Theoretische Informatik

Zusammenfassung

SoSe2024

Inhaltsverzeichnis

1 Allgemein

1.1 Alphabete und Wörter

- Ein Alphabet Σ ist eine endliche Menge unterscheidbarer Symbole
- Element $\sigma \in \Sigma$ ist ein Zeichen des Alphabets Σ
- Jedes Element $\omega \in \Sigma^*$ ist ein Wort über Σ
- ε = Leeres Wort
- Σ^*: Menge aller Wörter über Σ
- Σ^+: Menge aller Wörter über Σ mit mind. 1 Element
- $|\omega|$: Länge eines Wortes ($|\varepsilon| = 0$)

1.2 Grammatiken

Eine Grammatik G ist ein 4-Tupel (V, Σ, P, S):

- V: endliche Menge an Nicht-Terminal-Symbolen
- Σ: endliche Menge an Terminal-Symbolen ($V \cap \Sigma = \varnothing$)
- P: endliche Menge an Produktionsregeln
- S: Startsymbol ($S \in V$)

2 Chomsky-Hierarchie

2.1 Typ 0 ($\mathcal{L}0$) - Phrasenstrukturgrammatiken

- Beliebige Kombination aus T- und NT-Symbolen

2.2 Typ 1 ($\mathcal{L}1$) - Kontextsensitive Grammatiken

- $|l| \leq |r|$
- Länge des Wortes steigt
- $S \rightarrow \varepsilon$ erlaubt, wenn S auf **keiner** rechten Seite einer Regel steht!

Beispiel:
$S \rightarrow S' \mid \varepsilon$
$S' \rightarrow aS'Bc \mid abc$
$cB \rightarrow Bc$
$bB \rightarrow bb$

Das Nichtterminal S' braucht man nur, damit die Bedingung der Sonderregel erfüllt ist. Das Nichtterminal B wird mal zur Satzform Bc und mal zu bb, je nachdem ob B im **Kontext** c oder b steht.

2.3 Typ 2 ($\mathcal{L}2$) - Kontextfreie Grammatiken

Beim Ableiten in Typ-1-Grammatiken muss man immer aufpassen, dass das Nichtterminal auch im richtigen Kontext steht. Das Erzeugen von Sätzen ist viel leichter, wenn die Grammatik kontextfrei ist.
Eine Grammatik G ist vom Typ 2, wenn sie vom Typ 1 ist und zusätzlich auf der linken Seite jeder Regel genau **ein** Nichtterminal steht!

- $l \in V$
- $X \rightarrow \varepsilon$ immer erlaubt

2.4 Typ 3 ($\mathcal{L}3$) - Reguläre Grammatik

Eine Grammatik G ist vom Typ 3, wenn sie vom Typ 2 ist und zusätzlich folgende Regeln hat:

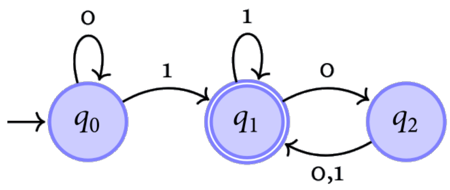
- $A \rightarrow b$
- $A \rightarrow bC$
- $A \rightarrow \varepsilon$

3 Deterministischer Endlicher Automat (DEA)

Eine DEA M ist ein 5-Tupel (Q, Σ, δ, q_0, F):

- Q: endliche Zustandsmenge
- Σ: endliches Alphabet
- δ: $Q \times \Sigma \rightarrow Q$ Übergangsfunktionen
- q_0: Startzustand
- F: Menge der akzeptierten Endzustände

Beispiel:



- Q $= \{q_0, q_1, q_2\}$
- $\Sigma = \{0,\ 1\}$
- $q_0 = q_0$
- F $= q_2$
- δ:

$$
\begin{aligned}
\delta(q_0, 0) &= q_0 \\
\delta(q_0, 1) &= q_1 \\
\delta(q_1, 0) &= q_2 \\
\delta(q_1, 1) &= q_1 \\
\delta(q_2, 0) &= q_1 \\
\delta(q_2, 1) &= q_1
\end{aligned}
$$

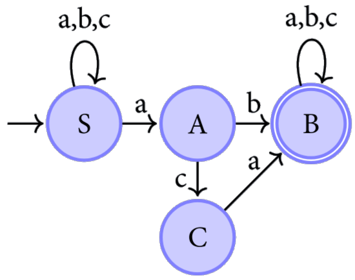
4 Nicht-deterministischer Endlicher Automat (NEA)

Eine NEA M ist ein 5-Tupel (Q, Σ, δ, q_0, F):

- Q: endliche Zustandsmenge
- Σ: endliches Alphabet
- δ: $Q \times \Sigma \to Q$ Übergangsfunktionen
- q_0: Menge der Startzustände
- F: Menge der akzeptierten Endzustände

Beispiel:

$S \to aS$ | bS | cS | aA
$A \to bB$ | cC
$B \to aB$ | bB | cB | ε
$c \to aB$



5 Äquivalenz von DEA und NEA

5.0.1 Satz von Rabin und Scott

Jede von einem NEA akzeptierte Sprache L ist auch von einem DEA akzeptierbar.

5.0.2 Potenzmengenkonstruktion

!!!TODO!!!

6 Regex

!!!TODO!!!

6.0.1 Satz von Kleene

Die Menge der durch reguläre Ausdrücke (Regex) beschreibbaren Sprachen ist genau die Menge der regulären Sprachen.

$\rightarrow$ Alle endlichen Sprachen sind durch reguläre Ausdrücke beschreibbar

7 Pumping Lemma

Das Pumping-Lemma wird verwendet, um zu beweisen, dass eine Sprache sicher nicht regulär ist.
!!!TODO!!!

8 Satz von Myhill und Nerode

Eine Sprache L ist genau dann regulär, wenn der Index R_L endlich ist!

9 Minimalautomaten

!!!TODO!!!

9.1 Table-Filling-Algorithmus

10 Kontextfreie Sprachen ($\mathcal{L}2$)

10.1 Chomsky Normalform (CNF)

Regeln müssen folgende Formen haben:

- $A \to BC$
- $A \to a$
- $S \to \varepsilon$

10.2 Greibach Normalform

Eine ε-freie, kontextfrei Grammatik mit folgenden Regeln:

- $A \to aB_1B_2B_3...B_k$
- $k \geq 0$

10.3 Konvertierung

!!!TODO!!!

11 Kellerautomaten

Ein Kellerautomat (PDA) M ist ein 6-Tupel (Q, Σ, Γ, δ, q_0, #):

- Q: endliche Zustandsmenge
- Σ: endliches Bandalphabet
- Γ: endliches Kelleralphabet
- δ: Übergansfunktionen
- q_0: Startzustand ($q_0 \in Q$)
- #: Ürsprüngliches Kellersymbol ($q_0 \in \Gamma$)

Akzeptanz:

- Kein akzeptierender Endzustand!
- Akzeptanzkriterien für Wörter $x \in |Sigma^*$:
  1. Wort komplett gelesen
  2. Keller (Stack leer)

Nicht-Determinismus:

- Mehrere simultane Übergänge möglich
- Spontane Übergänge ($a = \varepsilon$) möglich

Konfiguration eines PDA gegeben durch 3-Tupel (Q, Σ^*, Γ^*):

- $q \in Q$: Momentaner Zustand
- $w' \in \Sigma^*$: Noch zu lesender Anteil der Eingabe
- $\gamma \in \Gamma^*$: Aktueller Kellerinhalt

Übergansfunktion:

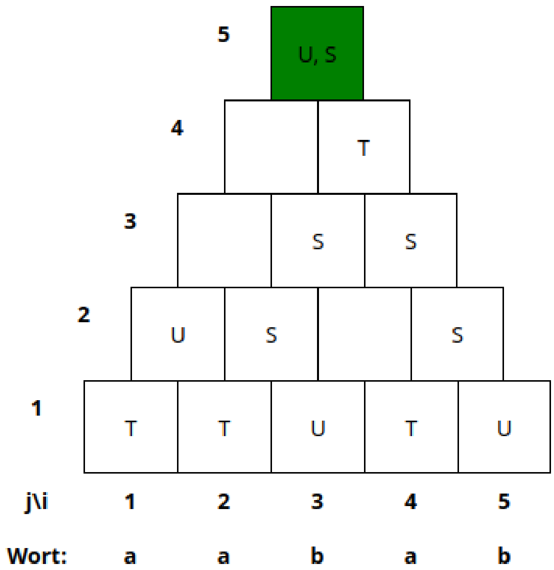
- δ(q, a, A) $\ni$ $(q', B_1 B_2 ... B_k)$
- Wenn Automat in Zustand q ist, das Symbol a liest und A oben auf Stack liegt, wechselt er in Zustand q' und ersetzt das A auf dem Stack durch $B_1 B_2 ... B_k$

12 CYK-Algorithmus

Beispiel:

- S → ST | TU | US
- T → SS | a
- U → TT | b

Wort: **aabab**



Nur wenn S (Startsymbol) ganz oben in der Pyramide steht, wird das Wort akzeptiert!

13 Turing-Maschine

Eine Turing-Maschine M ist ein 7-Tupel (Q, Σ, Γ, δ, q_0, □, F):

- Q: endliche Zustandsmenge
- Σ: endliches Eingabealphabet
- Γ: endliches Arbeitsalphabet ($\Sigma \subset \Gamma$)
- δ: Übergansfunktionen
- q_0: Startzustand ($q_0 \in Q$)
- □: Blank-Symbol ($\Box \in \Gamma - \Sigma$)
- F: Menge der Endzustände

Übergansfunktionen:

- Deterministisch: $\delta(q, a) = \delta(q', b, x)$
  1. M befindet sich in Zustand q und liest a vom Band
  2. M geht in Zustand q' über und ersetzt das a mit einem b
  3. M führt Kopfbewegung $x \in \{l, n, r\}$
- Nicht-deterministisch: $\delta(q, a) \ni \delta(q', b, x)$

Konfiguration einer TM is ein Wort $k \in \Gamma^* Q \Gamma^*$:
$k = \alpha q \beta$
$k = \alpha_1 ... \alpha_m q \beta_1 ... \beta_n$

- q: Aktueller Zustand
- α: Wort links des Schreib/Lese-Kopfes
- β: Wort rechts des Kopfes

Startkonfiguration $q_0\vec{w}$:

- $w \in \Sigma^*$ steht auf Band
- M in Zustand q_0
- S/L-Kopf steht auf erstem Buchstaben von w
- Restliches Band mit Blanks □ befüllt