(75.26)
Simulación

1
13/3

PRACTICA

Página: materias.uba.ar/7526
Campus → PC 75269519
pass simu1C2019

1 parcial

C. Marcelo Benitez
Natalia Bartolome

cbenitez@fi.uba.ar
nataliagbar@gmail.com

2TPs grupales (entre 3 y 4)

Coloquio → puede cambiarse por un TP de un papper (individual)

Herramientas:
python → Librería **Simpy**
Matlab/Octave

Repaso Proba

Bernoulli

$E(x) = p$

$\sigma^2(x) = p(1-p)$

Si A y B son independientes

$P(A \cap B) = P(A)\,P(B)$

$P(A/B) = P(A)$

$P(B|A) = P(B)$

Geométrica

$P(m/p) = (1-p)^{m-1} \cdot p$

Binomial

$P(r|m,p) = \binom{m}{r} p^r (1-p)^{m-r} \qquad r = 0, \ldots, m$

Poisson

$P(r) \begin{cases} \dfrac{e^{-\mu}\,\mu^r}{r!} & r = 0, 1, \ldots \end{cases}$

$\mu = \lambda t$

Exponencial

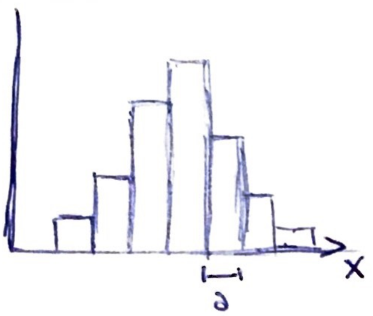
$f(t) \begin{cases} \lambda e^{-\lambda t} & t > 0 \\ 0 & \forall t \end{cases}$

Normal

$$\hookrightarrow f(t) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}\,\sigma} e^{-\frac{1}{2}\left(\frac{x-\mu}{\sigma}\right)^2}$$

Desviación media : $D = E\left[\,|X-\mu_x|\,\right]$

Histograma



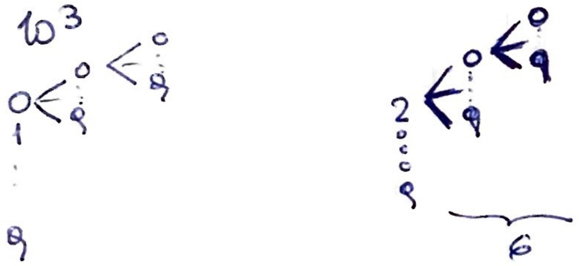
Regla de Sturges

$$a = \frac{Max - Min}{1 + \log_2 m} \rightarrow \text{de la muestra}$$

Ej 9 de la guía

Número de combinaciones posibles de un candado

10^3



$8 \cdot 10^6$

Combinación Simple

$$C(m,n) = \frac{m!}{n!\,(m-n)!} = \binom{m}{n}$$

B, A
A, B

1

Variación Simple

$$V(m,n) = \frac{m!}{(m-n)!}$$

B, A
A, B

2

Permutación Simple

$$P(m) = m!$$

Permutación con repetición

$$P(m,a,b,c) = \frac{m!}{a!\,b!\,c!}$$

Ej 52 cartas 13 en c/ palo

$\sqcup \quad \sqcup \quad \sqcup \quad \sqcup \quad \underset{\sqcup}{d}$ Poker

13 —— 48

$$\frac{13 \cdot 48}{\frac{52!}{5!\,(52-5)!}} = P(\text{poker servido})$$

favorables

posibles

$\overset{1}{\sqcup} \quad \overset{1}{\sqcup} \quad \overset{1}{\sqcup} \quad \overset{2}{\sqcup} \quad \overset{2}{\sqcup}$ Full

$13 \cdot \binom{4}{3} \qquad 12 \cdot \binom{4}{2}$

$$\frac{13 \cdot \binom{4}{3} \cdot 12 \binom{4}{2}}{\frac{52!}{5!\,(52-5)!}}$$

$\overset{A}{\sqcup} \quad \overset{A}{\sqcup} \quad \overset{B}{\sqcup} \quad \overset{B}{\sqcup} \quad \overset{C}{\sqcup}$ Doble Par

$$\frac{13 \cdot \binom{4}{2} \cdot 12 \cdot \binom{4}{2} \cdot 11 \cdot \binom{4}{1}}{\frac{52!}{5!\,(52-5)!}}$$

Ej Monedas

3 ○ 1 falsa

c c c c

$$P(\text{falsa} \mid cccc) = \frac{P(\text{falsa} \cap cccc)}{P(cccc)} = \frac{P(cccc \mid \text{falsa}) \cdot P(\text{falsa})}{P(cccc)}$$

$$= \frac{1 \cdot 1/3}{P(cccc)}$$

$$P(cccc) = P\left(\frac{cccc}{v}\right) P(v) + P\left(\frac{cccc}{f}\right) \cdot P(f)$$
$$= \left(\frac{1}{2}\right)^4 \cdot \frac{2}{3} + 1 \cdot \frac{1}{3}$$

20/3

Generación de números al azar

Números aleatorios páginas → random.org
→ fourmilab.ch/hotbits/

Pseudo aleatorios

G.C.L. Método Lineal Congruente

$x_{i+1} = (a\, x_i + c) \bmod m$

~~periodo~~ rango de valores q' puede dar $0 .. m-1$

a → multiplicador, c → incremento, m → modulo

periodo máximo número posible

Ej $m = 10$
$a = 8$
$c = 8$
$x_0 = 8$

$\underbrace{8, 2, 4, 0}_{4}, 8, 2, 4, 0 \ldots$

$$X_{n+1} = (X_{n-i} + X_{n-k}) \bmod m$$
$$n \geq k$$

$$X_{n+1} = (X_{n-24} + X_{n-55}) \bmod 2^{24}$$

the art of Computer Programming Vol 2
Donald knuth

GUÍA 1

Ej 1

$U_0 = \underbrace{7\ 4\ 1\ 8\ 5\ 2\ 9\ 6\ 3\ 0}_{\text{Periodo } 10}\ 7$

$U_1 = 18\ 5\ 2\ 9\ 6\ 3\ 0\ 7\ 4\ 1$

$a = 1103515245$

$m = 2^{24}$

$c = 12345$

Ej 3

$5 - \underbrace{15 - 45 - 135 - 105}\ - 15 - 45 - 135 - 105 - 15$

Ej 4

$X_{m+1} = (3\ X_m + c) \bmod 7$

$X_1 = 6$

$X_2 = 4$

$4 = (3 \cdot 6 + c) \bmod 7$

$c = 0$

$\underbrace{6, 4, 5, 1, 3, 2}, 6 \ldots$

$X_{51} = 5$

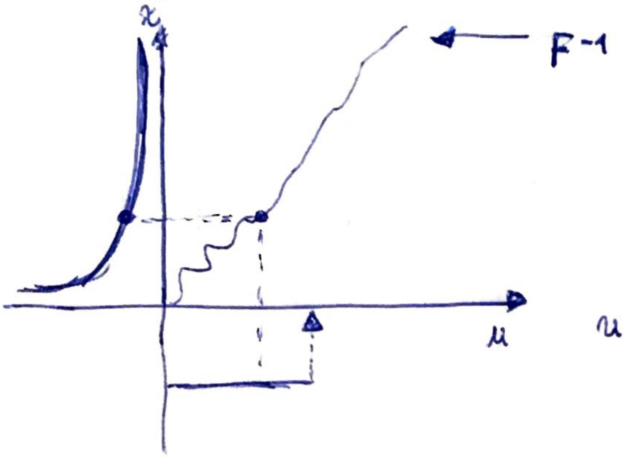
Ej 9

27/3

$u = \frac{U}{m}$ — uniforme generador

Método de la transformada inversa

función inversa densidad acumulada



$x = F^{-1}(u)$

$u \in [0, 1]$

PDF: Probability Density Function

CDF: Cumulative Distribution Function

$$f(x)\begin{cases} \lambda e^{-\lambda x} & x \geq 0 \\ 0 & \forall x \end{cases} \qquad F(x)\begin{cases} 0 & x < 0 \\ 1-e^{-\lambda x} & x \geq 0 \end{cases}$$

$$1 - e^{-\lambda x} = u$$
$$e^{-\lambda x} = 1 - u$$
$$-\lambda x = \ln(1-u)$$
$$x = -\frac{1}{\lambda} \ln(1-u)$$

Ej 11

$$f(x) = \frac{5}{4} x^{-2} \quad \text{con } 1 < x < 5$$

$$F(x) = \int \frac{5}{4} t^{-2}\, dt$$

$$= \frac{5}{4} \int_1^x t^{-2}\, dt = \frac{5}{4}\left[\frac{t^{-1}}{-1}\right]_1^x = \boxed{-\frac{5}{4} x^{-1} + \frac{5}{4} = F(x)}$$

Validar $F(1) = 0$ ✓
$F(5) = 1$

$$-\frac{5}{4} x^{-1} + \frac{5}{4} = u$$
$$-\frac{5}{4} x^{-1} = u - \frac{5}{4}$$
$$x^{-1} = -\frac{4}{5} u + 1$$
$$x = \frac{1}{-\frac{4u}{5} + 1}$$

$Y(t)$: conocida $\qquad Y(t) \geq 0 \iff X(t) \geq 0$

$X(t)$: queremos generar

$$c \geq \frac{X(t)}{Y(t)}$$

$Y(t) \to a$

$U \to u$

$$u \leq \frac{X(a)}{c \cdot Y(a)}$$

→ si no se cumple se rechaza y se genera uno nuevo

→ si se cumple se acepta

Ejemplo

$$X(t) = \begin{cases} 20t(1-t)^3 & 0 < t < 1 \\ 0 & \forall \text{ otro } t \end{cases}$$

$$Y(t) \begin{cases} 1 & 0 < t < 1 \\ 0 & \end{cases}$$

$$c \geq \frac{20t(1-t)^3}{1}$$

Busco máximo

$$20(1-t)^3 + 20t(-3)(1-t)^2 = 20(1-t)^3 - 60t(1-t)^2 = 0$$

$$20(1-t)^3 = 60t(1-t)^2$$

$$20(1-t) = 60t$$

$$20 - 20t = 60t$$

$$20 = 80t$$

$$\frac{20}{80} = t$$

$$\boxed{\frac{1}{4} = t}$$

$$c \geq \frac{X(1/4)}{Y(1/4)}$$

$$c \geq \frac{20}{4}\left(1-\frac{1}{4}\right)^3 = 5\left(\frac{3}{4}\right)^3 = 2,109375 = \frac{135}{64}$$

$$c \geq 2,1\hat{1}$$

Box Muller (Genera una Normal)

$$z_1 = \sqrt{-2\ln(u_1)}\ \cos(u_2)$$
$$z_2 = \sqrt{-2\ln(u_1)}\ \text{sen}(u_2)$$

Chi 2

m obs

k cat

$$\gamma = \sum_{1\le i\le k} \frac{(\overbrace{Y_i}^{\text{obs q' tengo (redes)}} - \overbrace{mP_i}^{\text{obs esperables}})^2}{mP_i}$$

Acepto respecto de un parametro α

P_i

↳ prob. que caiga en cat i

Ejemplo dado

$k = 6$

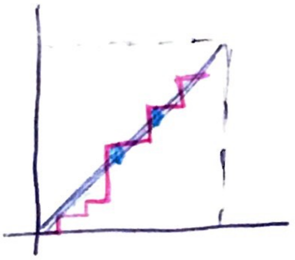
$P_i = 1/6$

$m = 1000$

En Matlab función: chi2gof

Kolmogorov Smirnov

Trata de medir la dif. entre la función acumulada (hipotesis) y la función empirica



Creo q' es uniforme

$$F_m(x) = \frac{\text{cant de } X_i \le X}{m}$$

α

$$K_m = \sqrt{m} \max_{-\infty < x < \infty} (|F_m(x) - F(x)|)$$

comparado con k_α acepto o rechazo

Test Empiricos

Test de frecuencia

$[0, m)$ $P_i = \frac{1}{m}$ $K = m$

Test Serial

$[0, m)$

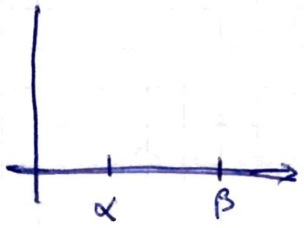
(m_0, m_1) (m_2, m_3)

$P_i = \frac{1}{m^2}$

Gap test

$[0,1)$

$0 \leq \alpha \leq \beta < 1$



→ prob. de que caiga en el intervalo

$p_0 = \beta - \alpha$

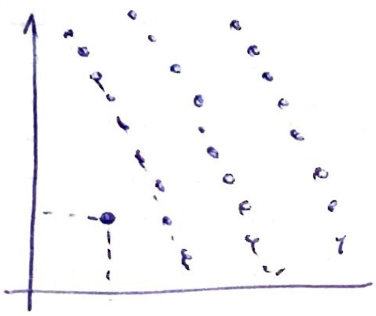
$p_1 = (1-p_0)\, p_0$ → la 1ra vez no cayó pero la segunda sí

$p_2 = (1-p_0)^2\, p_0$ → luego de dos números fuera cae dentro

↓

ES UNA GEOMETRICA

Test espectrales



No debería verse un patrón o requerir un zoom muy grande para ver un patrón

Ejo 1º (moneda $\xrightarrow{es}$ dado)

$\alpha = 5\% = 0{,}05$

scipy.stats

k	1	2	3	4	5	6
m_k	25	8	17	20	13	13

$p_i = 1/6$

$n = 96$

obs_values = [25, 8, 17, 20, 13, 13] → los que tenemos

f_values = [16, 16, 16, 16, 16, 16]

(χ^2, p) = scipy.stats.chisquare(obs_values, f_exp = f_values)

$p \simeq 0{,}047$

[h, p] = chi2gof

h = 1 ⟹ rechazo H_0

$1-p < \alpha \Rightarrow$ Acepto

Proceso Poisson

En el instante 0 hay 0 eventos

Poi. $P(m) = \frac{e^{-\lambda t} (\lambda t)^m}{m!}$ $E(m) = \lambda t$ $V(m) = \lambda t$ Probilidad de m eventos en un continuo

Exp. $f(t) = \begin{cases} \lambda e^{-\lambda t} & t>0 \\ 0 & t \leq 0 \end{cases}$ $E(t) = \frac{1}{\lambda}$ $\sigma^2(t) = \frac{1}{\lambda^2}$ Tiempo en que llega el prox. evento

Gam. $f(t) = \begin{cases} \frac{\lambda e^{-\lambda t} (\lambda t)^{k-1}}{(k-1)!} & t>0 \\ 0 & t \leq 0 \end{cases}$ Tiempo de arribo de k eventos

Homogeneo (Estacionario) tasa de arribo λ es constante durante todo el continuo

No Homogeneo (No estacionario) la tasa no es constante

$P(x > s+t \mid x>s) = P(x > t)$ [Exponencial]

$\lambda = \sum_{i=1}^{m} \lambda_i$ union de procesos poisson

Division de procesos poisson
λ ; P $\lambda_1 = p \cdot \lambda$ $\lambda_2 = (1-p) \cdot \lambda$

Dos procesos : Prob. que uno termine antes q' el otro

$P(t_1 < t_2) = \frac{\lambda_1}{\lambda_1 + \lambda_2}$ (Competencia de exponencial)

Guia 2

Ej 4

$\lambda = 1$ 7 12

$P(n=6) = \frac{e^{-1 \cdot 5}\, 5^6}{6!} = 0,146$ $E(n) = 5$

Ej 5  $\lambda = 2$

$$P(r=2/t=5, \lambda=2) = \frac{e^{-2.5}(2.5)^2}{2!} = 2{,}27 \cdot 10^{-3}$$

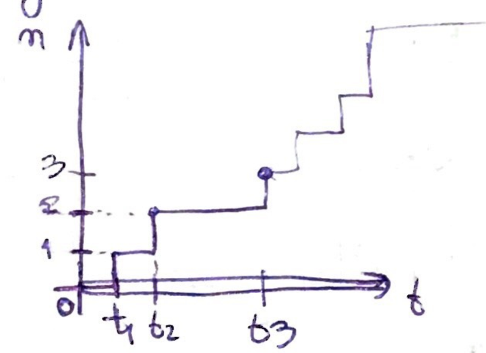
Ej 6

$\lambda = 1/5$

$$P\left(r>12 \mid t=60, \lambda=1/5\right) = 1 - P\left(r \leq 12 \mid t=60, \lambda=\frac{1}{5}\right)$$

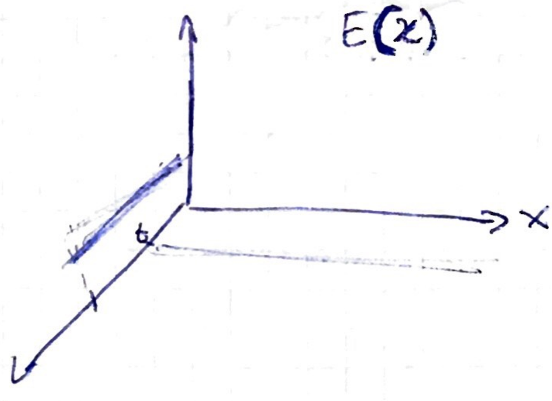
$$= 1 - \sum_{i=0}^{12} P(r=i \mid t=60, \lambda=1/5) = 1 - \sum_{i=0}^{12} \frac{12^i e^{-12}}{i!} = 0{,}42$$

Ej 7



Ej 23

$$P(r/t, \lambda_?) = \frac{e^{-\lambda t}(\lambda t)^r}{r!}$$



$u \sim \mathcal{U}[0,1] \longrightarrow t$

$E(x \mid t) = \lambda t$

$$E(x) = E_t\left[\mathbb{E}(x \mid t)\right] = E_t[\lambda t] = \lambda \, E_t[t] = \frac{\lambda}{2}$$

———— o ————

Cadenas de Markov

$$P\left(t_3 = S_3 \mid t_0 = S_0 \cap t_1 = S_1 \cap t_2 = S_2\right) = P\left(t_3 = S_3 \mid t_2 = S_2\right)$$

$$P = \begin{bmatrix} P_{11} & P_{12} & \cdots & P_{1m} \\ P_{21} & P_{22} & \cdots & P_{2m} \\ \vdots & & & \\ P_{m1} & P_{m2} & \cdots & P_{mm} \end{bmatrix}$$

Matriz de prob. de transicion

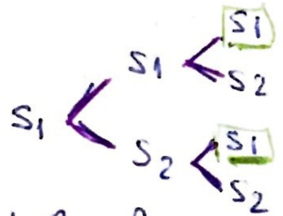
- Tiempo discreto
- Estacional (?)

P3 Ej 4

S_1: trabando
S_2: Rota

S_m	S_{m+1}	
t	r	= 0,05
t	t	= 0,95
r	t	= 0,4
r	r	= 0,6

$$P = \begin{array}{cc} P_{11} & P_{12} \end{array} \begin{bmatrix} 0{,}95 & 0{,}5 \\ 0{,}4 & 0{,}6 \end{bmatrix} \begin{array}{cc} P_{21} & P_{22} \end{array}$$



$$P\left(t_2 = S_1 \mid t_0 = S_1\right) = P_{11} \cdot P_{11} + P_{12} \cdot P_{21}$$

P^m

$$\begin{bmatrix} 0{,}95 & 0{,}5 \\ P_{11} & P_{12} \\ 0{,}4 & 0{,}6 \\ P_{21} & P_{22} \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 0{,}95 & 0{,}5 \\ P_{11} & P_{12} \\ 0{,}4 & 0{,}6 \\ P_{21} & P_{22} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \boxed{P_{11}P_{11} + P_{12}P_{21}} & P_{11}P_{12} + P_{12}P_{21} \\ P_{21}P_{11} + P_{22}P_{21} & P_{21}P_{12} + P_{22}P_{22} \end{bmatrix}$$

$$P^{m \to \infty} = \begin{bmatrix} \pi_1 & \pi_2 & \cdots & \pi_m \\ \pi_1 & \pi_2 & \cdots & \pi_m \\ \pi_1 & \pi_2 & & \pi_m \end{bmatrix}$$

$\vec{\pi} = (\pi_1, \pi_2 \ldots \pi_m)$ Probabilidad Limite del sistema

↓

Podria no existir si se quede oscilando

Si no se el estado pero se que $P(t) = 0,7$ $P(r) = 0,3$

$[\overset{P_1}{0,7} \quad \overset{P_2}{0,3}]$

$P_{01} = P_1 . P_{11} + P_2 . P_{21}$

$$\underset{\otimes}{[P_1 \;\; P_2]} \cdot \begin{bmatrix} P_{11} & P_{12} \\ P_{21} & P_{22} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} P_1 P_{11} + P_2 P_{21} \\ P_1 P_{12} + P_2 P_{22} \end{bmatrix}$$

= (son iguales)

⊗ Distribución estacionaria

Prob. de que el sistema este en c/u de los estados

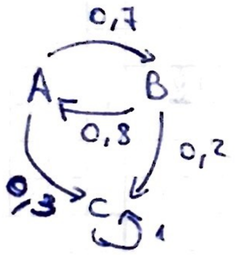
Si $\vec{\pi}$ existe es igual al vector ⊗

$$\vec{\pi} . P = \vec{\pi}$$

$$\sum_{i=1}^{m} \pi_i = 1$$

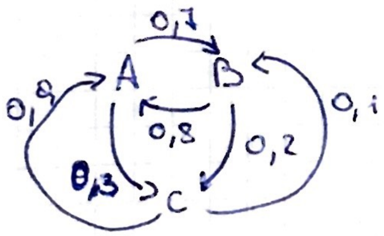
E. Transitorio → Una vez que sale de un estado existe la posibilidad de no volver

E. Recurrente → Una vez que sale del estado puede volver
o
no existe la posibilidad de no volver



A, B son transitorios

C es absorvente



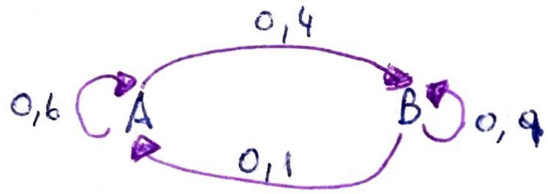
A, B, C son recurrentes

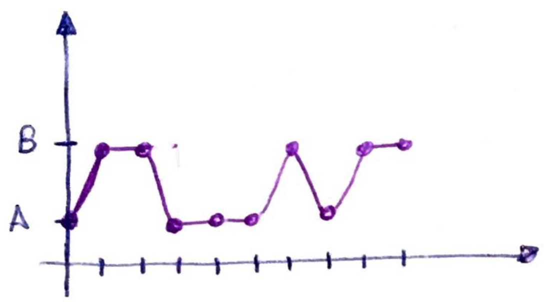
Ej 1

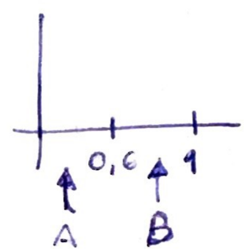
$P[A|B] = 0,1$

$P[B|A] = 0,4$

$$P = \begin{bmatrix} P(A|A) & P(B|A) \\ P(A|B) & P(B|B) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0,6 & 0,4 \\ 0,1 & 0,9 \end{bmatrix}$$







aleatorio c/ uniforme

Arranco en A

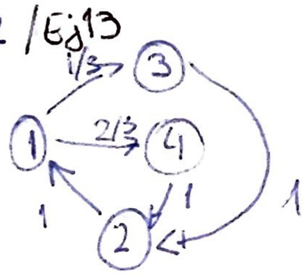
$$[1 \quad 0] \cdot \begin{bmatrix} P(A|A) & P(B|A) \\ P(A|B) & P(B|B) \end{bmatrix} = [P(A|A) \quad P(B|A)]$$

si Elijo B

$[0 \quad 1]$

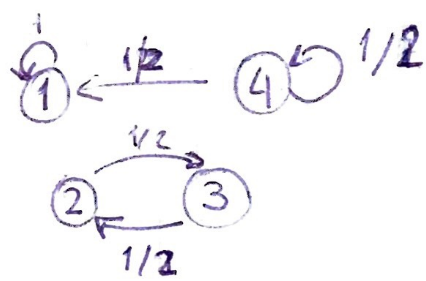
Ej 12 / Ej 13

a)



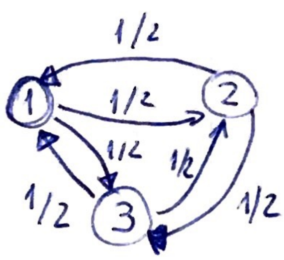
Todos recurrentes

b)



1 Absorbente
2,3 Recurrente
4 Transitorio

c)



Sistemas Dinámicos

Sistemas cuya evolución esta definida por variables ... con comportamiento definido por reglas

Var. Discreta → ec. diferencias

Continua → ec. diferenciales

Deterministicos

Espacio de fases: los estados en los que puede estar la variable

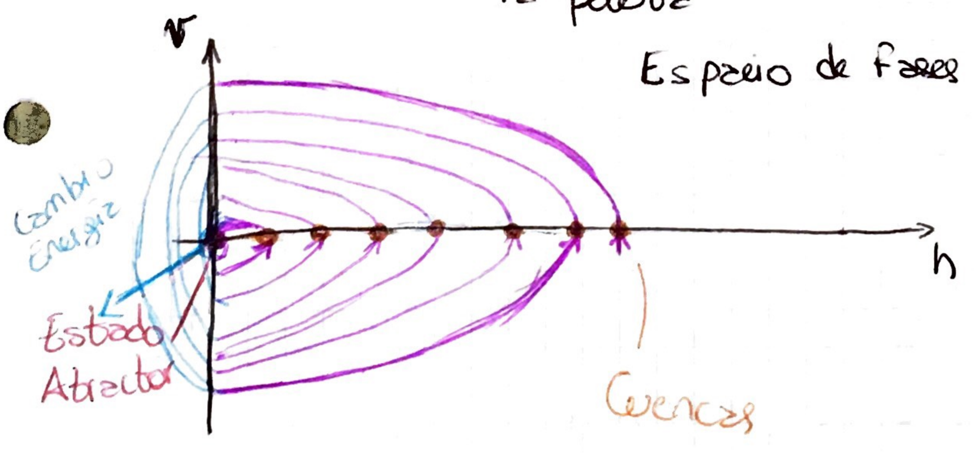
Atractor: Donde Termina

Cuenca: De donde sale

P4 Ej 1

Piso ← Atractor

Cuenca → Todas las alturas de donde puedo soltar la pelota



Ej 2

Primero → Atractor: Centro
Cuencas: todas las lineas

Ultimo → Cuenca: ~~el centro y los bordes~~ todas las lineas
Atractor: ~~el circulo~~ el ovalo alrededor del centro
↳ CICLO LIMITE
(entramos y no salimos +)

Medio	Rosa	Atractor
	Amarillo	Cuenca

Sistemas Lineales (No Lineales próx. clase)

Discreto

$$X_t = a X_{t-1} \quad \text{PRIMER ORDEN}$$

$$X_t = a X_{t-1} + b X_{t-2} \quad \text{SEGUNDO ORDEN}$$

Autonomos → no tienen la variable tiempo de forma explicita

No Autonomo → esta la var. tiempo

$$X_t = a X_{t-1} + b X_{t-2}\, \underline{t}$$

Ej 4

a) Lineal 1° orden Autonomo

b) Lineal ~~Mayor~~ orden Autonomo

c) No Lineal 1° orden Autonomo

d) No Lineal ~~Mayor~~ orden No Autonomo

e) No Lineal ~~Mayor~~ orden No Autonomo

f) Lineal 1° orden Autonomo

Transformar sistemas orden mayor a 1° orden

$$X_t = a X_{t-1} + b X_{t-2}$$

$$Y_t = X_{t-1} \qquad \left\{ \begin{array}{l} X_t = a X_{t-1} + b Y_{t-1} \\ Y_t = X_{t-1} \end{array} \right\} \text{sistema}$$

Transformar un sist no autonomo en autonomo

$$Z_{t-1} = t$$

$$\left\{ \begin{array}{l} Z_t = Z_{t-1} + 1 \\ Z_0 = 1 \end{array} \right.$$

Ej 5

a) $x_t = x_{t-1}(1 - x_{t-1})\ \text{sen}\ t$

$z_{t-1} = t$

$$\begin{cases} z_t = z_{t-1} + 1 \\ x_t = x_{t-1}(1 - x_{t-1})\ \text{sen}(z_{t-1}) \end{cases}$$

b) $x_t = x_{t-1} + x_{t-2} - x_{t-3}$

$$\begin{cases} x_t = x_{t-1} + y_{t-1} - z_{t-1} \\ y_t = x_{t-1} \\ z_t = y_{t-1} \end{cases}$$

Análisis Asintotico del sistema

Veo si converge o no el sistema

$\vec{X}_t = A\ \vec{X}_{t-1}$

$X_1 = A\ X_0$

$X_2 = A\ X_1 = A \circ A\ X_0$

$\vdots$

$X_m = A\ X_{m-1} = A^m\ X_0$

Autovalores y Autovectores

$A v = \lambda v$

$X_0 = b_1 \underline{v_1} + \dots + b_i \underline{v_i}$ → autovectores de A

$X_m = A^m(b_1 v_1 + \dots + b_i v_i)$

$= b_1 A^m v + \dots + b_i A^m v_i$

$= b_1 \lambda_1^m v_1 + \dots + b_i \lambda_i^m v_i$

$\lim_{m \to \infty} X_m = \lambda_1^m \left(b_1 v_1 + b_2 \frac{\lambda_2^m}{\lambda_1^m} v_2 + \dots + b_i \frac{\lambda_i^m}{\lambda_1^m} v_i \right)$

el + grande

λ_1 autovalor dominante

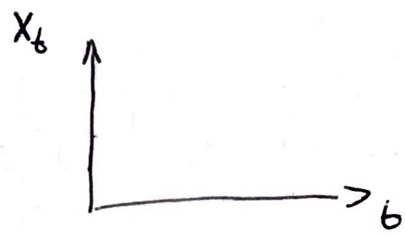
$|\lambda_1| > 1$ Diverge → Inestable

$|\lambda_1| < 1$ Converge → Estable

$|\lambda_1| = 1$ Estable

Ej 6

$x_t = a\, x_{t-1}$



Puntos de equilibrio

Ej 11

a) $x_t = 2\, x_{t-1} - x_{t-1}^2$ Pido $x_t = x_{t-1}$

$x_t = 2\, x_t - x_t^2$

$0 = x_t - x_t^2$ $x_{eq1} = 0$

$0 = x_t\,(1 - x_t)$ $x_{eq2} = 1$

b) $x_t = 2\, x_{t-1}\, y_{t-1}$

$y_t = y_{t-1}\,(x_{t-1} - 1)$

Pido $x_t = x_{t-1}$
$y_t = y_{t-1}$ $\rightarrow$ $x_{eq} = 2\, x_{eq}\, y_{eq}$

$y_{eq} = y_{eq}\,(x_{eq} - 1) = y_{eq}\, x_{eq} - y_{eq}$

$0 = y_{eq}\, x_{eq} - 2\, y_{eq}$

$0 = y_{eq}\,(x_{eq} - 2)$ $\rightarrow$ $x_{eq} = 2$; $y_{eq} = 0$

$(0, 0)$

$(2, 1/2)$

PRACTICA

$\bar{A} \cdot \bar{X}_{t-1} = \bar{X}_t$

Ej. 12:

$X_t = X_{t-1} - Y_{t-1}$

$Y_t = -X_{t-1} - 3Y_{t-1} + Z_{t-1}$

$Z_t = Y_{t-1} + Z_{t-1}$

$A = \begin{bmatrix} 1 & -1 & 0 \\ -1 & -3 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \end{bmatrix}$ $\det(A - \lambda I) = 0$

$A - \lambda I = \begin{bmatrix} 1-\lambda & -1 & 0 \\ -1 & -3-\lambda & 1 \\ 0 & 1 & 1-\lambda \end{bmatrix}$

$\det(A - \lambda I) = 0 \cdot (-1)^{1+3} \cdot \det(M_{ij}) + 1\,(-1)^{2+3} \cdot (1-\lambda) + (1-\lambda)\,(-1)^{3+3}[(1-\lambda)(-3-\lambda)-1]$

$-(1-\lambda) + (1-\lambda)\,[(1-\lambda)(-3-\lambda)-1] = 0$

$-(1-\lambda) + (1-\lambda)\,[-3-\lambda+3\lambda+\lambda^2-1] = 0$

$-(1-\lambda) + (1-\lambda)\,[-\lambda+3\lambda+\lambda^2-4] = 0$

$(1-\lambda)\,[\lambda^2+2\lambda-4] = (1-\lambda)$

$\lambda_1 = 1$

$\lambda^2 + 2\lambda - 4 = 1$

$\lambda^2 + 2\lambda - 5 = 0$ $\lambda_2 = -2 \pm \sqrt{\ }$ λ_3

... VER LAS CUENTAS

$|\lambda| > 1$ diverge
$|\lambda| < 1$ converge
$|\lambda| = 1$ estable

autovalor mayor modulo

$|\lambda_d| = 1$

λ_d punor

SISTEMAS CONTINUOS

$\Delta X_t = J \cdot \Delta X_{t-1}$

Tantos jacobianos como puntos de equilibrio

Ej 14

(g) $x_t = x_{t-1} + 2x_{t-1}(1 - x_{t-1}) - x_{t-1}y_{t-1}$

(h) $y_t = y_{t-1} + 2y_{t-1}(1 - y_{t-1}) - x_{t-1}y_{t-1}$

a) $x_t = x_{t-1} = x_{eq} = x$

$y_t = y_{t-1} = x_{eq} = y$

$\cancel{x} = \cancel{x} + 2x(1-x) - xy \rightarrow 0 = x(2(1-x) - y)$ ①

$\cancel{y} = \cancel{y} + 2y(1-y) - xy \rightarrow 0 = y(2(1-x) - x)$ ②

① $\boxed{x = 0}$; $2(1-x) - y = 0$; $\boxed{2(1-x) = y}$

② $\boxed{y = 0}$; $2(1-y) - x = 0$; $\boxed{2(1-y) = x}$

- $x = 0$ — $y = 0$, $y = 1$
- $y = 0$ — $x = 0$, $x = 1$

$(0,0)$ $(1,0)$ $(0,1)$ $(2/3, 2/3)$

$y = 2 - 2x$ $\quad x = 2 - 2(2-2x)$

$\boxed{2/3 = x}$ $\quad \boxed{y = 2/3}$

$$J = \left.\begin{pmatrix} \frac{\partial g}{\partial x} & \frac{\partial g}{\partial y} \\ \frac{\partial h}{\partial x} & \frac{\partial h}{\partial y} \end{pmatrix}\right|_{(x_{eq}, y_{eq})}$$

$$J = \begin{bmatrix} 1 + 2x(-1) + 2(1-x) - y & -x \\ -y & 1 + 2y(-1) + 2(1-y) - x \end{bmatrix}_{(2/3, 2/3)}$$

$$J|_{(2/3,2/3)} = \begin{bmatrix} -1/3 & -2/3 \\ -2/3 & -1/3 \end{bmatrix}$$

$\lambda_1 = -1$

$\lambda_2 = 1/3$

$$\det\begin{pmatrix} -1/3-\lambda & -2/3 \\ -2/3 & -1/3-\lambda \end{pmatrix} = (-1/3 - \lambda)(-1/3-\lambda) - (-2/3)(-2/3) = (-1/3-\lambda)^2 - \frac{4}{9}$$

$|\lambda_d| = 1$

Neutral Lyapunov

espiral estable → autovalores complejos con modulo < 1 ó = 1
espiral inestable → " con modulo > 1
saddle → hay uno mayor que 1 y otro menor que 1

Ej 16

a) $\frac{dx}{dt} = x^2 - rx + 1 = 0$ eq

$$x = \frac{r \pm \sqrt{r^2-4}}{2}$$

Para que x sea real → $r \geq 2$

- La parte real del autovalor dominante → <0 estable, >0 inestable, $=0$ neutral
  - Autov. complejo → espiral

- Buscar puntos de equilibrio
- Calcular jacobiano (A)
- Busar autovalores $\det(A - \lambda I) = 0$

Ej. 18

$F = \frac{dx}{dt} = -x + rxy - x^2$ $\quad x \geq 0,\ y \geq 0,\ r > 1$

$G = \frac{dy}{dt} = y(1-y)$

$y(1-y) = 0$ → $y=0$, $y=1$

$-x + rxy - x^2 = 0$

$x(-1 + ry - x) = 0$ → $x = 0$

si $y=0$: $x(-1-x) = 0$ → $x=0$, $x=-1$

si $y=1$: $x(-1+r-x) = 0$ → $x=0$, $x=r-1$

Ptos eq.: $(0,0)$ $(-1,0)$ $(0,1)$ $\underbrace{(r-1,1)}_{x>0,\,y>0}$

$$J = \begin{bmatrix} -1+ry-2x & rx \\ 0 & 1-2y \end{bmatrix} \qquad J\Big|_{(r-1,1)} = \begin{bmatrix} -1+r-2(r-1) & r(r-1) \\ 0 & -1 \end{bmatrix}$$

$$\det \begin{bmatrix} -1+r-2(r-1)-\lambda & r(r-1) \\ 0 & -1-\lambda \end{bmatrix} = (-1+r-2(r-1)-\lambda)(-1-\lambda) = 0$$

$$(-r+1-\lambda)(-1-\lambda) = 0 \quad \Rightarrow \quad \lambda_1 = -1, \quad \lambda_2 = 1-r$$

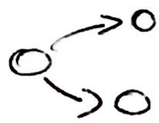
si λ_1 es el dominante $\rightarrow$ ESTABLE $(\lambda_1 = -1 < 0)$
$|\lambda_1| > |\lambda_2|$

Si λ_2 es el dominante $\rightarrow$ ESTABLE
$(r \geq 2)$

15/5

SimPy yield

1) GCL
2) $F(x)$ Transf. inversa
3) Aceptación/Rechazo Def / como funciona
Cálculo c
4) Tests $\Rightarrow$ Alguna pregunta teórica
5) Markov
Matriz Trans



Clasif. Estados: T, R, A Estado Estable
Prob. Límite

$\vec{\pi} = \vec{\pi} \cdot P$

$P^m = [\,q\,]^m$ — cant. de estados x los q' pase

Prob de pasar de un estado a otro

6) Poisson
7) Sist. Dinámicos

7) Sist. Dinámicos

clasif — Lineales / ! Lineales
— autónomos / ! autonomos
— orden

Discretos

Lineales → Autovalores de A : λ_m
λ_d : dominante
$|\lambda_d| < 1$ → Estable

No Lineales → Puntos de eq. $x_t = x_{t-1}$
→ $J = \begin{bmatrix} \frac{\partial g}{\partial x} & \frac{\partial g}{\partial y} \\ \frac{\partial h}{\partial x} & \frac{\partial h}{\partial y} \end{bmatrix}$
→ $J|_{(x_1 \dots x_m)}$
→ Autovalores de $J|_{( )}$
→ Clasif: dominante λ_d
$|\lambda_d| < 1$ Estable
$|\lambda_d| = 1$ Neutral Lyapunov
$|\lambda_d| > 1$ Inestable
→ $|\lambda_{2d}| < 1$ ⇒ saddle point
2° dominante

Complejo conjugados : espiral

Continuo

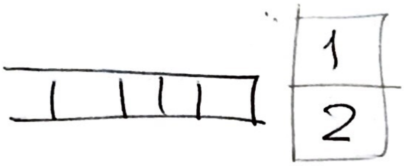
- Lineales : $0 = \frac{dx}{dt}$
- No Lineales : 1) Ptos equilibrio $\frac{dx}{dt} = 0$
2) J
3) $J|_{( )}$
4) Autovalores
5)

Clasificación Dominante
$\mathbb{R}e(\lambda_d) < 0$ Estable
$\mathbb{R}e(\lambda_d) = 0$ Neutral Lyapunov
$\mathbb{R}e(\lambda_d) > 0$ Inestable
$\Rightarrow \mathbb{R}(\lambda_2) < 0$ Saddle point

Simpy

Ej Recursos

Δ



Arribo (5 +- 1)

Atención (10 +- 4)

Simular 1000 personas

TEORÍA

CLASE 12 : COLAS

Final
- Carpeta Abierta
- Prácticos

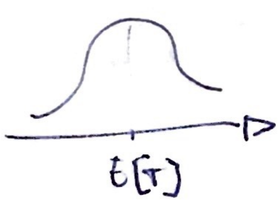
M / M / 1

- 1 solo servidor
- tiempo de proceso
- llegada eventos Poisson

M / M / 1 / k

- sistema con capacidad limitada

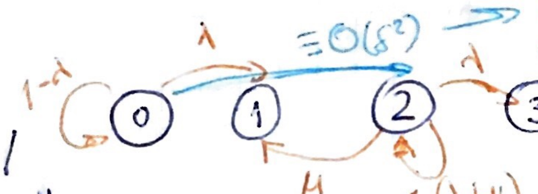
$E[N] = \lambda E[T]$ [redacted] LITTE



M/M/1

$N(t) \to$ n° de clientes

$\equiv O(\delta^2) \Rightarrow$ despreciable (δ es muy chico)
no lo agregamos



No llega ningún cliente

$$1 = \sum_{j=0}^{\infty} p_j = \underbrace{(1+\rho+\rho^2+\dots)}_{\text{S. Geometrica}} p_0$$

$\rho \Rightarrow$ eficiencia con la q' se atiende a los clientes

Si no se cumple la condición no hay estado estacionario

Ejemplo Doble Tasa de Arribo

$E[T] = \dfrac{1}{\mu - \lambda}$ $\Rightarrow$ antes $\mu = 5$, $\lambda = 3$ $\Rightarrow E[T] = \dfrac{1}{2}$

Mantener constante el tiempo promedio en el sistema

$\Rightarrow$ ahora $\lambda = 6 = \mu$?

$$\frac{1}{2} = \frac{1}{\mu - 6}$$

$$2 = \mu - 6$$

$\Rightarrow \boxed{\mu = 8}$ $\rightarrow$ No hace falta duplicarlo

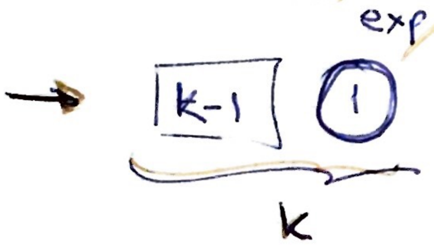
Ejemplo Congestión de Redes

$\lambda = \dfrac{1}{4\text{ ms}}$ $\quad \mu = \dfrac{1}{3\text{ ms}}$ $\Rightarrow$ $\lambda = 0{,}25 \rightarrow E[T] = 12$ ms

$\lambda' = 0{,}28 \quad E[T] = 24$ ms

Ejemplo Concentración y efecto escala

Distribucion de T



x falta de memoria (el tiempo completo)

Colas con capacidad finita (M/M/1/K)

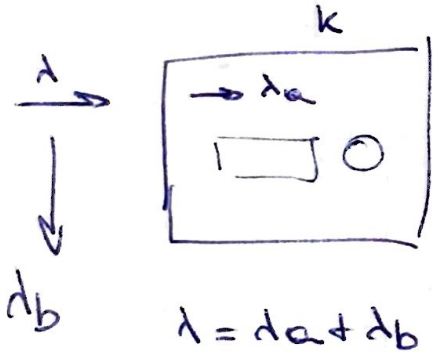
↳ núm. máximo de clientes en el sistema

Cadena de Markov finita

λ_b → tasa de rechazo de clientes

λ_a → tasa de clientes q' entran al sistema

$\frac{E[T]}{1/\mu}$ → Tiempo promedio de un cliente cola



$\lambda = \lambda_a + \lambda_b$

TEORIA 18/6

Clase 13 Unidad 4 Colas Multi-servers: M/M/c, M/M/c/c y M/M/Infinito

M/M/Infinito

↳ se puede usar cuando se considera que el tiempo de procesamiento es mucho menor al tiempo entre arribos.

Pág 4 colas M/M/K ↳ M/M/1/K
corregir

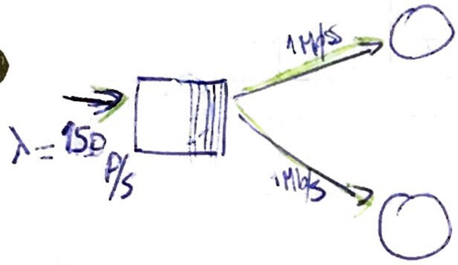
Colas M/M/c

Pág 10 $\sum_{j=c}^{\infty} \rho^{j-c} P_c = P_c \sum_{j=c} \rho^{j-c} = P_c \sum_{r=0}^{\infty} \rho^{r} = \frac{P_c}{1-\rho}$

Geometrica
$$\boxed{\sum_{r=0}^{\infty} \rho^{r} = \frac{1}{1-\rho}}$$

Def $r = j - c$

Ejemplo cola M/M/c (Pág 11)



$\mu = \frac{1}{10\,ms}$

Pág 14 $e^{x} = 1 + \frac{x^2}{2!} + \frac{x^3}{3!} = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{x^k}{k!}$

$$\sum_{k=0}^{\infty} \frac{(c\mu y)^k}{k!} \rho^k = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(c\mu y \rho)^k}{k!} = e^{c\mu y \rho}$$

$$(1-\rho) \int_0^x e^{c\mu y \rho} c\mu\, e^{-c\mu y}\, dy = (1-\rho) c\mu \int_0^{\infty} e^{c\mu y(\rho-1)}\, dy$$

$v = c\mu y(\rho-1)$
$dv = c\mu(\rho-1)\,dy$

$$= {}^{(-1)}\cancel{(1-\rho)}\, \cancel{c\mu} \frac{1}{\cancel{c\mu}\cancel{(\rho-1)}} \int_0^{c\mu x(\rho-1)} e^{v}\, dv = -\left[e^{c\mu x(\rho-1)} - 1\right]$$

$$= 1 - e^{c\mu(\rho-1)x}$$

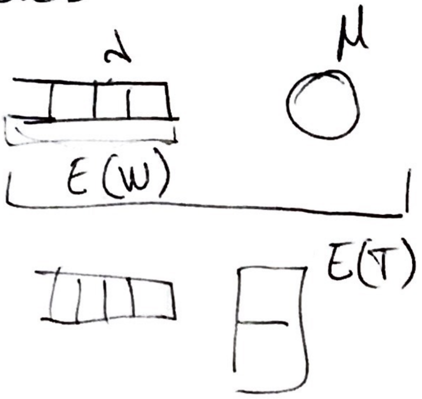
Pág 16 fijarse xq' no cierra el resultado

Colas M/M/c/C

Cola M/M/∞

PRACTICA 19/6

Colas



$E(N)$

$E(N_q)$

Little

$E(N) = \lambda E(T)$

$$N_t = \frac{1}{T} \int_0^T N(t)\, dt = \frac{1}{T} \sum_{i=1}^{n} T_i$$

$A(t) - D(t)$

arribos partidas

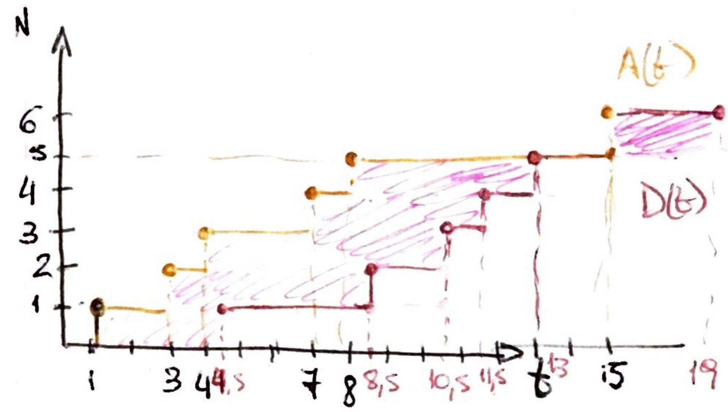
Guia 6

Ejercicio 1

$t_a = 1, 3, 4, 7, 8, 15$

$t_s = 3.5, 4, 2, 1, 1.5, 4$

a)



$T_1 = [1 - 4{,}5]$

$T_2 = [3 - 8{,}5]$

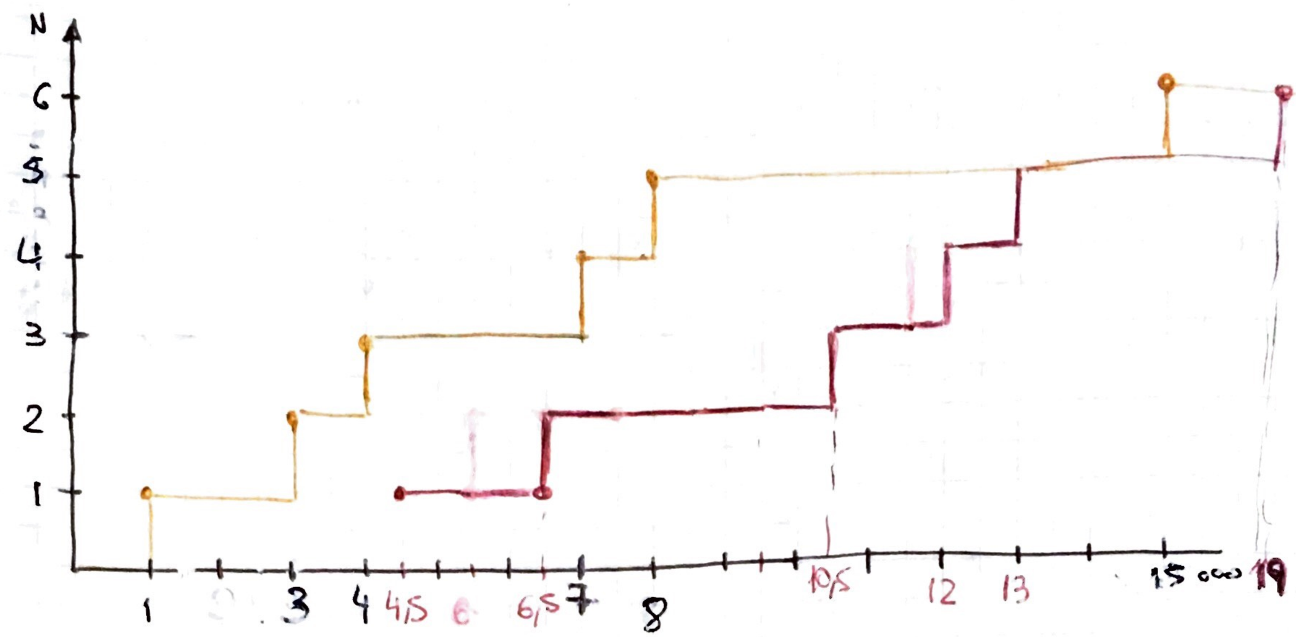
$T_3 = [4 - 10{,}5]$

$T_4 = [7 - 11{,}5]$

$T_5 = [8 - 13]$

$T_6 = [15 - 19]$

b)



$M/M/C$

$M/M/1$

$$\rho = \frac{\lambda}{\mu} < 1$$

λ → tasa arribo

μ → tasa servicio

ρ → fracción de tiempo ocupado (utilización)

$$E(N) = \frac{\rho}{1-\rho}$$

$$E(T) = \frac{E(N)}{\lambda} = \frac{1}{\mu-\lambda} = \frac{E(W)}{1-\rho}$$

$E(W)$ → $1/\mu$

$$E(N_q) = \lambda\, E(W) = \frac{\rho^2}{1-\rho}$$

$$f_T(x) = (\mu-\lambda)\, e^{-(\mu-\lambda)x} \quad x>0$$ F. Dist. tiempo total

$$f_W(x) = \begin{cases} (1-\rho)\,\lambda\, e^{-\mu(1-\rho)x} & x>0 \\ (1-\rho) & x=0 \end{cases}$$ F Dist. tiempo en cola

$$P_j = (1-\rho)\,\rho^j \quad j = 0, 1, 2, \dots m$$

Ejercicio 5

a) $$P(N \geq m) = 1 - P(N < m) = 1 - 1 + \rho^{m-1} = \rho^{m-1}$$

$$P(N < m) = \sum_{i=0}^{m-1} P(N=i) = \sum_{i=0}^{m-1} (1-\rho)\,\rho^i = (1-\rho)\sum_{i=0}^{m-1} \rho^i = (1-\rho)\,\frac{1-\rho^{m-1}}{(1-\rho)}$$

b) $$P(N \geq 10) = 10^{-3} = \rho^9$$

$$10^{-3} = \left(\frac{\lambda}{\mu}\right)^9$$

$$\sqrt[9]{10^{-3}} = \frac{\lambda}{\mu}$$

$$\lambda = \mu \sqrt[9]{10^{-3}} = \mu\, 10^{-1/3}$$

$$\lambda = \mu\; 0{,}464$$

Ejercicio 7

$$\lambda = \frac{1}{4} \qquad \mu = \frac{1}{3} \qquad \rho = \frac{3}{4}$$

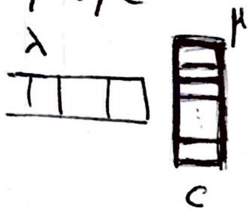
$$E(N) = \frac{3/4}{1 - 3/4} = 3$$

$$E(T) = \frac{3}{1/4} = 12$$

$$24 = \frac{1}{\frac{1}{3} - \lambda} \rightarrow \frac{1}{3} - \lambda = \frac{1}{24}$$

$$\lambda = \frac{1}{3} - \frac{1}{24} \approx \frac{7}{24}$$ → 16% de incremento

M/M/C



$$\rho = \frac{\lambda}{c\mu} \qquad a = \frac{\lambda}{\mu}$$

$$P_j = \frac{\lambda}{j\mu} P_{j-1} \qquad j = 1 \ldots c$$

$$P_j = \frac{\rho^{j-c}\, a^c}{c!} P_0 \qquad j > c$$

$$P_0 = \left(\left(\sum_{j=0}^{1} \frac{a^j}{j!} \right) + \frac{a^c}{c!} \frac{1}{1-\rho} \right)^{-1}$$

$$P(W) = P(N \geq c) = C(c,a) = \sum_{j=0}^{\infty} \rho^{j-c} P_c =$$

PRACTICA 26/6

Ejemplo Final

- Markov

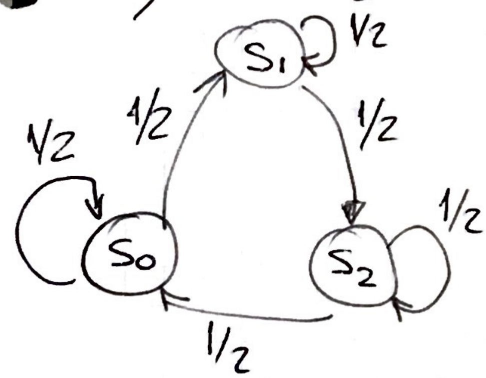
S0
S1
S2

$$P = \begin{bmatrix} 1/2 & 1/2 & 0 \\ 0 & 1/2 & 1/2 \\ 1/2 & 0 & 1/2 \end{bmatrix}$$

a) Describa un método (pseudocodico) para simular los posibles estados del sistema con núm. aleatorios 0-1

b) Determine si el sistema alcanza el equilibrio justificando teoricamente

c) Si alcanza el estado calc. las prob. de estar en cada



$$\begin{bmatrix} 1/2-\lambda & 1/2 & 0 \\ 0 & 1/2-\lambda & 1/2 \\ 1/2 & 0 & 1/2-\lambda \end{bmatrix} \Rightarrow \left(\frac{1}{2}-\lambda\right) \begin{vmatrix} \frac{1}{2}-\lambda & 1/2 \\ 0 & \frac{1}{2}-\lambda \end{vmatrix} - \frac{1}{2} \begin{vmatrix} \frac{1}{2}-\lambda & 1/2 \\ 1/2 & 0 \end{vmatrix} =$$

$$(1/2-\lambda)^3 + \left(\frac{1}{2}\right)^3 = (1/2-\lambda)^3 + \frac{1}{8} = 0$$

$$\lambda_1 = 1 \qquad \lambda_2 = \frac{1}{4} + \frac{\sqrt{3}}{4} i \qquad \lambda_3 = \frac{1}{4} - \frac{\sqrt{3}}{4} i$$

c) $\pi = (1/3, 1/3, 1/3)$

2) Dado el siguiente sistema

- Encuentre ptos equilibrio
- Jacobiano
- Clasificar pto de equilibrio para el caso $r = 1,5$

$$\frac{dx}{dt} = -x + rxy - x^2$$

$$\frac{dy}{dt} = y(1-y)$$

derivada tiene que ser 0

$x \geq 0 \quad y \geq 0 \quad r > 1$

$$\begin{cases} x = -x + rxy - x^2 \\ y = y(1-y) \end{cases} \rightarrow 0 = -2x + rxy - x^2$$

$y = y - y^2$

$y^2 = 0$

$y = 0$

$0 = -2x - x^2$

$x^2 + 2x = 0 \rightarrow x = 0$ ✗ ; $x = -2$

$(0,0)$ y $(-2,0)$

$$J = \begin{bmatrix} -1 + ry - 2x & rx \\ 0 & \underbrace{(1-y) + y(-1)}_{1-2y} \end{bmatrix}\Bigg|_{x,y} =$$

$$J|_{0,0} = \begin{bmatrix} -1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \rightarrow \lambda_1 = -1, \ \lambda_2 = 1$$ saddle

$$J|_{-2,0} = \begin{bmatrix} \overbrace{-1+4}^{3} & -2r \\ 0 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 3 & -2r \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \rightarrow \lambda_1 = 3, \ \lambda_2 = 1$$ inestable

(0,0) (-1,0) (r-1,1) (0,1)

$\underbrace{(-1,0)}_{\text{no válido}}$

(Ej. 19 de la guía)

- 1 consulta x seg
  1/2 seg. p/ ser atendido

a) N° servidores para q' el promedio sea menor q' 1 seg

b) Prob de todos ocupados y ~~todos ocupados~~ desocupados

$\lambda = 1$ $\quad E[N] = \lambda E[T]$ $\quad \underbrace{E(N) = \frac{\rho}{1-\rho}}_{\text{si } \rho < 1}$ $\quad E(N) = \lambda E[T]$

$\mu = 2$ $\quad \frac{\rho}{1-\rho} = \lambda E[T]$

$\rho = \frac{\lambda}{c\mu}$

$P(\text{desocupados}) = P(N=0) = 3/4 \rightarrow 0,6$

$P(\text{ocupados}) = \frac{1}{16} = P(N \geq 2) \rightarrow 0,1$