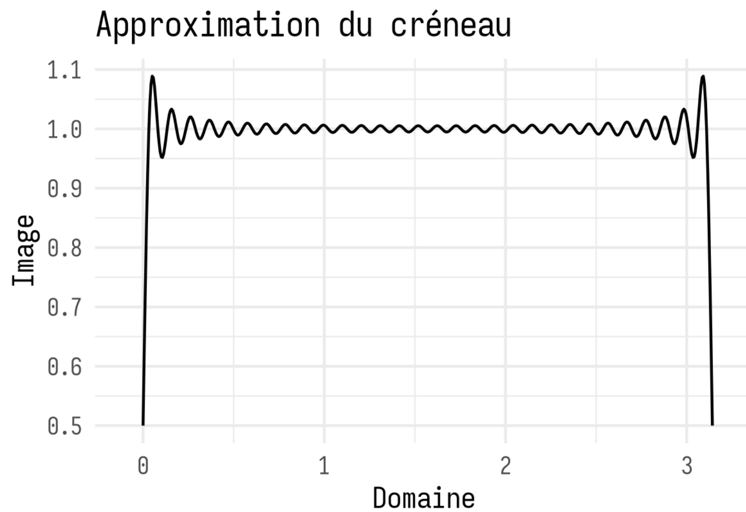
On peut donc appliquer le lemme de Riemann-Lebesgue et conclure :

$$\lim_{N\to\infty} S_N(x) = \frac{f(x^+)+f(x^-)}{2}$$

□

Exercice 1. *Calculer le noyau de Dirichlet de la fonction créneau en $x = 0$ et en $x = \pi$.*

Exemple 1. *Voyons le comportement de la fonction créneau approximée par sa*



série de Fourier :
Le code pour ce graphique peut être trouvé ici.

Exemple 2. *Montrer que le noyau de Dirichlet est pair :*

$$D_N(t) = \frac{sin((2N+1)t)}{sin(\frac{t}{2})} = \frac{sin((2N+1)(-t))}{sin(\frac{-t}{2})} = D_N(-t)$$

On a ceci, car $sin(-\theta) = -sin(\theta)$.

Présentons maintenant le second résultat qu'on utilise aussi dans le traitement du signal, car il décrit l'erreur d'approximation de la série de Fourier près des sauts. Cette erreur est non-négligeable, mais bornée par une constante connue. On verra également la valeur exacte de l'approximation en son saut. On commence par introduire un résultat calculatoire sur une fonction précise qu'on appelle ϕ.

Lemme 2. *Pour la fonction $\phi(t) = \frac{\pi - t}{2}$, la somme partielle $S_N(\phi(t))$ est dominée par le terme $\frac{2}{\pi}\int_0^{\pi} \frac{sin(t)}{t} dt$.*

Démonstration. Soit la somme partielle pour la fonction $\phi(t)$:

$$S_N(t) = a_0 + \sum_{n=1}^{N} a_N cos(nt) + b_N sin(nt)$$

On peut vérifier que $a_0 = a_N = 0$ et que $b_N = \frac{1}{n}$ et écrire :

$$S_N(t) = \sum_{n=1}^{N} \frac{sin(nt)}{n}$$

On sait que $2\pi D_N(t) = \frac{1}{2} + \sum_{n=1}^{N} cos(nt)$. On a donc :

$$2\pi \int_0^t D_N(t)dt = \frac{x}{2} + \sum_{n=1}^{N} \frac{sin(nt)}{t} = \frac{x}{2} + S_N(x)$$

On sait que $\int_0^t D_N(t)dt \sim \int_0^t \frac{sin(Nt)}{t}dt$ et par le changement de variable $x = Nt$, on arrive à

$$S_N(x) = 2\pi \int_0^{Nt} \frac{sin(x)}{x}dx - \frac{x}{2}$$

On cherche à maximiser cette quantité en trouvant les points critiques :

$$0 = \frac{sin(x)}{x} \Leftrightarrow Nx = k\pi$$

On sait avec un peut de technique que le terme dominant est $\int_0^{k\pi} \frac{sin(u)}{u}du$ où π maximise la quantité dans notre intervalle. Se référer au *Théorème D* de Hewitt-Hewitt pour plus de détails.

$$S_N(\frac{\pi}{N}) \leq \int_0^{\pi} \frac{sin(t)}{t}$$

On peut déjà remarquer que la somme partielle pour ϕ dépasse la fonction.

$$\int_0^{\pi} \frac{sin(t)}{t} > \phi(0) = \frac{\pi}{2}$$

□

Notons qu'il est possible de montrer une équivalence entre les deux quantités et qu'on présente ici une version affaiblie du lemme.

Lemme 3. *L'erreur d'approximation pour ϕ est une quantité connue :*

$$\int_0^{\pi} \frac{sin(t)}{t} = 1,852... = \frac{\pi}{2}1,179... = \lambda$$

On présente ici un théorème correct, mais affaibli en raison de l'hypothèse affaiblie prise au lemme 2. On montre que l'erreur d'approximation est bornée par la constante λ, mais il est possible de montrer une égalité à la limite.

Théorème 2 (Phénomène de Gibbs)**.** *Soit $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ qui soit C^1_M, périodique de période 2π et qui admette un saut en x_0 :*

$$f(x_0^+) - f(x_0^-) = \delta > 0$$

Et soit $(x_N)_{N\in\mathbb{N}}$ une suite qui tende vers x_0^+. Alors

$$lim_{N\to\infty} S_N(x_N) \leq f(x_0^+) + \lambda\delta$$

Où λ correspond à la quantité du lemme 2.

Démonstration. On introduit la fonction

$$f^*(x) = f(x) - \frac{\delta}{\pi}\phi(x-\zeta)$$

On peut se ramener à $\zeta = 0$ par une translation qui place la discontinuité au point 0. Cette fonction est continue et sans saut au point $x = 0$:

$$\lim_{x\to 0} f^*(x) = \frac{f(0^+) + f(0^-)}{2} - \frac{\delta}{\pi}\phi(0)$$

$$\lim_{x\to 0} f^*(x) = \frac{\delta}{2} - \frac{\delta}{2} = 0$$

On a donc que sa série de Fourier pour f^* y converge uniformément. On peut écrire :

$$S_N(x) = S_N^*(x) + \frac{\delta}{\pi}\phi(x)$$

Et passer à la limite pour trouver :

$$\lim_{N\to\infty} S_N(0 + \frac{\pi}{N+1}) \leq \frac{\delta}{2} + \frac{\delta}{\pi}\int_0^\pi \frac{sin(t)}{t}dt$$

$$\lim_{N\to\infty} S_N(0^+) \leq \frac{\delta}{2} + \frac{\delta}{\pi}\int_0^\pi \frac{sin(t)}{t}dt$$

$$\lim_{N\to\infty} S_N(0^+) \leq \frac{\delta}{2} + \frac{\delta}{2}\frac{2}{\pi}\int_0^\pi \frac{sin(t)}{t}dt$$

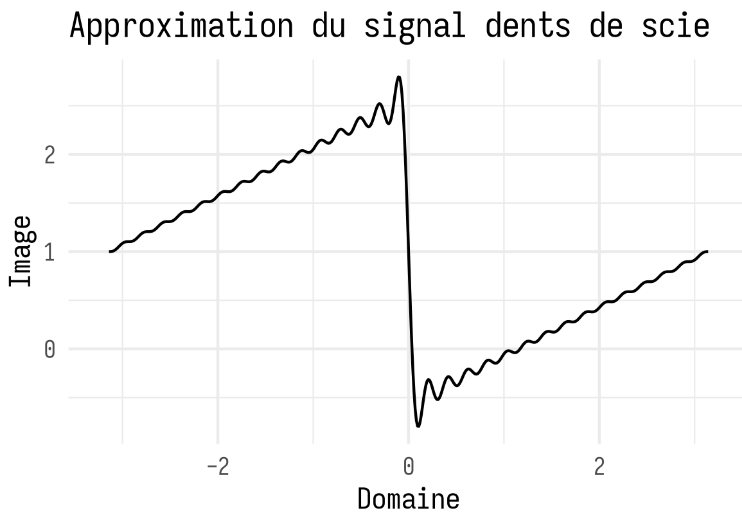
$$\lim_{N\to\infty} S_N(0^+) \leq f(0^+) + \delta\lambda$$

□

Proposition 1. *Soit une f fonction dérivable par morceaux de période 2π. Sa série de Fourier ne change pas si on change la valeur d'un point de f.*

Démonstration. Si on change un point x de f, alors la fonction reste intégrable au sens de Lebesgue et sa valeur reste la même. □

Exemple 3. *Voici le phénomène de Gibbs illustré par la fonction en dents de scie, une fonction qui croît de façon constante et revient à 0 périodiquement. On peut le voir comme un signal qui croît progressivement et s'éteint subitement.*



Le code pour ce graphique peut être trouvé ici. Et un squelette de code en R pour faire vos propres graphiques peut être trouvé ici