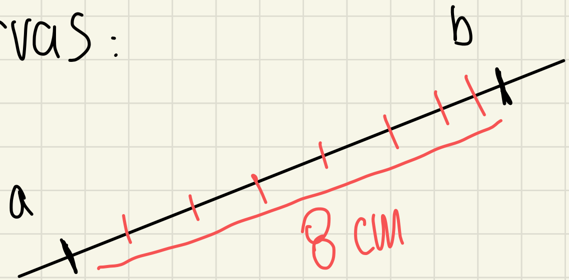
Temario solemne 2:

- Todo integración menos impropias (todas las técnicas)
- volumenes (varios métodos)
- lo de hoy (longitud de curvas)

## Clase 22: Longitud de curvas.

Hemos visto cómo calcular areas y volumenes usando integrales: aproximar con figuras que uno sabe manejar (rectángulos, cubos, anillos, etc).

Usamos la misma idea para calcular largos de curvas:




Curva roja la se medir


Cómo medir el largo?

largo curva roja $\approx$ largo curva negra

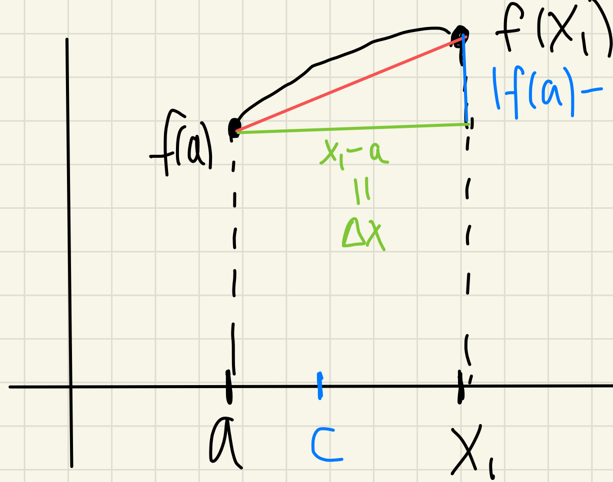
Al hacer más finas las divisiones en los trozos de recta, mejor la aproximación

La idea es que si hacemos un límite de aproximaciones, nos de el resultado exacto.

Ahora con detalles:


largo curva roja $= \sum$ largos trazos

necesitamos el largo de cada uno de los trazos.



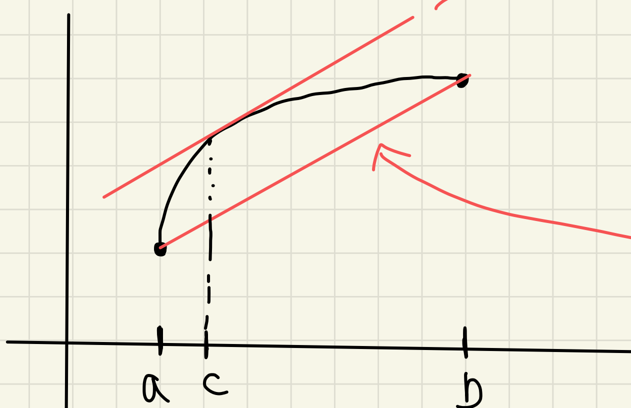

$$|f(a)-f(x_1)| = |f'(c)|\cdot \overbrace{|x_1-a|}^{\Delta x}$$

Usando pitágoras sacamos el largo rojo

$$= \sqrt{\Delta x^2 + |f'(c)|^2 \Delta x^2}$$

$$= \sqrt{1+f'(c)^2}\ \Delta x$$

Teorema del valor medio: existe $c \in (a,b)$ tal que




$$\underbrace{\frac{f(b)-f(a)}{b-a}}_{\text{pendiente}} = f'(c)$$

pendiente tgte en c

$$f(b)-f(a)=f'(c)(b-a)$$

Largo del segmento rojo:

$$\sqrt{1+f'(c)^2}\,\Delta x$$

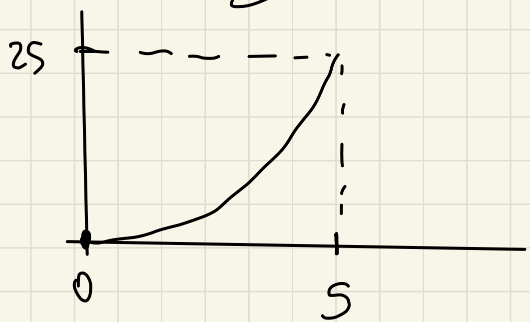
Queremos sumar esto sobre toda la división de la curva:

$$\sum \sqrt{1+f'(c)^2}\,\Delta x \xrightarrow{\text{límite}} \boxed{\int_a^b \sqrt{1+(f')^2}\,dx}$$

Esta es la expresión para el largo de la curva.

Ej: calcule el largo de la parábola $y=x^2$ entre $x=0$ y $x=5$

Sol:




$$f(x) = x^2$$

$$f'(x) = 2x$$

$$(f'(x))^2 = 4x^2$$

$$\text{largo} = \int_0^5 \sqrt{1+(f')^2}\,dx = \int_0^5 \sqrt{1+4x^2}\,dx \approx 25.8.$$

(Para hacerla, $2x = \operatorname{senh}(u)$)

Ej: calcule el largo de la curva $y = x^{3/2}$ antre $x=1$ y $x=4$

Sol: $f(x) = x^{3/2}$  $f'(x) = \frac{3}{2}x^{1/2}$, $(f')^2 = \frac{9}{4}x$

$$\text{largo} = \int_1^4 \sqrt{1+(f')^2}\,dx = \int_1^4 \sqrt{1+\frac{9}{4}x}\,dx$$

$$= \int_1^4 \sqrt{1+\frac{9}{4}x}\,dx \qquad u = 1+\frac{9}{4}x$$

$du = \frac{9}{4} dx \quad dx = \frac{4}{9} du$

$$\int \sqrt{1 + \frac{9}{4}x}\, dx = \int \sqrt{u}\, \frac{4}{9} du = \frac{u^{3/2}}{3/2} \cdot \frac{4}{9}$$

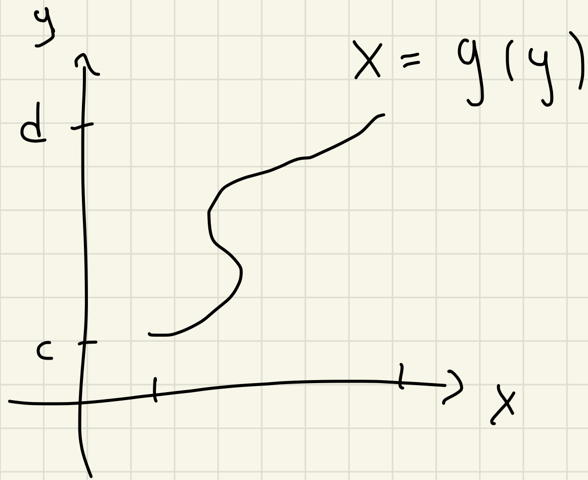
$$= \left(1 + 9/4\, x\right)^{3/2} \cdot \frac{8}{27}$$

Evaluando en $x=4$ y $x=1$

largo es $\frac{8}{27}\left(10^{3/2} - \left(\frac{13}{4}\right)^{3/2}\right) = \frac{1}{27}\left(80\sqrt{10} - 13\sqrt{13}\right)$

$\approx 7.6$

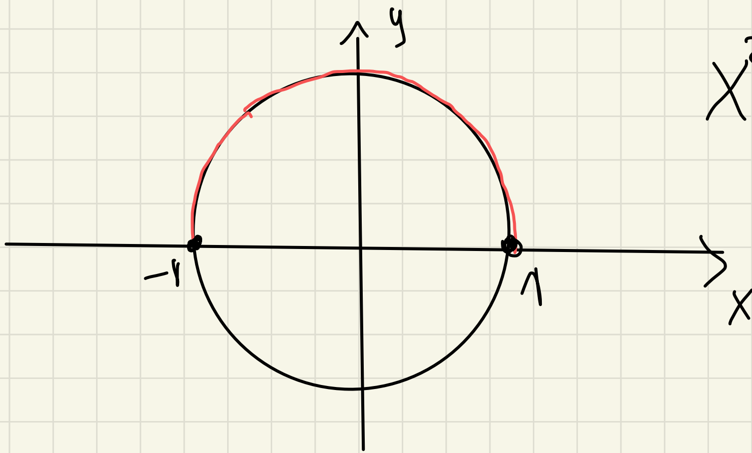
Uno también lo puede hacer cuando la función es $x = g(y)$, en cuyo caso, uno cambia los roles de $x$ e $y$




$$\underset{\text{curva}}{\text{largo}} = \int_c^d \sqrt{1 + (g'(y))^2}\, dy$$

Ej: compruebe que el perimetro de un

círculo de radio 1 es $2\pi$.




$$x^2 + y^2 = 1$$

$$y = \sqrt{1 - x^2}$$

$$f(x) = \sqrt{1 - x^2} = (1 - x^2)^{1/2}$$

$$f'(x) = \frac{1}{2}(1 - x^2)^{-1/2} \cdot -2x$$

$$\int_{-1}^{1} \sqrt{1 + (f')^2}\, dx$$

$$f'(x) = -\frac{x}{\sqrt{1 - x^2}}$$

$$(f'(x))^2 = \frac{x^2}{1 - x^2}$$

$$1+(f'(x))^2 = 1+\frac{x^2}{1-x^2} = \frac{1-x^2+x^2}{1-x^2}$$

$$= \frac{1}{1-x^2}$$

$$\sqrt{1+(f'(x))^2} = \frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$$

$$\int \frac{1}{\sqrt{1-x^2}}\,dx = \operatorname{arcsen}(x) + C$$

Largo del semi-círculo $= \displaystyle\int_{-1}^{1} \frac{1}{\sqrt{1-x^2}}\,dx = \operatorname{arcsen}(1) - \operatorname{arcsen}(-1)$

$$= \frac{\pi}{2} - \left(-\frac{\pi}{2}\right)$$

$= \pi$

Luego, largo del círculo es $2\pi$.

Ej: calcule el largo de la curva $y = x^2 - \frac{1}{8}\ln x$ desde $x = 1$ hasta $x = t$.

Sol: $f(x) = x^2 - \frac{1}{8}\ln x$

$$f'(x) = 2x - \frac{1}{8}\frac{1}{x}$$

$$(f'(x))^2 = 4x^2 - \frac{1}{2} + \frac{1}{64} \cdot \frac{1}{x^2}$$

$$1 + (f'(x))^2 = \frac{1}{2} + 4x^2 + \frac{1}{64}\frac{1}{x^2} = \left(2x + \frac{1}{8x}\right)^2 \qquad \sqrt{x^2} = |x|$$

$$\sqrt{1 + (f'(x))^2} = \left|2x + \frac{1}{8x}\right| = 2x + \frac{1}{8x} \qquad x > 0$$

Largo de la curva es $= \displaystyle\int_1^t 2x + \frac{1}{8x}\,dx = x^2 + \frac{1}{8}\ln x \Big|_1^t$

$$= t^2 + \frac{1}{8}\ln t - 1$$

Ej: escriba una integral para el largo de las siguientes curvas:

a) $y = \cos(x)$ entre $x = 0$ y $x = 2\pi$

$f(x) = \cos(x)$

$f'(x) = -\operatorname{sen}(x)$

$(f'(x))^2 = \operatorname{sen}^2(x)$

$1 + (f'(x))^2 = 1 + \operatorname{sen}^2(x)$

$$\Longrightarrow \text{largo curva} = \int_0^{2\pi} \sqrt{1 + \operatorname{sen}^2(x)}\, dx$$

b) $y = 2^x$ entre $x = 0$ y $x = 3$

$$f(x) = 2^x$$

$$f'(x) = (\ln 2)\, 2^x$$

$$f'(x)^2 = (\ln 2)^2\, 2^{2x}$$

$$1 + f'(x)^2 = 1 + (\ln 2)^2\, 2^{2x}$$

$$\sqrt{1 + f'(x)^2} = \sqrt{1 + (\ln 2)^2\, 2^{2x}}$$

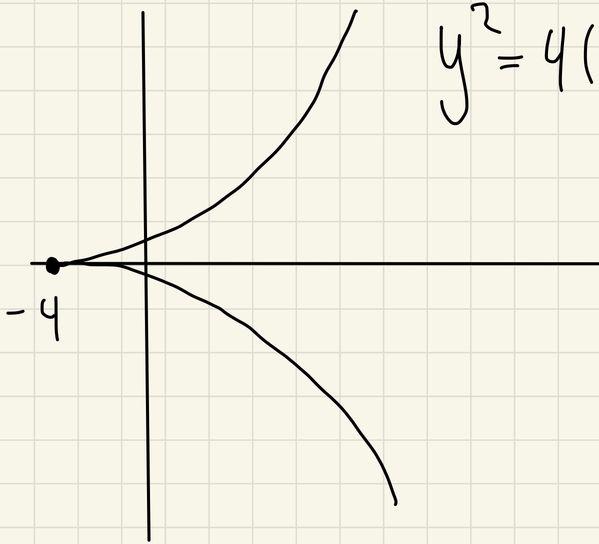
$$2^x = e^{\ln 2^x} = e^{x \cdot \ln 2}$$

$$\underset{a>0}{a} = e^{\ln a} \qquad (2^x)' = \ln 2 \cdot e^{x \ln 2}$$

$$2^x \ln 2$$

$$\text{largo} = \int_0^3 \sqrt{1 + (\ln 2)^2 \cdot 2^{2x}}\, dx$$

Ej: encuentre el largo de la curva $y^2 = 4(x+4)^3$ entre $x = 0$ y $x = 2$, $y > 0$




$y^2 = 4(x+4)^3$

$y > 0$

$\Downarrow$

$y = \sqrt{4(x+4)^3}$

$f(x) = 2(x+4)^{3/2}$

$f'(x) = \cancel{2} \cdot \frac{3}{\cancel{2}} (x+4)^{1/2}$

$f'(x) = 3(x+4)^{1/2}$

$(f'(x))^2 = 9(x+4) = 9x + 9 \cdot 4$

$1 + (f'(x))^2 = 9x + 37$

$$\sqrt{1+(f'(x))^2} = \sqrt{9x+37}$$

$$\text{largo} = \int_0^2 \sqrt{9x+37}\,dx \overset{\substack{u=9x+37\\ du=9dx}}{=} \int \sqrt{u}\cdot\frac{du}{9}$$

$$= \frac{1}{9}\int u^{1/2}\,du = \frac{1}{9}\,\frac{u^{3/2}}{3/2}$$

$$= \frac{2}{27}(9x+37)^{3/2}\Big|_0^2$$

$$= \frac{2}{27}(18+37)^{3/2} - \frac{2}{27}(37)^{3/2} \approx 13.5$$