Clase 33: Series alternantes

Hasta el momento, casi todo lo que hemos visto es para series de términos positivos.

Hay una clase de series bien importante que no satisface esto: series alternantes:

$$1 - \frac{1}{2} + \frac{1}{3} - \frac{1}{4} + \frac{1}{5} - \frac{1}{6} \dots = \sum_{n=1}^{\infty} \underbrace{\frac{1}{n}}_{\text{término positivo}} \cdot \underbrace{(-1)^{n+1}}_{\text{término alternante}}$$

$$-\frac{1}{2}+\frac{2}{3}-\frac{3}{4}+\frac{4}{5}-\frac{5}{6}\cdots = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{n}{n+1}\cdot(-1)^n$$

Obs: $(-1)^n$: alterna signos, partiendo en neg. $(n=1)$

$(-1)^{n-1}$ o $(-1)^{n+1}$: alterna signos, partiendo en pos) $(n=1,\dots)$

Las series alternantes son de la forma

$$\sum_{n=1}^{\infty} a_n \qquad a_n=(-1)^n b_n \text{ o } (-1)^{n-1} b_n$$

donde $b_n > 0$

En nuestros casos $b_n = \frac{1}{n}$ y $b_n = \frac{n}{n+1}$

Pregunta: ¿cómo podemos determinar la convergencia o divergencia de una serie alternante??

Test series alternantes:

Si la serie es de la forma $\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n-1} b_n$

con

- $b_n > 0$

- b_n decreciente, o sea, $b_{n+1} \leq b_n$

- $\lim\limits_{n\to\infty} b_n = 0$

Entonces $\sum\limits_{n=1}^{\infty} (-1)^{n-1} b_n$ converge.

Obs: para las series alternantes, al contrario que en el caso general, basta con que el término general se vaya a cero para converger

Ej: recordemos que $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n}$ no converge

Qué pasa con $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n} \cdot (-1)^n$??

$a_n = (-1)^n \frac{1}{n} = (-1)^n \cdot b_n$, $b_n = 1/n$

- $b_n > 0$ ✓✓
- b_n decr ✓✓
- $\lim b_n = 0$ ✓✓

$\Rightarrow \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n \frac{1}{n}$ converge

Ej: $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n 3n}{4n-1}$ converge o no?

Sol: $a_n = (-1)^n \cdot b_n$, $b_n = \frac{3n}{4n-1}$

- $b_n > 0$ ✓✓

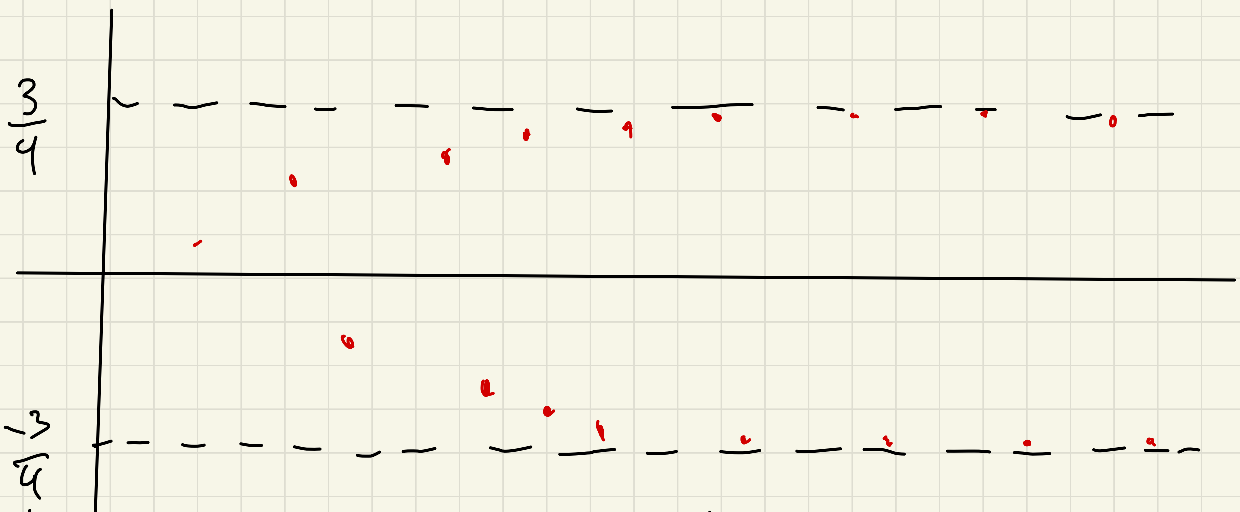
- $\lim_{n\to\infty} b_n = 0$?? $b_n = \frac{3n}{4n-1} = \frac{3}{4-\frac{1}{n}} \xrightarrow{n\to\infty} \frac{3}{4} \neq 0$

$\frac{1}{n} \to 0$

Conclusión: el test no aplica.

$\lim\limits_{n\to\infty} a_n = 0$ si la converge.

$\lim\limits_{n\to\infty} a_n = \lim\limits_{n\to\infty} (-1)^n \dfrac{3n}{4n-1}$ no existe



Como $\lim a_n$ no existe, la serie no

converge.

Ej: $\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n+1} \dfrac{n^2}{n^3+1}$ $\qquad b_n = \dfrac{n^2}{n^3+1}$

Sol:

- $b_n > 0$
- $\lim_{n\to\infty} b_n = 0$
- b_n decr?? no es claro.

Técnica de cálculo 1: consideremos la función

$$f(x) = \frac{x^2}{x^3+1}$$

y su derivada

$$f'(x) = \frac{x(2-x^3)}{(x^3+1)^2}$$

$f(n) = b_n \quad n>0$, sólo nos interesan

$x > 0$. Para que f sea decr, necesitamos que $f'(x) < 0$. Esto pasa si

$$x > \sqrt[3]{2}$$

Por lo tanto, f es decreciente en $(\sqrt[3]{2}, \infty)$, y por lo tanto

$$\begin{array}{ccc} f(n+1) & < & f(n) \\ \shortparallel & & \shortparallel \\ b_{n+1} & < & b_n \end{array} \qquad \text{si } n \geq \sqrt[3]{2}, \quad n \geq 2$$

b_n es decreciente. Así, la serie es convergente.

Esta técnica es muy útil y hay que recordarla para siempre.

Ej: determine al ojo si las siguientes series convergen o no.

a) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n-1}}{\sqrt{n}}$, $b_n = \frac{1}{\sqrt{n}}$

- $b_n > 0$
- $b_{n+1} \leq b_n$
- $\lim_{n \to \infty} b_n = 0$

converge

b) $\sum_{n=2}^{\infty} (-1)^n \frac{n}{\ln n}$, $b_n = \frac{n}{\ln n}$,

- $b_n > 0$
- $\lim b_n = 0$??
- b_n decr ??

$$f(x) = \frac{x}{\ln x} \qquad \lim_{x\to\infty} f(x) = \frac{\infty}{\infty} \qquad \text{L'Hopital}$$

$$\frac{(x)'}{(\ln x)'} = \frac{1}{\frac{1}{x}} = x \qquad \lim_{x\to\infty} x = \infty \neq 0$$

no converge.

c) $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n-1} \frac{\ln n}{n}$ $\qquad b_n = \dfrac{\ln n}{n}$

- $b_n > 0$
- $b_n \to 0$
- b_n decr??

$$f(x) = \frac{\ln x}{x} \qquad \lim_{x\to\infty} f(x) = \lim_{x\to\infty} \frac{(\ln x)'}{(x)'} = \lim \frac{1/x}{1} = \lim \frac{1}{x} = 0 \text{ demás.}$$

$$f(x) = \frac{\ln x}{x} \qquad f'(x) = \ldots$$

d) $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n \frac{\sqrt{n}}{1+2\sqrt{n}}$ no converge

$$a_n = (-1)^n \frac{\sqrt{n}}{1+2\sqrt{n}}$$

$\lim_{n\to\infty} a_n$ no es cero

alterna $+\frac{1}{2}$ $\Longrightarrow$ $\lim_{n\to\infty} a_n$ no existe

Dada una serie $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$, uno puede considerar $\sum_{n=1}^{\infty} |a_n|$. Decimos que $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ es absolutamente convergente si $\sum_{n=1}^{\infty} |a_n|$ converge.

Ej: $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n}{n^2}$ $\quad a_n = \frac{(-1)^n}{n^2}$ $\quad |a_n| = \frac{1}{n^2}$

$$\sum_{n=1}^{\infty} |a_n| = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2}$$ ✓ converge.

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n}{n^2}$$ es absolutamente convergente

Ej: $$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n}{n}$$ converge $\quad a_n = \frac{(-1)^n}{n} \quad |a_n| = \frac{1}{n}$

$$\sum_{n=1}^{\infty} |a_n| = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n}$$ no converge

Si $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ converge pero $\sum_{n=1}^{\infty} |a_n|$ no, decimos que $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ es condicionalmente convergente

Ej: $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n}{n^2}$ es absolutamente convergente

$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n}{n}$ es condicionalmente convergente.

Teo: Si $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ es absolutamente convergente, entonces es convergente.

$$\sum_{n=1}^{\infty} |a_n| \text{ converge} \Longrightarrow \sum_{n=1}^{\infty} a_n \text{ converge}$$

Ej: $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\cos n}{n^2}$ $\qquad a_n = \frac{\cos n}{n^2}$

$$|a_n| = \left|\frac{\cos n}{n^2}\right| = \frac{|\cos n|}{n^2} \leq \frac{1}{n^2}$$

$$\sum_{n=1}^{\infty} |a_n| \leq \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2} \text{ existe}$$

existe

$\sum \frac{\cos n}{n^2}$ es abs. conv.

y por lo tanto, convergente.

$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2}$ converge, pero a qué valor??

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2} = \frac{\pi^2}{6}$$

Cómo podemos ver si una serie es abs. convergente? $\sum a_n$

Test del cociente:

i) Si $\lim_{n\to\infty} \left| \frac{a_{n+1}}{a_n} \right| = L < 1$, entonces $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ es abs. conv.

ii) Si $\lim_{n\to\infty} \left| \frac{a_{n+1}}{a_n} \right| = L > 1$, entonces $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ diverge

iii) Si $\lim_{n\to\infty} \left| \frac{a_{n+1}}{a_n} \right| = 1$, entonces el test no dice nada.

Ej: $\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n \frac{n^3}{3^n}$

Se puede hacer con el test de las series alternantes

Sol: test del cociente

$$a_n = (-1)^n \frac{n^3}{3^n}$$

$$\left|\frac{a_{n+1}}{a_n}\right| = \left|\frac{(-1)^{n+1}\dfrac{(n+1)^3}{3^{n+1}}}{(-1)^n \dfrac{n^3}{3^n}}\right| = \frac{(n+1)^3}{n^3}\cdot\frac{3^n}{3^{n+1}}$$

$$= \left(\frac{n+1}{n}\right)^3 \cdot \frac{1}{3} = \frac{1}{3}\left(1+\frac{1}{n}\right)^3 \longrightarrow \frac{1}{3} < 1$$

$$\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n \frac{n^3}{3^n} \quad \text{es abs. convergente}$$

$$\left(1+\frac{1}{n}\right)^3 \longrightarrow 1 \quad \text{pero} \quad \left(1+\frac{1}{n}\right)^n \longrightarrow e$$