М. И. Гордин, О центральной предельной теореме для стационарных процессов, *Докл. АН СССР*, 1969, том 188, номер 4, 739–741

Доклады Академии наук СССР
1969. Том 188, № 4

УДК 519.217

МАТЕМАТИКА

М. И. ГОРДИН

О ЦЕНТРАЛЬНОЙ ПРЕДЕЛЬНОЙ ТЕОРЕМЕ ДЛЯ СТАЦИОНАРНЫХ ПРОЦЕССОВ

(Представлено академиком Ю. В. Линником 26 II 1969)

В настоящей заметке показывается, что центральная предельная теорема (ц.п.т.) для некоторых классов стационарных в узком смысле случайных процессов может быть получена из ц.п.т. для стационарных последовательностей мартингал-разностей.

Предположим, что задано пространство X с σ-алгеброй множеств M и вероятностной мерой P. Пространства $\mathbf{L}_p$ соответствуют мере P; $|f|_p$ — норма функции f в $\mathbf{L}_p$.

Если σ-алгебра L содержится в M, то $H(L)$ обозначает гильбертово пространство тех функций из $\mathbf{L}_2$, которые измеримы относительно L.

Символом P_G обозначается ортопроектор на замкнутое подпространство $G \subset H = \mathbf{L}_2$.

Пусть $\mathbf{T}$ — эргодический автоморфизм пространства X с мерой P, M_0 — такая σ-алгебра, что $\mathbf{T}^{-1}(M_0) \subset M_0$. Соотношение $Uf(x) = f(\mathbf{T}x)$ определяет в H унитарный оператор.

Положим, наконец, $M_k = \mathbf{T}^{-k}(M_0)$, $H_k = H(M_k) = U^k H_0$, $S_k = H_k \ominus H_{k+1}$. Через R обозначим линейное пространство таких элементов $g \in H$, что $g \in H_k \ominus H_l$ при некоторых k и l, $-\infty < k \leqslant l < \infty$.

Т е о р е м а 1. *Пусть* $f \in \mathbf{L}_2$ *и*

$$\inf_{g\in R} \varlimsup_{n\to\infty} \frac{\left|\sum\limits_{k=0}^{n-1} U^k(f-g)\right|_2}{\sqrt{n}} = 0.$$

Тогда существует

$$\lim_{n\to\infty} \left|\sum_{k=0}^{n-1} U^k f\right|_2 / \sqrt{n} = \sigma \tag{1}$$

и

$$\mathbf{P}\left\{\sum_{k=0}^{n-1} U^k f / \sqrt{n} < z\right\} \xrightarrow[n\to\infty]{} \frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{z} e^{-u^2/2\sigma^2}\, du. \tag{2}$$

Наметим доказательство теоремы. Пусть $\varepsilon_p > 0$, $\varepsilon_p \underset{p\to\infty}{\to} 0$, $f_p \in R$ и

$$\varlimsup_{n\to\infty} \left|\sum_{k=0}^{n-1} U^k(f-f_p)\right|_2 \Big/ \sqrt{n} < \varepsilon_p.$$

Рассмотрим цепочку равенств

$$f = f_p + f - f_p = \sum_{l=-\infty}^{\infty} P_{S_l} f_p + f - f_p = \sum_{l=-\infty}^{\infty} U^{-l} P_{S_l} f_p +$$

$$+ \sum_{l=-\infty}^{\infty} \sum_{m=0}^{-l-1} U^m P_{S_l} f_p - U \sum_{l=0}^{\infty} \sum_{m=0}^{-l-1} U^m P_{S_l} f_p + f - f_p = h_p + g_p - U g_p + f - f_p.$$

Далее,

$$\overline{\lim_{n\to\infty}}\left|\sum_{k=0}^{n-1} U^k(f-h_p)\right|_2 \Big/ \sqrt{n} \leqslant$$

$$\leqslant \overline{\lim_{n\to\infty}}\left\{|g_p - U^n g_p|_2 + \left|\sum_{k=0}^{n-1} U^k(f-f_p)\right|_2\right\} \Big/ \sqrt{n} < \varepsilon_p. \tag{3}$$

Заметим теперь, что $h_p = \sum_{l=-\infty}^{\infty} U^{-l} P_{S_l} f_p \in S_0$, $U^k h_p \in S_k$. Отсюда следует, что $U^k h_p$ измерима относительно M_k и ортогональна $H_{k+1} = H(M_{k+1})$, т. е., что последовательность $U^{-k}h_p$ есть эргодическая последовательность мартингал-разностей. Поэтому (см. ([1], [2])) величины $\sum_{k=0}^{n-1} U^k h_p/\sqrt{n}$ распределены асимптотически нормально с дисперсией $\sigma_p{}^2 = |h_p|_2{}^2$.

Последовательность σ_p сходится к некоторому пределу σ, так как

$$|\sigma_p - \sigma_{p'}| \leqslant |h_p - h_{p'}|_2 = \left|\sum_{k=0}^{n-1} U^k(h_p - h_{p'})\right|_2 \Big/ \sqrt{n} \leqslant$$

$$\leqslant \overline{\lim_{n\to\infty}}\left\{\left|\sum_{k=0}^{n-1} U^k(f-h_p)\right|_2 + \left|\sum_{k=0}^{n-1} U^k(f-h_{p'})\right|_2 \Big/ \sqrt{n}\right\} \leqslant \varepsilon_p + \varepsilon_{p'}.$$

Соотношение (2) следует теперь из леммы 5.3 работы ([4]), равенство (1) вытекает из (3) и того факта, что $\sigma_p \xrightarrow[p\to\infty]{} \sigma$.

Теорема 2. *Пусть T — эргодический автоморфизм, M_0 — такая же σ-алгебра, как и в теореме 1; $f \in \mathbf{L}_{2+\delta}$ при некотором $0 \leqslant \delta \leqslant \infty$ и*

$$\sum_{A\geqslant 0} (|P_{H_A} f|_{(2+\delta)/(1+\delta)} + |f - P_{H_{-A}} f|_{(2+\delta)/(1+\delta)}) < \infty.$$

Тогда выполнено условие теоремы 1.

Поясним, как доказывается теорема 2. Вместо $\int_X g(x)h(x)\,\mathbf{P}(dx)$ будем писать (g, h). Положим

$$f_1^{(A)} = P_{H_A} f, \quad f_2^{(A)} = f - P_{H_{-A}} f, \quad r_i^{(A)}(k) = (f_i^{(A)}, U^k f_i^{(A)}) \quad (i = 1, 2).$$

Из неравенства Гёльдера и известного свойства условных математических ожиданий (см., например, ([3]), стр. 508) следует, что

$$|r_i^{(A)}(k)| = |(f_i^{(A)}, U^{|k|} f_i^{(A)})| = |(f_i^{(A)}, U^{\pm|k|} f_i^{(A+|k|)})| \leqslant$$

$$\leqslant |f_i^{(A)}|_{2+\delta} |f_i^{(A+|k|)}|_{(2+\delta)/(1+\delta)} \leqslant 2|f|_{2+\delta} |f_i^{(A+|k|)}|_{(2+\delta)/(1+\delta)}.$$

Используя эту оценку, находим, что

$$\overline{\lim_{n\to\infty}}\left|\sum_{k=0}^{n-1} U^k(f_1^{(A)} + f_2^{(A)})\right|_2 \Big/ \sqrt{n} \leqslant \sum_{i=1}^{2} \overline{\lim_{n\to\infty}}\left|\sum_{k=1}^{n-1} U^k f_i^{(A)}\right|_2 \Big/ \sqrt{n} =$$

$$= \sum_{i=1}^{2} \lim_{n\to\infty}\left(\sum_{|k|<n}\left(1 - \frac{|k|}{n}\right) r_i^{(A)}(k)\right)^{1/2} \leqslant 2|f|_{2+\delta}^{1/2} \sum_{i=1}^{2}\left(\sum_{k=A}^{\infty} |f_i^{(k)}|_{(2+\delta)/(1+\delta)}\right)^{1/2} \xrightarrow[A\to\infty]{} 0.$$

Остается заметить, что

$$f - f_1^{(A)} - f_2^{(A)} \in R.$$

Замечание 1. Теоремы 1 и 2 можно переформулировать для случая, когда $\mathbf{T}$ — эндоморфизм. В этом случае пространства S_k образуют бесконечную в одну сторону последовательность.

Замечание 2. В условиях теоремы 2 имеет место равенство $f = g + Uh - h$, где $g, h \in \mathbf{L}_{(2+\delta)/(1+\delta)}$, g измерима относительно M_0 и имеет равные нулю интегралы по всем множествам из M_1. Такое представление при $\delta = 0$ полезно при доказательстве более тонких предельных теорем, например, при доказательстве слабой сходимости распределений в пространстве непрерывных функций, соответствующих построенной по суммам $\sum_{k=0}^{n-1} U^k f$ последовательности случайных ломаных, к мере, соответствующей броуновскому движению.

Замечание 3. Из теоремы 2 нетрудно получить ряд теорем, касающихся процессов с сильным и равномерным сильным перемешиванием и функционалов от таких процессов.

В частности, теоремы 18.6.1, 18.6.2 и 18.6.3 из книги ([3]) являются следствиями теоремы 2. Кроме того, в условиях теоремы 18.6.1 и при некотором усилении условий теорем 18.6.2 и 18.6.3 из ([3]) можно получить представление $f = g + Uh - h$, $g \in S_0$, $h \in \mathbf{L}_2$.

Автор выражает благодарность И. А. Ибрагимову за внимание к работе.

Ленинградский государственный университет
им. А. А. Жданова

Поступило
23 I 1969

ЦИТИРОВАННАЯ ЛИТЕРАТУРА

[1] R. Billingsley, Proc. Am. Math. Soc., 12, 5, 788 (1961). [2] И. А. Ибрагимов, Теория вероятностей и ее применения, 8, 1, 89 (1963). [3] И. А. Ибрагимов, Ю. В. Линник, Независимые и стационарно связанные величины, М., 1965. [4] В. П. Леонов, Некоторые применения старших семиинвариантов к теории стационарных случайных процессов, М., 1964.