Integração de Monte Carlo

Aluno: Felipe Júnio Rezende
Professor: Rodrigo Lambert

Resumo

Os métodos de Monte Carlo utilizam técnicas heurísticas para resolver diversos problemas comuns. Dentre eles o de integração numérica que utiliza números aleatórios para calcular, principalmente, integrais que não podem ser resolvidas analiticamente.

1 Integração de Monte Carlo

A integração de Monte Carlo utiliza variáveis aleatórias para estimar uma integral definida. Suponha que queiramos calcular a seguinte integral:

$$\theta = \int_a^b g(x)\ dx$$

Sabemos que pela lei dos grandes números que:

$$\lim_{x \to \infty} \frac{1}{n} \sum_{i=1}^{n} g(X_i) = E[g(X)]$$

Com esta informação poderemos utilizá-la para aproximar pela média esta integral. Com N simulações de X $\sim$ Unif(a, b) isto corresponde a:

$$f_x(x) = \frac{1}{b-a}$$

Para simular uma variável aleatória $X_i \in [a,b]$ podemos simular um número aleatório α com a distribuição uniforme entre [0, 1] e então:

$$X_i = \alpha(b-a) + a$$

Para calcular uma aproximação de θ computamos o valor médio da função g(x) e então multiplicamos este valor pelo comprimento do intervalo (b - a), podemos verificar que o valor esperado de θ corresponde à integral:

$$\theta = (b-a)\frac{1}{n} \sum_{i=1}^{n} g(X_i)$$

Demonstração.

$$\begin{aligned}
E[\theta] &\cong E\left[(b-a)\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} g(X_i)\right] \\
&= (b-a)\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} E[g(X_i)] \\
&= (b-a)\int_a^b f(X)p(X)\ dx \\
&= (b-a)\int_a^b g(X)\frac{1}{b-a}\ dx \\
E[\theta] &\cong \int_a^b g(X)\ dx
\end{aligned}$$

□

2 Resultado

Para realizar a integração foi utilizado o algoritimo abaixo, o qual é possível notar que há dois critérios de parada diferentes, por tempo, ou com valores muito baixos do Erro relativo Absoluto:

$$e = \frac{\mid x_{k-1} - x_k \mid}{x_k} \times 100$$

Como resultado da simulação da integral:

$$\int_4^7 2x = x^2\Big|_4^7 = 49 - 16 = 33$$

Obtivemos uma estimação de $\theta = 33.00442$ como mostra o gráfico abaixo:

for *i in 1: N* **do**
    u ← uniform(a, b)
    função ← u
    estimador ← ((limite superior - limite inferior)*soma(função))/i
    calculo erro relativo absoludo
    if *erro relativo absoluto < valor escolhido* **then**
        Encerra o For
    end
end

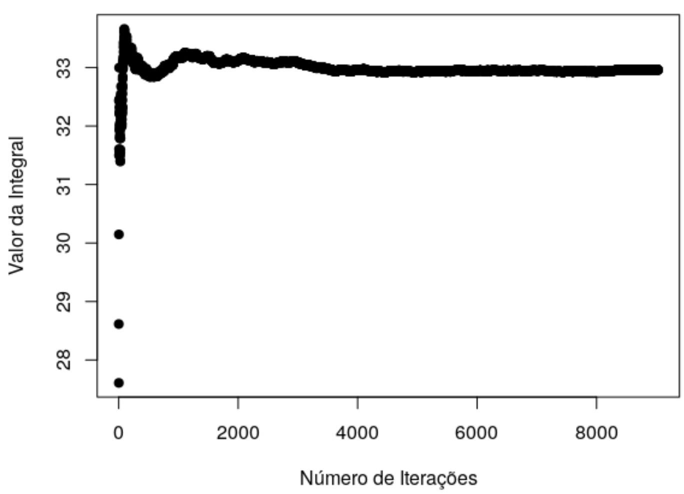

Figura 1: Convergência da Integral

Pode-se observar que o Erro Absoluto e o Desvio Padrão convergem para 0 conforme esperado quando se aumenta o número de iterações

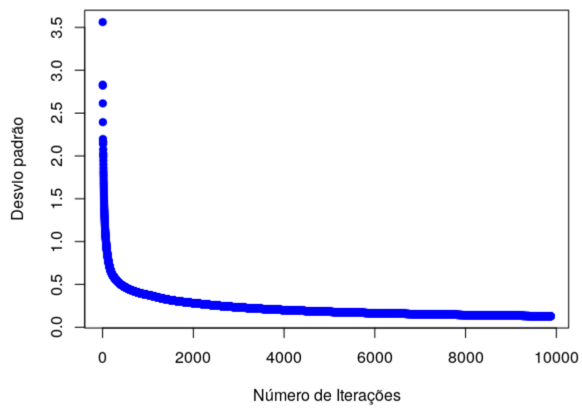

Figura 2: Desvio padrão ao longo das iterações

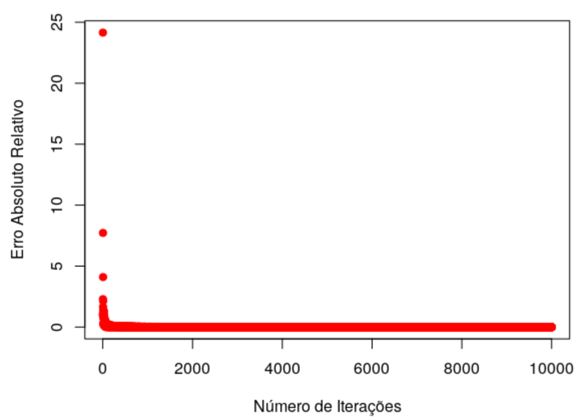

Figura 3: Erro absoluto ao longo das iterações

3 Conclusões

A ideia do método de Monte Carlo apesar de já conhecida, tornou-se possível com o avanço da computação. Realizar somas e avaliar a média de grandes quantidades de números são tarefas que não são viáveis a humanos, mas rotineiras na computação. A integração de Monte Carlo permite resolver diversos problemas que não podiam ser resolvidos analiticamente trazendo grandes avanços para o campo da ciência.

Referências

[1] S. Ross, *Simulation.* 4th edition (2006).

[2] S. Deb, *Variation Monte Carlo Technique Ground State Energies of Quantum Mechanical Systems*(2014)

[3] Weinzierl, S. *Introduction to Monte Carlo methods* (2000)