In Zusammenarbeit mit Felix Scholzen, Daniel Heisig und Simon Wagner entstanden.

Aufgabe 3:
Stellen Sie sich vor, Sie sollen zwei quadratische Matrizen $M, N \in \mathbb{R}^{n \times n}$ miteinander multiplizieren. Sei $n = 2^i$ für ein $i \in \mathbb{N}$ die Dimension der Matrizen, dann kann man M, N und $O = M \cdot N$ wie folgt zerlegen mit $M_{ij}, N_{ij}, O_{ij} \in \mathbb{R}^{n/2 \times n/2}$ für $i, j \in \{1, 2\}$:

$$M := \begin{pmatrix} M_{11} & M_{12} \\ M_{21} & M_{22} \end{pmatrix}, N := \begin{pmatrix} N_{11} & N_{12} \\ N_{21} & N_{22} \end{pmatrix}, O := \begin{pmatrix} O_{11} & O_{12} \\ O_{21} & O_{22} \end{pmatrix}$$

1. Zeigen Sie, dass die beiden folgenden Varianten die Produktmatrix O korrekt berechnen:

- Variante 1:

$$\begin{aligned} O_{11} &:= M_{11} \overset{1}{\cdot} N_{11} \overset{1}{+} M_{12} \overset{2}{\cdot} N_{21} \\ O_{12} &:= M_{11} \overset{3}{\cdot} N_{12} \overset{2}{+} M_{12} \overset{4}{\cdot} N_{22} \\ O_{21} &:= M_{21} \overset{5}{\cdot} N_{11} \overset{3}{+} M_{22} \overset{6}{\cdot} N_{21} \\ O_{22} &:= M_{21} \overset{7}{\cdot} N_{12} \overset{4}{+} M_{22} \overset{8}{\cdot} N_{22} \end{aligned}$$

8 Teilprobleme mit $\frac{n}{2} = 8 \cdot \left(\frac{n}{2}\right)$

$4 \cdot \left(\frac{n}{2}\right)^2 = 4 \cdot \frac{n^2}{4} = n^2$

$T(n)_1 = 8 \cdot T \cdot \left(\frac{n}{2}\right) + n^2$

- Variante 2:

$$\begin{aligned} 1\ H_1 &:= (M_{11} \overset{1}{+} M_{22}) \cdot (N_{11} \overset{2}{+} N_{22}) \\ 2\ H_2 &:= (M_{21} \overset{3}{+} M_{22}) \cdot N_{11} \\ 3\ H_3 &:= M_{11} \cdot (N_{12} \overset{4}{-} N_{22}) \\ 4\ H_4 &:= M_{22} \cdot (N_{21} \overset{5}{-} N_{11}) \\ 5\ H_5 &:= (M_{11} \overset{6}{+} M_{12}) \cdot N_{22} \\ 6\ H_6 &:= (M_{21} \overset{7}{-} M_{11}) \cdot (N_{11} \overset{8}{+} N_{12}) \\ 7\ H_7 &:= (M_{12} \overset{9}{-} M_{22}) \cdot (N_{21} \overset{10}{+} N_{22}) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} O_{11} &:= H_1 \overset{11}{+} H_4 \overset{12}{-} H_5 \overset{13}{+} H_7 \\ O_{12} &:= H_3 \overset{14}{+} H_5 \\ O_{21} &:= H_2 \overset{15}{+} H_4 \\ O_{22} &:= H_1 \overset{16}{-} H_2 \overset{17}{+} H_3 \overset{18}{+} H_6 \end{aligned}$$

7 Teilprobleme mit $\frac{n}{2} = 7 \cdot \left(\frac{n}{2}\right)$

18 Add / Subtraktionen mit $\left(\frac{n}{2}\right)^2$
$= \frac{9}{2} n^2$

$T(n)_2 = 7 \cdot T \cdot \left(\frac{n}{2}\right) + \frac{9}{2} n^2$

2. Bestimmen Sie die asymptotische Laufzeitkomplexität beider Varianten und vergleichen Sie diese mit der Komplexität der Standardmethode zur Multiplikation zweier Matrizen.

Master-Theorem:

$$T(n)_1 = 8 \cdot T \cdot \left(\frac{n}{2}\right) + n^2 = n^{\log_2 8} = \Theta(n^3)$$

$$T(n)_2 = 7 \cdot T \cdot \left(\frac{n}{2}\right) + \frac{9}{2} \cdot n^2 = n^{\log_2 7} \quad ; \quad \log_2 7 \approx 2{,}8$$

$$= \Theta\, n^{2{,}8}$$