GUIA DO PROFESSOR

Caro professor, caso tenha algum questionamento de qualquer natureza, não hesite em nos contactar pelo e-mail:

conteudosdigitais@im.uff.br

DESCRIÇÃO

Através do processo de modelagem matemática de um problema de otimização, esta atividade explora os conceitos de domínio, imagem e gráfico de função. O enunciado do problema é o seguinte: "*Dado um ponto A no plano cartesiano, quanto deve ser x para que a distância d entre A e M = (x, x^2) (um ponto da parábola y = x^2) seja a menor possível?*".

OBJETIVOS

Estimular as conexões entre os aspectos algébrico, numérico, geométrico e verbal de uma função real; exercitar processos de modelagem matemática; exercitar os conceitos de domínio, imagem e gráfico de função.

QUANDO USAR?

Sugerimos que a atividade seja usada quando da apresentação ou revisão das funções reais de uma variável. Pré-requisito: distância entre pontos no plano.

COMO USAR?

Decidir como usar o computador é uma questão que depende de alguns fatores: número de alunos na turma, número de computadores disponíveis no laboratório de informática e tempo disponível em sala de aula. Em virtude disto, vamos sugerir três estratégias de uso desta atividade:

1. Como um exercício extraclasse.

   Nesta modalidade, você pode propor a atividade para seus alunos como um dever de casa (valendo um ponto extra), para ser realizado fora do tempo de sala de aula, isto é, em um horário livre no laboratório da escola ou na própria casa do aluno, caso ele possua um computador. Você pode definir um prazo pré-determinado para a realização da atividade (por exemplo, uma semana). Achamos que não é preciso que você explique o funcionamento do *software* da atividade, pois incluímos uma animação ilustrando todos os seus recursos. Naturalmente, no decorrer do prazo do dever de casa, você poderá tirar dúvidas eventuais de seus alunos.

Para tornar o trabalho mais orientado e focado, recomendamos fortemente que o dever de casa seja conduzido através de algumas questões que os alunos deverão estudar com o auxílio do *software* da atividade. O *formulário de acompanhamento do aluno*, apresentado mais embaixo, sugere vários exercícios. Este formulário também será útil como instrumento para uma discussão posterior em sala de aula (quando da devolução do formulário) e fornecerá subsídios para uma possível avaliação.

2. Em sala de aula com um projetor multimídia (*datashow*)

   Se você tiver acesso a um projetor multimídia (*datashow*) ou a um computador ligado na TV, você poderá usar o *software* desta atividade em sala de aula para, por exemplo, ao invés de desenhar os poliedros no quadro, exibi-los e manipulá-los através do computador. Se houver tempo, mesmo alguns exercícios do *formulário de acompanhamento do aluno* poderão ser resolvidos em sala de aula sob sua orientação.

3. Como uma atividade de laboratório sob a supervisão do professor.

   A grande vantagem desta modalidade é que você poderá acompanhar de perto como os seus alunos estão interagindo com o computador.

Principalmente nas modalidades 1 e 3, *recomendamos fortemente* que o aluno preencha algum tipo de questionário de acompanhamento, para avaliação posterior. Sugerimos o seguinte modelo (sinta-se livre para modificá-lo de acordo com suas necessidades):

ppa-aluno.rtf.

Este formulário de acompanhamento do aluno também estará acessível na página principal da atividade através do seguinte ícone:

.

As respostas dos questionamentos propostos neste formulário não estão incluídas com a atividade, mas elas podem ser solicitadas através do e-mail conteudosdigitais@im.uff.br.

OBSERVAÇÕES METODOLÓGICAS

Relatos de experiências (comprovados em nossos testes) mostram que os alunos têm forte resistência em preencher o formulário de acompanhamento. Mais ainda: estes relatos mostram que, frequentemente, os alunos conseguem argumentar corretamente de forma verbal, mas enfrentam dificuldades ao fazer o registro escrito de suas ideias.

Mesmo com as reclamações e resistência dos alunos, nossa sugestão é que você, professor, insista no preenchimento do formulário. Afinal, por vários motivos, é muito importante que o aluno adquira a habilidade de redigir corretamente um texto matemático que possa ser compreendido por outras pessoas.

OBSERVAÇÕES TÉCNICAS

A atividade pode ser acessada usando um navegador (Firefox 2+ ou Internet Explorer 7+), através do link http://www.uff.br/cdme/ppa/ (endereço alternativo: http://www.cdme.im-uff.mat.br/ppa/). Se você preferir, solicite que o responsável pelo laboratório da sua escola instale a atividade para acesso *offline*, isto é, sem a necessidade de conexão com a internet.

A atividade pode ser executada em qualquer sistema operacional: Windows, Linux e Mac OS. Porém, para executá-lo, é preciso que o computador tenha a linguagem JAVA instalada. A instalação da linguagem JAVA pode ser feita seguindo as orientações disponíveis no seguinte link http://www.java.com/pt_BR/.

Atenção: se você estiver usando a atividade *offline* através de uma cópia local em seu computador, é importante que os arquivos não estejam em um diretório cujo nome contenha acentos ou espaços.

Importante: algumas distribuições Linux vêm com o interpretador JAVA *GCJ Web Plugin* que não é compatível com o applet da atividade. Neste caso, recomendamos que você solicite ao responsável pelo laboratório da escola que instale o interpretador nativo da Sun, disponível no link http://www.java.com/pt_BR/.

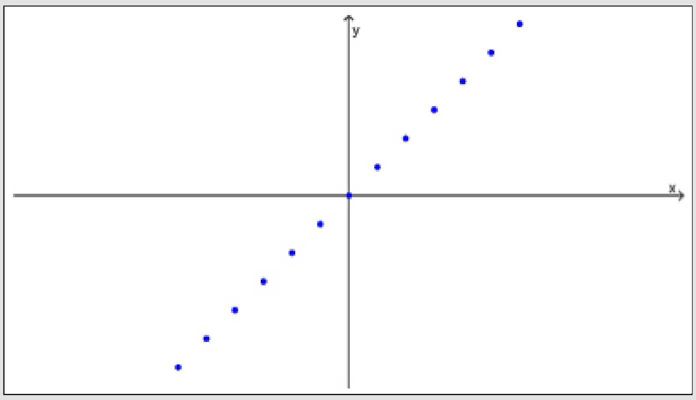
Acessibilidade: a partir da Versão 2 do Firefox e da Versão 8 do Internet Explorer, é possível usar as combinações de teclas indicadas na tabela abaixo para ampliar ou reduzir uma página da internet, o que permite configurar estes navegadores para uma leitura mais agradável.

Combinação de Teclas	Efeito
Ctrl + +	Ampliar
Ctrl + -	Reduzir
Ctrl + 0	Voltar para a configuração inicial

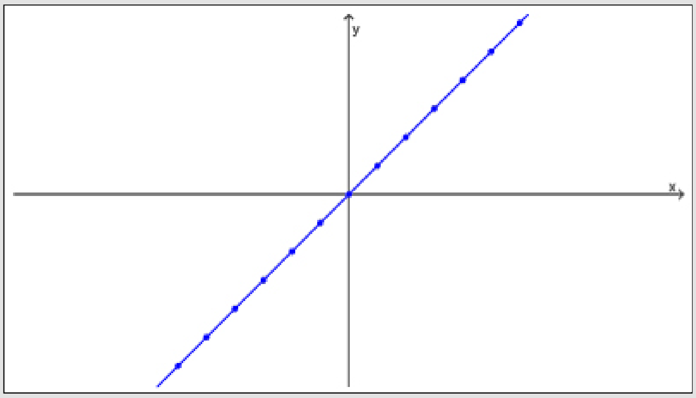
Vantagens deste esquema: (1) além de áreas de texto, este sistema de teclas amplia também figuras e aplicativos FLASH e (2) o sistema funciona para qualquer página da internet, mesmo para aquelas sem uma programação nativa de acessibilidade.

OBSERVAÇÃO CONCEITUAL

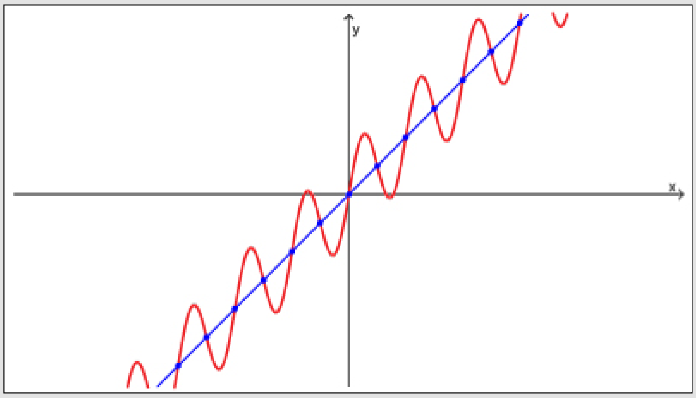
Sugerimos fortemente que você alerte os seus alunos para o seguinte fato: desenhar alguns pontos do gráfico de uma função e, então, ligá-los com segmentos de reta ou uma curva desenhada à mão livre pode não produzir o gráfico correto. Por exemplo, considere os pontos do gráfico de uma função desenhados na figura abaixo.



Uma pessoa desavisada poderia achar que a função em questão é uma função linear (y = x), cujo gráfico é a reta que passa pelos pontos:



Contudo, existem infinitas funções cujos gráficos passam pelos mesmos pontos. A figura a seguir ilustra o gráfico (em vermelho) de uma outra tal função (y = 10 sen(x/2) + x).



Assim, nos exercícios sugeridos para esta atividade, é importante ter discernimento para saber o que pode e o que não pode ser concluído tão somente a partir do desenho do gráfico de uma função ou quais hipóteses estão sendo assumidas implicitamente e que devem ser justificadas de alguma outra maneira.

OBSERVAÇÃO DE NATUREZA NUMÉRICA

Como qualquer software numérico, o aplicativo desta atividade representa números reais usando apenas um número finito de casas decimais. Por este motivo, o software não distingue números reais cuja distância é menor do que uma certa precisão. Por exemplo, se na Parte 2 da atividade você acrescentar a constante 1/10000000000000000000 à expressão (correta) da função que modela o problema, o programa indicará que sua resposta está certa. Apesar disto, não se espera que um aluno, neste momento, forneça respostas com números desta natureza e, para tentar minimizar a ocorrência de erros deste tipo, a Parte 2 da atividade intencionalmente não aceita números com pontos ou vírgulas decimais.

QUESTÕES PARA DISCUSSÃO APÓS A REALIZAÇÃO DA ATIVIDADE

Sugerimos fortemente que seja feita uma discussão com os alunos após a realização da tarefa. Se você optou por levá-los ao laboratório, isto pode ser feito no próprio laboratório, logo após o término da atividade. Se você optou por um exercício extraclasse, a discussão pode ser feita quando da devolução do questionário. Esta discussão pode incluir as diferentes estratégias de solução dos exercícios adotada por cada aluno, a comparação das respostas dos alunos, as dificuldades encontradas na realização dos exercícios, a ênfase em propriedades e resultados importantes, as informações suplementares, etc.

AVALIAÇÃO

Como instrumento de avaliação, sugerimos que você peça para os alunos elaborarem um relatório descrevendo as perguntas e respostas apresentadas na discussão em sala de aula. Nesse relatório, o professor poderá avaliar as capacidades de compreensão, argumentação e organização do aluno. Recomendamos que o questionário preenchido durante a realização da atividade seja anexado ao relatório.

REFERÊNCIAS

Adams, R. A.; Essex, C. *Calculus: Single Variable*. Prentice-Hall, 2009.

Andreescu, T.; Mushkarov, O.; Stoyanov, L. *Geometric Problems on Maxima and Minima*. Birkhäuser, 2005.

Medida e Forma em Geometria – Comprimento, Área, Volume e Semelhança. Sociedade Brasileira de Matemática, Coleção do Professor de Matemática, 1991.

Larson, R.; Hostetler, R. P.; Edwards, B. H. *Calculus: Early Transcendental Functions*. Brooks Cole, 2006.

Lima, E. L.; Carvalho, P. C. P.; Wagner, E.; Morgado, A. C. *A Matemática do Ensino Médio*. Volume 1. Sociedade Brasileira de Matemática, Coleção do Professor de Matemática, 2003.

Malta, I.; Pesco, S.; Lopes, H. *Cálculo a Uma Variável*. Volume 1: Uma Introdução ao Cálculo. Coleção MatMídia, Edições Loyola, Editora PUC-Rio, 2002.

Maron, I. A. *Problems in Calculus of One Variable (with Elements of Theory)*. MIR Publishers, 1973.

Niven, I.; Lance, L. H. *Maxima and Minima without Calculus*. Dolciani Mathematical Expositions, Mathematical Association of America, 1981.

Smith, R. T.; Minton, R. B. *Calculus: Early Transcendental Functions*. McGraw-Hill, 2006.

Stewart, J. *Cálculo*. Volume 1. Quinta edição. Cengage Learning, 2005.

Thomas, G. B.; Weir, M. D.; Hass, J.; Giordano, F. R. *Thomas' Calculus, Early Transcendentals*. Addison Wesley, 2007.

Tikhomirov, V. M. *Stories about Maxima and Minima*. Mathematical World, Volume 1. American Mathematical Society, 1991.

Zill, D. G.; Wright, W. S. *Calculus: Early Transcendentals*. Forth edition. Jones & Bartlett Publishers, 2009.

[Clique aqui para voltar para a página principal!]

Dúvidas? Sugestões? Nós damos suporte! Contacte-nos pelo e-mail: conteudosdigitais@im.uff.br.

Anexo

Formulário de Acompanhamento do Aluno

O Problema da Distância entre Ponto e Parábola

Aluno(a): ____ **Turma:** ______

Professor(a): ____

Enunciado do Problema

Dado um ponto A no plano cartesiano, quanto deve ser x para que a distância d entre A e M = (x, x^2) (um ponto da parábola $y = x^2$) seja a menor possível?

MÓDULO 1: A = (1, 3)

Caso o ponto A não esteja na posição (1, 3) na Parte 1, clique e arraste-o para esta posição antes de prosseguir.

[01] (a) Para se familiarizar com o problema, na Parte 1 da atividade, digite alguns valores para x, observando a posição do ponto M correspondente e o valor da distância d entre A e M. Anote os valores que você digitou na tabela abaixo (acrescente mais linhas, caso sejam necessárias).

x	d

(b) Você digitou algum valor para x que foi recusado pelo programa? Em caso afirmativo, escreva quais foram estes valores.

(c) Os valores de $x = -6$, $x = 0$, $x = 6$, $x = 20$ e $x = 100$ são recusados pelo programa? Por que sim? Por que não?

[02] O problema em questão pode ser modelado por uma função real f de domínio D.

(a) Vá para a Parte 2 da atividade (clique no link no topo da Parte 1). Habilite a opção “Rastro” e arraste o ponto M. O programa irá marcar alguns pontos do gráfico da função f. Habilite então a opção “Gráfico” para ver o gráfico da função f. Copie este gráfico aqui.

(b) Determine o domínio D da função f e uma expressão para f(x), isto é, determine o conjunto D de todos os valores de x para os quais o problema "tem sentido" e, para valores de x em D, uma expressão para f(x). Confira sua resposta usando o programa: digite os dados nos campos correspondentes e, então, pressione o botão “Conferir!” para conferir sua resposta. Para fins de comparação, o programa sempre desenhará o gráfico da função que você especificou. **Importante:** você não deve resolver este item por “tentativa e erro”. Pegue lápis e papel e, usando seus conhecimentos de geometria, tente obter o domínio D e uma expressão para f(x). Use então o programa para conferir sua resposta. Anote o seu raciocínio nesta folha.

(c) Você acertou a função e o domínio de primeira? Em caso negativo, quantas tentativas você usou até o programa lhe dizer que você acertou a resposta? O que você estava errando?

[03] É possível demonstrar que existe um único número real p em D que minimiza a distância d. Usando a Parte 1 da atividade (através de “tentativa e erro”), determine uma aproximação do valor deste p ótimo com duas casas decimais corretas.

[04] Quantos pontos diferentes da parábola estão a uma distância igual a 4 u.c. do ponto A? Justifique sua resposta!

[05] Existe algum ponto da parábola que está a uma distância igual a 0.5 u.c. do ponto A? Por que sim? Por que não?

[06] Será que é possível determinar o ponto p ótimo cuja aproximação você calculou no Item [03]? A resposta é sim! É possível demonstrar que o único número real p em D que minimiza a distância d é igual a

$$p = \frac{\sqrt{30}}{3} \cos\left(\frac{1}{3} \operatorname{arctg}\left(\frac{\sqrt{669}}{9}\right)\right).$$

Use uma calculadora para calcular uma aproximação de p e compare com sua resposta para o Item [03]. **Importante:** não se preocupe, neste momento, em saber como a expressão acima para o número p foi obtida. Caso você faça a disciplina "Cálculo Diferencial e Integral" na universidade, você aprenderá técnicas matemáticas que permitem obter este número.

[07] Qual é a imagem da função f que você estabeleceu no item [02] (b)? Dê um intervalo onde a função f é crescente e um intervalo onde a função d é decrescente.

[08] Existe algum valor de x em D que *maximiza* a função que você estabeleceu no item [02] (b)? Por que sim? Por que não?

MÓDULO 2: A = (0, 3)

Caso o ponto A não esteja na posição (0, 3) na Parte 1, clique e arraste-o para esta posição antes de prosseguir.

[01] (a) Digite alguns valores para x, observando a posição do ponto M correspondente e o valor da distância d entre A e M. Anote os valores que você digitou na tabela abaixo (acrescente mais linhas, caso sejam necessárias).

x	d

(b) Você digitou algum valor para x que foi recusado pelo programa? Em caso afirmativo, escreva quais foram estes valores.

(c) Os valores de $x = -6$, $x = 0$, $x = 6$, $x = 20$ e $x = 100$ são recusados pelo programa? Por que sim? Por que não?

[02] O problema em questão pode ser modelado por uma função real f de domínio D.

(a) Vá para a Parte 2 da atividade (clique no link no topo da Parte 1). Habilite a opção "Rastro" e arraste o ponto M. O programa irá marcar alguns pontos do gráfico da função f. Habilite então a opção "Gráfico" para ver o gráfico da função f. Copie este gráfico aqui.
(b) Determine o domínio D da função f e uma expressão para f(x), isto é, determine o conjunto D de todos os valores de x para os quais o problema "tem sentido" e, para valores de x em D, uma expressão para f(x). Confira sua resposta usando o programa: digite os dados nos campos correspondentes e, então, pressione o botão "Conferir!" para conferir sua resposta. Para fins de comparação, o programa sempre desenhará o gráfico da função que você especificou. **Importante:** você não deve resolver este item por "tentativa e erro". Pegue lápis e papel e, usando seus conhecimentos de geometria, tente obter o domínio D e uma expressão para f(x). Use então o programa para conferir sua resposta.
(c) Você acertou a função e o domínio de primeira? Em caso negativo, quantas tentativas você usou até o programa lhe dizer que você acertou a resposta? O que você estava errando?

[03] É possível demonstrar que existem exatamente dois números reais p em D que minimizam a distância d. Usando a Parte 1 da atividade (através de "tentativa e erro"), determine aproximações dos valores destes dois p ótimos com duas casas decimais corretas.

[04] Quantos pontos diferentes da parábola estão a uma distância igual a 4 u.c. do ponto A? Justifique sua resposta!

[05] Existe algum ponto da parábola que está a uma distância igual a 1 u.c. do ponto A? Por que sim? Por que não?

[06] Será que é possível determinar o ponto p ótimo cuja aproximação você calculou no Item [03]? A resposta é sim! É possível demonstrar que os dois números reais p em D que minimizam a distância d são diferentes de zero e satisfazem a equação

$$4x^3 - 10x = 0.$$

Resolva esta equação e determine os valores de p. Compare com sua resposta para o Item [03]. **Importante:** não se preocupe, neste momento, em saber como a equação acima foi obtida. Caso você faça a disciplina "Cálculo Diferencial e Integral" na universidade, você aprenderá técnicas matemáticas que permitem deduzir esta equação.

[07] Qual é a imagem da função f que você estabeleceu no item [02] (b)? Em quais intervalos a função f é crescente? E decrescente?

[08] Existe algum valor de x em D que *maximiza* a função que você estabeleceu no item [02] (b)? Por que sim? Por que não?

MÓDULO 3

[01] Sabendo a solução ótima do problema quando A = (1, 3), qual é a solução ótima quando A = (−1, 3)? É necessário fazer todas as contas novamente para responder esta questão?

[02] Existe alguma posição para o ponto A de forma que $f(x) < 0$ para algum x?