Série d'exercices n° 1

EXERCICE 1 :

1°) Soit p désignant la proposition « l'élève sait parler » et q désignant la proposition « l'élève sait écouter ».

Donner la traduction dans le langage courant des propositions suivantes :

(1) $p \wedge q$; (2) $p \wedge (\neg q)$; (3) $(q \rightarrow p)$; (4) $(\neg p) \vee (\neg q)$; (5) $(\neg p) \wedge (\neg q)$

2°) Même question avec p la proposition « l'homme est mortel » et q désignant la proposition « l'homme est éternel » et les propositions :

(1) $(p \vee q)$; (2) $(\neg p) \vee (\neg q)$; (3) $\neg(p \wedge q)$; (4) $p \wedge (\neg q)$; (5) $(p \rightarrow (\neg q))$

EXERCICE 2 :

Soit p la proposition « X estime Y » et q la proposition « Y estime X ».

Ecrire sous forme symbolique les phrases suivantes :

1. X estime Y mais Y ne lui rend pas son estime ;
2. X et Y s'estiment ;
3. X et Y se détestent ;
4. Y est estimé par X mais X est détesté par Y ;
5. X et Y ne se détestent ni l'un ni l'autre.

EXERCICE 3 :

Sachant que x, y sont vrais et z est faux, trouver les valeurs de vérité des propositions :

(1) $(x \vee (y \wedge z)) \wedge (y \vee z)$;

(2) $((y \rightarrow x) \vee \neg(x \leftrightarrow y)) \wedge (z \wedge \neg x)$.

EXERCICE 4 :

Pour chacune des formules suivantes,

1°) construire sa table de vérité ;

2°) indiquer si c'est une tautologie, si elle est satisfiable, si elle est une contradiction :

(a) $\neg(p \vee q) \vee \neg(p \wedge q)$; (b) $(p \rightarrow (q \rightarrow r)) \rightarrow ((p \rightarrow q) \rightarrow (p \rightarrow r))$;

(c) $(p \wedge q) \vee ((\neg(p \wedge r) \vee q) \rightarrow r)$; (d) $(x \vee y \vee z) \leftrightarrow x \vee (((u \vee x) \rightarrow u) \leftrightarrow (y \vee z))$.

EXERCICE 5 :

Soit une fonction logique f à 4 variables logiques, telle que f = 1 si et seulement si le nombre de variables de f qui sont à '1' n'est pas inférieur à 2.

1°) Etablir la table de vérité de f.

2°) Donner la forme normale conjonctive de f et la forme normale disjonctive de f.

EXERCICE 6 :

Soient A et B deux variables propositionnelles désignant respectivement « il pleut » et « il y a des nuages ».

Donner, en Français, six phrases différentes ayant le même sens que la formule $A \rightarrow B$.

EXERCICE 7 :

On est dans le contexte de l'exercice 6. On pose $C = A \rightarrow B$.

1) Écrire chacune des formules représentant :

1-a) la négation de l'implication C ;

1-b) la réciproque de l'implication C ;

1-c) la contraposée de l'implication C ;

1-d) l'inverse de l'implication C.

2) Pour chacune des formules précédentes, écrire des phrases, en Français, leurs correspondant.

EXERCICE 8 :

Soient les variables propositionnelles p = « je suis en retard », q = « j'ai un rendez-vous » et r = « je me dépêche ».

1) Représenter les énoncés suivants en logique propositionnelle :

(a) Si je ne suis pas en retard, je ne me dépêche pas.

(b) je ne me dépêche que si je suis en retard ou si j'ai un rendez-vous.

(c) pour que je me dépêche il faut et il suffit que je sois en retard ou que j'aie un rendez-vous.

(d) Soit je n'ai pas de rendez-vous, ou (exclusivement) alors je me dépêche.

2) Trouver deux conséquences logiques $x \vDash y$ où x et y sont parmi les propositions (a)..(d), avec $x \neq y$.

EXERCICE 9 :

Dans ma mallette de peintre, j'ai des tubes de peinture. Les couleurs dont je dispose sont parmi les suivantes : rouge, jaune, bleu, orange, gris, noir. On désignera par :

- R la proposition : « j'ai du rouge » (= « j'ai un tube de peinture rouge ») ;
- J la proposition : « j'ai du jaune » ;
- O la proposition : « j'ai du orange » ;
- B la proposition : « j'ai du bleu » ;
- G la proposition : « j'ai du gris » ;
- N la proposition : « j'ai du noir ».

1) Ecrire sous forme de formule bien formée du calcul propositionnel, chacune des affirmations suivantes :

(a) Je n'ai pas de jaune.

(b) Si j'ai du rouge alors je n'ai ni noir ni gris.

(c) Des trois couleurs : bleu, jaune et rouge, j'en ai au moins deux.

(d) Des deux couleurs gris et orange, j'en ai exactement une.

2) On suppose que les quatre affirmations ci-dessus sont vraies. Est-il possible d'en déduire le contenu exact de ma mallette ? Si oui, donner le contenu. Dans tous les cas, on justifiera le raisonnement.

<u>EXERCICE 10 :</u>

On se trouve sur une île dont les habitants sont répartis en deux catégories : les Purs et les Pires. Les Purs disent toujours la vérité, tandis que les Pires mentent toujours.

On rencontre trois habitants de l'île : Moe, Jon et Will. Moe déclare : « Nous sommes Pires tous les trois ». Jon déclare : « Il y a exactement un Pire parmi nous ».

Que peut-on déduire de ces déclarations ?

<u>EXERCICE 11 :</u>

Après avoir préparé un gâteau pour ses quatre enfants, la Maman laisse le gâteau refroidir sur la table de la cuisine puis s'en va faire une course. A son retour, elle s'aperçoit que le quart du gâteau a été mangé. Puisque personne d'autre que les quatre enfants n'était à la maison ce jour là, la Maman demande à chacun des ses enfants qui a mangé le gâteau. Les quatre « suspects » disent ceci :

Chabane : Katia a mangé le quart du gâteau ;

Saliha : Je n'ai pas mangé le quart du gâteau ;

Katia : Djamal a mangé le quart du gâteau ;

Djamal : Katia a menti lorsqu'elle a dit que j'ai mangé le quart du gâteau.

Si seulement une de ces quatre propositions est vraie et seulement un des quatre enfants est coupable, qui des quatre a effectivement mangé le quart du gâteau ?

<u>EXERCICE 12 :</u>

Trois personnes, Ali (A), Belaid (B) et Chérif (C) exercent chacune une profession différente : pharmacien, dentiste ou chirurgien.

Sachant que les implications suivantes sont vraies, retrouver leur profession :

(A chirurgien $\Rightarrow$ B dentiste),

(A dentiste $\Rightarrow$ B pharmacien),

(B non chirurgien $\Rightarrow$ C dentiste).

<u>EXERCICE 13 :</u>

Soit f une fonction logique à trois variables, f : $\{0, 1\}^3 \rightarrow \{0, 1\}$ définie par :

$$\left.\begin{array}{l} f(t, t, \neg t) = f(t, 1, 1) = 0 \\ f(t, \neg t, t) = f(t, 0, 0) = 1 \end{array}\right\} \quad \text{pour tout } t \in \{0, 1\}.$$

1) Établir la table de vérité de f.

2) Donner la forme normale disjonctive de f la plus simplifiée possible et sa forme normale conjonctive la plus réduite possible.

3) La fonction f est-elle unique ? Justifiez.

EXERCICE 14 :

On rappelle que $\perp$ désigne une constante propositionnelle toujours fausse, et $\top$ une constante propositionnelle toujours vraie. On désigne par **If** le connecteur ternaire « Si … alors … sinon … » dont voici la table de vérité :

X	**A**	**B**	**If (X, A, B)**
0	0	0	0
0	0	1	1
0	1	0	0
0	1	1	1
1	0	0	0
1	0	1	0
1	1	0	1
1	1	1	1

1. On appelle littéraux les atomes X, A, B et leurs négations. Donner un équivalent de If(X, A, B) qui est :

a. une forme normale disjonctive, puis une forme normale disjonctive n'utilisant que deux conjonctions de deux littéraux chacune ;

b. une forme normale conjonctive, puis une forme normale conjonctive n'utilisant que deux disjonctions de deux littéraux chacune ;

c. une conjonction de deux implications entre littéraux.

Chacun des équivalents doit être justifié.

2. Donner pour chacune des formules $\neg\alpha$, $(\alpha \vee \beta)$, $(\alpha \wedge \beta)$, $(\alpha \rightarrow \beta)$, un équivalent utilisant une seule occurrence de chacun des connecteurs If, $\perp$, $\top$ (justifier).

En déduire que { **If**, $\perp$, $\top$ } est un système complet de connecteurs.

EXERCICE 15 :

Soient les variables propositionnelles p, q, r et s désignant respectivement les phrases :

p : « je pars » ; q : « tu restes » ; r : « il n'y a personne » et s : « il y a des choses à faire ».

1) Formaliser dans le langage du calcul propositionnel les phrases suivantes :

A : « Si je pars et si tu ne restes pas alors il n'y a personne »,

B : « Si je ne pars pas ou si tu restes alors il y a quelqu'un »,

C : « S'il y a quelqu'un alors il y a des choses à faire »,

D : « S'il n'y a rien à faire alors je pars et tu ne restes pas ».

2) A et B sont-elles équivalentes ?

3) Par la méthode de calcul algébrique, montrer que : B, C $\vDash$ D.

EXERCICE 16 :

On considère trois nombres entiers *a*, *b* et *c* ; ainsi que les quatre affirmations :

A1 : « *a* et *b* sont des entiers pairs. » ; A2: « *b* et *c* sont de même parité. » ;

A3 : « *c* ou *a* est impair. » ; A4 : « *b* est pair. ».

1) Montrer que {A1, A2, A3, A4} est contradictoire.

2) Si parmi les quatre affirmations, une seule est fausse ; laquelle qui ne doit pas l'être ?

---------------------------------Fin Série 1--------------------------------