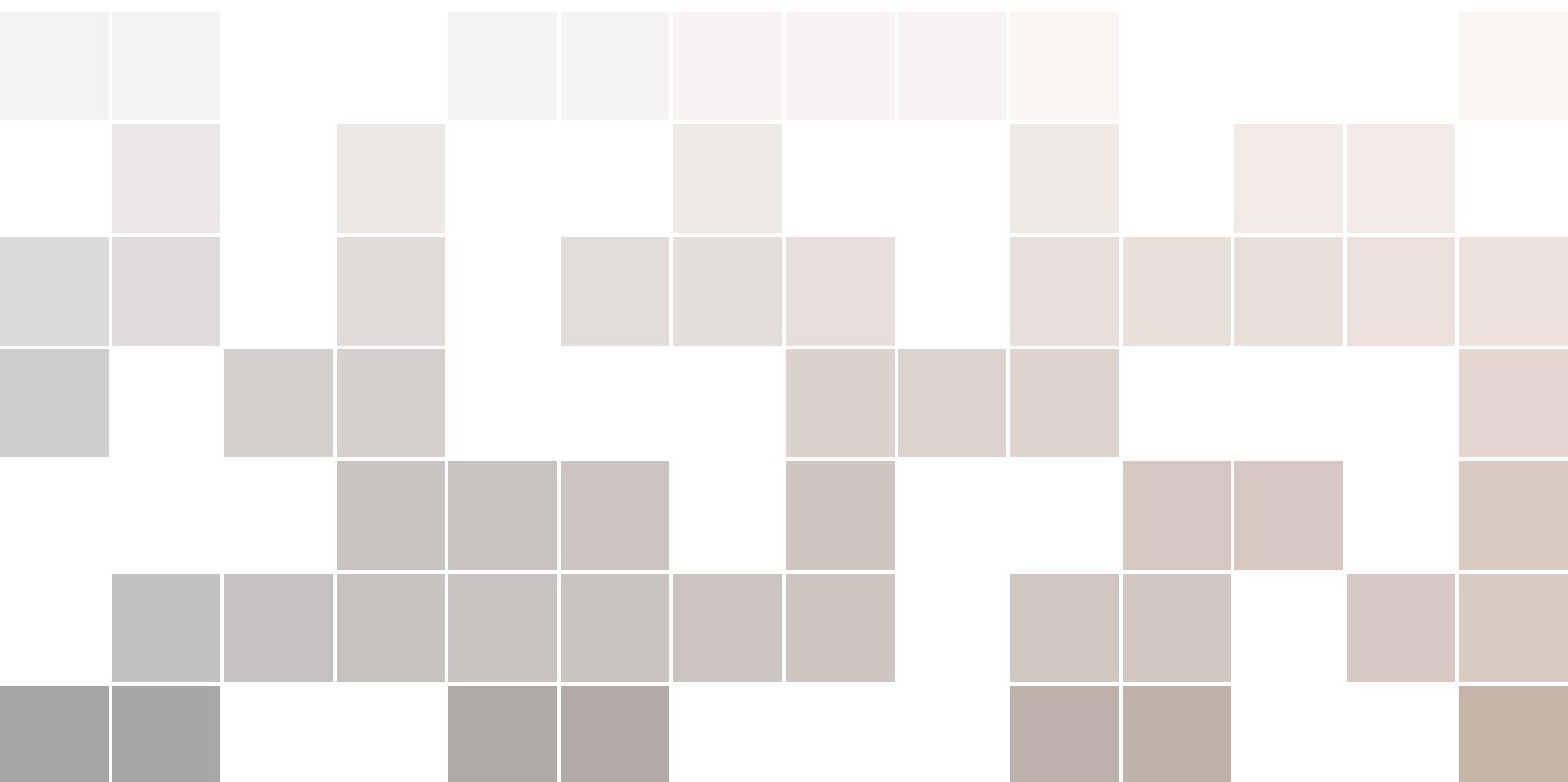




Poromecânica

Olivier Coussy



Copyright © 2022 Goro Akechi

PUBLISHED BY PUBLISHER

[BOOK-WEBSITE.COM](https://book-website.com)

Licensed under the Creative Commons Attribution-NonCommercial 4.0 License (the “License”). You may not use this file except in compliance with the License. You may obtain a copy of the License at <https://creativecommons.org/licenses/by-nc-sa/4.0>. Unless required by applicable law or agreed to in writing, software distributed under the License is distributed on an “AS IS” BASIS, WITHOUT WARRANTIES OR CONDITIONS OF ANY KIND, either express or implied. See the License for the specific language governing permissions and limitations under the License.

First printing, March 2022



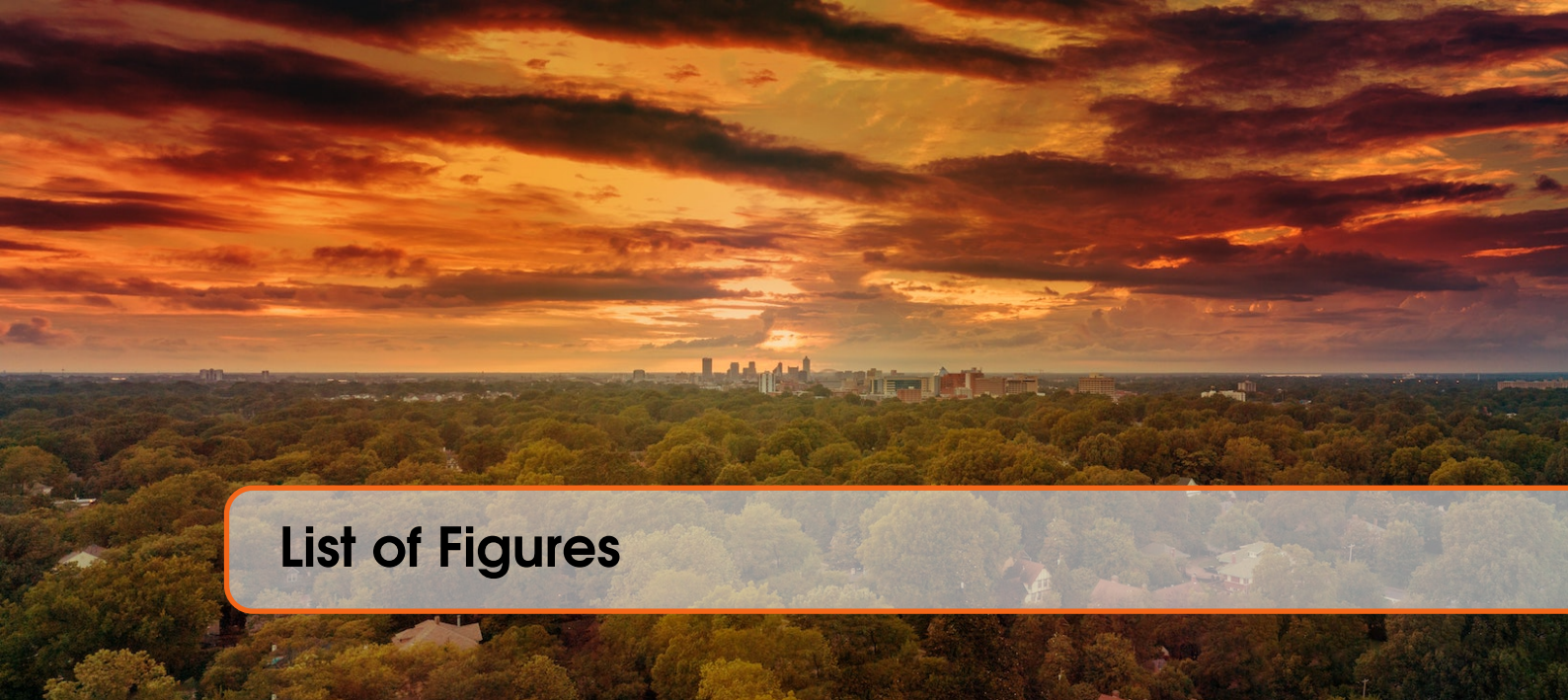
Contents

I

Part One Title

1	Capítulo 1 - Deformação e Cinemática. Balanço de massa	11
1.1	Deformação e Cinemática. Balanço de Massa	11
1.1.1	O meio poroso e a abordagem contínua	11
1.1.2	Parcículas do Esqueleto e do Fluido. Hipóteses da Continuidade	11
1.2	A deformação do esqueleto	12
1.2.1	Gradiente de deformação e Fórmula do Transporte	12
1.2.2	Porosidades Euleriana e Lagrangeana. Razão de Vazios	14
1.2.3	Tensor de Deformações	15
1.2.4	Transformações infinitesimais e linearização do tensor de deformações	16
1.3	Cinemática	18
1.3.1	Derivada Material	18
1.3.2	Taxa de deformação	20
1.4	Balanço de Massa	21
2	In-text Element Examples	23
2.1	Referencing Publications	23
2.2	Link Examples	23
2.3	Lists	23
2.3.1	Numbered List	23
2.3.2	Bullet Point List	23
2.3.3	Descriptions and Definitions	23
2.4	International Support	24
2.5	Ligatures	24

3	Mathematics	27
3.1	Theorems	27
3.1.1	Several equations	27
3.1.2	Single Line	27
3.2	Definitions	27
3.3	Notations	27
3.4	Remarks	28
3.5	Corollaries	28
3.6	Propositions	28
3.6.1	Several equations	28
3.6.2	Single Line	28
3.7	Examples	28
3.7.1	Equation Example	28
3.7.2	Text Example	28
3.8	Exercises	28
3.9	Problems	29
3.10	Vocabulary	29
4	Presenting Information and Results with a Long Chapter Title	31
4.1	Table	31
4.2	Figure	31
	Bibliography	33
	Articles	33
	Books	33
	Index	35
	Appendices	35
A	Appendix Chapter Title	35
A.1	Appendix Section Title	35
B	Appendix Chapter Title	37
B.1	Appendix Section Title	37



List of Figures

4.1	Figure caption.	31
4.2	Floating figure.	32



List of Tables

4.1	Table caption.	31
4.2	Floating table.	32



Part One Title

1	Capítulo 1 - Deformação e Cinemática.	
	Balanço de massa	11
1.1	Deformação e Cinemática. Balanço de Massa	11
1.2	A deformação do esqueleto	12
1.3	Cinemática	18
1.4	Balanço de Massa	21
2	In-text Element Examples	23
2.1	Referencing Publications	23
2.2	Link Examples	23
2.3	Lists	23
2.4	International Support	24
2.5	Ligatures	24



1. Capítulo 1 - Deformação e Cinemática.

Balanço de massa

O objetivo deste capítulo é descrever a deformação e a cinemática de um meio poroso formado por um esqueleto deformável e um fluido saturando o espaço poroso. A ideia subjacente consiste em abordar o meio poroso como a sobreposição de dois contínuos, o esqueleto contínuo e o fluido contínuo. A descrição da deformação e da cinemática de cada contínuo em separado não difere forma de alguma daquela de um meio contínuo monofásico. Mesmo assim, a deformação do esqueleto ¹ é a única que eventualmente pode ser realmente observada e portanto é a discutida na sequência.

As leis da física que governam a evolução de um contínuo poroso envolve a taxa temporal das quantidades físicas ligadas ao esqueleto ou ao fluido, qualquer que sejam seus movimentos distintos posterior. Por conseguinte a derivada particular é portanto introduzida, permitindo a nós seguir separadamente o movimento do esqueleto e do fluido. Uma primeira ilustração do seu uso é dada no final desse capítulo expressando o balanço de massa para os dois contínuos sobrepostos.

1.1 Deformação e Cinemática. Balanço de Massa

1.1.1 O meio poroso e a abordagem contínua

Um **meio poroso saturado** é composto de uma matriz e um espaço poroso, sendo este último preenchido por um fluido. O **espaço poroso conectado** é o espaço através do qual o fluido realmente flui e cujos dois pontos podem ser unidos por um caminho inteiramente dentro dele, de modo que a fase fluída permanece contínua lá. A **matriz** é composta por uma parte sólida e uma possível porosidade oclusa saturada ou não, mas através da qual não ocorre infiltração. A **porosidade conectada** é a razão entre o volume do espaço poroso conectado e o volume total. No que segue, o termo "porosidade", usado sem maiores especificações, refere-se a toda a porosidade conectada.

FIGURA 1.1

1.1.2 Parcículas do Esqueleto e do Fluido. Hipóteses da Continuidade

Um meio poroso pode ser tratado como a sobreposição de dois contínuos, o esqueleto contínuo e o fluido contínuo. Portanto, como ilustrado na FIGURA 1, qualquer volume infinitesimal pode ser tratado como a sobreposição de duas partículas materiais. A primeira é a **partícula de esqueleto** formada da matriz e do espaço poroso conectado esvaziado de fluido. A segunda é a **partícula de**

¹N.T: como será visto adiante, o **esqueleto** é o espaço ocupado pela matriz e os vazios conectados. Sendo a **matriz** o espaço ocupado pelo sólido com sua porosidade oclusa.

fluido formada a partir do fluido que satura o espaço poroso conectado e do restante do espaço sem a matriz.

Uma descrição contínua de um meio, que é heterogêneo na escala microscópica, requer a escolha de uma escala macroscópica na qual a constituição interna da matéria é ignorada na análise dos fenômenos físicos macroscópicos. Por exemplo, a porosidade está associada a um volume elementar com material suficiente para ser representativo do processo de infiltração. De forma mais geral, a hipótese da continuidade assume a existência de um **volume elementar representativo** que é relevante na escala macroscópica para todos os fenômenos físicos envolvidos na aplicação pretendida. Supõe-se que a física varia continuamente de um para outro desses volumes infinitesimais justapostos. Volumes que juntos constituem o meio poroso. Além disso, a deformação contínua do esqueleto assume que duas partículas do esqueleto, justapostas em um dado momento, foram sempre assim e permanecerão assim.

1.2 A deformação do esqueleto

Quando sujeito a forças externas e a variações de pressão do fluido saturado, o esqueleto deforma. A descrição dessa deformação não difere de forma alguma daquela de sólidos contínuos convencionais e é brevemente desenvolvida abaixo.

1.2.1 Gradiente de deformação e Fórmula do Transporte

No tempo $t = 0$ considere uma configuração inicial para o esqueleto. Nesta configuração a partícula de esqueleto está localizada pelo vetor posição \mathbf{X} de componentes X_i , em um sistema de referências Cartesiano de base ortonormal $(\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2, \mathbf{e}_3)$. No tempo t o esqueleto foi deformado e permanece na sua configuração atual. Nesta configuração a partícula cujo vetor posição era \mathbf{X} é agora localizada pelo vetor posição atual \mathbf{x} de componentes $x_i(X_j, t)$. Nós escrevemos:

$$\mathbf{X} = X_i \mathbf{e}_i; \quad \mathbf{x} = x_i(X_j, t) \mathbf{e}_i \quad (1.1)$$

com um somatório no índice repetido i . No restante do trabalho essa convenção é adotada, desde que nenhuma outra indicação seja dada e a notação indicial se refere a um sistema de coordenadas Cartesiano.

Gradiente de deformação e transporte de um vetor. Na configuração inicial considere um vetor material infinitesimal $d\mathbf{X}$ da partícula de esqueleto localizada a \mathbf{X} orientado para a partícula justaposta localizada a $\mathbf{X} + d\mathbf{X}$. Após a deformação, $d\mathbf{X}$ se torna $d\mathbf{x}$ e acompanha as mesmas partículas de esqueleto em suas novas posições, \mathbf{x} e $\mathbf{x} + d\mathbf{x}$ (ver FIGURA 2). O vetor $d\mathbf{x}$ pode ser obtido de $d\mathbf{X}$ pela diferenciação de (1.1):

$$d\mathbf{x} = \frac{\partial x_i}{\partial X_j} dX_j \mathbf{e}_i \quad (1.2)$$

ou, equivalentemente:

$$d\mathbf{x} = \mathbf{F} \cdot d\mathbf{X} \quad (1.3)$$

onde:

$$\mathbf{F} = \nabla_{\mathbf{X}} \mathbf{x}; \quad F_{ij} = \frac{\partial x_i}{\partial X_j} \quad (1.4)$$

Em (1.4) ∇_X representa o operador nabla relativo a configuração inicial. \mathbf{F} é chamado de **gradiente de deformações**. Ele transporta qualquer vetor material $d\mathbf{X}$ em seu deformado $d\mathbf{x}$. Sua inversa \mathbf{F}^{-1} e sua transposta ${}^t\mathbf{F}$ são respectivamente definidos por:

$$d\mathbf{X} = \mathbf{F}^{-1} \cdot d\mathbf{x}; \quad d\mathbf{x} = d\mathbf{X} \cdot {}^t\mathbf{F} \quad (1.5)$$

e satisfazem:

$$({}^t\mathbf{F})_{ij} = F_{ji}; \quad (\mathbf{F}^{-1})_{ij} = \frac{\partial X_i}{\partial x_j} \quad (1.6)$$

Gradiente de deformações e deslocamento. Seja $\boldsymbol{\xi}(\mathbf{X}, t)$ o vetor deslocamento da partícula da qual a posição inicial e atual são \mathbf{X} e \mathbf{x} . Nós escrevemos:

$$\mathbf{x} = \mathbf{X} + \boldsymbol{\xi} \quad (1.7)$$

Das definições (1.4) e (1.7) o gradiente de deformação pode ser expresso como uma função do vetor deslocamentos $\boldsymbol{\xi}$ conforme:

$$\mathbf{F} = \mathbf{1} + \nabla_X \boldsymbol{\xi}; \quad F_{ij} = \delta_{ij} + \frac{\xi_i}{X_j} \quad (1.8)$$

onde δ_{ij} é o delta de Kronecker, que é $\delta_{ij} = 1$ se $i = j$ e $\delta_{ij} = 0$ se $i \neq j$.

Transporte de Volume. O volume infinitesimal atual $d\Omega_t = dx_1 dx_2 dx_3$ é igual ao produto composto:

$$d\Omega_t = (d\mathbf{x}_1, d\mathbf{x}_2, d\mathbf{x}_3) = d\mathbf{x}_1 \cdot (d\mathbf{x}_2 \times d\mathbf{x}_3) \quad (1.9)$$

onde $d\mathbf{x}_i = dx_i \mathbf{e}_i$ (com nenhum somatório). A lineariedade do produto composto com respeito aos vetores combinados permite nós escrevermos:

$$d\Omega_t = (\mathbf{F} \cdot d\mathbf{x}_1, \mathbf{F} \cdot d\mathbf{x}_2, \mathbf{F} \cdot d\mathbf{x}_3) = \det \mathbf{F} (d\mathbf{X}_1, d\mathbf{X}_2, d\mathbf{X}_3) \quad (1.10)$$

Como consequência qualquer volume material inicial $d\Omega_0$ se transforma no volume material $d\Omega_t$ através da relação:

$$d\Omega_t = J d\Omega_0 \quad (1.11)$$

onde $J = \det \mathbf{F}$ é o Jacobiano da deformação.

Transporte de superfície. Considere uma superfície material dA , orientada pelo vetor unitário normal \mathbf{N} . Ao longo da deformação dA se transforma na superfície material da , orientada pelo vetor normal \mathbf{n} . Como os vetores \mathbf{N} e \mathbf{n} não são vetores materiais, eles não sofrem deformação. Seja \mathbf{U} qualquer vetor material na configuração inicial. O cilindro material de volume inicial $\mathbf{N} \cdot \mathbf{U} dA$ se transforma no cilindro material de volume $\mathbf{n} \cdot \mathbf{F} \cdot \mathbf{U} da$ (VER FIGURA 1.3). Conforme (1.11) pode-se escrever:

$$\mathbf{n} \cdot \mathbf{F} \cdot \mathbf{U} da = J \mathbf{N} \cdot \mathbf{U} dA \quad (1.12)$$

Como (1.12) vale qualquer que seja o vetor \mathbf{U} , derivamos:

$$\mathbf{n}da = J'\mathbf{F} \cdot \mathbf{N}dA; \quad n_ida = J \frac{\partial X_j}{\partial x_i} N_j dA \quad (1.13)$$

Seja \mathbf{v} qualquer vetor ligado à configuração atual e seja \mathbf{V} o vetor associado ligado a configuração inicial e definido de tal forma que o fluxo de \mathbf{v} através de da coincide com o fluxo de \mathbf{V} através de dA . Nós escrevemos:

$$\mathbf{v} \cdot \mathbf{n}da = \mathbf{V} \cdot \mathbf{N}dA; \quad v_in_ida = J V_i \frac{\partial X_j}{\partial x_i} N_j dA \quad (1.14)$$

De (1.13) e (1.14) derivamos ²:

$$\mathbf{V} = J\mathbf{F}^{-1} \cdot \mathbf{v}; \quad V_i = J \frac{\partial X_i}{\partial x_j} v_j \quad (1.15)$$

Integrando (1.14) no volume Ω_0 e Ω_t na deformação, seguida pelo uso do Teorema da Divergência e da relação (1.11) tem-se a seguinte identidade útil ³:

$$\nabla_x \cdot \mathbf{v} d\Omega_t = \nabla_X \cdot \mathbf{V} d\Omega_0; \quad J \frac{\partial v_i}{\partial x_i} = \frac{\partial V_i}{\partial X_i} \quad (1.16)$$

1.2.2 Porosidades Euleriana e Lagrangeana. Razão de Vazios

Seja n a **porosidade Euleriana**, de modo que o fluído ocupa o volume $nd\Omega_t$ na configuração atual ⁴. Como o volume material do esqueleto $d\Omega_t$ muda através da deformação, a porosidade n não quantifica adequadamente a mudança de volume sofrida pelo espaço poroso em relação ao volume inicial $d\Omega_0$. Ao contrário da porosidade Euleriana n , que se refere ao volume atual $d\Omega_t$, a mudança no espaço poroso é eventualmente melhor capturada pela **porosidade Lagrangeana** ⁵ ϕ , que relaciona o volume poroso atual ao volume inicial $d\Omega_0$ conforme:

²N.T.: Durante essa dedução é usado a propriedade que na contração simples um tensor de primeira ordem pode ser permutado com um tensor de segunda ordem, desde que transponha o tensor de segunda ordem $\mathbf{T} \cdot \mathbf{v} = \mathbf{v} \cdot {}^t\mathbf{T}$:

$$\mathbf{v} \cdot \mathbf{n}da = \mathbf{v} \cdot J'\mathbf{F}^{-1} \cdot \mathbf{N}dA = \mathbf{V} \cdot \mathbf{N}dA \iff \mathbf{V} = \mathbf{v} \cdot J'\mathbf{F}^{-1} \therefore \mathbf{V} = J\mathbf{F}^{-1} \cdot \mathbf{v}$$

³N.T.: A dedução dessa expressão:

$$\mathbf{v} \cdot \mathbf{n}da = \mathbf{V} \cdot \mathbf{N}dA$$

$$\int_{\partial\Omega_t} \mathbf{v} \cdot \mathbf{n}da = \int_{\partial\Omega_0} \mathbf{V} \cdot \mathbf{N}dA$$

Usando o Teorema da Divergência a expressão anterior:

$$\int_{\Omega_t} \nabla_x \cdot \mathbf{v} d\Omega_t = \int_{\Omega_0} \nabla_X \cdot \mathbf{V} d\Omega_0 \iff \nabla_x \cdot \mathbf{v} d\Omega_t = \nabla_X \cdot \mathbf{V} d\Omega_0 \therefore J\nabla_x \cdot \mathbf{v} = \nabla_X \cdot \mathbf{V}$$

⁴N.T.: A porosidade Euleriana pode ser escrita da seguinte forma:

$$n = \frac{\text{Volume poroso atual}}{\text{Volume do esqueleto atual}} = \frac{nd\Omega_t}{d\Omega_t}$$

⁵N.T.: A definição da porosidade Lagrangeana leva a dedução da relação (1.17):

$$\phi = \frac{\text{Volume poroso atual}}{\text{Volume do esqueleto inicial}} = \frac{nd\Omega_t}{d\Omega_0} \therefore \phi d\Omega_0 = nd\Omega_t \therefore \phi = n \frac{d\Omega_t}{d\Omega_0} \therefore \phi = Jn$$

$$\phi d\Omega_0 = nd\Omega_t; \quad \phi = Jn \quad (1.17)$$

Por sua vez, o atual grau de compacidade de um material poroso é bem capturado pela **razão de vazios** definida como a razão entre o volume poroso atual e o volume atual da matriz. Devido à sua definição, a razão de vazios e é uma variável Euleriana, sem contraparte Lagrangeana, e é expresso em função de n na forma ⁶:

$$e = \frac{n}{1-n} \quad (1.18)$$

1.2.3 Tensor de Deformações

Deformação induz mudanças nos comprimentos dos vetores materiais e nos ângulos entre eles. O tensor de deformações de Green-Lagrange $\mathbf{\Delta}$ mede essas mudanças quantificando a variação do produto escalar entre dois vetores materiais $d\mathbf{X}$ e $d\mathbf{Y}$ com relação aos mesmos deformados $d\mathbf{x}$ e $d\mathbf{y}$. Nós escrevemos ⁷:

$$d\mathbf{x} = \mathbf{F} \cdot d\mathbf{X}; \quad d\mathbf{y} = \mathbf{F} \cdot d\mathbf{Y}; \quad d\mathbf{x} \cdot d\mathbf{y} - d\mathbf{X} \cdot d\mathbf{Y} = 2d\mathbf{X} \cdot \mathbf{\Delta} \cdot d\mathbf{Y} \quad (1.19)$$

Com a ajuda de (1.5) pode-se escrever como uma função do gradiente de deformações conforme ⁸:

$$\mathbf{\Delta} = \frac{1}{2}({}^t\mathbf{F} \cdot \mathbf{F} - \mathbf{1}) \quad (1.20)$$

Sendo simétrico, o tensor $\mathbf{\Delta}$ admite três autovalores reais $\Delta_J (J = I, II, III)$. Esses últimos são as deformações principais e estão associados com os autovetores $\mathbf{e}_J (J = I, II, III)$, que são as direções principais das deformações principais de modo que $\mathbf{\Delta} \cdot \mathbf{e}_J = \Delta_J \mathbf{e}_J$. A ortogonalidade das direções principais, escrita $\mathbf{e}_I \cdot \mathbf{e}_J = 0$, é preservada na deformação. De fato:

$$(\mathbf{e}_I \cdot {}^t\mathbf{F}) \cdot (\mathbf{F} \cdot \mathbf{e}_J) = 2\mathbf{e}_I \cdot \mathbf{\Delta} \cdot \mathbf{e}_J = 2\Delta_I \text{ ou } J\mathbf{e}_I \cdot \mathbf{e}_J = 0 \quad (1.21)$$

O gradiente \mathbf{R} da rotação que rigidamente transporta o conjunto de direções principais ortogonais \mathbf{e}_J para sua direção final é uma isometria de modo que o tensor de deformações é nulo,

⁶N.T.:

$$e = \frac{\text{Volume poroso atual}}{\text{Volume da matriz}} = \frac{nd\Omega_t}{d\Omega_t - nd\Omega_t} = \frac{n}{1-n}$$

⁷N.T.:

$$\begin{aligned} d\mathbf{x} \cdot d\mathbf{y} - d\mathbf{X} \cdot d\mathbf{Y} &= (\mathbf{F} \cdot d\mathbf{X}) \cdot (\mathbf{F} \cdot d\mathbf{Y}) - d\mathbf{X} \cdot d\mathbf{Y} \\ &= (d\mathbf{X} \cdot {}^t\mathbf{F}) \cdot (\mathbf{F} \cdot d\mathbf{Y}) - d\mathbf{X} \cdot d\mathbf{Y} \\ &= d\mathbf{X} \cdot ({}^t\mathbf{F} \cdot \mathbf{F} \cdot d\mathbf{Y} - d\mathbf{Y}) \\ &= d\mathbf{X} \cdot ({}^t\mathbf{F} \cdot \mathbf{F} - \mathbf{1}) \cdot d\mathbf{Y} \\ &= d\mathbf{X} \cdot 2\mathbf{\Delta} \cdot d\mathbf{Y} \\ &= 2d\mathbf{X} \cdot \mathbf{\Delta} \cdot d\mathbf{Y} \end{aligned}$$

O valor de 2 é um valor arbitrário.

⁸N.T.: quando se tem ${}^t\mathbf{F} \cdot \mathbf{F} = \mathbf{1}$ tem-se um movimento de corpo rígido (isometria). Pode transladar ou rotacionar, mas não se deforma. Uma rotação pura ainda adiciona a seguinte condição: $\det \mathbf{F} = 1$

resultando em ${}^t\mathbf{R} = \mathbf{R}^{-1}$. Portanto, o gradiente \mathbf{F} de qualquer transformação pode ser decomposto como:

$$\mathbf{F} = \mathbf{D} \cdot \mathbf{R} \quad (1.22)$$

que é a rotação \mathbf{R} seguida pela deformação atual \mathbf{D} , esta última envolvendo nenhuma rotação e correspondendo à dilatação das direções principais de deformação. Equivalentemente, o gradiente \mathbf{F} pode se decompor como a atual deformação \mathbf{D}' correspondente à dilatação, seguido por uma rotação \mathbf{R}' relativo aos autovetores. Assim, o tensor de deformações Δ leva em conta inteiramente a deformação atual, uma vez que ⁹:

$$\Delta = \frac{1}{2}(\mathbf{D}^2 - \mathbf{1}) \quad (1.23)$$

Por meio de (1.8) Δ pode finalmente ser expresso como uma função do vetor de deslocamentos ξ , conforme ¹⁰:

$$\Delta = \frac{1}{2}(\nabla_X \xi + {}^t\nabla_X \xi + {}^t\nabla_X \xi \cdot \nabla_X \xi); \quad \Delta_{ij} = \frac{1}{2} \left(\frac{\partial \xi_i}{\partial X_j} + \frac{\partial \xi_j}{\partial X_i} + \frac{\partial \xi_k}{\partial X_i} \frac{\partial \xi_k}{\partial X_j} \right) \quad (1.24)$$

1.2.4 Transformações infinitesimais e linearização do tensor de deformações

Em muitos problemas uma aproximação de primeira ordem da teoria finita pode ser feita sobre condições de transformações infinitesimais, ou seja:

$$\|\nabla \xi\| \ll 1 \quad (1.25)$$

onde a norma $\|(\cdot)\|$ de (\cdot) não foi especificada devido à equivalência de todas as normas no espaço vetorial de três dimensões finitas. Além disso, no que diz respeito apenas às derivações

⁹N.T.: Nessa dedução é utilizado as seguintes propriedades dos tensores de segunda ordem na contração simples: $(\mathbf{T} \cdot \mathbf{T}') = ({}^t\mathbf{T}' \cdot \mathbf{T})$ e $(\mathbf{T} \cdot \mathbf{T}') = ({}^t\mathbf{T}' \cdot {}^t\mathbf{T})$. Além disso, devido a ortogonalidade da matriz de rotação tem-se $\mathbf{R} \cdot {}^t\mathbf{R} = {}^t\mathbf{R} \cdot \mathbf{R} = \mathbf{1}$ de modo que:

$$\begin{aligned} \Delta &= \frac{1}{2}({}^t\mathbf{F} \cdot \mathbf{F} - \mathbf{1}) \\ &= \frac{1}{2}({}^t\mathbf{R} \cdot {}^t\mathbf{D} \cdot \mathbf{D} \cdot \mathbf{R} - \mathbf{1}) \\ &= \frac{1}{2}(\mathbf{D} \cdot \mathbf{R}' \cdot {}^t\mathbf{R} \cdot \mathbf{D} - \mathbf{1}) \\ &= \frac{1}{2}(\mathbf{D} \cdot \mathbf{1} \cdot \mathbf{D} - \mathbf{1}) \\ &= \frac{1}{2}(\mathbf{D}^2 - \mathbf{1}) \end{aligned}$$

¹⁰N.T.: Nessa dedução utiliza-se a propriedade distributiva da contração simples.

$$\begin{aligned} \Delta &= \frac{1}{2}({}^t\mathbf{F} \cdot \mathbf{F} - \mathbf{1}) \\ \Delta &= \frac{1}{2}[(\mathbf{1} + {}^t\nabla_X \xi) \cdot (\mathbf{1} + \nabla_X \xi) - \mathbf{1}] \\ \Delta &= \frac{1}{2}[\mathbf{1} + \nabla_X \xi + {}^t\nabla_X \xi + {}^t\nabla_X \xi \cdot \nabla_X \xi - \mathbf{1}] = \frac{1}{2}(\nabla_X \xi + {}^t\nabla_X \xi + {}^t\nabla_X \xi \cdot \nabla_X \xi) \end{aligned}$$

espaciais, no limite da transformação infinitesimal as configurações atual e inicial se fundem e o operador nabla ∇ pode ser usado sem a necessidade de um subscrito referindo-se a uma configuração particular, ou seja $\nabla = \nabla_X \equiv \nabla_x$.

Sobre a condição de (1.25) o tensor de deformações de Green-Lagrange Δ se reduz ao tensor de deformações linearizado ϵ :

$$\Delta \simeq \epsilon = \frac{1}{2}(\nabla \xi + {}^t \nabla \xi); \quad \epsilon_{ij} = \frac{\partial \xi_i}{\partial x_j} + \frac{\partial \xi_j}{\partial x_i} \quad (1.26)$$

Uma vez que Δ tem a mesma ordem de magnitude que $\nabla_X \xi$, a transformação infinitesimal implica deformação infinitesimal, ou seja $\|\Delta\| \ll 1$. Porém, a deformação pode ser infinitesimal enquanto que a transformação não é. Por exemplo, no movimento de corpo rígido Δ é nulo enquanto que $\nabla_X \xi$ pode ter qualquer ordem de magnitude.

Sobre a aproximação das transformações infinitesimais, (1.8) fornece ¹¹:

$$(J = \det \mathbf{F}) \simeq \left(1 + \nabla \cdot \xi = 1 + \frac{\partial \xi_i}{\partial x_i} = 1 + \epsilon_{ii} \right) \quad (1.27)$$

De agora em diante, seja ϵ a dilatação volumétrica linearizada do esqueleto, ou seja:

$$\epsilon = \epsilon_{ii} = \nabla \cdot \xi \quad (1.28)$$

de modo que (1.11) toma a forma de:

$$d\Omega_t \simeq (1 + \epsilon) d\Omega_0 \quad (1.29)$$

A dilatação volumétrica macroscópica observável sofrida pelo esqueleto se deve tanto à mudança de porosidade e a dilatação ϵ_s sofrida pela matriz sólida, embora esta última não seja acessível a partir de experimentos puramente macroscópicos. Analogamente a (1.29) a definição de ϵ_s nos permite escrever:

$$d\Omega_t^s = (1 + \epsilon_s) d\Omega_0^s \quad (1.30)$$

Devido a respectiva definição da porosidade Euleriana e Lagrangiana, n e ϕ , o volume ocupado pela matriz é vinculado ao volume total através da relação:

$$d\Omega_t^s = (1 - n) d\Omega_t = d\Omega_t - \phi d\Omega_0; \quad d\Omega_0^s = (1 - \phi_0) d\Omega_0 \quad (1.31)$$

¹¹N.T.: Ao fazer o determinante os termos multiplicativos de mais alta ordem tendem a zero:

$$\det(\mathbf{F}) = \det(\mathbf{1} + \nabla_X \xi) = \begin{vmatrix} 1 + \frac{\partial \epsilon_1}{\partial x_1} & \frac{\partial \epsilon_1}{\partial x_2} & \frac{\partial \epsilon_1}{\partial x_3} \\ \frac{\partial \epsilon_2}{\partial x_1} & 1 + \frac{\partial \epsilon_2}{\partial x_2} & \frac{\partial \epsilon_2}{\partial x_3} \\ \frac{\partial \epsilon_3}{\partial x_1} & \frac{\partial \epsilon_3}{\partial x_2} & 1 + \frac{\partial \epsilon_3}{\partial x_3} \end{vmatrix} = 1 + \frac{\partial \epsilon_1}{\partial x_1} + \frac{\partial \epsilon_2}{\partial x_2} + \frac{\partial \epsilon_3}{\partial x_3} = 1 + \text{tr}(\epsilon) = 1 + \nabla \cdot \xi$$

Combinando as equações acima, nós finalmente derivamos o balanço de volume ¹²:

$$\varepsilon = (1 - \phi_0)\varepsilon_s + \phi - \phi_0 \quad (1.32)$$

Na ausência de porosidade oclusa, os grãos do sólido que formam a matriz sofrem mudanças de volumes desprezíveis de modo que a matriz pode ser considerada incompressível. Assim fazemos $\varepsilon_s = 0$ em (1.32), obtendo:

$$\varepsilon = \phi - \phi_0 \quad (1.33)$$

Como geralmente é feito na mecânica dos solos, pode ser mais conveniente usar a razão de vazios em vez da dilatação volumétrica. Combinando (1.17), (1.18) e (1.34) obtemos ¹³:

$$\varepsilon = \frac{e - e_0}{1 + e_0} \quad (1.34)$$

Sobre a aproximação das transformações infinitesimais, o termo da diagonal ε_{ii} (sem somatório) é igual a dilatação linear na direção \mathbf{e}_i , enquanto que o termo duplo fora da diagonal, $\gamma_{ij} = 2\varepsilon_{ij}$ ($i \neq j$), é igual a distorção relacionada com as direções \mathbf{e}_i e \mathbf{e}_j que estavam normais antes da deformação.

1.3 Cinemática

A descrição da deformação do esqueleto por meio do gradiente de deformação \mathbf{F} é por natureza uma descrição Lagrangiana. Os campos são funções do tempo t e do vetor posição \mathbf{X} localizando a partícula do esqueleto na configuração inicial. A posição não varia com o tempo e a cinemática do esqueleto resulta de uma simples derivação.

Em contraste a abordagem Lagrangeana, a abordagem Euleriana envolve apenas a configuração atual, sem referência a qualquer configuração inicial. A abordagem é feita usando o campo de velocidades $\mathbf{V}^\pi(\mathbf{x}, t)$ da partícula coincidindo no tempo t com a geometria do ponto localizado em \mathbf{x} . A partícula pode ser uma partícula de esqueleto, $\pi = s$, ou uma partícula de fluido, $\pi = f$ ¹⁴. No tempo t , a mesma abordagem Euleriana se aplica a ambas as partículas, pois o esqueleto contínuo e o fluido contínuo se fundem na mesma configuração atual.

1.3.1 Derivada Material

Definição

A derivada material $d^\pi \mathcal{G}/dt$ com relação a partícula π ($= s$ ou f) de algum campo \mathcal{G} é a derivada temporal de G que um observador ligado a partícula derivaria. Este observador registra

¹²N.T.: dedução:

Iguando (1.30) e (1.31): $(1 + \varepsilon_s)d\Omega_0^s = d\Omega_t - \phi d\Omega_0$.

Colocando $d\Omega_0^s$ de (1.31): $(1 + \varepsilon_s)(1 - \phi_0)d\Omega_0 = d\Omega_t - \phi d\Omega_0$.

Dividindo ambos lados da igualdade por $d\Omega_0$: $(1 + \varepsilon_s)(1 - \phi_0) = \frac{d\Omega_t}{d\Omega_0} - \phi$.

Colocando $\frac{d\Omega_t}{d\Omega_0}$ de (1.29) tem-se: $(1 + \varepsilon_s)(1 - \phi_0) = 1 + \varepsilon - \phi$ que rearranjando leva a: $\varepsilon = (1 - \phi_0)\varepsilon_s + \phi - \phi_0$

¹³N.T.: tem-se que:

$$\phi = \frac{e}{1 + e_0}; \quad \phi_0 = \frac{e_0}{1 + e_0}$$

¹⁴Teria sido mais rigoroso fazer uma distinção entre o índice referente ao assunto na escala macroscópica (por exemplo, sk para a partícula do esqueleto e fl para a partícula de fluido) e o índice referindo a matéria na mesoescala (por exemplo, s para a matriz sólida, como em (1.32), e f para o fluido). Contudo, por uma questão de simplicidade da notação, optamos por não fazer essa distinção

a variação $d^\pi \mathcal{G}$ da quantidade \mathcal{G} entre os tempos t e $t + dt$. Por exemplo, sendo a origem de coordenadas fixa, o campo de velocidades $\mathbf{V}^\pi(\mathbf{x}, t)$ da partícula π localizada a \mathbf{x} se lê:

$$\frac{d^\pi \mathbf{x}}{dt} = \mathbf{V}^\pi(\mathbf{x}, t); \quad \pi = s \text{ ou } f \quad (1.35)$$

Derivada material de um vetor material

A definição (1.35) nos permite escrever a derivada material de um vetor material $d\mathbf{x}$ na forma:

$$\frac{d^\pi}{dt}(d\mathbf{x}) = \frac{d^\pi}{dt}[(\mathbf{x} + d\mathbf{x}) - \mathbf{x}] = \mathbf{V}^\pi(\mathbf{x} + d\mathbf{x}, t) - \mathbf{V}^\pi(\mathbf{x}, t) \quad (1.36)$$

de modo que:

$$\frac{d^\pi}{dt}(d\mathbf{x}) = \nabla_x \mathbf{V}^\pi \cdot d\mathbf{x}; \quad (\nabla_x \mathbf{V}^\pi)_{ij} = \frac{\partial V_i^\pi}{\partial x_j}; \quad \pi = s \text{ ou } f \quad (1.37)$$

Derivada material de um volume material

Iniciando de (1.9) nós podemos expressar a derivada material de um volume material $d\Omega_t$ na forma:

$$\frac{d^\pi}{dt}(d\Omega_t) = \frac{d^\pi}{dt}(d\mathbf{x}_1, d\mathbf{x}_2, d\mathbf{x}_3) = \frac{d^\pi}{dt}(d\mathbf{x}_1 \cdot (d\mathbf{x}_2 \times d\mathbf{x}_3)) \quad (1.38)$$

A linearidade do produto composto $(\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2, \mathbf{v}_3)$ com respeito aos vetores $\mathbf{v}_{i=1,2,3}$ nos permite escrever:

$$\frac{d^\pi}{dt}(d\Omega_t) = \left(\frac{d^\pi}{dt}(d\mathbf{x}_1), d\mathbf{x}_2, d\mathbf{x}_3 \right) + \left(d\mathbf{x}_1, \frac{d^\pi}{dt}(d\mathbf{x}_2), d\mathbf{x}_3 \right) + \left(d\mathbf{x}_1, d\mathbf{x}_2, \frac{d^\pi}{dt}(d\mathbf{x}_3) \right) \quad (1.39)$$

Usando (??) obtém-se:

$$\frac{d^\pi}{dt}(d\Omega_t) = \left(\frac{\partial V_i^\pi}{\partial x_1} \mathbf{e}_i dx_1, d\mathbf{x}_2, d\mathbf{x}_3 \right) + \left(d\mathbf{x}_1, \frac{\partial V_i^\pi}{\partial x_2} \mathbf{e}_i dx_2, d\mathbf{x}_3 \right) + \left(d\mathbf{x}_1, d\mathbf{x}_2, \frac{\partial V_i^\pi}{\partial x_3} \mathbf{e}_i dx_3 \right) \quad (1.40)$$

O produto $(\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2, \mathbf{v}_3)$ é zero assim que dois vetores entre os vetores $\mathbf{v}_{i=1,2,3}$ são colineares. Portanto:

$$\frac{d^\pi}{dt}(d\Omega_t) = \left(\frac{\partial V_1^\pi}{\partial x_1}, \frac{\partial V_2^\pi}{\partial x_2}, \frac{\partial V_3^\pi}{\partial x_3} \right) (d\mathbf{x}_1, d\mathbf{x}_2, d\mathbf{x}_3) \quad (1.41)$$

ou equivalentemente:

$$\frac{d^\pi}{dt}(d\Omega_t) = (\nabla_x \cdot \mathbf{V}^\pi) d\Omega_t; \quad \pi = s \text{ ou } f \quad (1.42)$$

Derivada material de um campo

A derivada material $d^\pi \mathcal{G}/dt$ com respeito a partícula $\pi (= s \text{ ou } f)$ do campo $\mathcal{G}(\mathbf{x}, t)$ vem a ser a derivada de tempo de \mathcal{G} ao deixar \mathbf{x} coincidir com as sucessivas posições $\mathbf{x}^\pi(t)$ ocupadas pela partícula. Nós escrevemos:

$$\frac{d^\pi \mathcal{G}}{dt} = \frac{\partial \mathcal{G}}{\partial t} + (\nabla_x \mathcal{G} \cdot \mathbf{V}^\pi) \quad (1.43)$$

Por exemplo, a aceleração $\boldsymbol{\gamma}^\pi$ da partícula π é a derivada material da velocidade $\mathbf{V}^\pi(\mathbf{x}, t)$:

$$\boldsymbol{\gamma}^\pi = \frac{d^\pi \mathbf{V}^\pi}{dt} = \frac{\partial \mathbf{V}^\pi}{\partial t} + (\nabla_x \mathbf{V}^\pi) \cdot \mathbf{V}^\pi \quad (1.44)$$

Derivada material de um volume integral

A derivada material se aplica à integral de volume de qualquer quantidade \mathcal{G} conforme:

$$\frac{d^\pi}{dt} \int_{\Omega_t} \mathcal{G} d\Omega_t = \int_{\Omega_t} \frac{d^\pi}{dt} (\mathcal{G} d\Omega_t) \quad (1.45)$$

Com o uso de (1.42) e (1.43) nos permite reescrever (1.45) na forma:

$$\frac{d^\pi}{dt} \int_{\Omega_t} \mathcal{G} d\Omega_t = \int_{\Omega_t} \left(\frac{d^\pi \mathcal{G}}{dt} + \mathcal{G} \nabla_x \cdot \mathbf{V}^\pi \right) d\Omega_t \quad (1.46)$$

ou, equivalentemente:

$$\frac{d^\pi}{dt} \int_{\Omega_t} \mathcal{G} d\Omega_t = \int_{\Omega_t} \left(\frac{d^\pi \mathcal{G}}{dt} + \nabla_x \cdot (\mathcal{G} \mathbf{V}^\pi) \right) d\Omega_t \quad (1.47)$$

Usando o teorema da divergência finalmente tem-se a expressão alternativa:

$$\frac{d^\pi}{dt} \int_{\Omega_t} \mathcal{G} d\Omega_t = \int_{\Omega_t} \frac{d^\pi \mathcal{G}}{dt} d\Omega_t + \int_{\partial \Omega_t} \mathcal{G} \mathbf{V}^\pi \cdot \mathbf{n} da \quad (1.48)$$

em que $\partial \Omega_t$ é a borda do volume Ω_t enquanto que \mathbf{n} é o vetor normal que aponta para fora da superfície da .

1.3.2 Taxa de deformação

A derivada material permite a descrição Euleriana da cinemática da deformação que se refere apenas a configuração atual. A taxa do tensor de deformações Euleriana é definida pela relação:

$$\frac{d^\pi}{dt} (d\mathbf{x} \cdot d\mathbf{y}) = 2d\mathbf{x} \cdot \mathbf{d}^\pi \cdot d\mathbf{y} \quad (1.49)$$

em que $d\mathbf{x}$ e $d\mathbf{y}$ são quaisquer vetores materiais do esqueleto ($\pi = s$) ou do fluido ($\pi = f$). Usando de (1.37) em (1.49) tem-se:

$$\mathbf{d}^\pi = \frac{1}{2} (\nabla_x \mathbf{V}^\pi + {}^t \nabla_x \mathbf{V}^\pi); \quad d_{ij}^\pi = \frac{1}{2} \left(\frac{\partial V_i}{\partial x_j} + \frac{\partial V_j}{\partial x_i} \right) \quad (1.50)$$

A definição (1.50) de \mathbf{d}^π nos permite decompor a deformação cinemática do vator material $d\mathbf{x}$ na forma:

$$\frac{d^\pi}{dt}(d\mathbf{x}) = \boldsymbol{\Omega}^\pi \cdot d\mathbf{x} + d^\pi \cdot d\mathbf{x}; \quad \Omega_{ij}^\pi = \frac{1}{2} \left(\frac{\partial V_i^\pi}{\partial x_j} - \frac{\partial V_j^\pi}{\partial x_i} \right) \quad (1.51)$$

onde o $\boldsymbol{\Omega}^\pi$ é o tensor da taxa de rotação ligada a parte antissimétrica de $\nabla_x \mathbf{V}^\pi$:

$$\boldsymbol{\Omega}^\pi = \frac{1}{2} (\nabla_x \mathbf{V}^\pi - {}^t \nabla_x \mathbf{V}^\pi); \quad \Omega_{ij}^\pi = \frac{1}{2} \left(\frac{\partial V_i}{\partial x_j} - \frac{\partial V_j}{\partial x_i} \right) \quad (1.52)$$

O termo $\boldsymbol{\Omega}^\pi \cdot d\mathbf{x}$ em (1.51) não gera taxa de deformação uma vez que leva em conta a rotação infinitesimal do vetor material $d\mathbf{x}$ conforme:

$$\boldsymbol{\Omega}^\pi \cdot d\mathbf{x} = 2\boldsymbol{\omega}^\pi \times d\mathbf{x} \quad (1.53)$$

onde $\boldsymbol{\omega}^\pi$ é o vetor vorticidade:

$$\boldsymbol{\omega}^\pi = \nabla_x \times \mathbf{V}^\pi \quad (1.54)$$

A decomposição Euleriana (1.51) da cinemática da deformação deve ser comparada com a decomposição Lagrangeana (1.22) da deformação.

Em contraste com a abordagem Euleriana para a cinemática da deformação do esqueleto, a abordagem Lagrangeana consiste em derivar (1.19) em relação ao tempo ¹⁵:

$$\frac{d^s}{dt}(d\mathbf{x} \cdot d\mathbf{y}) = 2d\mathbf{X} \cdot \frac{d\boldsymbol{\Delta}}{dt} \cdot d\mathbf{Y} \quad (1.55)$$

Usando a formula de transporte $d\mathbf{x} = \mathbf{F} \cdot d\mathbf{X}$ e $d\mathbf{y} = \mathbf{F} \cdot d\mathbf{Y}$, a comparação entre (1.49) para $\pi = s$ e (1.55) leva a seguinte fórmula de transporte:

$$d^s = {}^t \mathbf{F}^{-1} \cdot \frac{d\boldsymbol{\Delta}}{dt} \cdot \mathbf{F}^{-1}; \quad d_{ij}^s = \frac{\partial X_k}{\partial x_i} \frac{d\Delta_{kl}}{dt} \frac{\partial X_l}{\partial x_j} \quad (1.56)$$

De acordo com (1.26) e (1.56), a aproximação da transformação infinitesimal leva a considerar $d^s \simeq d\boldsymbol{\varepsilon}/dt$

1.4 Balanço de Massa

1.4.0.1 Subsubsection Title

Maecenas consectetur metus at tellus finibus condimentum. Proin arcu lectus, ultrices non tincidunt et, tincidunt ut quam. Integer luctus posuere est, non maximus ante dignissim quis. Nunc a cursus erat. Curabitur suscipit nibh in tincidunt sagittis. Nam malesuada vestibulum quam id gravida. Proin ut dapibus velit. Vestibulum eget quam quis ipsum semper convallis. Duis consectetur nibh ac diam dignissim, id condimentum enim dictum. Nam aliquet ligula eu magna pellentesque, nec sagittis leo lobortis. Aenean tincidunt dignissim egetas. Morbi efficitur risus ante, id tincidunt odio pulvinar vitae.

¹⁵Ao tomar a derivada material do esqueleto das quantidades Lagrangeanas, como por exemplo, $d\boldsymbol{\Delta}/dt$, vamos adotar uma notação padrão de derivada no tempo, como por exemplo, $d\boldsymbol{\Delta}/dt$ em (1.55). De fato, não há ambiguidade uma vez que $\boldsymbol{\Delta} = \boldsymbol{\Delta}(\mathbf{X}, t)$. Além disso, a derivada material com respeito ao fluído de uma quantidade Lagrangeana geralmente não apresenta qualquer interesse físico

Paragraph Title Nullam mollis tellus lorem, sed congue ipsum euismod a. Donec pulvinar neque sed ligula ornare sodales. Nulla sagittis vel lectus nec laoreet. Nulla volutpat malesuada turpis at ultricies. Ut luctus velit odio, sagittis volutpat erat aliquet vel. Donec ac neque eget neque volutpat mollis. Vestibulum viverra ligula et sapien bibendum, vel vulputate ex euismod. Curabitur nec velit velit. Aliquam vulputate lorem elit, id tempus nisl finibus sit amet. Curabitur ex turpis, consequat at lectus id, imperdiet molestie augue. Curabitur eu eros molestie purus commodo hendrerit. Quisque auctor ipsum nec mauris malesuada, non fringilla nibh viverra. Quisque gravida, metus quis semper pulvinar, dolor nisl suscipit leo, vestibulum volutpat ante justo ultrices diam. Sed id facilisis turpis, et aliquet eros.

In malesuada ullamcorper urna, sed dapibus diam sollicitudin non. Donec elit odio, accumsan ac nisl a, tempor imperdiet eros. Donec porta tortor eu risus consequat, a pharetra tortor tristique. Morbi sit amet laoreet erat. Morbi et luctus diam, quis porta ipsum. Quisque libero dolor, suscipit id facilisis eget, sodales volutpat dolor. Nullam vulputate interdum aliquam. Mauris id convallis erat, ut vehicula neque. Sed auctor nibh et elit fringilla, nec ultricies dui sollicitudin. Vestibulum vestibulum luctus metus venenatis facilisis. Suspendisse iaculis augue at vehicula ornare. Sed vel eros ut velit fermentum porttitor sed sed massa. Fusce venenatis, metus a rutrum sagittis, enim ex maximus velit, id semper nisi velit eu purus.

Unnumbered Section

Unnumbered Subsection

Unnumbered Subsubsection



2. In-text Element Examples

2.1 Referencing Publications

This statement requires citation [Smith:2022jd]; this one is more specific [Smith:2021qr].

2.2 Link Examples

This is a URL link: [LaTeX Templates](#). This is an email link: example@example.com. This is a monospaced URL link: `https://www.LaTeXTemplates.com`.

2.3 Lists

Lists are useful to present information in a concise and/or ordered way.

2.3.1 Numbered List

1. First numbered item
 - a. First indented numbered item
 - b. Second indented numbered item
 - i. First second-level indented numbered item
2. Second numbered item
3. Third numbered item

2.3.2 Bullet Point List

- First bullet point item
 - First indented bullet point item
 - Second indented bullet point item
 - First second-level indented bullet point item
- Second bullet point item
- Third bullet point item

2.3.3 Descriptions and Definitions

Name Description

Word Definition

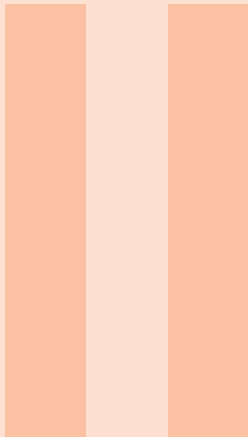
Comment Elaboration

2.4 International Support

àáâãäåæéêëìíîïðóôõöøùúûüýÿñçšž
 ÀÁÂÃÄÅÆÈÉÊËÌÍÎÏÐÓÔÕÖØÙÚÛÜÝŸÑ
 ßÇÈÆČŠŽ

2.5 Ligatures

fi fj fl ffi Ty



Part Two Title

3	Mathematics	27
3.1	Theorems	27
3.2	Definitions	27
3.3	Notations	27
3.4	Remarks	28
3.5	Corollaries	28
3.6	Propositions	28
3.7	Examples	28
3.8	Exercises	28
3.9	Problems	29
3.10	Vocabulary	29
4	Presenting Information and Results with a Long Chapter Title	31
4.1	Table	31
4.2	Figure	31

3. Mathematics

3.1 Theorems

3.1.1 Several equations

This is a theorem consisting of several equations.

Theorem 3.1 — Name of the theorem. In $E = \mathbb{R}^n$ all norms are equivalent. It has the properties:

$$||\mathbf{x}|| - ||\mathbf{y}|| \leq ||\mathbf{x} - \mathbf{y}|| \quad (3.1)$$

$$||\sum_{i=1}^n \mathbf{x}_i|| \leq \sum_{i=1}^n ||\mathbf{x}_i|| \quad \text{where } n \text{ is a finite integer} \quad (3.2)$$

3.1.2 Single Line

This is a theorem consisting of just one line.

Theorem 3.2 A set $\mathcal{D}(G)$ is dense in $L^2(G)$, $|\cdot|_0$.

3.2 Definitions

A definition can be mathematical or it could define a concept.

Definition 3.1 — Definition name. Given a vector space E , a norm on E is an application, denoted $||\cdot||$, E in $\mathbb{R}^+ = [0, +\infty[$ such that:

$$||\mathbf{x}|| = 0 \Rightarrow \mathbf{x} = \mathbf{0} \quad (3.3)$$

$$||\lambda \mathbf{x}|| = |\lambda| \cdot ||\mathbf{x}|| \quad (3.4)$$

$$||\mathbf{x} + \mathbf{y}|| \leq ||\mathbf{x}|| + ||\mathbf{y}|| \quad (3.5)$$

3.3 Notations

■ **Notation 3.1** Given an open subset G of \mathbb{R}^n , the set of functions φ are:

1. Bounded support G ;
2. Infinitely differentiable;

a vector space is denoted by $\mathcal{D}(G)$.

3.4 Remarks

This is an example of a remark.



The concepts presented here are now in conventional employment in mathematics. Vector spaces are taken over the field $\mathbb{K} = \mathbb{R}$, however, established properties are easily extended to $\mathbb{K} = \mathbb{C}$.

3.5 Corollaries

Corollary 3.1 — Corollary name. The concepts presented here are now in conventional employment in mathematics. Vector spaces are taken over the field $\mathbb{K} = \mathbb{R}$, however, established properties are easily extended to $\mathbb{K} = \mathbb{C}$.

3.6 Propositions

3.6.1 Several equations

Proposition 3.1 — Proposition name. It has the properties:

$$||\mathbf{x}|| - ||\mathbf{y}|| \leq ||\mathbf{x} - \mathbf{y}|| \quad (3.6)$$

$$||\sum_{i=1}^n \mathbf{x}_i|| \leq \sum_{i=1}^n ||\mathbf{x}_i|| \quad \text{where } n \text{ is a finite integer} \quad (3.7)$$

3.6.2 Single Line

Proposition 3.2 Let $f, g \in L^2(G)$; if $\forall \varphi \in \mathcal{D}(G), (f, \varphi)_0 = (g, \varphi)_0$ then $f = g$.

3.7 Examples

3.7.1 Equation Example

■ **Example 3.1** Let $G = \{x \in \mathbb{R}^2 : |x| < 3\}$ and denoted by: $x^0 = (1, 1)$; consider the function:

$$f(x) = \begin{cases} e^{|x|} & \text{si } |x - x^0| \leq 1/2 \\ 0 & \text{si } |x - x^0| > 1/2 \end{cases} \quad (3.8)$$

The function f has bounded support, we can take $A = \{x \in \mathbb{R}^2 : |x - x^0| \leq 1/2 + \varepsilon\}$ for all $\varepsilon \in]0; 5/2 - \sqrt{2}[$. ■

3.7.2 Text Example

■ **Example 3.2 — Example name.** Aliquam arcu turpis, ultrices sed luctus ac, vehicula id metus. Morbi eu feugiat velit, et tempus augue. Proin ac mattis tortor. Donec tincidunt, ante rhoncus luctus semper, arcu lorem lobortis justo, nec convallis ante quam quis lectus. Aenean tincidunt sodales massa, et hendrerit tellus mattis ac. Sed non pretium nibh. Donec cursus maximus luctus. Vivamus lobortis eros et massa porta porttitor. ■

3.8 Exercises

Exercise 3.1 This is a good place to ask a question to test learning progress or further cement ideas into students' minds. ■

3.9 Problems

Problem 3.1 What is the average airspeed velocity of an unladen swallow?

3.10 Vocabulary

Define a word to improve a students' vocabulary.

■ **Vocabulary 3.1 — Word.** Definition of word.

4. Presenting Information and Results with a Long Chapter Title

4.1 Table

Lorem ipsum dolor sit amet, consectetur adipiscing elit. Praesent porttitor arcu luctus, imperdiet urna iaculis, mattis eros. Pellentesque iaculis odio vel nisl ullamcorper, nec faucibus ipsum molestie. Sed dictum nisl non aliquet porttitor. Etiam vulputate arcu dignissim, finibus sem et, viverra nisl. Aenean luctus congue massa, ut laoreet metus ornare in. Nunc fermentum nisi imperdiet lectus tincidunt vestibulum at ac elit. Nulla mattis nisl eu malesuada suscipit.

Treatments	Response 1	Response 2
Treatment 1	0.0003262	0.562
Treatment 2	0.0015681	0.910
Treatment 3	0.0009271	0.296

Table 4.1: Table caption.

Referencing Table 4.1 in-text using its label.

4.2 Figure

Lorem ipsum dolor sit amet, consectetur adipiscing elit. Praesent porttitor arcu luctus, imperdiet urna iaculis, mattis eros. Pellentesque iaculis odio vel nisl ullamcorper, nec faucibus ipsum molestie. Sed dictum nisl non aliquet porttitor. Etiam vulputate arcu dignissim, finibus sem et, viverra nisl. Aenean luctus congue massa, ut laoreet metus ornare in. Nunc fermentum nisi imperdiet lectus tincidunt vestibulum at ac elit. Nulla mattis nisl eu malesuada suscipit.

creodocs

Figure 4.1: Figure caption.

Referencing Figure 4.1 in-text using its label.

Treatments	Response 1	Response 2
Treatment 1	0.0003262	0.562
Treatment 2	0.0015681	0.910
Treatment 3	0.0009271	0.296

Table 4.2: Floating table.

creodocs

Figure 4.2: Floating figure.

Bibliography

Articles

Books



A. Appendix Chapter Title

A.1 Appendix Section Title

Lorem ipsum dolor sit amet, consectetur adipiscing elit. Aliquam auctor mi risus, quis tempor libero hendrerit at. Duis hendrerit placerat quam et semper. Nam ultricies metus vehicula arcu viverra, vel ullamcorper justo elementum. Pellentesque vel mi ac lectus cursus posuere et nec ex. Fusce quis mauris egestas lacus commodo venenatis. Ut at arcu lectus. Donec et urna nunc. Morbi eu nisl cursus sapien eleifend tincidunt quis quis est. Donec ut orci ex. Praesent ligula enim, ullamcorper non lorem a, ultrices volutpat dolor. Nullam at imperdiet urna. Pellentesque nec velit eget est euismod pretium.



B. Appendix Chapter Title

B.1 Appendix Section Title

Lorem ipsum dolor sit amet, consectetur adipiscing elit. Aliquam auctor mi risus, quis tempor libero hendrerit at. Duis hendrerit placerat quam et semper. Nam ultricies metus vehicula arcu viverra, vel ullamcorper justo elementum. Pellentesque vel mi ac lectus cursus posuere et nec ex. Fusce quis mauris egestas lacus commodo venenatis. Ut at arcu lectus. Donec et urna nunc. Morbi eu nisl cursus sapien eleifend tincidunt quis quis est. Donec ut orci ex. Praesent ligula enim, ullamcorper non lorem a, ultrices volutpat dolor. Nullam at imperdiet urna. Pellentesque nec velit eget est euismod pretium.