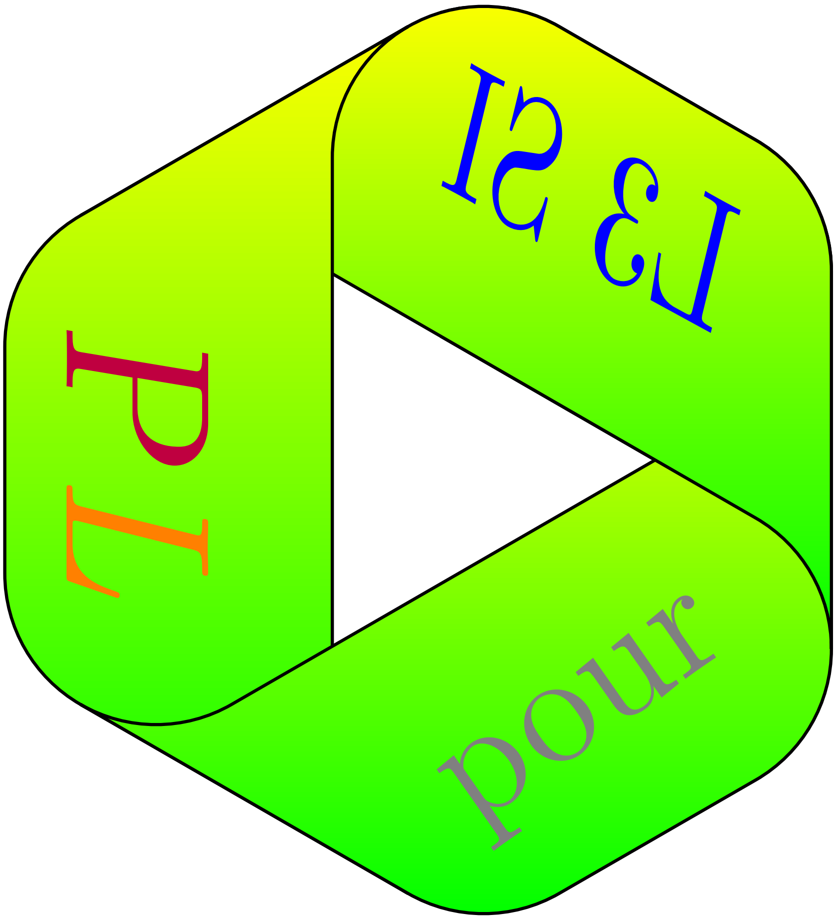
UNIVERSITE MOULOUD MAMMERI, TIZI-OUZOU.

FACULTE GENIE ELECTRIQUE

DEPARTEMENT INFORMATIQUE



Polycopié rédigé pour les L3 Iformatique par :

M^{me} Lynda GOUMEZIANE

lynda.goumeziane@ummto.dz

écrit le : ***17/11/2021***

TABLE DES MATIÈRES

1 Quelques rappels et introduction à la RO. **2**
1.1 Rappels. 2
1.1.1 Définitions et propriètès 2
1.2 Introduction à la recherche opérationnelle (RO). 5
1.2.1 Une vue d'ensemble sur la programmation linéaire 5
1.2.2 Définir un modèle de la PL) 6
1.2.3 Méthodes de résolution d'un problème de RO 7
1.2.4 Les outils necessaires pour un problème de RO 7

Bibliographie **8**

CHAPITRE 1

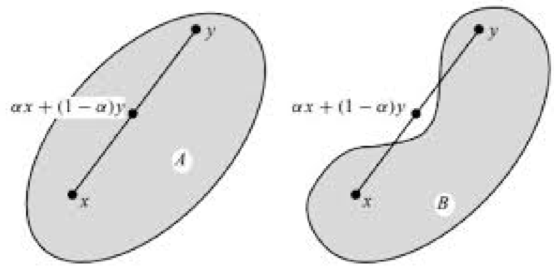
QUELQUES RAPPELS ET INTRODUCTION À LA RO.

1.1 Rappels.

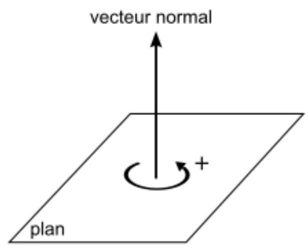
1.1.1 Définitions et propriètès

Définition 1.1.1 *(***Ensemble convexe***)*
Un ensemble $\mathcal{C}$ est convexe sss le segment de droite entre deux points quelconques $x,\ y \in \mathcal{C}$ appartient à $\mathcal{C}$:

$$\forall\alpha \in [0,1], x,\ y \in \mathcal{C} \Rightarrow\ (1-\alpha)x + \alpha y\ \in \mathcal{C}$$



Définition 1.1.2 *(***Hyperplan***)*
L'ensemble $\mathcal{H} = \{x \in \mathbb{R}^n | a^T(x - x_0) = 0\}$ est un hyperplan qui est un sous-espace de dimension $n-1$, où $a \neq 0 \in \mathbb{R}^n$ est le vecteur normal de l'hyper plan



Définition 1.1.3 *(***demi-espace***)*
Un hyperplan divise $\mathbb{R}^n$ en deux demi-espaces :

$$\mathcal{H}_- = \{x \in \mathbb{R}^n | a^T(x - x_0) \leq 0\},\ a \neq 0 \in \mathbb{R}^n$$

$$\mathcal{H}_+ = \{x \in \mathbb{R}^n | a^T(x - x_0) \geq 0\},\ a \neq 0 \in \mathbb{R}^n$$

Définition 1.1.4 *(source :[2])(***Polygône***)*
Un polygone est une figure plane délimitée par des segments de droite, qu'on appelle les côtés, un point se situant à l'extrémité de deux arêtes est un sommet.

Voici quelques exemples :

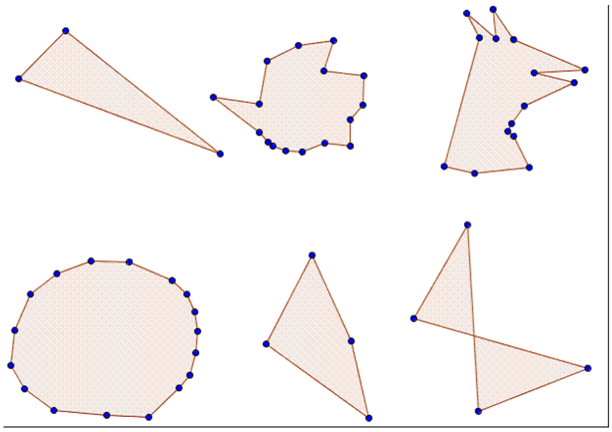


FIGURE 1.1 – Plusieurs formes de polygones

Nous observons des différences entre ces polygones, d'abord le nombre des sommets, ensuite le nombre de côtés, puis dans la forme.
Le nombre de côtés est très important, ainsi nous parlerons de :

- *Polygone à trois cotés ou triangle,*
- *Polygone à quatre côtés ou quadrilatère,*
- *Polygone à cinq côtés ou pentagone,*
- *Polygone à six côtés ou hexagone,*
- *Polygone à sept côtés ou heptagone,*
- *Polygone à huit côtés ou octogone,*
- *Polygone à neuf côtés ou ennéagone,*
- *Polygone à dix côtés ou décagone,*
- *Polygone à onze côtés ou hendécagone,*
- *Polygone à douze côtés ou dodécagone,*
- *Polygone à vingt côtés ou icosagone.*

Définition 1.1.5 (Polyèdre)

- *Un polyèdre (du grec poly : plusieurs ; èdre : face) est un solide limité par un ensemble fini des polygones, appelés faces, tels que chaque côté d'un polygone de cet ensemble soit commun à un côté d'un autre polygone de cet ensemble.*
- *Une arête du polyèdre est un côté commun à deux faces.*
- *Un sommet du polyèdre est un point commun à au moins trois arêtes.*
- *Un polyèdre régulier est formé d'un ensemble fini des polygones réguliers convexes identiques.*
- *Un polyèdre est convexe s'il peut être posé par n'importe quelle face sur une surface plane, comme par exemple une table.*

Remarque 1.1.6 La formule d'Euler :
Leonhard Euler *(1750) à découvert la formule reliant le nombre de faces (**F**), le nombre de sommets (**S**) et le nombre d'arêtes (**A**) d'un polyèdre. Cette formule s'applique à tout polyèdre convexe.*

$$F + S = A + 2$$

Remarque 1.1.7

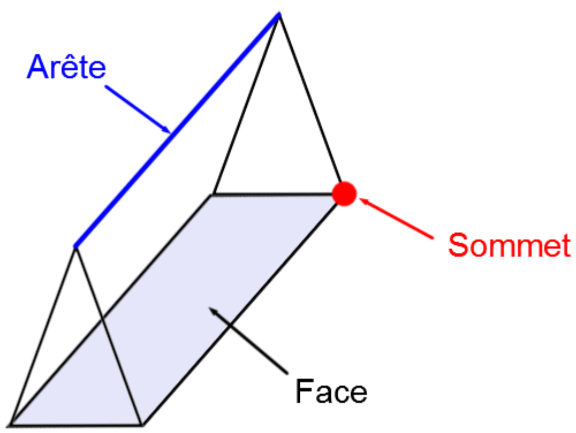
- *Un polyèdre convexe $\mathcal{P}$ est l'interssection (éventuellement vide) d'un nombre fini de demi-espaces fermés et/ou d'hyperplan*

$$\mathcal{P} = \{x \in \mathbb{R}^n : a_j^T x \leq b_j,\ j = 1, ..., m\}$$
$$= \{x \in \mathbb{R}^n : Ax \leq b\}$$

- *Un polyèdre convexe borné est un polytope convexe.*
- *Un point v d'un polyèdre convexe $\mathcal{P}$ est un sommet de $\mathcal{P}$ si :*

$$v \in \mathcal{P} \ \text{et}\ \exists c \neq 0 \in \mathbb{R}^n : c^T v > c^T y,\ y \in \mathcal{P} \setminus \{v\}$$

- *Les sommets d'un polyèdre convexe sont exactement ses points extêmes.*



1.2 Introduction à la recherche opérationnelle (RO).

Une grande partie des problèmes de décision rencontrée dans le monde des affaires et du développement scientifique est dans la classe des problèmes d'optimisation linéaire ou programmes linaires (PL).
La résolution d'un PL ne pose, la plus part du temps, aucune difficulté car il y a des méthodes pratiques pour le résoudre, en passant par des algorithmes implémentés sur plusieurs logiciels très efficaces tel que : MATLAB, EXCEL, SOLVER, LINDO, CPLEX, LP-SOLVER...
Les premiers mathématiciens qui se sont occupés de ce genre de problème,que l'on ne nommait pas encore PL, sont LAPLACE (1749-1827) et le baron FOURIER. EN 1939, le russe KANTOROVITCH a imaginé une méthode inspirée des multiplicateurs de LAGRANGE, notion vue généraement en mécanique, pour résoudre des problèmes de transport.
Par contre la contribution décisive a été l'invention de l'algorithme du SIMPLEXE, developpé à partir de 1947, notamment par G.B.DANTZIG et le mathématicien VON NEUMANN. Au milieu des années 80, l'indien KARMARKAR a proposé une nouvelle technique afin de résoudre de très gros PL, par une démarche interieure au polyèdre des solutions admissibles.

1.2.1 Une vue d'ensemble sur la programmation linéaire

Avant d'entamer les principes de la programmation linéaire qui est une branche d'une grande discipline la recherche opérationnelle on va voir un problème courant qui sera modéliser en un problème mathématique qui nécessite les outils de la recherche opérationnelle (Aide à la décision) pour le résoudre.
Problème :(Prendre une décision pour un meilleur choix !)

Un enseignant de l'université d'Alger est invité à faire plusieurs conférences à Oran, pour cela il doit effectuer cinq voyages entre Alger et Oran, en partant le dimanche d'Alger (ALG) et revenir le mardi d'Oran (ORN) à Alger. Le tarif du billet aller retour est de 5000DA.
L'agence offre une réduction de 20% si un week-end est inclus et 75% du prix aller-retour si c'est un aller simple.

- La question du problème : comment acheter les billets pour les 5 semaines à prix minimum ?
- Pour aider l'enseignant à prendre une décision, il faut :
  - Trouver toutes les alternatives possibles !
  - Trouver les restrictions (contraintes) de cette décision !
  - Trouver l'objectif pour évaluer les alternatives !

- Les restrictions sont :
  ALG-ORN le dimanche et ORN-ALG le mardi, c-à-d., aller-retour dans la même semaine.
- Les alternatives possibles : si x est le billet aller-retour ALG-ORN-ALG. l'enseignant aura le choix entre ces trois possibilités :
  - Acheter 5 billets ALG-ORN-ALG $\Rightarrow 5 * x5000 = 25000DA$
  - Acheter un billet ALG-ORN, 4 billets ORN-ALG-ORN comprenant un week-end et un billet ORN-ALG
    $\Rightarrow 0.75 * x5000DA + 4 * 0.8 * x5000DA + 0.75 * x5000DA = 23500DA$
  - Acheter un billet ALG-ORN-ALG pour le dimanche de la première semaine et le mardi de la dernière semaine et 4 billets ORN-ALG-ORN comprenant un week-end pour les autres voyages
    $\Rightarrow 5 * 0.8 * x5000DA = 20000DA$
- La solution de ce problèmes selon l'objectif visé est de choisir la troisième alternative.

1.2.2 Définir un modèle de la PL)

Tout problème en PL passe par une modélisation qui doit extraire les ingrédients essentiels suivants :
- Les alternatives (variables de décision, inconnus du problèmes)
- Les restrictions (contraintes)
- La fonction objectif à optimiser (minimiser ou maximiser)

Définition 1.2.1 ***(Modéle de la Recherche opérationnelle)***

$$(P)\begin{cases} \textit{Maximiser ou minimiser} & f \textit{ fonction objectif} \\ \textit{sujet à contraintes} & \textit{restrictions sur les variables de décision} \end{cases}$$

Aussi :

$$(P)\begin{cases} max\ (min) & z = f(x) \\ s.à.c & x > 0; y > 0... \end{cases}$$

Remarque 1.2.2

- *Les variables du modèle (P) peuvent être : continues(réelles), entières, bolléennes (0—1).*
- *La fonction objectif peut être : linéaire, non linéaire, concave, convexe, difference convexe...*
- *Les contraintes peuvent être : linéaire—non linéaire, concave—convexe, égalité—inégalité...*

- *Quan les paramètres sont connus avec certitude, les méthodes résolvant (P) c'est des modéles deterministes, mais quand les paramètres sont incertains,les méthodes résolvant (P) c'est des modéles stochastiques*

Définition 1.2.3 ***(Solution admissible)***

C'est un ensemble de valeurs données aux variables qui satisfait toutes les contraintes.

Définition 1.2.4 ***(Solution optimal)***

C'est une solution admissible qui optimise la fonction objectif.

Définition 1.2.5 ***(Optimum)***

Si x^*est la solution optimale alors l'optimum $z^* = f(x^*)$

1.2.3 Méthodes de résolution d'un problème de RO

- **Méthode analytique**
  La solution analytique est calculée d'une façon direct et exact.
- **Méthode itératives**
  Quand le problème est trop grand comme la plus part des problèmes pratiques, les méthodes itératives sont les plus utilisées(Algorithme) pour atteindre l'optimum en se déplaçant d'une solution initiale vers d'autre solutions pour attendre l'optimum.

1.2.4 Les outils necessaires pour un problème de RO

- Pour procéder à la résolution d'un pb de RO, il faut définir le problème à résoudre, construire le modèle mathématique, choisir la méthode itérative adéquate, solution du problème et à la fin implémenter la solution.
- Les techniques principales de la RO : PL, PL en nombre entiers, optimisation dans les réseaux, optmisation global, programmation dynamique, simulation,...

BIBLIOGRAPHIE

[1] J. Taghem. *Programmation linéaire.* Edition de l'université de Bruxelles, SMA, 2003.

[2] www-fourier.ujf-grenoble.fr/ morales/polyedredef.htm.