Aufgabe 3:
Beweisen Sie folgende Aussagen mit Hilfe der Master-Methode:

1. Sei $T(1) = 1, T(n) = T(n/2) + 1$ für alle $n > 1$, dann: $T(n) = \Theta(\log n)$ (Binäre Suche)
2. Sei $T(1) = 1, T(n) = 3T(n/4) + n \log n$ für alle $n > 1$, dann: $T(n) = \Theta(n \log n)$
3. Sei $T(1) = 1, T(n) = 7T(n/2) + n^2$ für alle $n > 1$, dann: $T(n) = \Theta(n^{2,81})$

Theorem

If $T(n) = aT(\lceil \frac{n}{b} \rceil) + O(n^d)$ (for constants $a > 0, b > 1, d \geq 0$), then:

$$T(n) = \begin{cases} O(n^d) & \text{if } d > \log_b a \\ O(n^d \log n) & \text{if } d = \log_b a \\ O(n^{\log_b a}) & \text{if } d < \log_b a \end{cases}$$

1.

$$T(n) = aT\left(\frac{n}{b}\right) + f(n)$$

$$T(n) = T\left(\frac{n}{2}\right) + 1$$

- $a = 1, \quad b = 2, \quad f(n) = 0 = d$

$$\log_2 1 = 0$$

$$f(n) \overset{0}{=} \overset{=}{\log_2} \overset{0}{1} \Rightarrow O(n^d \log n) = O(n^0 \log n) = O(\log n)$$

2.

$$T(n) = aT\left(\frac{n}{b}\right) + f(n)$$

$$T(n) = 3T\left(\frac{n}{4}\right) + n \log n$$

- $a = 3, \quad b = 4, \quad f(n) = n \log n$

$$n^{\log_b a} = n^{\log_4 3} = O(n^{0{,}793}) \quad \text{für } \varepsilon = 0{,}2$$

$$f(n) = \Omega(n^{\log_4 3 + \varepsilon}) \quad \text{3. Fall}$$

$$af\left(\frac{n}{b}\right) \leq cf(n) \quad \text{für } c < 1$$

$$3\frac{n}{4} \log \frac{n}{4} \leq cn \log n$$

für $c = \frac{3}{4}$ erfüllt

Aufgabe 3:
Beweisen Sie folgende Aussagen mit Hilfe der Master-Methode:

1. Sei $T(1) = 1, T(n) = T(n/2) + 1$ für alle $n > 1$, dann: $T(n) = \Theta(\log n)$ (Binäre Suche)
2. Sei $T(1) = 1, T(n) = 3T(n/4) + n \log n$ für alle $n > 1$, dann: $T(n) = \Theta(n \log n)$
3. Sei $T(1) = 1, T(n) = 7T(n/2) + n^2$ für alle $n > 1$, dann: $T(n) = \Theta(n^{2,81})$

Theorem

If $T(n) = aT\left(\left\lceil \frac{n}{b} \right\rceil\right) + O(n^d)$ (for constants $a > 0, b > 1, d \geq 0$), then:

$$T(n) = \begin{cases} O(n^d) & \text{if } d > \log_b a \\ O(n^d \log n) & \text{if } d = \log_b a \\ O(n^{\log_b a}) & \text{if } d < \log_b a \end{cases}$$

3.) $T(n) = aT\left(\frac{n}{b}\right) + f(n)$

$T(n) = 7T\left(\frac{n}{2}\right) + n^2$

$a = 7, \quad b = 2, \quad f(n) = n^2 \Rightarrow d = 2$

$\log_2 7 = 2{,}81$

$d = 2$

$d < \log_2 7 \Rightarrow 2 < 2{,}81 \Rightarrow O(n^{2{,}81})$