

Universidade Federal do Rio Grande do Sul  
Escola de Engenharia  
Programa de Pós-Graduação em Engenharia Civil

**COMPORTAMENTO DE TÚNEIS ESCAVADOS  
EM MEIOS VISCOPLÁSTICOS COM RUPTURA  
- SIMULAÇÃO NUMÉRICA**

**Felipe Pinto da Motta Quevedo**

Porto Alegre  
2021

FELIPE PINTO DA MOTTA QUEVEDO

**COMPORTAMENTO DE TÚNEIS ESCAVADOS EM MEIOS  
VISCOPLÁSTICOS COM RUPTURA - SIMULAÇÃO  
NUMÉRICA**

Tese de Doutorado apresentada ao Programa de Pós-Graduação  
em Engenharia Civil da Universidade Federal do Rio Grande do  
Sul como parte dos requisitos para obtenção do título de Doutor  
em Engenharia.

Porto Alegre  
2021

### CIP - Catalogação na Publicação

de Tal, Fulano  
Título Completo da Dissertação ou Tese / Fulano de  
Tal. -- 201X.  
XX f.  
Orientador: Nome do Orientador.

Tese (Doutorado) -- Universidade Federal do Rio  
Grande do Sul, Escola de Engenharia, Programa de  
Pós-Graduação em Engenharia Civil, Porto Alegre,  
BR-RS, 201X.

1. palavra. 2. chave. 3. coloca. 4. aqui. I. do  
Orientador, Nome, orient. II. Título.

## **ERRATA**

**QUEVEDO, F. P. M. Comportamento de Túneis Escavados em Meios Viscoplásticos com Ruptura - Simulação Numérica.** 2021. 156p. Tese (Doutorado em Engenharia) – Programa de Pós-Graduação em Engenharia Civil, Universidade Federal do Rio Grande do Sul, Porto Alegre.

<b>Folha</b>	<b>Linha</b>	<b>Onde se lê</b>	<b>Leia-se</b>
1	10	auto-conclavo	autoconclavo

**FELIPE PINTO DA MOTTA QUEVEDO**

**COMPORTAMENTO DE TÚNEIS ESCAVADOS EM MEIOS  
VISCOPLÁSTICOS COM RUPTURA - SIMULAÇÃO  
NUMÉRICA**

Esta tese de doutorado foi julgada adequada para a obtenção do título de DOUTOR EM ENGENHARIA, na área de concentração Estruturas, e aprovada em sua forma final pelo professor orientador e pelo Programa de Pós-Graduação em Engenharia Civil da Universidade Federal do Rio Grande do Sul.

Porto Alegre, 07 de março de 2021

Prof. Samir Maghous  
Dr. pela École Nationale des Ponts et Chaussées  
Orientador

Profa. Denise Bernaud Maghous  
Dra. pela École Nationale des Ponts et  
Chaussées  
Coorientadora

Nilo Consoli  
Ph.D. pela Concordia University, Canadá  
Coordenador do PPGEC/UFRGS

**BANCA EXAMINADORA**

**Prof. Américo Campos Filho (UFRGS)**  
Dr. pela Escola Politécnica da Universidade de São Paulo

**Prof. Mauro de Vasconcellos Real (FURG)**  
Dr. pela Universidade Federal do Rio Grande do Sul

**Prof. Severino Pereira Cavalcanti Marques (UFRGS)**  
Dr. pela Universidade Federal do Rio Grande do Sul

Este trabalho é dedicado a minha mãe que foi meu principal suporte esse tempo todo.

## **AGRADECIMENTOS**

Agradeço ao Conselho Nacional de Desenvolvimento Científico Tecnológico (CNPq) pela oportunidade de estudar com bolsa durante esse doutorado, sem a qual, não seria possível minha dedicação nesse período de 4 anos.

Agradeço à UFRGS pela infraestrutura cedida, por possibilitar acesso à biblioteca e a artigos nacionais e internacionais gratuitamente, além da oportunidade de cursar esse doutorado na área de Estruturas com destacados colegas e professores.

Agradeço a todo o corpo docente e administrativo do Programa de Pós-Graduação em Engenharia Civil (PPGEC) pelo apoio e momentos de aprendizado durante esses anos todos.

Agradeço aos professores Inácio Benvegnu Morsch, Roberto Rios, Luiz Alberto Segovia e Américo Campos Filho pela força, conselhos e conversas, não só durante o doutorado, mas desde minha graduação.

Agradeço aos meus orientadores Samir Maghous e Denise Bernaud por me acolherem como orientando, me apresentarem sobre o tema, por compartilharem seu conhecimento com a paixão devida e pelo engajamento desenvolvido neste trabalho. Agradeço à vocês também a oportunidade de desenvolver meu estágio Docente.

Agradeço aos meus colegas pela companhia alegre e compartilhamento de conhecimento durante esses quatro anos: Augusto Bopsin Borges, Bárbara Chagas, Barbara Sanches, Betina Jansen, Bianca Funk, Bibiana Rossato, Bruna Spricigo, Caio..., Cássio..., Chepel, Dani Airão, Eduardo..., Eduardo Titello, Evandro..., Gabi Bianchini, Giancarlo Machado, Gustavo Ribeiro, Kellyn Pufall, Lúcia Sangali, Marcela..., Matheus Benincá, Matheus Forcelini, Matheus Wanglon, Miguelito, Paulo Baumbach, Raiza Guimarães, Rodrigo..., Rodrigo Benites Mendes, Rosi, Tonin,..

Agradeço ao suporte técnico da Engineering Simulation and Scientific Software (ESSS) pela assistência ferente às dúvidas relacionadas à utilização e customização do ANSYS.

Agradeço ao pessoal da Estádio 3, meus ex-companheiros de trabalho, não só pelo que me ensinaram, mas também pelo apoio na minha decisão de seguir esse período acadêmico na minha vida.

Agradeço aos meus amigos Rubens Salabarry e Fernanda Ribas Tweedi pela honra da companhia em momentos de tempestades.

Agradeço a minha mãe Luzia e minha irmã Rita por estarem sempre perto de mim, confiando e

incentivando os meus estudos, apesar de todas as dificuldades.

Em algum lugar, algo incrível está esperando para ser descoberto.

*Carl Sagan*

## **RESUMO**

**QUEVEDO, F. P. M. Comportamento de Túneis Escavados em Meios Viscoplásticos com Ruptura - Simulação Numérica.** 2021. 156p. Tese (Doutorado em Engenharia) – Programa de Pós-Graduação em Engenharia Civil, Universidade Federal do Rio Grande do Sul, Porto Alegre.

O projeto e verificação estrutural de túneis profundos envolvem diversos parâmetros geotécnicos bem como a necessidade de prever a convergência (fechamento) e intuir a estabilidade da seção do túnel. Contudo, o campo de deformações e tensões ao redor da cavidade depende de diversos fatores inter-relacionados, tais como, a profundidade, a geometria da seção, a anisotropia das tensões in situ, a heterogeneidade do maciço, o processo construtivo e a interação com o revestimento. Somado a essa complexidade a reologia do maciço é um fator crucial. A rigor o comportamento do maciço é composto por uma parcela instantânea (elástica ou elastoplástica) e diferida (viscosa). O objetivo principal dessa tese é formular, programar e validar, no contexto dos elementos finitos, um modelo constitutivo elastoplástico-viscoplástico geral capaz de reproduzir casos da realidade e permitir estudos sobre esse comportamento. Para a parcela instantânea serão adotados modelos elastoplásticos de Drucker-Prager e Mohr-Coulomb (bem como suas simplificações independentes da pressão, von-Mises e Tresca, respectivamente) com lei endurecimento e amolecimento multilinear governada pela variável interna coesiva. Já o comportamento diferido será estudado através de um modelo viscoplástico perfeito conforme a teoria da sobretensão de Perzyna com as mesmas superfícies da elastoplasticidade. A solução em estado plano de deformações, axissimetria e tridimensional será programada em Fortran90. O processo de escavação e colocação do revestimento é simulado através do método de ativação e desativação dos elementos finitos.

**Palavras-chave:** *túneis profundos, elastoplasticidade, viscoplasticidade, método dos elementos finitos, leis constitutivas.*

## ABSTRACT

QUEVEDO, F. P. M. **Comportamento de Túneis Escavados em Meios Viscoplásticos com Ruptura - Simulação Numérica.** 2021. 156p. Tese (Doutorado em Engenharia) – Programa de Pós-Graduação em Engenharia Civil, Universidade Federal do Rio Grande do Sul, Porto Alegre.

The design and structural verification of deep tunnels involves several geotechnical parameters as well as the need to predict convergence (closure) and intuit the stability of the tunnel section. However, the field of deformations and stresses around the cavity depends on several interrelated factors, such as depth, section geometry, in situ stress anisotropy, rockmass heterogeneity, constructive process and lining interaction. Added to this complexity the rheology of the rockmass is a crucial factor. The behavior of the rockmass is composed of an instantaneous (elastic or elastoplastic) and time dependent (viscous) portion. The main objective of this thesis is to formulate, program and validate, in the context of finite elements method, a general elastoplastic-viscoplastic constitutive model capable of reproducing cases of reality and allowing studies on this behavior. For the instantenous part will be adopted elastoplastic models fo Drucker-Prager and Mohr-Coulomb (as well as their independent pressure simplifications, von-Mises and Tresca, respectively) with multilinear law hardening/softening governed by the cohesive internal variable. The time dependent behavior will be studied through a perfect viscoplastic model according to Perzyna's overstress theory with the same surfaces of elastoplasticity. The plane deformation state, axisimmetry and three-dimensional states will be programmed in Fortran 90. The process of excavation and placement of the lining is simulated through the method of activation and deactivation of tinite elements.

**Keywords:** *deep tunnels. elastoplasticity. viscoplasticity. finite element method. constitutive laws.*

## LISTA DE FIGURAS

Figura 1.1 – Redução da seção transversal do Túnel de Base Lyon Turin na fronteira entre frança e Itália (fonte: Barla, Bonini e Debernardi (2010, p. 41)) . . . . .	33
Figura 1.2 – Ruptura do suporte (perfil de aço) em uma mina de carvão na China (fonte: Manchao et al. (2015, p. 192)) . . . . .	33
Figura 2.1 – Organograma das etapas da pesquisa . . . . .	39
Figura 3.1 – Métodos de escavação de túneis . . . . .	40
Figura 3.2 – (a) <i>Cut and Cover</i> e (b) <i>Cover and Cut</i> (adaptado de: FEDERAL HIGHWAY ADMINISTRATION (U.S.) (2009, p. 5-2)) . . . . .	41
Figura 3.3 – Etapa de execução pelo método de vala recoberta direta no projeto <i>Nordhavnsvej</i> , em Compenhague, Dinamarca (fonte: ROADTRAFFIC-TECHNOLOGY (2017, p. 1)) . . . . .	41
Figura 3.4 – Superior à esquerda: escavadeiras (fonte: Pierrat (2014, p. 1)); superior à direita: escarificador; inferior à esquerda: escavadeira rotativa (fonte: Mitterndorfer (2013, p. 1)) e inferior à direita: martelo hidráulico (fonte: WORD HIGHWAYS (2015, p. 1)) . . . . .	42
Figura 3.5 – Sequência executiva do método de construção por desmonte de rocha (adaptado de: Heinio (1999, p. 215)) . . . . .	43
Figura 3.6 – Superior à esquerda: perfuração; inferior à esquerda: instalação das cargas; à direita: frente de escavação após detonação (fonte: Grad (2013, p. 1)) . .	43
Figura 3.7 – Representação 3D de uma tuneladora (adaptado de: Chapman, Metje e Stärk (2018, p. 151)) . . . . .	44
Figura 3.8 – Ilustração do método de cravação de tubos sob um canal (adaptado de: Chapman, Metje e Stärk (2018, p. 227)) . . . . .	45
Figura 3.9 – À esquerda: vista de cima de um poço de macacos hidráulicos com a descida da TBM; à direita: vista frontal do túnel (fonte: Chapman, Metje e Stärk (2018, p. 227)) . . . . .	45

Figura 3.10 – À esquerda, simulação da falha na face de um túnel (fonte: Schofield (1980, p. 245)); à direita, o colapso progressivo da face do túnel rodoviário <i>Vadlaheidi</i> na Islândia (fonte: Reynolds (2015, p. 1)) . . . . .	46
Figura 3.11 – Ilustração do revestimento e elementos internos de um túnel rodoviário (adaptado de: DEPARTAMENTO DE ESTRADAS E RODAGEM (SÃO PAULO) (2005, p. 20)) . . . . .	47
Figura 3.12 – Ilustração de alguns elementos de pré-suporte e revestimento (adaptado de: FEDERAL HIGHWAY ADMINISTRATION (U.S.) (2009, p. 9-14)) . . . . .	48
Figura 4.1 – Ilustração do arqueamento das tensões principais (adaptado de: França (2006, p. 10-11)) . . . . .	52
Figura 4.2 – Campo vetorial de deslocamentos no maciço durante a escavação de um túnel (adaptado de: França (2006, p. 12)) . . . . .	53
Figura 4.3 – Ilustração das medidas geométricas que compõe a convergência de uma seção circular: a) corte transversal, b) corte longitudinal . . . . .	54
Figura 4.4 – Medidas da convergência em quatro direções de uma seção não circular (adaptado de: Panet (1995, p. 8)) . . . . .	54
Figura 4.5 – Perfil de convergências próximo à frente de escavação (adaptado de: Hanafy e Emery (1980) <i>apud</i> Couto (2011, p. 42)) . . . . .	55
Figura 4.6 – Número de incidentes em quatro banco de dados discriminados por autor e método de escavação (adaptado de: Špačková (2012, p. 19)) . . . . .	56
Figura 4.7 – Distribuição de incidentes de acordo com nove tipologias (adaptado de: Sousa (2010, p. 82)) . . . . .	56
Figura 4.8 – Mecanismo de ruptura por <i>Spalling</i> de um comprimento $L_s$ junto à seção do túnel: detalhamento do crescimento das fissuras e flambagem de uma profundidade $h_s$ da rocha no contorno da seção (adaptado de: Germanovich e Dyskin (2000, p. 267)) . . . . .	57
Figura 4.9 – À esquerda uma seção remanescente após moderada fragmentação e quebra em um túnel escavado com TBM e à direita uma seção em que parte do contorno apresentou instabilidade (flambagem) em um túnel escavado de forma não mecanizada (fonte: Diederichs (2007, p. 1084)) . . . . .	58

Figura 4.10 – Evolução da convergência do túnel Fréjus (adaptado de: Lunardi (1980, p. 17)) . . . . .	59
Figura 4.11 – Evolução do fechamento da seção GED (convergência) na galeria do laboratório <i>Meuse/Haute-Marne</i> (adaptado de: Guayacán-Carrillo et al. (2016, p. 103)) . . . . .	59
Figura 4.12 – Ensaio triaxial com medição da variação do volume para o caso de um maciço argiloso rígido (adaptado de: Rousset (1988, p. 35)) . . . . .	60
Figura 4.13 – Ensaio triaxial com medição da variação do volume para o caso de um maciço argiloso dúctil (adaptado de: Rousset (1988, p. 35)) . . . . .	61
Figura 4.14 – Deslocamentos e tensões no entorno de um maciço submetido à pressão geostática-hidrostática $p_\infty$ e pressão interna $p_i$ no interior da seção do túnel. À esquerda, maciço elástico e à direita, elastoplástico. . . . .	63
Figura 4.15 – Curva característica em um ensaio de fluência com os três estágios de comportamento (adaptado de: Costa (1984, p. 107)) . . . . .	64
Figura 4.16 – Ensaio triaxial de fluência da Argila de Boom (adaptado de: Rousset (1988, p. 42)) . . . . .	65
Figura 4.17 – Evolução da convergência $U$ no tempo $t$ em função do avanço da escavação $x$ (adaptado de: Panet (1995, p. 12)) . . . . .	66
Figura 4.18 – Perfil de convergências, em análises numéricas axissimétricas com maciço elástico (EL), elastoplástico (EP), viscoelástico (VE), viscoplástico com fluência no regime secundário (VP) e em regime terciário (VP3), todos na ausência de revestimento (adaptado de: Sterpi e Gioda (2009, p. 329)) . . . . .	68
Figura 4.19 – Trajetória das tensões principais e linhas de isotensão, da maior e menor tensão principal, para seção circular (à esquerda) e ferradura (à direita) em condições geostáticas hidrostáticas (adaptado de: Hoek e Brown (1980, p. 469, 484)) . . . . .	71
Figura 4.20 – a) tensões verticais e b) razão entre a tensão horizontal e vertical (coeficiente de empuxo $K$ ) (adaptado de: Hoek e Brown (1980, p. 99-100)) . . . . .	72
Figura 4.21 – Princípio para se desconsiderar a variação da tensão vertical na região próxima ao túnel (adaptado de: Benamar (1996, p. 8)) . . . . .	73

Figura 4.22 – Trajetória das tensões principais e linhas de isotensão da maior e menor tensão principal para seção circular (à esquerda) e ferradura (à direita) considerando $K = 0$ (adaptado de: Hoek e Brown (1980, p. 468,483)) . . . . .	74
Figura 4.23 – Relação entre o estado de tensões iniciais e os modos de falha, onde $q_0$ é a resistência à compressão uniaxial do maciço (adaptado de: Detournay e St. John (1988, p. 121)) . . . . .	75
Figura 4.24 – Modos de deformações em túneis superficiais de seção circular (adaptado de: Pinto e Whittle (2014, p. 4)) . . . . .	76
Figura 4.25 – Representação tridimensional da bacia de assentamento superficial durante a construção de um túnel superficial (adaptado de: Yeates e Geddes (1985) <i>apud</i> Rankin (1988, p. 80)) . . . . .	77
Figura 4.26 – Perfil idealizado de assentamento transversal com distribuição normal (adaptado de: O'Reilly e New (1982) <i>apud</i> Rankin (1988, p. 80)) . . . . .	78
Figura 4.27 – Perfil de tensões verticais e de convergências ao longo de uma linha longitudinal situada no teto do túnel (adaptado de: Eisenstein, Heinz e Negro (1984) <i>apud</i> Couto (2011, p. 41)) . . . . .	79
Figura 4.28 – Perfil de convergência em função da velocidade adimensional de avanço no final da construção do túnel (adaptado de: Bernaud (1991, p. 214)) . . . . .	80
Figura 4.29 – Perfil de convergência em função da velocidade de construção admensionalizada no final da construção do túnel (adaptado de: Bernaud (1991, p. 214)) . . . . .	80
Figura 4.30 – Método da Convergência-Confinamento (adaptado de: Bernaud, Benamar e Rousset (1994, p. 6)) . . . . .	83
Figura 4.31 – Influência da rigidez do revestimento no perfil de convergências do túnel e no parâmetro $U_0$ (adaptado de: Bernaud e Rousset (1992, p. 13)) . . . . .	84
Figura 5.1 – Subsistema material $\Omega'$ no interior de um sistema material $\Omega$ submetido a um campo de forças de corpo . . . . .	85
Figura 5.2 – Sistema material $\Omega'$ com condição de contorno $\underline{T}^d$ imposta na fronteira $S_T$	86
Figura 5.3 – Natureza Euleriana do campo de tensões . . . . .	87
Figura 5.4 – Domínio genérico plasticamente admissível $\Gamma$ no espaço das tensões principais	91

Figura 5.5 – Funções de escoamento de a) Drucker-Prager e b) Mohr-Coulomb (adaptado de: Zienkiewicz e Cormeau (1974, p. 824)) . . . . .	92
Figura 5.6 – Representação no plano desviador da aproximação da superfície de Mohr-Coulomb pela superfície de Drucker-Prager (adaptado de: de SOUZA NETO; PERI; OWEN, 2008, p. 169) . . . . .	93
Figura 5.7 – Representação no plano desviador da aproximação da superfície de Tresca pela superfície de von-Mises (adaptado de: de SOUZA NETO; PERI; OWEN, 2008, p. 159, 164) . . . . .	94
Figura 5.8 – Representação geométrica do vetor de fluxo em plasticidade associada (adaptado de: Chen e Han (1988, p. 182)) . . . . .	95
Figura 5.9 – Representação dos tipos de endurecimento no plano desviador e na curva tensão-deformação: a) elastoplasticidade perfeita, b) endurecimento isotrópico e c) endurecimento cinemático (adaptado de: de SOUZA NETO; PERI; OWEN, 2008, p. 178, 179, 186) . . . . .	97
Figura 5.10 – Função linear definida por partes para representar o endurecimento/amolecimento através do parâmetro coesivo (adaptado de: Potts e Zdravkovic (1999, p. 158))	98
Figura 5.11 – Representação reológica do modelo elastoplástico-viscoplástico (adaptado de: Rousset (1988, p. 220)) . . . . .	102
Figura 5.12 – Leis de endurecimento e amolecimento para a parcela elastoplástica (à esquerda) e viscoplástica (à direita) (adaptado de: Rousset (1988, p. 220))	103
Figura 5.13 – Domínios e superfícies do modelo elastoplástico-viscoplástico (adaptado de: Debernardi e Barla (2009, p. 263)) . . . . .	103
Figura 5.14 – Resposta do sistema a uma solicitação $\dot{\epsilon} = \text{const}$ (adaptado de: Rousset (1988, p. 221)) . . . . .	104
Figura 6.1 – Discretização de um domínio genérico em elementos finitos (adaptado de: de Souza (2003, p. 1-2)) . . . . .	107
Figura 6.2 – Diagrama de corpo livre de um elemento finito (adaptado de: Lizarza (2011, p. 19)) . . . . .	109
Figura 6.3 – Funções de interpolação, pesos e coordenadas dos pontos de Gauss para o elemento quadrilátero quadrático <i>serendipity</i> isoparamétrico (adaptado de: ANSYS Inc (2018b, p. 337, 369-370)) . . . . .	110

Figura 6.4 – Funções de interpolação, pesos e coordenadas dos pontos de Gauss para o elemento hexaedro trilinear isoparamétrico (adaptado de: ANSYS Inc (2018b, p. 345, 369-370)) . . . . .	111
Figura 6.5 – Ilustração das iterações do método de Newton-Raphson (adaptado de: Chen e Han (1988, p. 301)) . . . . .	116
Figura 6.6 – Fluxograma do método de Newton-Raphson para solução do sistema de equações globais não lineares . . . . .	118
Figura 6.7 – Ilustração do algoritmo de retorno mapeado genérico com $k$ iterações locais de Newton-Raphson: a) totalmente implícito e b) semi-implícito. . . . .	121
Figura 6.8 – Algoritmo de integração para elastoplasticidade utilizando um esquema de Euler semi-implícito a) com edurecimento e b) sem endurecimento (omitindo o índice $i+1$ ). . . . .	123
Figura 6.9 – Algoritmo de integração para viscoplasticidade utilizando um esquema de Euler semi-implícito ou totalmente explícito (quando $\theta = 0$ ) sem endurecimento/amolecimento (omitindo o índice $i+1$ ). . . . .	126
Figura 6.10 – Integração modelo acoplado a) elastoplasticidade com endurecimento b) elastoplasticidade sem endurecimento e viscoplasticidade explícita (omitiendo o índice $i+1$ ). . . . .	127
Figura 6.11 – Representação do domínio $\Omega$ a ser discretizado . . . . .	131
Figura 6.12 – Domínio, parâmetros geométricos, condições de contorno e malha para o modelo em estado plano de deformações . . . . .	132
Figura 6.13 – Domínio, parâmetros geométricos, condições de contorno e malha para o modelo tridimensional . . . . .	134
Figura 6.14 – Domínio, parâmetros geométricos, condições de contorno e malha para o modelo axissimétrico . . . . .	136

## **LISTA DE QUADROS**

## **LISTA DE TABELAS**

Tabela 6.1 – Parâmetros para a construção da malha em estado plano de deformações da Figura 6.12 . . . . .	133
Tabela 6.2 – Parâmetros adicionais a malha EPD para a malha em estado tridimensional de deformações da Figura 6.13 . . . . .	135
Tabela 6.3 – Parâmetros adicionais para a malha em estado tridimensional de deformações da Figura 6.13 . . . . .	137
Tabela 6.4 – Tamanho do sistema para cada modelo . . . . .	138

## **LISTA DE ABREVIATURAS E SIGLAS**

NATM      New Austrian Tunneling Method

abnTeX      ABsurdas Normas para TeX

## LISTA DE SÍMBOLOS

**Latino minúsculo:**

$c$	Coesão;
$c_{TR}$	Coesão considerando superfície de escoamento de Tresca;
$c_{VM}$	Coesão considerando superfície de escoamento de von-Mises;
$c_0$	Coesão residual no modelo elastoplástico;
$c_1$	Coesão para o modelo viscoplástico;
$d_0$	Distância não revestida que acompanha a frente de escavação;
$d_0^*$	Distância não revestida adimensional que acompanha a frente de escavação;
$\underline{\epsilon}$	Tensor de deformações de Green-Lagrange;
$\underline{e}_1, \underline{e}_2, \underline{e}_3$	Vetores ortonormais da base que define o espaço $\mathbb{R}^3$ ;
$f$	Função de escoamento;
$f^P$	Função de escoamento plástica;
$f^{vp}$	Função de escoamento viscoplástica;
$\underline{f}_\sigma$	Vetor de derivadas da função de escoamento com relação as tensões (notação de Voigt);
$\underline{f}_q$	Vetor de derivadas da função de escoamento com relação as forças associadas (notação de Voigt);
$f_0$	Parâmetro de tensão no modelo viscoplástico;
$\underline{f}$	Campo de acelerações referente às forças de corpo;
$g$	Função potencial;
$g^P$	Função potencial plástica;
$g^{vp}$	Função potencial viscoplástica;
$\underline{\underline{g}}_1, \underline{\underline{g}}_2, \underline{\underline{g}}_3$	Gradientes para determinar o vetor de fluxo;
$\underline{\underline{g}}_1, \underline{\underline{g}}_2, \underline{\underline{g}}_3$	Gradientes para determinar o vetor de fluxo (notação de Voigt);
$\underline{g}_\sigma$	Vetor de fluxo;

$\underline{g}_\sigma$	Vetor de fluxo (notação de Voigt);
$\underline{h}$	Vetor que contém o conjunto dos módulos de endurecimento para as forças associadas;
$h_s$	Profundidade do fenômeno de <i>Spalling</i> no perímetro do túnel;
$i$	Contador de iterações de equilíbrio;
$i_p$	Ponto de integração;
$k$	Parâmetro da superfície de Drucker-Prager;
$l_0$	Dimensão característica para hipótese das pequenas perturbações;
$n$	Parâmetro adimensional que dá a forma potencial na lei viscoplástica;
$n$	Contador de subpassos;
$n_e$	Número de elementos;
$n_p$	Número de pontos de integração;
$n_{eqit}$	Límite de iterações de equilíbrio por subpasso;
$p$	Pressão hidrostática;
$p_i$	Pressão interna no interior da seção do túnel;
$p_{lim}$	Pressão limite de plastificação do maciço;
$p_{eq}$	Pressão de equilíbrio de um túnel revestido;
$p_\infty$	Pressão geostática-hidrostática;
$p_\infty^*$	Pressão geostática-hidrostática adimensional;
$q$	Tensão equivalente de von-Mises;
$\underline{q}$	conjunto de forças termodinâmicas (escalares ou tensoriais) associadas às variáveis internas;
$q_0$	Resistência à compressão uniaxial do maciço;
$r$	Coordenada radial no plano da seção transversal do túnel;
$\underline{\underline{s}}$	Tensor de tensões desviadoras;
$t$	Tempo;

$t_p$	Tempo do passo;
$\underline{u}$	Deslocamento da partícula material;
$\underline{u}$	Vetor deslocamentos nodais;
$\underline{u}_e$	Vetor de deslocamentos nodais do elemento;
$u(r)$	Deslocamento radial em uma coordenada radial $r$ ;
$u_x$	Deslocamento na direção x;
$u_y$	Deslocamento na direção y;
$u_z$	Deslocamento na direção z;
$u_{z_{max}}$	Deslocamento máximo na direção z;
$u_\varepsilon$	Deslocamento uniforme da seção de um túnel raso;
$u_\delta$	Distorção da seção de um túnel raso;
$\Delta u_y$	Translação vertical uniforme da seção de um túnel raso;
$w$	Energia interna específica;
$\underline{x}$	Vetor posição da partícula material;
$x$	Eixo x;
$y$	Eixo y;
$z$	Eixo z;

**Latino maiúsculo:**

$\underline{\underline{A}}$	Matriz algorítmica do esquema de integração;
$\underline{\underline{B}}$	Matriz que relaciona os deslocamentos nodais com as deformações no interior do elemento;
$C_1, C_2, C_3$	Constantes para determinar o vetor de fluxo;
$D$	Diâmetro equivalente da seção do túnel;
$\underline{\underline{D}}$	Tensor constitutivo elástico de quarta ordem simétrico;
$\underline{\underline{D}}^{ep}$	Tensor constitutivo elastoplástico contínuo;
$\underline{\underline{D}}^{vp}$	Tensor constitutivo viscoplástico contínuo;

$\underline{\underline{D}}$	Tensor constitutivo (notação de Voigt);
$\underline{\underline{D}}^{alg}$	Tensor constitutivo consistente com o esquema de integração (notação de Voigt);
$\underline{\underline{D}}^e$	Tensor constitutivo elástico (notação de Voigt);
$\underline{\underline{D}}^{ep}$	Tensor constitutivo elastoplástico contínuo (notação de Voigt);
$\underline{\underline{D}}^{vp}$	Tensor constitutivo viscoplástico contínuo (notação de Voigt);
$E$	Módulo de Young;
$E^*$	Módulo de Young adimensional;
$E_h$	Módulo de deformação médio horizontal na parte superior da crosta terrestre;
$\underline{F}$	Gradiente da transformação geométrica;
$\underline{F}_{int}$	Vetor de forças internas globais;
$\underline{F}_{inte_e}$	Vetor de forças internas do elemento;
$\underline{F}_{ext}$	Vetor de forças externas globais;
$\underline{F}_{ext_e}$	Vetor de forças externas do elemento;
$\underline{F}_{\varepsilon_{0e}}$	Vetor de forças internas do elemento devido às deformações iniciais;
$\underline{F}_{\sigma_{0e}}$	Vetor de forças internas do elemento devido às tensões iniciais;
$\underline{F}_{V_e}$	Vetor de forças de volume do elemento;
$\underline{F}_{S_e}$	Vetor de forças de superfície no contorno livre do elemento;
$\underline{F}_{C_e}$	Vetor de forças de contato entre elementos vizinhos;
$\underline{F}_{N_e}$	Vetor de forças nodais do elemento;
$\underline{F}_{\varepsilon_0}$	Vetor de força interna global devido às deformações iniciais;
$\underline{F}_{\sigma_0}$	Vetor de força interna global devido às tensões iniciais;
$\underline{F}_V$	Vetor de força de volume global;
$\underline{F}_S$	Vetor de força de superfície no contorno livre global;
$\underline{F}_N$	Vetor de força nodal global;
$\underline{F}_p$	Vetor de forças do passo;

$H$	Profundidade do túnel;
$I_1, I_2, I_3$	Invariante do tensor de deformações ou do tensor de tensões;
$J_2, J_3$	Invariante do tensor de tensões desviadoras;
$J$	Jacobiano da transformação;
$\underline{J}$	Jacobiano da transformação;
$J_{i_p}$	Determinante do Jacobiano da transformação no ponto de integração $i_p$ ;
$K$	Coeficiente de empuxo do maciço;
$K_r$	Rigidez equivalente do revestimento;
$K_r^*$	Rigidez equivalente adimensional do revestimento;
$\underline{\underline{K}}_e$	Matriz de rigidez do elemento;
$\underline{\underline{K}}$	Matriz de rigidez global;
$L_s$	Comprimento de <i>Spalling</i> no perímetro de uma seção;
$\underline{\underline{L}}$	Matriz triangular inferior da fatorização de Cholesky;
$\underline{\underline{M}}$	Pré-condicionador do Método dos Gradientes Conjugados Pré-Condicionado;
$\underline{\underline{N}}$	Matriz contendo as funções de interpolação;
$P$	Pressão de confinamento em um ensaio triaxial;
$P_0$	Tensão média no interior do maciço;
$Q$	Pressão axial em um ensaio triaxial;
$R$	Raio da seção transversal do túnel;
$R^p$	Raio da zona plástica ao redor da seção do túnel;
$\underline{R}_i$	Vetor resíduo global do método de Newton-Raphson;
$S$	Superfície que atua o vetor tensão;
$S_0$	Tensão desviadora no entorno do maciço;
$S_T$	Região da superfície do domínio com condição de contorno imposta;
$\underline{T}$	Vetor tensão;
$\underline{T}^d$	Vetor tensão imposto na fronteira $S_T$ ;

$U$	Convergência da seção do túnel;
$U_0$	Convergência da seção do túnel na cota não revestida a partir da face de escavação;
$U_{eq}$	Convergência de equilíbrio de um túnel revestido;
$U_{int}$	Energia potencial interna de deformação;
$U_{max}$	Convergência máxima da seção do túnel;
$W_{ext}$	Trabalho das forças externas;
$W_{i_p}$	Peso referente ao ponto de integração $i_p$ ;
$V$	Velocidade de avanço do túnel;
$V^*$	Velocidade adimensional de avanço do túnel;
$V_a$	Volume de uma amostra em um ensaio triaxial;
$V_{bacia}$	Volume recalcado da bacia de assentamento de um túnel raso;
$V(\Delta u)$	Potencial do Método dos Gradientes Conjugados;

**Grego minúsculo:**

$\underline{\alpha}$	Conjunto de variáveis internas;
$\beta$	Parâmetro da superfície de Drucker-Prager;
$\gamma$	Campo de acelerações referente às forças inerciais;
$\gamma_m$	Peso específico do maciço;
$\underline{\delta \varepsilon}$	Campo de deformações virtuais;
$\underline{\delta \varepsilon}$	Campo de deformações virtuais (notação de Voigt);
$\underline{\delta u}$	Campo de deslocamentos virtuais;
$\varepsilon_1, \varepsilon_2, \varepsilon_3$	Deformações principais;
$\underline{\underline{\varepsilon}}$	Tensor de deformações;
$\underline{\underline{\varepsilon}}^e$	Deformação elástica;
$\underline{\underline{\varepsilon}}^p$	Deformação plástica;
$\underline{\underline{\varepsilon}}^{vp}$	Deformação viscoplástica;

$\underline{\varepsilon}$	Tensor de deformações (notação de Voigt);
$\underline{\varepsilon}^e$	Deformação elástica (notação de Voigt);
$\underline{\varepsilon}^p$	Deformação plástica (notação de Voigt);
$\underline{\varepsilon}^{vp}$	Deformação viscoplástica (notação de Voigt);
$\underline{\varepsilon}_0$	Tensor de deformações iniciais (notação de Voigt);
$\bar{\varepsilon}^{vp}$	Magnitude da deformação viscoplástica acumulada;
$\varepsilon_0$	Deformação a partir da qual tem-se a coesão residual $c_0$ ;
$\varepsilon_a$	Deformação axial em um ensaio triaxial;
$\varepsilon_R$	tolerância para o resíduo;
$\varepsilon_u$	tolerância para o incremento de deslocamentos;
$\eta$	Constante de viscosidade dinâmica;
$\eta_1, \eta_2, \eta_3$	Direções principais;
$\theta$	Ângulo de Lode;
$\lambda$	Magnitude da deformação plástica ou viscoplástica;
$\lambda^e$	Coeficiente de Lamè;
$\mu^e$	Coeficiente de Lamè;
$\nu$	Coeficiente de Poisson;
$\xi_H$	Coordenada do espaço de Haigh-Westergaard;
$\underline{\xi}$	Coordenadas naturais do elemento;
$\xi_{i_p}$	Coordenada natural do ponto de integração $i_p$ ;
$\phi$	Ângulo de atrito do maciço;
$\rho$	Densidade do domínio;
$\rho_H$	Coordenada do espaço de Haigh-Westergaard;
$\sigma_{oct}$	Tensão normal octaedrica;
$\sigma_v$	Tensão vertical no interior do maciço;
$\sigma_{\theta\theta}$	Tensão no maciço na direção ortorradial;

$\sigma_{zz}$	Tensão no maciço ortogonal ao plano da seção do túnel;
$\sigma_{rr}$	Tensão no maciço na direção radial;
$\underline{\underline{\sigma}}$	Tensor de tensões;
$\underline{\underline{\sigma}}_0$	Tensor de tensões inical;
$\underline{\underline{\sigma}}$	Tensor de tensões (notação de Voigt);
$\underline{\underline{\sigma}}_0$	Tensor de tensões iniciais (notação de Voigt);
$\underline{\underline{\sigma}}^{trial}$	Preditor elástico (notação de Voigt);
$\tau_{oct}$	Tensão cisalhante octaédrica;
$\psi$	energia livre específica;

### **Grego maiúsculo:**

$\Gamma$	Conjunto de tensões plasticamente admissíveis;
$\Sigma$	Superfície de descontinuidade no interior do domínio;
$\Phi$	Função de sobretensão;
$\Omega$	Domínio contínuo;
$\Omega'$	Subdomínio contínuo;
$\Omega_e$	Domínio de um elemento;
$\Omega_\xi$	Domínio natural de um elemento;

### **Numéricos, operadores e funções matemáticas:**

$\pi$	Constante $\pi \approx 3.141592653589793$ ;
$\underline{\underline{1}}$	Tensor de segunda ordem unitário;
$\underline{\underline{\underline{1}}}$	Tensor de quarta ordem unitário (notação de Voigt);
$\underline{\underline{1}}$	Tensor de segunda ordem unitário (notação de Voigt);
$\underline{\underline{\underline{\underline{1}}}}$	Tensor unitário de quarta ordem;
$\det(*)$	Função determinante;
$\text{tr}(*)$	Função traço;
$(*)^T$	Operador de transposição;

$\underline{\nabla} \cdot$  Operador divergente;

$\nabla$  Operador Gradiente;

$\| * \|$  Operador módulo;

$\sum *$  Operador somatório;

# SUMÁRIO

<b>1</b>	<b>INTRODUÇÃO . . . . .</b>	<b>32</b>
<b>2</b>	<b>DIRETRIZES DA PESQUISA . . . . .</b>	<b>36</b>
2.1	TEMA . . . . .	36
2.2	METODOLOGIA . . . . .	36
2.3	OBJETIVOS . . . . .	36
2.4	DELIMITAÇÕES . . . . .	37
2.5	DELINEAMENTO . . . . .	38
<b>3</b>	<b>ESTADO DA ARTE . . . . .</b>	<b>40</b>
3.1	MÉTODOS DE ESCAVAÇÃO . . . . .	40
3.1.1	Vala recoberta . . . . .	41
3.1.2	Escavação simples . . . . .	42
3.1.3	Desmonte de rocha . . . . .	42
3.1.4	Tuneladora . . . . .	43
3.1.5	Cravação de tubos . . . . .	44
3.2	PRÉ-SUPORTES E MELHORAMENTO DO MACIÇO . . . . .	45
3.3	REVESTIMENTO DE TÚNEIS . . . . .	47
3.4	PRINCIPAIS ASPECTOS CONSIDERADOS EM ESTUDOS NUMÉRICOS RECENTES DE TÚNEIS . . . . .	49
<b>4</b>	<b>COMPORTAMENTO MECÂNICO DE TÚNEIS . . . . .</b>	<b>52</b>
4.1	INFLUÊNCIA DA ESCAVAÇÃO E O CONCEITO DE CONVERGÊNCIA DA SEÇÃO . . . . .	52
4.2	MECANISMOS DE RUPTURA EM TÚNEIS PROFUNDOS . . . . .	55

4.3	INFLUÊNCIA DA REOLOGIA DO MACIÇO . . . . .	60
4.3.1	Comportamento instantâneo . . . . .	60
4.3.2	Comportamento diferido no tempo . . . . .	63
4.3.3	Alguns estudos considerando leis elastoplásticas e viscoplásticas . . . . .	68
4.4	INFLUÊNCIA DA FORMA DA SEÇÃO . . . . .	71
4.5	INFLUÊNCIA DA PROFUNDIDADE DO TÚNEL . . . . .	71
4.6	INFLUÊNCIA DA PROXIMIDADE DA SUPERFÍCIE . . . . .	76
4.7	INFLUÊNCIA DO REVESTIMENTO E PARÂMETROS ADIMENSIONAIS . . . . .	78
4.8	MÉTODO CONVERGÊNCIA-CONFINAMENTO . . . . .	82
<b>5</b>	<b>MODELO MECÂNICO . . . . .</b>	<b>85</b>
5.1	EQUAÇÕES DE EQUILÍBRIO LOCAL E A HIPÓTESE DA EVOLUÇÃO QUASE ESTÁTICA . . . . .	85
5.2	ADMISSIBILIDADE ESTÁTICA, NATUREZA EULERIANA DO CAMPO DE TENSÕES, TRANSFORMAÇÃO GEOMÉTRICA E MEDIDA DE DEFORMAÇÃO . . . . .	86
5.3	HIPÓTESE DAS PEQUENAS PERTURBAÇÕES E A DESCRIÇÃO LAGRANGEANA . . . . .	88
5.4	MODELO CONSTITUTIVO ELÁSTICO . . . . .	88
5.5	MODELO CONSTITUTIVO ELASTOPLÁSTICO . . . . .	89
5.5.1	Decomposição do tensor de deformação total . . . . .	90
5.5.2	Superfície de escoamento . . . . .	90
5.5.3	Regra de fluxo plástico . . . . .	94
5.5.4	Lei de endurecimento/amolecimento . . . . .	96
5.5.5	Condições de carregamento e descarregamento . . . . .	99
5.5.6	Multiplicador plástico e módulo elastoplástico contínuo .	99

5.6	MODELO CONSTITUTIVO VISCOPLÁSTICO . . . . .	100
5.6.1	Decomposição do tensor de deformação total . . . . .	100
5.6.2	Superfície de escoamento . . . . .	100
5.6.3	Regra de fluxo viscoplástico . . . . .	100
5.6.4	Lei de endurecimento/amolecimento . . . . .	101
5.6.5	Multiplicador viscoplástico . . . . .	101
5.7	MODELO CONSTITUTIVO ELASTOPLÁSTICO-VISCOPLÁSTICO	102
<b>6</b>	<b>SOLUÇÃO DO MODELO MECÂNICO . . . . .</b>	<b>105</b>
6.1	FORMA FRACA DAS EQUAÇÕES DE CAMPO . . . . .	105
6.2	NOTAÇÃO DE VOIGT . . . . .	105
6.3	DISCRETIZAÇÃO ESPACIAL EM ELEMENTOS FINITOS .	107
6.4	SOLUÇÃO DO SISTEMA NÃO LINEAR . . . . .	112
6.5	ALGORITMO DE ATUALIZAÇÃO DAS TENSÕES E VARIÁVEIS INTERNAS . . . . .	119
6.5.1	Integração das equações constitutivas elastoplásticas . .	119
6.5.2	Integração das equações constitutivas viscoplásticas . .	124
6.5.3	Integração das equações constitutivas elastoplástica-viscoplásticas	126
6.6	ATUALIZAÇÃO DO MÓDULO CONSTITUTIVO . . . . .	128
6.7	PARTICULARIZANDO PARA ESTADO PLANO DE DEFORMAÇÕES E AXISSIMETRIA . . . . .	129
6.8	DOMÍNIOS, DISCRETIZAÇÃO, CONDIÇÕES DE CONTORNO E CICLO CONSTRUTIVO PARA OS MODELOS DE VERIFICAÇÃO . . . . .	130
<b>REFERÊNCIAS . . . . .</b>		<b>139</b>

## 1 INTRODUÇÃO

Os túneis são grandes obras de engenharia que, além de causar grande admiração, atendem a diversas finalidades, sendo a mais conhecida aquela de transpor barreiras geológicas como, por exemplo, montanhas e canais marítimos, trazendo maior eficiência no transporte de recursos e pessoas. Também devido à crescente preocupação com o meio ambiente e com a preservação da superfície, essas estruturas têm sido cada vez mais empregadas em grandes cidades, melhorando assim a mobilidade urbana como, por exemplo, em metrôs e servindo de suporte para serviços públicos, tais como redes de água, esgoto, gás e eletricidade. São também empregados em hidroelétricas, laboratórios subterrâneos, instalações profundas para armazenamento de material radioativo e mineração.

Há, no entanto, um risco intrínseco associado a essas grandes obras, uma vez que o subsolo é em grande parte desconhecido e possui um comportamento complexo. Apesar de muitas dessas construções serem finalizadas com sucesso, ocorrem incidentes que levam a atrasos, custos excessivos e, em alguns casos, consequências mais significativas, tais como, danos em patrimônios de terceiros e perdas de vidas. Esses imprevistos estão relacionados a uma série de fatores que vão desde incertezas geológicas, cálculos inadequados, processo construtivo inapropriado e insuficiente monitoramento das deformações *in loco*. Não obstante, uma parte destes acidentes está relacionada com a dificuldade em prever e modelar o comportamento mecânico dessas grandes obras.

Um dos comportamentos de difícil modelagem e ainda estudado é justamente a interação entre o comportamento instantâneo e o diferido dessas estruturas. Este comportamento pode ter um impacto significativo nas deformações e estabilidade da cavidade. A plastificação no entorno do maciço, o fechamento gradual da seção do túnel, a extrusão da face de escavação e a sobrecarga sobre o revestimento, podem se desenvolver durante o tempo construtivo, no curto prazo, ou ainda, meses e anos após a construção do túnel no médio e longo prazo. Esse comportamento pode causar deformações excessivas (Figura 1.1), danos ao revestimento (Figura 1.2) e, em alguns casos, pela magnitude dos efeitos, acarretar o colapso da região no entorno do túnel.



Figura 1.1 – Redução da seção transversal do Túnel de Base Lyon Turin na fronteira entre frança e Itália (fonte: Barla, Bonini e Debernardi (2010, p. 41))



Figura 1.2 – Ruptura do suporte (perfil de aço) em uma mina de carvão na China (fonte: Manchao et al. (2015, p. 192))

Além da estabilidade da cavidade, a escolha da tecnologia para a escavação é altamente influenciada pela magnitude dessa condição diferida no tempo. Por exemplo, em escavações com tuneladoras (TBM - *Tunnel Boring Machines*), as pressões que se desenvolvem sobre a blindagem podem causar uma série de dificuldades como o aprisionamento da máquina (tal como

visto em Ramoni e Anagnostou (2010a, 2010b). É sabido também que suportes flexíveis ou que apresentam um comportamento diferido no tempo (perfis metálicos deslizantes ou concreto projetado) são mais adequados do que suportes rígidos, uma vez que permitem um certo grau de acomodação dessas deformações diferidas.

Muitos estudos consideram leis constitutivas empírico-experimentais, viscoelásticas ou ainda viscoplásticas em suas análises diferidas no tempo, contudo, todos esses modelos partem de um comportamento instantâneo elástico o que pode não corresponder com a realidade, uma vez que o maciço pode possuir um comportamento instantâneo elastoplástico.

Em vista da importância do tema para a comunidade geotécnica de túneis, a presente tese buscará estudar e modelar o comportamento diferido no tempo, considerando um modelo viscoplastico, conjuntamente com o comportamento instantâneo dado por um modelo elastoplástico.

Além dessa introdução, esse trabalho está dividido em mais 7 capítulos.

**O capítulo 2** tem a finalidade de esclarecer o mais objetivamente possível o que se pretende desenvolver nessa tese, explicitando o tema, os objetivos a alcançar, as delimitações que serão adotadas e o delineamento de como se dará o trabalho.

**O capítulo 3** foi introduzido com o intuito de apresentar brevemente alguns aspectos do estado da arte de túneis. Portanto, esse capítulo resume brevemente os métodos de escavação, os elementos e técnicas de pré-suporte, os revestimentos e principais aspectos considerados em estudos numéricos recentes. Portanto, esse capítulo é opcional aos leitores mais experientes e pode ser ignorado sem prejuízo ao entendimento do trabalho restante.

**O capítulo 4** tem por finalidade instruir o leitor no comportamento mecânico de túneis e seus conceitos fundamentais. Esse capítulo está dividido de acordo com os principais fatores que influenciam o campo de tensões e deformações no entorno dessas estruturas, tais como, o processo de escavação, o comportamento reológico do maciço, a forma da seção, a profundidade do túnel, a proximidade da superfície e a interação com o revestimento. Nesse capítulo será dada uma maior ênfase na reologia do maciço, caracterizando o comportamento instantâneo e diferido, que são justamente os comportamentos almejados no modelo proposto dessa tese. Também será apresentado alguns estudos que consideraram leis elastoplástica-viscoplastica no comportamento do maciço.

**O capítulo 5** descreve o modelo teórico que será implementado esclarecendo as principais hipóteses e explicando cada uma das leis constitutivas que serão adotadas (elástica, elastoplástica e viscoplástica) de forma genérica. No final desse capítulo é descrito então o modelo constitutivo acoplado elastoplástico-viscoplastico que será desenvolvido nessa tese.

O **capítulo 6** se refere à solução numérica do modelo teórico que se pretende implementar. Portanto, descreve a discretização espacial em elementos finitos, incluindo os tipos de elementos que serão utilizados, o método de solução do sistema não linear e o algoritmo de integração das leis constitutivas. Esse último é um dos principais focos do trabalho, uma vez que nele será feita a junção entre o modelo elastoplástico (instantâneo) e o viscoplástico (diferido). Também nesse capítulo são apresentadas as malhas propostas para as análises de túneis profundos (estado plano de deformação, tridimensional e axissimétrico) bem como as condições de contorno utilizadas e a descrição do processo de escavação e colocação do revestimento pelo método da ativação e desativação de elementos.

O **capítulo 7** mostra algumas validações do programa até então implementado, primeiramente apresentando alguns testes genéricos demonstrando a correta aplicação as condições de contorno e posteriormente a comparação com a solução analítica para túneis profundos elastoplásticos-viscoplásticos desenvolvida por Piepi (1995). Essa validação é apenas parcial, uma vez que essa solução considera o comportamento elastoplástico-viscoplástico perfeito associado obedecendo apenas ao critério de Tresca. Contudo, é importante para demonstrar que o algoritmo acoplado está funcionando.

Por fim, o **capítulo 8** faz o fechamento do presente texto de qualificação apresentando algumas conclusões preliminares, perspectivas e cronograma.

## 2 DIRETRIZES DA PESQUISA

### 2.1 TEMA

O tema dessa tese é o estudo das deformações induzidas pelo processo construtivo de túneis profundos em maciços que apresentam comportamento instantâneo e diferido no tempo.

### 2.2 METODOLOGIA

A metodologia consiste em uma **abordagem teórica** derivada da mecânica do contínuo cuja solução será obtida de forma **numérica** através do **método dos elementos finitos**.

### 2.3 OBJETIVOS

O **objetivo principal** desta pesquisa consiste em formular e programar um modelo constitutivo elastoplástico-viscoplástico para analisar as deformações instantâneas e diferidas induzidas pelo processo de escavação em túneis profundos, incorporando a interação tridimensional entre o maciço e o revestimento.

Como **objetivos secundários** têm-se:

- a) desenvolvimento de um *software* na linguagem de programação *Fortran90* baseado no método dos elementos finitos capaz de fazer análises tridimensionais considerando as etapas construtivas;
- b) generalizar esse *software* para análises em estado plano de deformações e axissimetria, uma vez que essas análises são rápidas, do ponto de vista computacional, e comuns em diversos estudos na literatura;
- c) formular um algoritmo de integração das leis constitutivas capaz de lidar conjuntamente com o comportamento diferido e instantâneo do maciço;
- d) incorporar diversas leis de comportamento (elásticas, elastoplásticas, viscoplásticas e elastoplásticas-viscoplásticas) no *software* para verificações e validações;

- e) verificar o *software* desenvolvido com problemas mais simples utilizando os programas GEOMECH91 e ANSYS;
- f) calibração do *software* com ensaios reais e validação com estudos de casos envolvendo túneis profundos que constam na literatura.

## 2.4 DELIMITAÇÕES

Os túneis podem sofrer influência da superfície como, por exemplo, deformações adicionais devido às cargas superficiais, e, inclusive, intervirem nelas e suas estruturas através de recalques superficiais ocasionados pela execução do túnel. Contudo, apesar da generalidade dos modelos desenvolvidos no presente trabalho, será dado enfoque nos túneis profundos, portanto, **não é considerada a influência de estruturas superficiais ou recalques na superfície induzidos pela escavação.**

Embora o maciço em que um túnel está imerso possa apresentar descontinuidades, em muitos casos, seu comportamento global pode ser simulado efetivamente como um **meio contínuo**. Apesar do comportamento complexo do maciço, que é função também de diversas propriedades que variam espacialmente, nesse trabalho é considerado um **maciço homogêneo e isotrópico**. Em vista disso, o **maciço é considerado monofásico** com seu comportamento instantâneo e diferido **modelado fenomenologicamente através de uma lei reológica elástica, elastoplástica, viscoplástica e elastoplástica-viscoplástica, não considerando, portanto, outras abordagens como, por exemplo, as da poro mecânica e as que tratam da influência do fluxo de água.**

É também sabido que, em geral, o estado de tensões internas em um maciço é extremamente complexo, devido aos movimentos tectônicos, descontinuidades e heterogeneidades. Em busca de generalidade do *software* nesse sentido, almejando também análises de casos reais, é implementado um **estado anisotrópico de tensões iniciais**. Além disso, as análises iniciam de **uma configuração de referência indeformada**.

Como é visto no Capítulo 4, a velocidade de escavação e colocação do revestimento é uma variável importante quando se tem fenômenos diferidos no tempo. Essa velocidade depende de diversos fatores relacionados à dificuldade de escavação do maciço e ao cronograma de execução da obra. Contudo, nesse trabalho, apesar da generalidade, diferentemente da prática usual de execução de túneis, **a velocidade de avanço da face de escavação é considerada constante**.

Apesar de um túnel poder atravessar um perfil litológico heterogêneo, o que pode exigir um revestimento e técnicas de pré-suporte especializados para cada região, no presente estudo, o **revestimento consiste em um modelo único de espessura constante** (sem distinção entre

revestimento primário e secundário) ao longo de todo o eixo longitudinal do túnel.

Principalmente em escavações não mecanizadas, é comum a frente de escavação apresentar parcializações de modo a estabilizar ou diminuir as deformações dessa zona. Apesar disso, nesse trabalho a **escavação é feita à seção plena, plana e vertical sem considerar nenhuma técnica ou elemento de pré-suporte**.

Os modelos incorporados no programa são: **elástico, elastoplástico, viscoplástico e elastoplástico-viscoplástico**. Estão implementados para o maciço os modelos clássicos elastoplásticos (von-Mises, Drucker-Prager, Tresca e Mohr-Coulomb) e o modelo viscoplástico de Perzyna (1966) com as mesmas superfícies de escoamento do modelo elastoplástico, contudo, não necessariamente com os mesmos parâmetros. **Para o revestimento é utilizado o modelo elástico linear**.

A evolução das deformações se dá de forma **quase-estática**, portanto, não são considerados os termos iniciais (densidade e aceleração) ou excitações dinâmicas (como seria, por exemplo, em uma análise considerando terremotos e explosões). Além disso, é considerada a **hipótese das pequenas perturbações**.

## 2.5 DELINEAMENTO

O trabalho foi realizado através das seguintes etapas:

- a) pesquisa bibliográfica sobre túneis e o tema da tese;
- b) pesquisa bibliográfica sobre os modelos constitutivos elastoplásticos e viscoplásticos que foram implementados;
- c) pesquisa bibliográfica sobre a solução do problema no contexto de elementos finitos;
- d) desenvolvimento do *software* de elementos finitos;
- e) verificação do *software* com soluções analíticas, GEOME91 e ANSYS;
- f) validação do modelo em estudos de casos que constam na literatura;
- g) estudo da diferença entre considerar o modelo elastoplástico-viscoplástico em relação a outros modelos mais simples.

O organograma da Figura 2.1 ilustra a relação entre as etapas durante o trabalho.

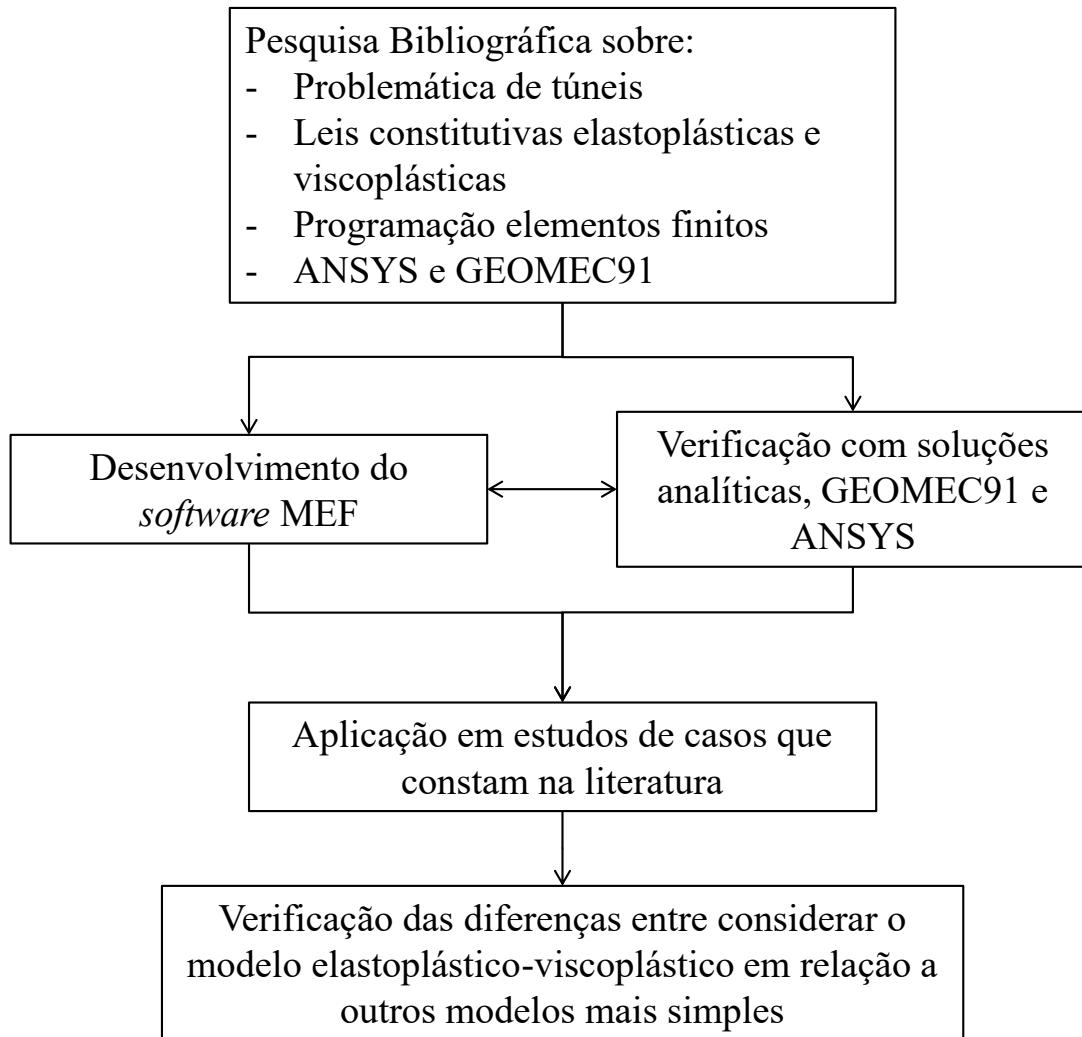


Figura 2.1 – Organograma das etapas da pesquisa

### 3 ESTADO DA ARTE

#### 3.1 MÉTODOS DE ESCAVAÇÃO

Há diversas formas de se executar túneis, tanto profundos quanto superficiais. Durante a escolha do método de escavação, o engenheiro deve levar em conta diversos fatores, tais como: geometria da seção, comprimento do túnel, condições geológicas, nível da água, restrições quanto às vibrações, estabilidade da cavidade, riscos de assentamentos superficiais, hipóteses de projeto, segurança dos operários, viabilidade ambiental e econômica. Em vista dessa complexidade é possível utilizar mais de um método de escavação ao longo do eixo do túnel. A Figura 3.1 resume os principais métodos de escavação.

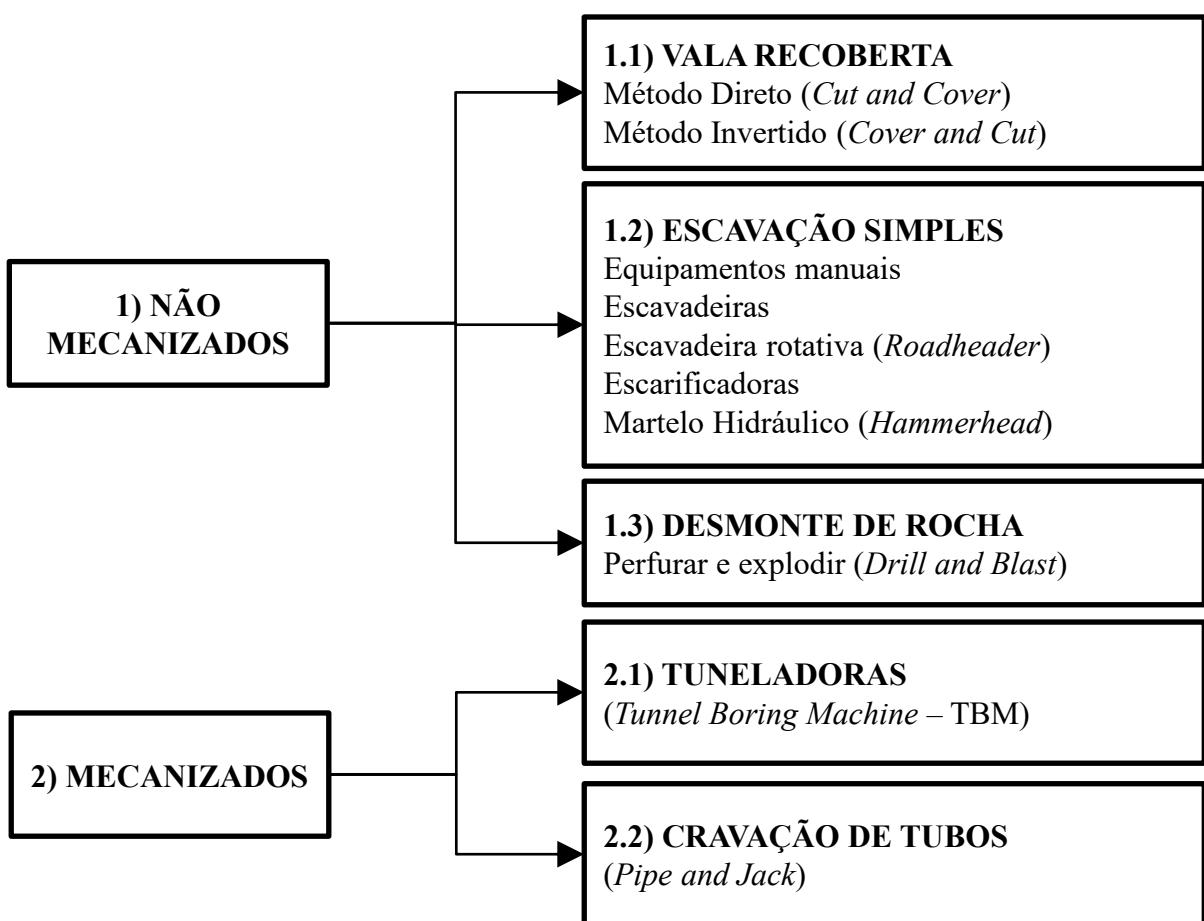


Figura 3.1 – Métodos de escavação de túneis

Os métodos se dividem em dois grandes grupos: 1) não mecanizados (convencionais) e 2) mecanizados. A diferença é que este último é caracterizado pela presença de tuneladoras, que são

máquinas especializadas em adentrar a frente de escavação. Os métodos ditos “não mecanizados” não possuem essas máquinas especializadas e podem ser agrupados em: vala recoberta, escavação simples e desmonte de rocha.

### 3.1.1 Vala recoberta

O método da vala recoberta é utilizado preferencialmente para túneis superficiais. Pode ser executado de duas formas: direta (*Cut and Cover*) ou invertida (*Cover and Cut*). A Figura 3.2 e Figura 3.3 ilustram esse método.

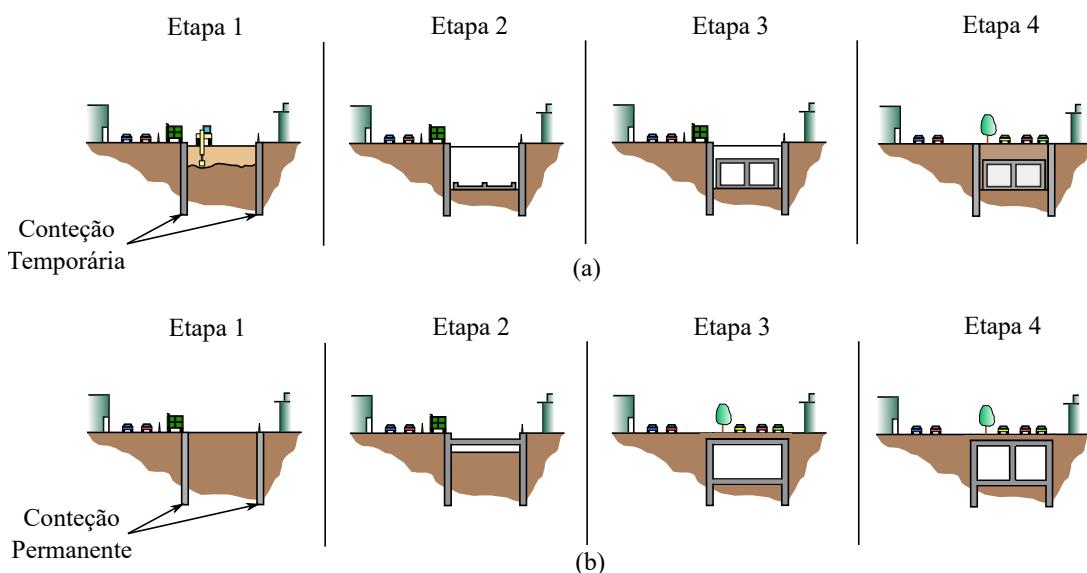


Figura 3.2 – (a) *Cut and Cover* e (b) *Cover and Cut* (adaptado de: FEDERAL HIGHWAY ADMINISTRATION (U.S.) (2009, p. 5-2))



Figura 3.3 – Etapa de execução pelo método de vala recoberta direta no projeto *Nordhavnsvej*, em Compenhague, Dinamarca (fonte: ROADTRAFFIC-TECHNOLOGY (2017, p. 1))

Como o presente trabalho está delimitado aos túneis profundos esse método de escavação estará fora do escopo desta tese. Além disso, o comportamento mecânico desse túnel é diverso daqueles profundos que, tal como será visto no Capítulo 4, mobilizam a resistência do maciço na estabilidade da cavidade.

### 3.1.2 Escavação simples

A escavação simples é o método que permite maior flexibilidade quanto à geometria da seção e é ideal para escavar galerias de formatos complexos como, por exemplo, estações e conexões. Essa escavação pode ser feita com uma combinação de ferramentas manuais e equipamentos mecânicos, como escavadeira simples, escavadeira rotativa (*Roadheader*), escarificador e martelo hidráulico (*Hammerhead*) (Figura 3.4). A produtividade desse método varia, mas dificilmente ultrapassa 10m/dia de avanço.

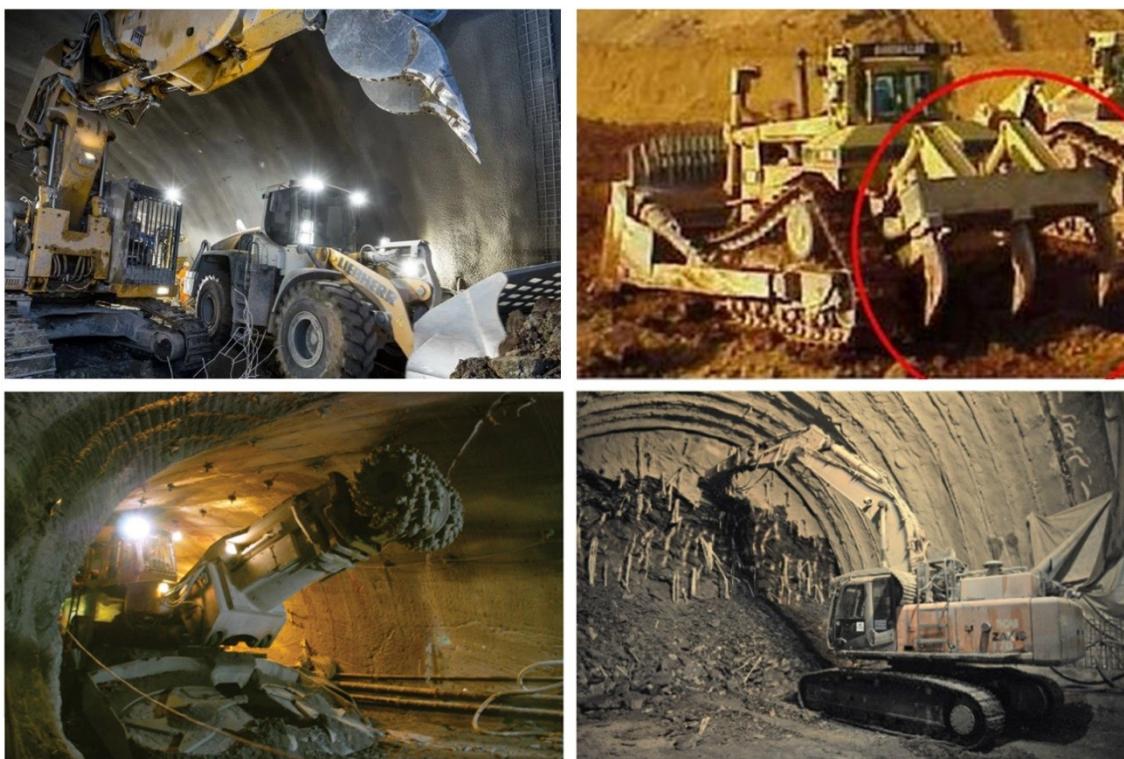


Figura 3.4 – Superior à esquerda: escavadeiras (fonte: Pierrat (2014, p. 1)); superior à direita: escarificador; inferior à esquerda: escavadeira rotativa (fonte: Mitterndorfer (2013, p. 1)) e inferior à direita: martelo hidráulico (fonte: WORD HIGHWAYS (2015, p. 1))

### 3.1.3 Desmonte de rocha

Quando há dificuldade de penetração no maciço, é necessário utilizar o método de perfuração e detonação, que consiste em perfurar, instalar o material explosivo e detonar a frente de escavação.

O ciclo desse método é ilustrado na Figura 3.5 e Figura 3.6.

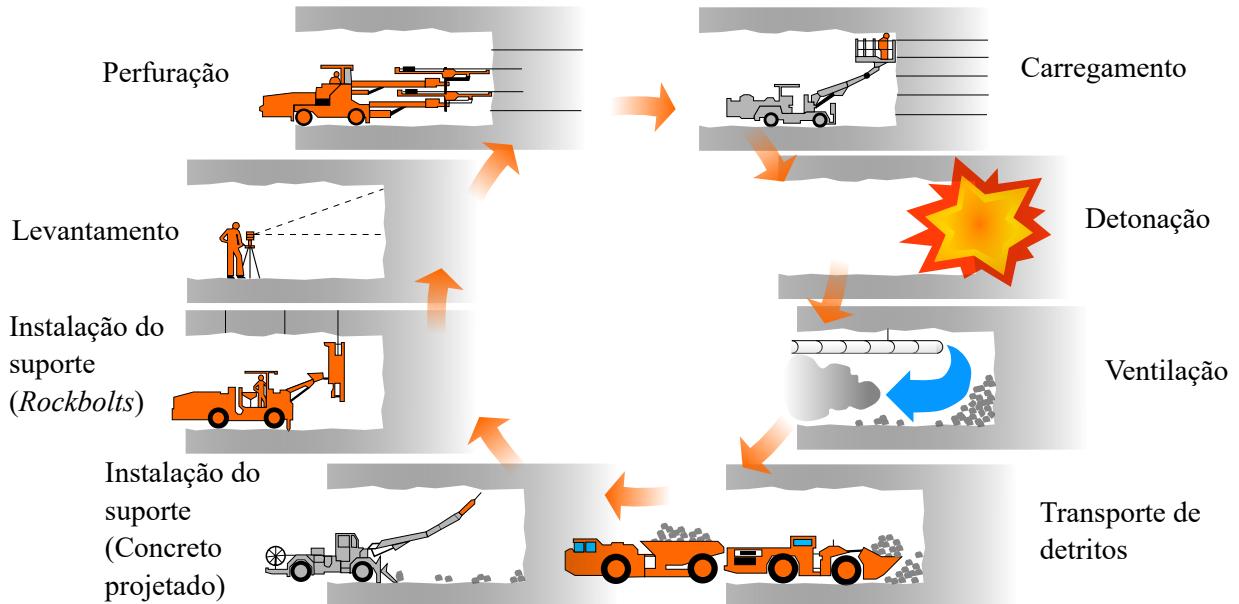


Figura 3.5 – Sequência executiva do método de construção por desmonte de rocha (adaptado de: Heiniö (1999, p. 215))



Figura 3.6 – Superior à esquerda: perfuração; inferior à esquerda: instalação das cargas; à direita: frente de escavação após detonação (fonte: Grad (2013, p. 1))

### 3.1.4 Tuneladora

As tuneladoras, tal como ilustrada na Figura 3.7, nada mais são do que a evolução do método de escavação com plataformas de Marc Brunel desenvolvido em 1843 (durante a construção do túnel subfluvial sob o rio Tâmisa em Londres). Atualmente, esse tipo de escavação é totalmente mecanizada e possui excelente regularidade da superfície escavada. A produtividade depende de

vários fatores (diâmetro da seção do túnel, condições do maciço, potência e tamanho da máquina, tipo de revestimento e experiência das equipes) e pode atingir até 20m/dia (BROX, 2017, p. 98). Geralmente possuem maquinário acoplado para executar o revestimento em concreto projetado ou pré-moldado. Quando o maciço a ser escavado é pouco resistente utiliza-se um escudo (*Shield*) ou lama sob pressão imediatamente anterior à frente de escavação para evitar o colapso da cavidade. As principais desvantagens são os custos e a dificuldade de transporte da máquina.

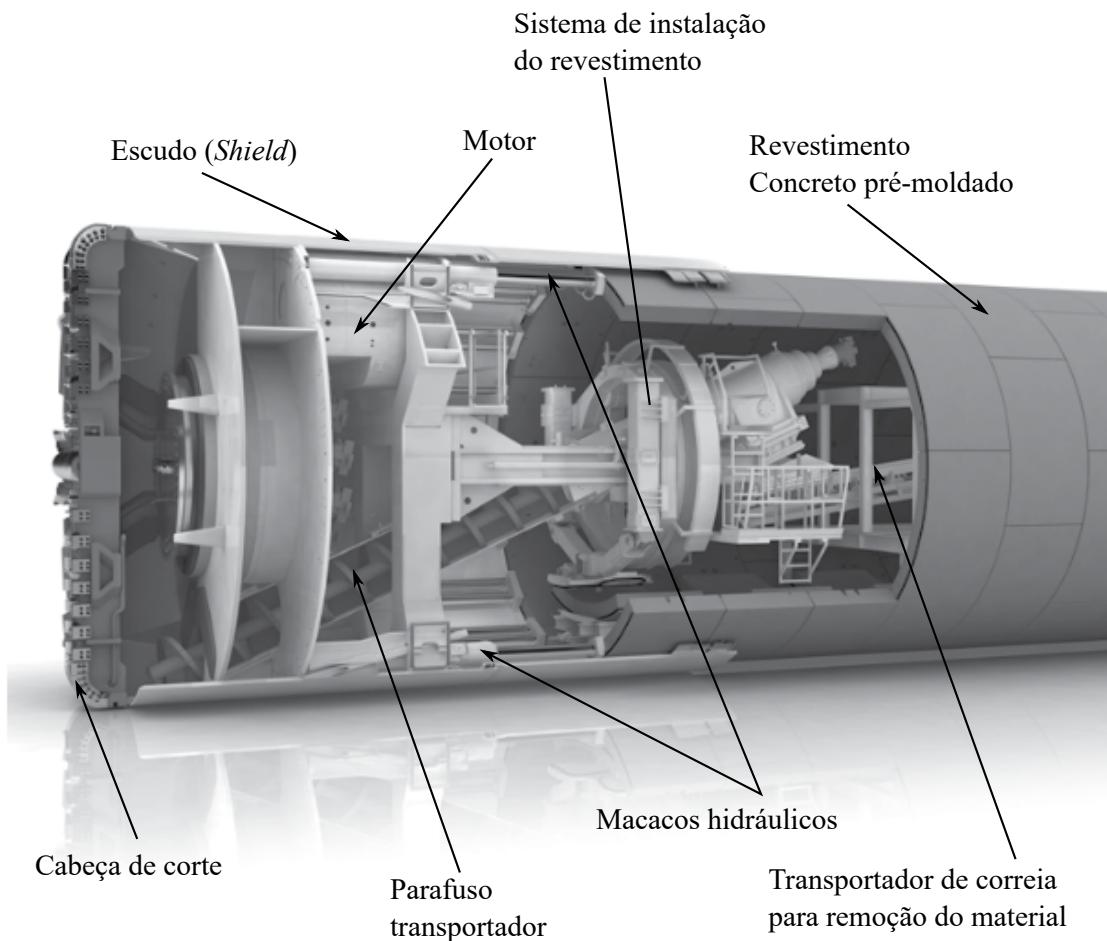


Figura 3.7 – Representação 3D de uma tuneladora (adaptado de: Chapman, Metje e Stark (2018, p. 151))

### 3.1.5 Cravação de tubos

Por fim, o método mecanizado de cravação de tubos consiste em conectar dois poços cravando tubos com auxílio de macacos hidráulicos, uma parede de reação e uma pequena tuneladora (com ou sem escudo). Esse método é comum quando se tem poucas distâncias a vencer, túneis superficiais e solos brandos. São, portanto, preferencialmente utilizados em obras de fornecimento de água, esgoto, eletricidade e gás nos centros urbanos. A Figura 3.8 e Figura 3.9 ilustram esse método de escavação.

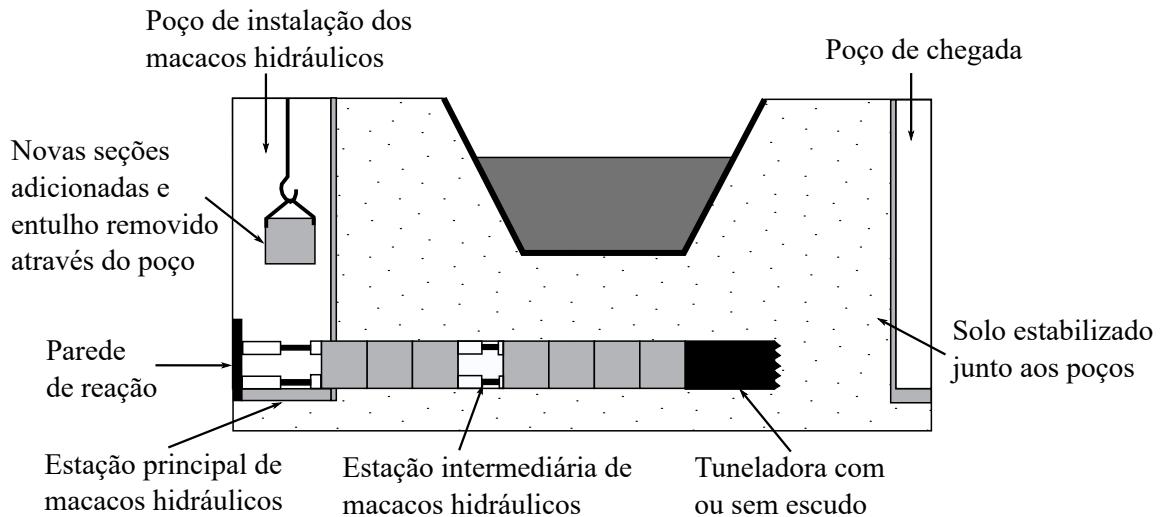


Figura 3.8 – Ilustração do método de cravação de tubos sob um canal  
(adaptado de: Chapman, Metje e Stärk (2018, p. 227))

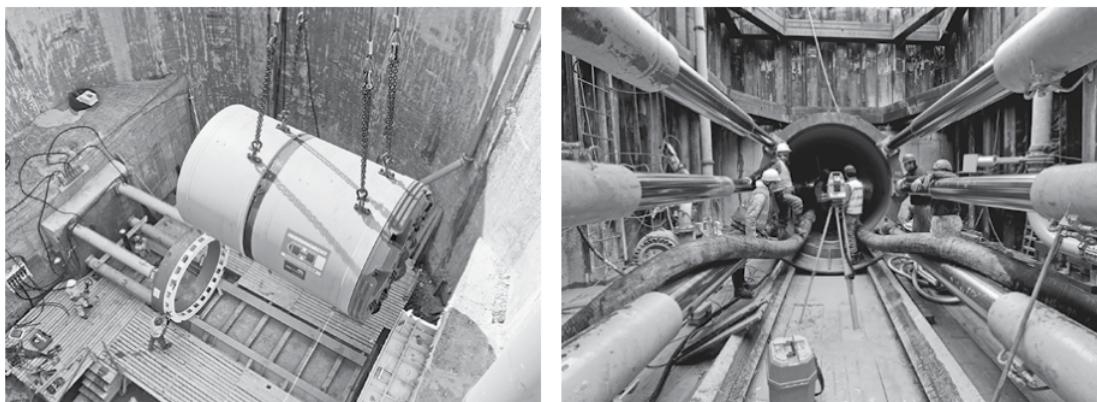


Figura 3.9 – À esquerda: vista de cima de um poço de macacos hidráulicos com a descida da TBM; à direita: vista frontal do túnel  
(fonte: Chapman, Metje e Stärk (2018, p. 227))

Como este trabalho está delimitado aos túneis profundos, esse método de escavação estará fora do escopo dessa tese. Apesar de mobilizar a resistência do maciço possuí condições de contorno bem diversas de túneis profundos.

### 3.2 PRÉ-SUPORTES E MELHORAMENTO DO MACIÇO

O termo **pré-suporte** não comprehende apenas os elementos físicos, mas também técnicas que são utilizadas visando à estabilidade do maciço antes de iniciar a etapa de escavação da face de avanço do túnel. São comumente empregados em maciços ou regiões do maciço que apresentam riscos de desabamentos iminentes (Figura 3.10).



Figura 3.10 – À esquerda, simulação da falha na face de um túnel (fonte: Schofield (1980, p. 245)); à direita, o colapso progressivo da face do túnel rodoviário *Vadlaheidi* na Islândia (fonte: Reynolds (2015, p. 1))

Alguns exemplos de técnicas de pré-suporte são:

- a) **enfilagens**: instalação de barras, placas ou perfis de aço no interior do maciço, logo acima do perímetro da seção de escavação;
- b) **escavação parcializada**: criação de taludes ou nichos de escavação sustentados com concreto projetado;
- c) **tirantes frontais**: consiste na instalação de tirantes de fibra de vidro ou injeções de concreto na face de escavação. Comumente utilizados quando o túnel tem que passar por zonas instáveis como, por exemplo, falhas geológicas;
- d) **pré-confinamento com ar comprimido**: consiste em aplicar ar com uma determinada pressão no interior da galeria de escavação. Essa técnica é comum em solos moles ou saturados com água;
- e) **técnicas de melhoramento**: injeção de nata de cimento sobre pressão (*Jet Grouting*) ou consolidação do solo por meio do congelamento com nitrogênio líquido (ou com salmoura), injeções químicas, ou ainda, rebaixamento do lençol freático.

Mais detalhes sobre essas técnicas podem ser encontradas em FEDERAL HIGHWAY ADMINISTRATION (U.S.) (2009, p. 9-36), Maidl, Thewes e Maidl (2013, p. 21) e em Chapman, Metje e Stärk (2018, p. 77). Como neste trabalho estamos interessados na modelagem da lei constitutiva do maciço não serão consideradas essas técnicas na modelagem.

### 3.3 REVESTIMENTO DE TÚNEIS

O revestimento de um túnel (também conhecido como suporte) tem como finalidade atender critérios operacionais de manutenção e de estabilidade da cavidade a curto, médio e longo prazo quando o maciço por conta própria não atende esses critérios. O revestimento é composto por um **revestimento primário** e, quando necessário, um **revestimento secundário**. A Figura 3.11 ilustra os elementos de uma seção típica de um túnel rodoviário.

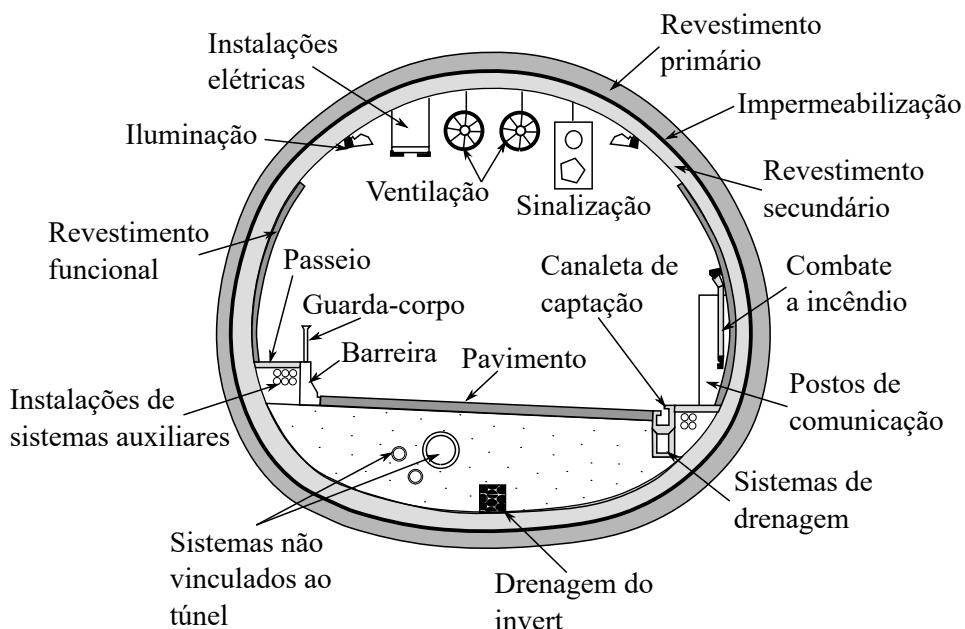


Figura 3.11 – Ilustração do revestimento e elementos internos de um túnel rodoviário (adaptado de: DEPARTAMENTO DE ESTRADAS E RODAGEM (SÃO PAULO) (2005, p. 20))

O **revestimento primário** comprehende os elementos físicos de suporte inicial (aplicados imediatamente após a escavação), com a finalidade de manter a cavidade do túnel estável. Contudo, quando os elementos de suporte inicial não são suficientes para estabilização da cavidade no médio e longo prazo, adicionam-se mais elementos constituindo assim o **revestimento secundário**. Quando se utiliza o revestimento secundário, o revestimento primário é comumente projetado com a finalidade exclusiva de garantir a estabilidade local da cavidade do túnel durante o período construtivo. Contudo, ambos contribuem para a estabilidade de médio e longo prazo.

É comum utilizar um ou mais de um dos seguintes elementos de suporte:

- tirantes radiais:** são cabos (*Cablebolts*) ou chumbadores (*Rockbolts*) ancorados ao longo do perímetro do túnel de forma mecânica (por atrito) e/ou química (com epóxi ou graute). Esses elementos podem estar tensionados (ativos) ou não (passivos) e serem permanentes ou temporários;

- b) **cintas metálicas:** são treliças ou trechos anelares metálicos (unidos entre si de forma rígida por parafusos, por soldagem, ou ainda, com uma união flexível podendo deslizar em suas juntas) instalados com um determinado espaçamento ao longo do comprimento longitudinal do túnel;
- c) **concreto projetado:** consiste em aplicar uma ou várias camadas de concreto (com ou sem fibras) sobre a superfície escavada do túnel. A superfície pode ainda conter telas metálicas ou cintas metálicas que ficarão embutidas nas camadas de concreto;
- d) **concreto pré-moldado:** consiste em instalar trechos anelares pré-fabricados de concreto;
- e) **concreto armado:** consiste em aplicar concreto e uma malha composta por vergalhões de aço no contorno da seção.

A Figura 3.12 ilustra alguns desses elementos.

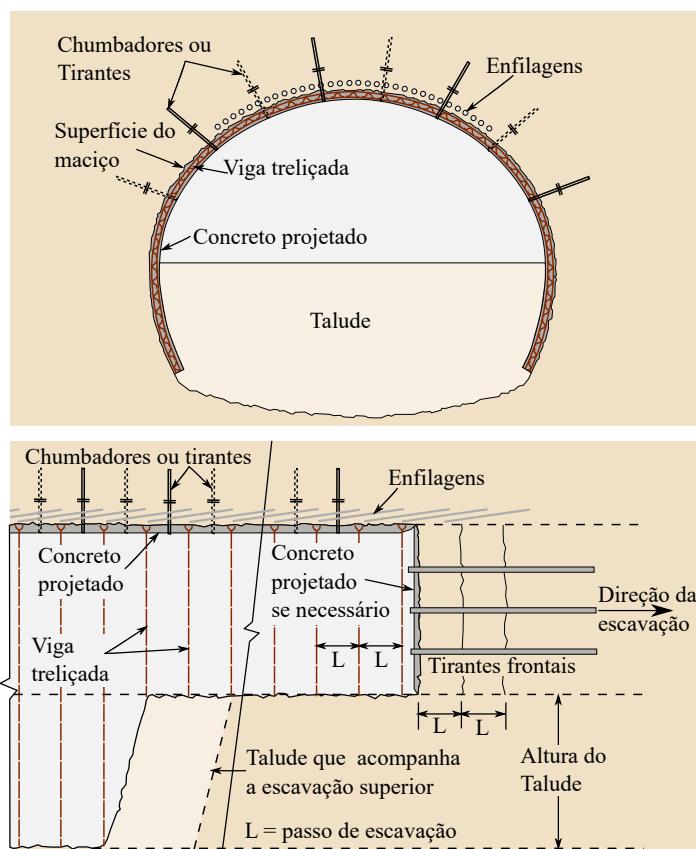


Figura 3.12 – Ilustração de alguns elementos de pré-suporte e revestimento (adaptado de: FEDERAL HIGHWAY ADMINISTRATION (U.S.) (2009, p. 9-14))

Como este trabalho está delimitado às leis constitutivas do maciço, não será abordado a diferen-

ciação entre o revestimento primário e secundário. Além do mais, nos modelos desenvolvidos, o revestimento consiste de um material homogêneo, isotrópico e de espessura constante. E a escavação é feita a seção plena, plana e vertical.

### 3.4 PRINCIPAIS ASPECTOS CONSIDERADOS EM ESTUDOS NUMÉRICOS RECENTES DE TÚNEIS

A rigor o estado e evolução do campo de tensões e deformações durante e após a escavação de um túnel irá depender dos seguintes fatores:

- a) **Comportamento dos materiais:** propriedades hidro-mecânicas e reológicas do maciço e do revestimento;
- b) **Condições geológicas:** estado de tensões *in situ*, heterogeneidade e grau de anisotropia do maciço bem como orientação, forma e comportamento das descontinuidades no seu interior, presença e fluxo de água, poro-pressão e movimentos sísmicos;
- c) **Interações com estruturas próximas:** fundações de edifícios, assentamentos superficiais, encontro com galerias, proximidade de outros túneis e sistemas subterrâneos;
- d) **Aspectos construtivos:** forma da seção transversal, velocidade de escavação, técnicas de pré-suporte, instante da instalação do revestimento e a distância não revestida durante o avanço da escavação.

Além desses fatores, como a trajetória das tensões próxima à face de escavação é tridimensional, envolvendo um bulbo de descompressão, túneis são estruturas rigorosamente tridimensionais.

Dentre as abordagens mais gerais que buscam prever o comportamento dos túneis, frente a todos esses fatores, estão as **teóricas-experimentais derivadas da mecânica do contínuo**. Contudo, as **soluções analíticas** dos modelos derivados dessa abordagem, apesar de úteis no entendimento do fenômeno e verificação numérica, são também limitadas a uma série de hipóteses simplificativas, tais como, domínio infinito, maciço isotrópico e homogêneo, seção circular, estado plano de deformações, ausência da interação entre o maciço e o revestimento, bem como leis constitutivas mais simples. Em vista disso, para contornar essas limitações, desde a década de 60, cada vez mais vem se utilizando **soluções numéricas** que agregam mais generalidades. E nas últimas décadas, com a ampliação da capacidade de computação, tem-se aumentado os estudos considerando o aspecto tridimensional dessas estruturas. Pode-se dizer que as soluções numéricas ganharam espaço frente às analíticas justamente devido à capacidade de incorporar todos os fatores listados

acima. E, dentre os métodos numéricos, o mais difundido e utilizado é o **método dos elementos finitos**. Os desenvolvimentos numéricos e aplicações recentes geralmente consideraram um ou mais dentre os seguintes aspectos:

- a) **simulação do processo construtivo**: através da ativação e desativação dos elementos finitos, onde a cada ciclo construtivo é feita uma análise desativando-se os elementos que correspondem a região escavada do maciço e ativando-se aqueles referentes ao revestimento. Exemplos recentes podem ser encontrados na grande maioria de estudos que consideram a interação entre o maciço e o revestimento, tais como: Zhong et al. (2016) e Quevedo (2017);
- b) **domínio espacial complexo**: incorporam a influência da frente de escavação, da intersecção com galerias ou da presença de túneis próximos como, por exemplo, Chakeri et al. (2011), Do et al. (2014) e ainda, quando se trata de túneis superficiais, assentamentos na superfície e interação com estruturas da superfície como, por exemplo, Augarde e Burd (2001), Burd et al. (2000), Mroueh e Shahrour (2003), Xin e Zengrong (2009) e Ferrão, Jensen e Bernaud (2020);
- c) **comportamento dos materiais**, ou seja, implementam e estudam a influência de diversas leis constitutivas, tanto para o maciço quanto para o revestimento. Nesse item os mais variados aspectos do maciço e do revestimento são frequentemente abordados. Leis constitutivas elásticas, elastoplásticas perfeitas, com amolecimento, como em Purwodihardjo e Cambou (2003); viscoelásticas, tais como encontradas em Quevedo (2017); viscoplásticas, conforme Bernaud (1991), RoateŞi (2014) e Quevedo (2017); ou ainda, viscoplásticas com fator de dano como em Pellet e Roosefid (2007) são apenas alguns poucos exemplos. Pode-se ter ainda leis que consideram acoplamento hidro-mecânico como em Chan e Ou (2008) e Leem e Kemeny (1999) bem como leis empíricas ou parâmetros de danos diretamente sobre as propriedades dos materiais, como em Schweiger, Marcher e Schädlich (2014) para considerar o comportamento diferido;
- d) **influência do pré-suporte e do revestimento primário**: estudos que tentam incorporar os efeitos causados pelos elementos e técnicas que servem para estabilizar a cavidade antes e durante a escavação como, por exemplo, tirantes frontais, enfilagens, congelamento, escavação parcializada e iteração com o escudo da tuneladora. Nesses estudos, os elementos físicos de pré-suporte podem ser incorporados de forma discreta (o que exige malhas bastante refinadas), incorporada no interior do elemento finito ou introduzida na lei constitutiva do maciço de forma homogeneizada. Essa ultima abordagem é utilizada, por exemplo, por Bernaud et al. (2009) e Couto (2011) para considerar tirantes radiais e frontais.

- e) **problemas dinâmicos:** estudos que tem por finalidade implementar e estudar os efeitos das vibrações induzidas por trem, explosões na proximidade ou sismos como, por exemplo, em Chan e Ou (2008).
- f) **métodos numéricos alternativos:** embora o método dos elementos finitos seja o mais difundido, existem outros métodos de solução numérica como o das diferenças finitas e o método dos elementos de contorno. Outras abordagens menos convencionais também são utilizadas como o método das redes neurais, como, por exemplo, Shi, Ortigao e Bai (1998) e métodos discretos, como em Maynar e Rodríguez (2005). Uma revisão mais completa de diversos modelos e métodos numéricos utilizados em mecânica das rochas pode ser encontrada em Jing (2003).

A presente tese estará focada apenas nos três primeiros itens acima, sendo o terceiro item o de maior interesse, devido a modelagem da lei constitutiva elastoplástica-viscoplástica do maciço.

## 4 COMPORTAMENTO MECÂNICO DE TÚNEIS

### 4.1 INFLUÊNCIA DA ESCAVAÇÃO E O CONCEITO DE CONVERGÊNCIA DA SEÇÃO

De uma forma geral, do ponto de vista do maciço, a escavação de um túnel nada mais é do que uma perturbação no seu estado natural de equilíbrio devido à remoção de parte do maciço. Essa perturbação induzirá o maciço a uma nova configuração de equilíbrio que mobilizará tensões tangenciais desviando, dessa forma, a direção das tensões principais no entorno da escavação. Através desse **arqueamento das tensões**, o próprio maciço participa da sustentação da cavidade. Esse arqueamento pode ser decomposto em dois arcos longitudinais (contidos nos planos horizontal e vertical) e um arco transversal (no plano perpendicular ao eixo do túnel), tal como mostrado na Figura 4.1.

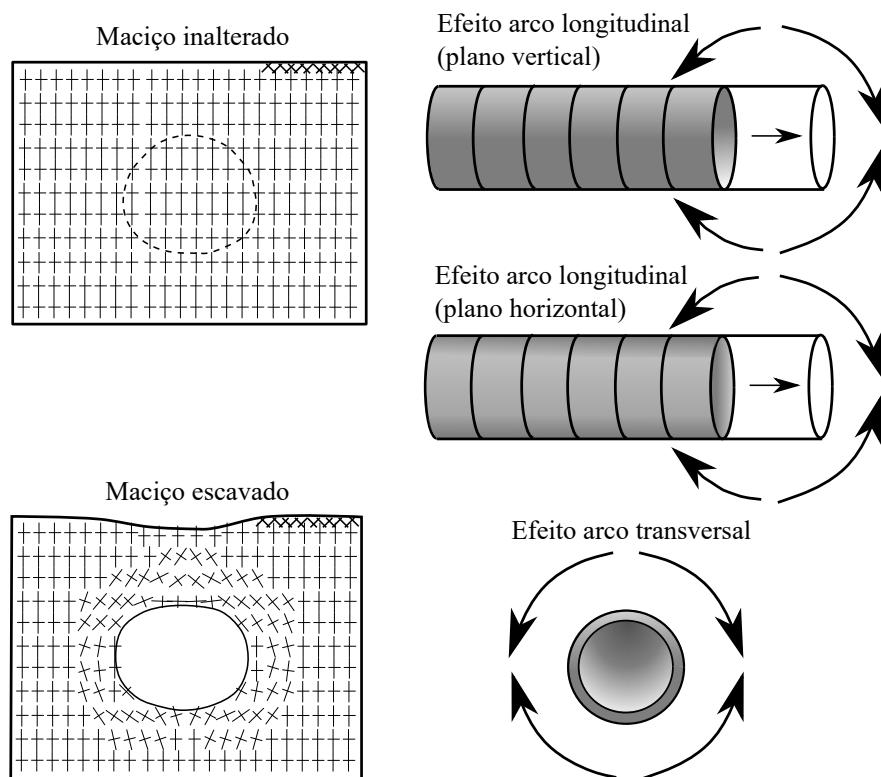


Figura 4.1 – Ilustração do arqueamento das tensões principais (adaptado de: França (2006, p. 10-11))

A presença dos três arcos na zona que acompanha a frente de escavação faz com que essa região tenha um campo de deslocamentos tridimensional convergente em direção à face de escavação.

No entanto, conforme essa frente avança e se afasta, apenas o arqueamento transversal se mantém, fazendo com que o campo de deslocamentos seja bidimensional contido no plano transversal ao eixo do túnel. Em vista disso, é conveniente caracterizar três zonas no interior do maciço: uma zona não perturbada pela escavação, uma zona de influência da frente de escavação e uma zona fora dessa influência (Figura 4.2).

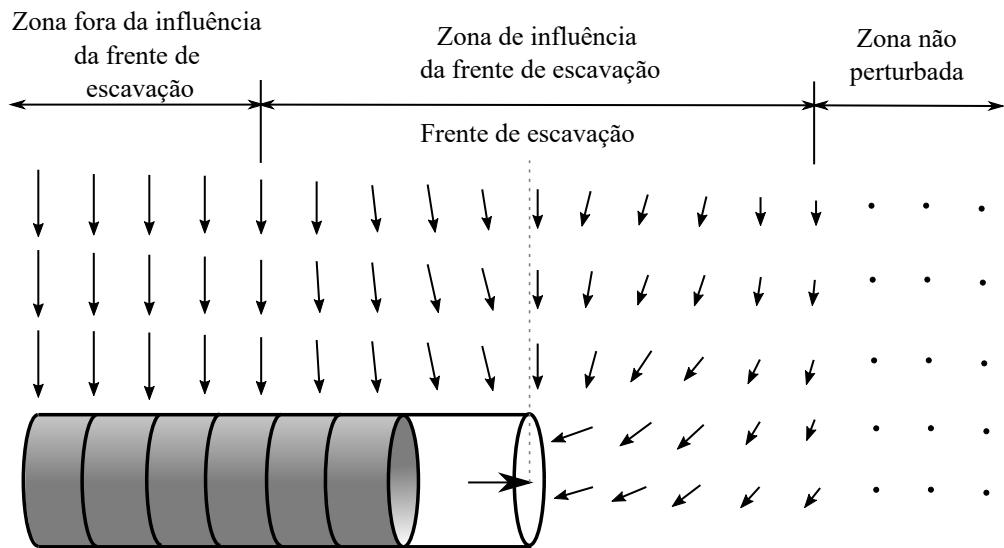


Figura 4.2 – Campo vetorial de deslocamentos no maciço durante a escavação de um túnel (adaptado de: França (2006, p. 12))

O parâmetro geométrico mais simples e representativo do comportamento de um túnel é o fechamento de sua cavidade, também conhecido como **convergência**. Se um túnel circular estiver em um maciço homogêneo, isotrópico, submetido a um estado de tensões inicial geostático hidrostático, o campo de deslocamentos no entorno de uma seção fora da zona de influência da frente de escavação estará contido no plano transversal e será puramente radial, podendo ser expresso por uma função  $u(r)$ . Nesse caso, a convergência  $U$  é definida pela razão entre o deslocamento da cavidade e seu raio inicial  $U = -u(r = R)/R$ . A presença do sinal negativo é opcional e serve para que a convergência fique positiva se a seção diminuir, ou seja,  $u(R) < 0$  (Figura 4.3).

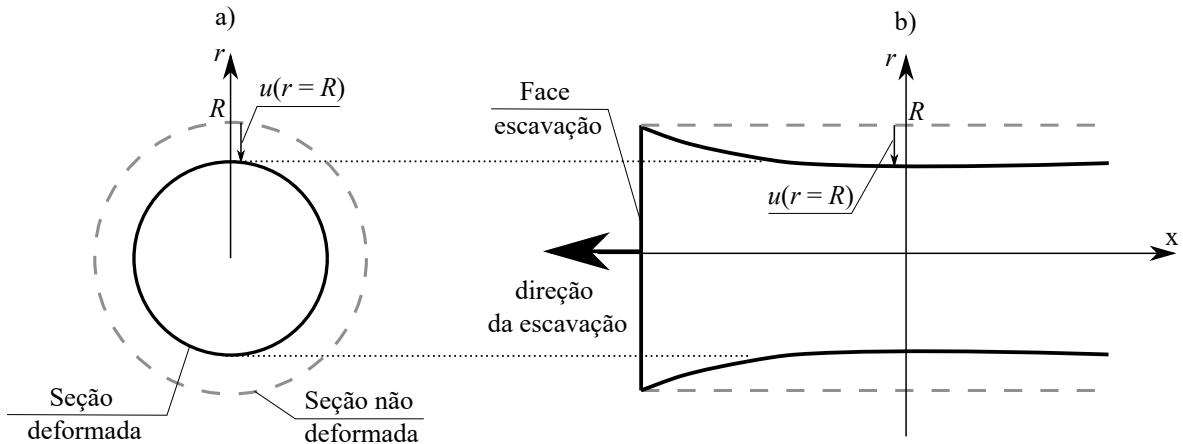


Figura 4.3 – Ilustração das medidas geométricas que compõe a convergência de uma seção circular: a) corte transversal, b) corte longitudinal

Dependendo da anisotropia das tensões *in situ* ou do formato da seção, sua deformada pode não ser radial e, na prática, podem-se usar varias medidas para compor o cálculo da convergência da seção, como exemplificado na Figura 4.4.

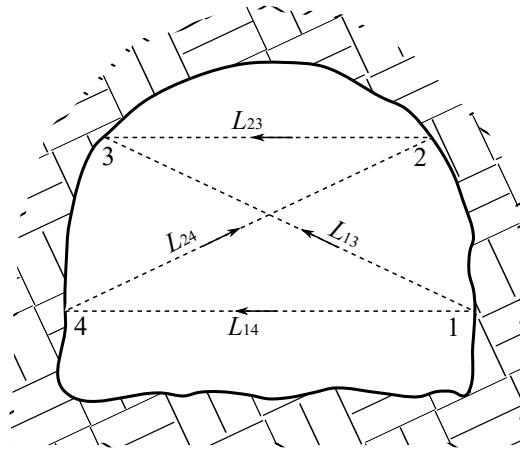


Figura 4.4 – Medidas da convergência em quatro direções de uma seção não circular (adaptado de: Panet (1995, p. 8))

Outro aspecto importante para determinar a influência da escavação e caracterizar o comportamento global do túnel é a representação gráfica das convergências ao longo do seu eixo longitudinal, conhecida como **perfil de convergências**. Por exemplo, com o objetivo de quantificar a extensão da zona de influência da frente da escavação, Hanafy & Emery (1980) graficaram o perfil de convergências do seu modelo de um túnel circular em um maciço homogêneo, isotrópico e elástico linear (Figura 4.5).

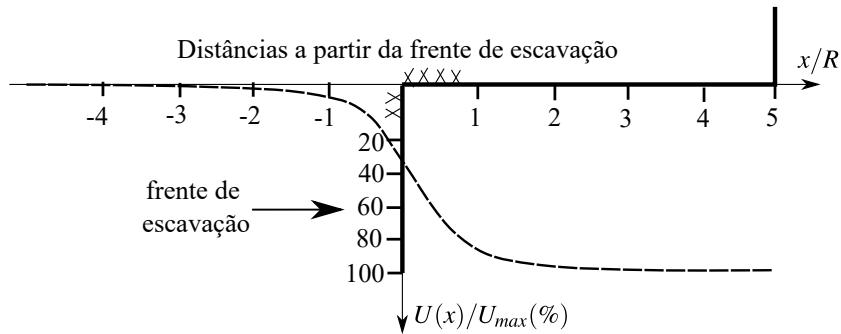


Figura 4.5 – Perfil de convergências próximo à frente de escavação (adaptado de: Hanafy e Emery (1980) *apud* Couto (2011, p. 42))

Como se pode ver na Figura 4.5, dentro das hipóteses dos autores, a partir de cinco raios da face de escavação a convergência atinge seu valor máximo  $U_{max}$ . Já na face, em  $x/R = 0$ , a convergência é superior à 35% do valor máximo, sendo que a um raio de distância a convergência é de aproximadamente 80% da total e quase 100% se tiver ultrapassado dois raios (Hanafy e Emery (1980) *apud* Couto (2011, p. 42)).

## 4.2 MECANISMOS DE RUPTURA EM TÚNEIS PROFUNDOS

A execução de túneis se tornou bastante segura após os preceitos filosóficos e teóricos do método empírico NATM (*New Austrian Tunneling Method*) desenvolvido por Rabcewicz (1964a, 1964b e 1965) e Rabcewicz e Golser (1973). E cada vez mais os estudos numéricos vêm ajudando os projetistas na tomada de decisões seguras durante a fase de projeto e execução. Contudo, apesar dessa abordagem empírica e numérica ter diminuído significativamente o número de incidentes estes ainda existem. Compilados de acidentes podem ser encontrados em estudos da Health and Safety Executive (HSE) (1996) e de pesquisadores como Stallmann (2005), Seidenfuß (2006) e Sousa (2010), tal como reunido por Špačková (2012) na Figura 4.6.

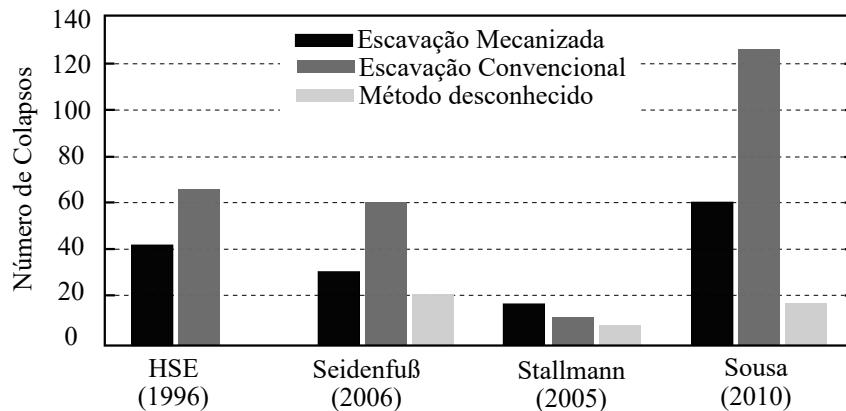


Figura 4.6 – Número de incidentes em quatro banco de dados descriptivados por autor e método de escavação (adaptado de: Špačková (2012, p. 19))

Sousa (2010), por exemplo, agrupou os incidentes, tanto de túneis profundos como superficiais, em nove tipos, tal como apresentado na Figura 4.7.

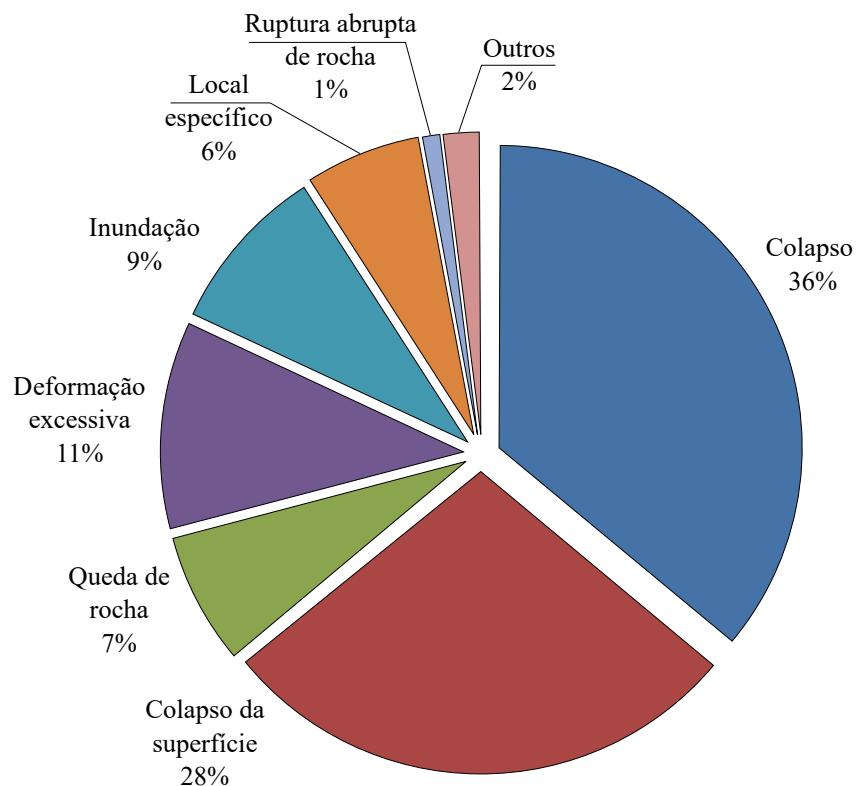


Figura 4.7 – Distribuição de incidentes de acordo com nove tipologias (adaptado de: Sousa (2010, p. 82))

Contudo, de forma geral, no comportamento de túneis profundos executados em maciços aparentemente contínuos, ou seja, ausência de grandes descontinuidades ou acidentes geológicos,

identifica-se dois mecanismos principais de colapso (ou ruptura): *Spalling* (descamação ou fragmentação) e *Squeezing* (deformações excessivas diferidas no tempo).

O *Spalling* é preponderante em maciço muito resistente, inicialmente pouco fraturado, no qual o nível de energia para iniciar a fissuração e consequente propagação costuma ser alto. Durante a redistribuição das tensões, causada pela escavação, as fissuras vão se desenvolvendo e destacando regiões da rocha no contorno da seção. Essas sofrem então uma descamação, ou ainda, ruptura por flambagem e tem-se, nesse último caso, uma repentina liberação de energia. Uma ruptura abrupta da rocha (*rockburst*). Esse comportamento é refletido na curva tensão-deformação de uma amostra do maciço, por um significativo amolecimento após o pico de resistência, caracterizando, dessa forma, a rocha como frágil (KLEINE, 2007, p. 83). A Figura 4.8 exemplifica esse mecanismo e a Figura 4.9 mostra a seção após tal colapso.

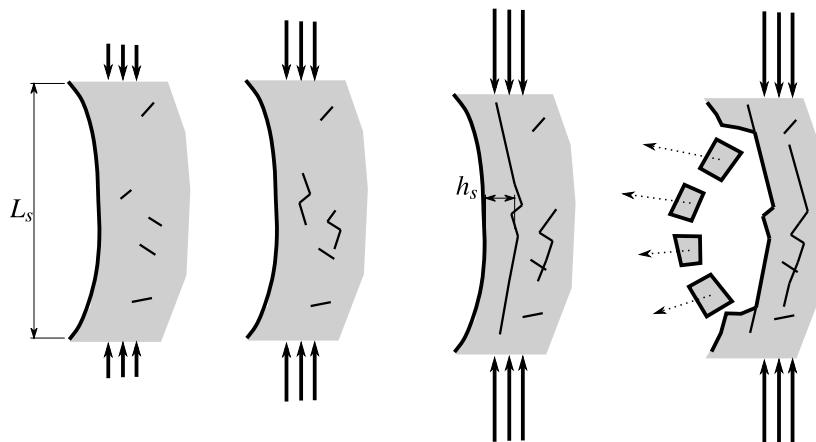


Figura 4.8 – Mecanismo de ruptura por *Spalling* de um comprimento  $L_s$  junto à seção do túnel: detalhamento do crescimento das fissuras e flambagem de uma profundidade  $h_s$  da rocha no contorno da seção (adaptado de: Germanovich e Dyskin (2000, p. 267))

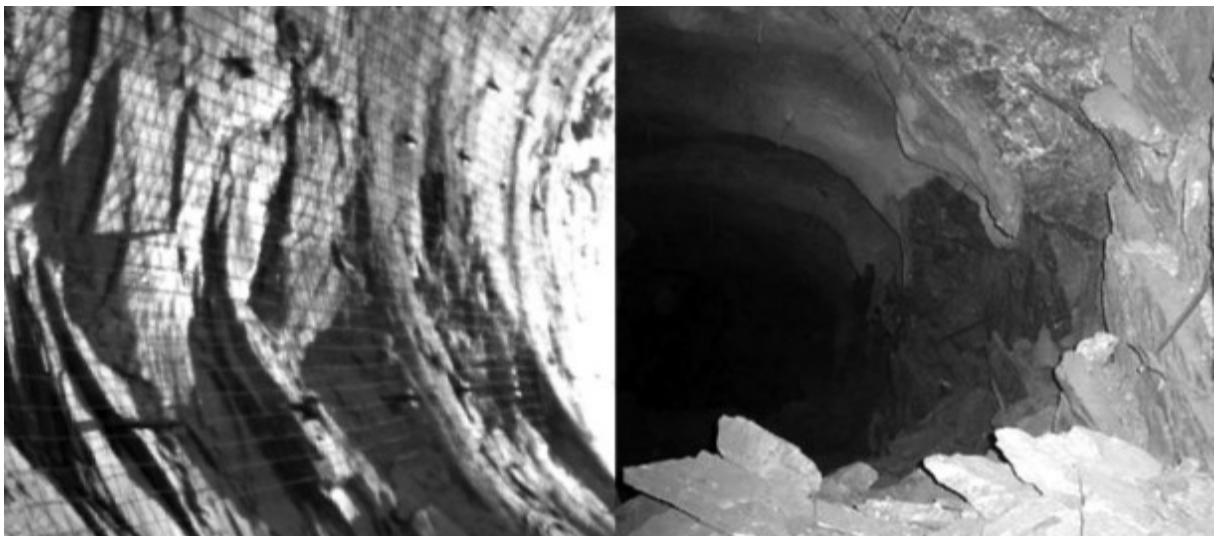


Figura 4.9 – À esquerda uma seção remanescente após moderada fragmentação e quebra em um túnel escavado com TBM e à direita uma seção em que parte do contorno apresentou instabilidade (flambagem) em um túnel escavado de forma não mecanizada (fonte: Diederichs (2007, p. 1084))

Já o *Squeezing* é um modo de falha relacionado ao cisalhamento e encontrado principalmente em túneis profundos em condições de grandes tensões *in situ*. Inicia-se quando a fissuração está suficientemente avançada, causando uma diminuição nas propriedades mecânicas do maciço, sem gerar instabilidade no contorno da seção. Essa diminuição das características mecânicas associada ao desenvolvimento da fissuração é progressiva e controlada, em especial, devido ao confinamento que reina no maciço. Ao contrário do primeiro mecanismo, a energia armazenada pela redistribuição das tensões é dissipada de forma gradual por deformações. Esse comportamento está intimamente relacionado com o fenômeno de fluência descrito na próxima seção a qual comprehende um dos comportamentos que se pretende modelar e estudar nessa tese.

A Figura 4.10 ilustra a evolução da convergência por esse fenômeno. Tal comportamento também é visto em galerias para estocagem de rejeitos radioativos em maciços argilosos profundos. Essas argilas possuem baixa condutividade hidráulica, portanto, pouca difusão molecular, sendo ideais para estocar esse material. Porém, apresentam esse comportamento diferido e que pode comprometer o projeto no longo tempo requerido para estabilização desse material radioativo. Estudos como os de Rousset (1988) e Armand et al. (2013) são alguns exemplos de investigações nesse sentido. Laboratórios como o HADES na Bélgica e *Meuse/Haute-Marne* (Figura 4.11) em Paris, são exemplos de túneis para estocagem radioativa que apresentam esse fenômeno.

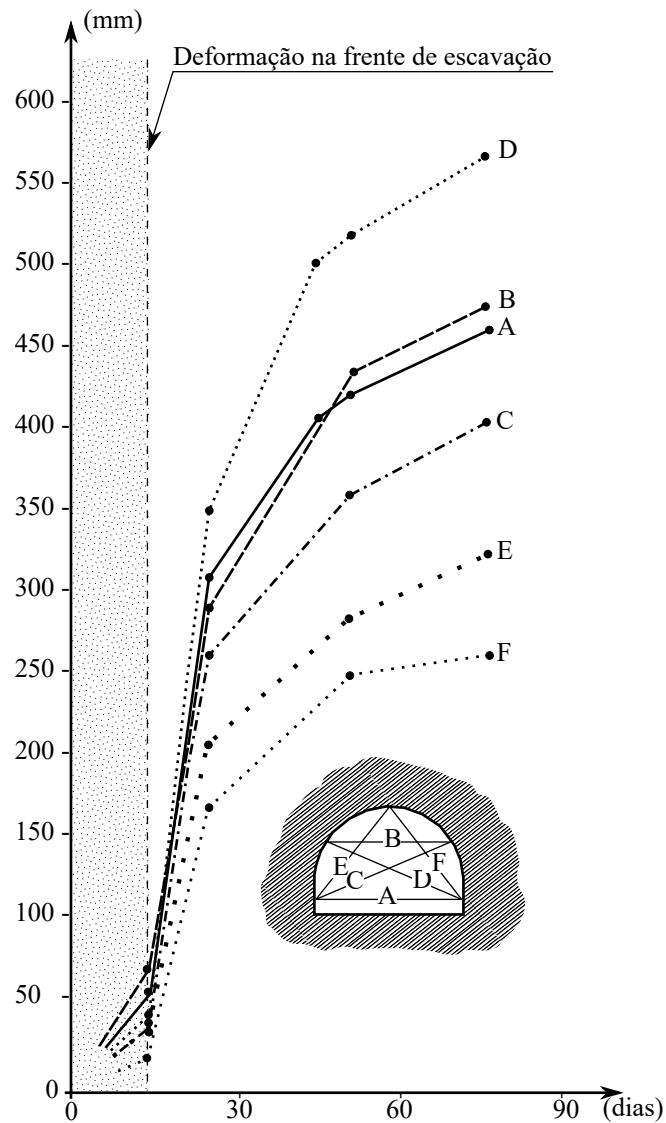


Figura 4.10 – Evolução da convergência do túnel Fréjus (adaptado de: Lunardi (1980, p. 17))

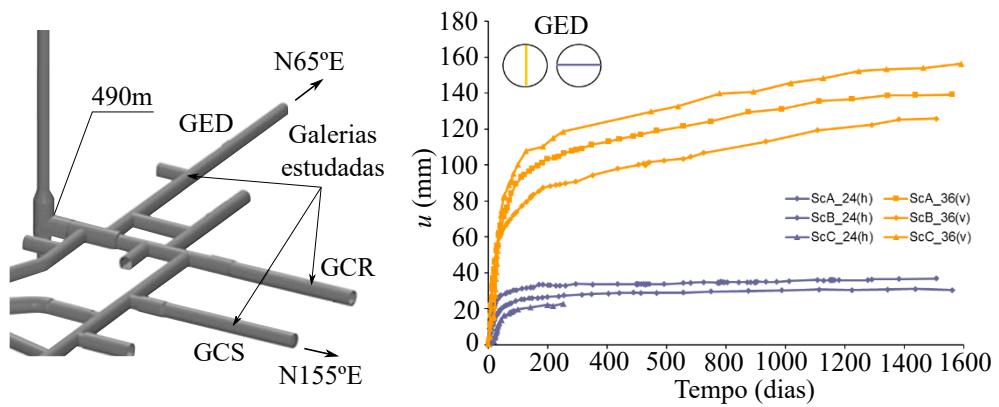


Figura 4.11 – Evolução do fechamento da seção GED (convergência) na galeria do laboratório *Meuse/Haute-Marne* (adaptado de: Guayacán-Carrillo et al. (2016, p. 103))

## 4.3 INFLUÊNCIA DA REOLOGIA DO MACIÇO

### 4.3.1 Comportamento instantâneo

Para caracterizar o comportamento de curto prazo do maciço, o ensaio triaxial associado à medição da variação do volume é comumente utilizado. Esse ensaio clássico na mecânica das rochas permite estudar as diferentes fases do comportamento: elástica, plástica, ruptura e pós-ruptura. As medidas da variação do volume permitem fazer estudos de outros aspectos do comportamento, como o coeficiente de Poisson e a dilatância. Esse ensaio, de forma resumida, consiste em submeter uma amostra cilíndrica do maciço a um estado de tensões triaxial hidrostático e, após atingido esse estado, leva-lá à ruptura através do aumento da carga axial (o desviador). Rousset (1988), por exemplo, caracterizou o comportamento de curto prazo de maciços argilosos profundos em frágil (argila rígida) e dúctil (argila plástica). Um maciço rígido pode ser visto na Figura 4.12.

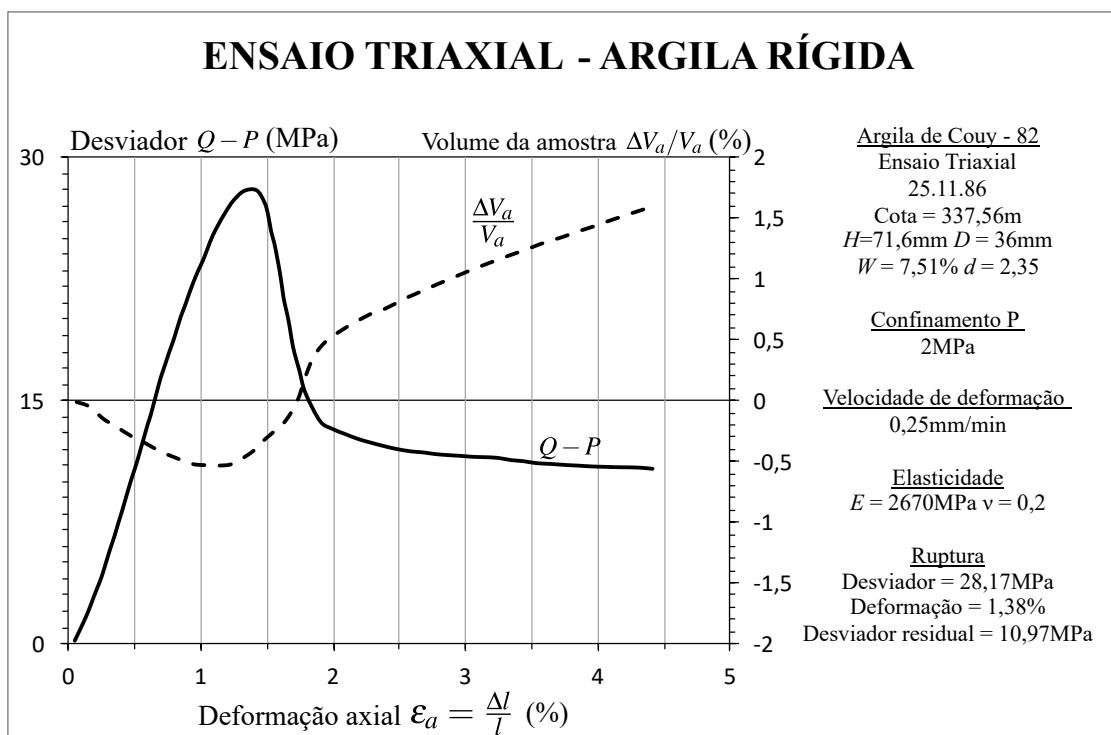


Figura 4.12 – Ensaio triaxial com medição da variação do volume para o caso de um maciço argiloso rígido (adaptado de: Rousset (1988, p. 35))

No comportamento da Figura 4.12 pode-se destacar as seguintes fases (ROUSSET, 1988, p. 34):

- a) **fase elástica** ( $0 < \epsilon_a \leq 0,8\%$ ): o comportamento do maciço é linear elástico e, ao mesmo tempo, o volume da amostra diminui linearmente, os dois parâmetros

elásticos, módulo de Young e Poisson, são facilmente obtidos;

- b) **fase pré-ruptua** ( $0,8\% \leq \varepsilon_a \leq 1,3\%$ ): o desviador continua aumentando, mas a curva  $Q - P$  não é mais linear, indicando que fenômenos irreversíveis passam a ocorrer. Ao mesmo tempo, a taxa de redução do volume diminui. Nessa fase também pode-se notar que os fenômenos irreversíveis ocorrem primeiro na curva  $\Delta V/V$ , em torno de 0,8% da deformação enquanto o desviador é de 65% do seu valor máximo e sua dependência ainda é linear;
- c) **fase de ruptura** ( $1,3\% \leq \varepsilon_a \leq 1,6\%$ ): o desviador cai acentuadamente, o que reflete a fragilidade do comportamento dessa argila. Enquanto isso, o volume da amostra aumenta drasticamente;
- d) **fase pós-ruptura** ( $1,6\% \leq \varepsilon_a \leq 5\%$ ): o desviador evoluiu pouco e mantém um valor residual de 40% do desvio máximo. Esta resistência residual ocorre pelo atrito ao deslizamento na superfície de ruptura que apareceu durante o carregamento. Nessa fase, o volume da abertura aumenta muito, o que reflete o comportamento altamente dilatante do material (2% superior ao volume original na deformação de 5%).

No caso de um maciço argiloso dúctil, o comportamento é diferente, tal como mostrado na Figura 4.13.

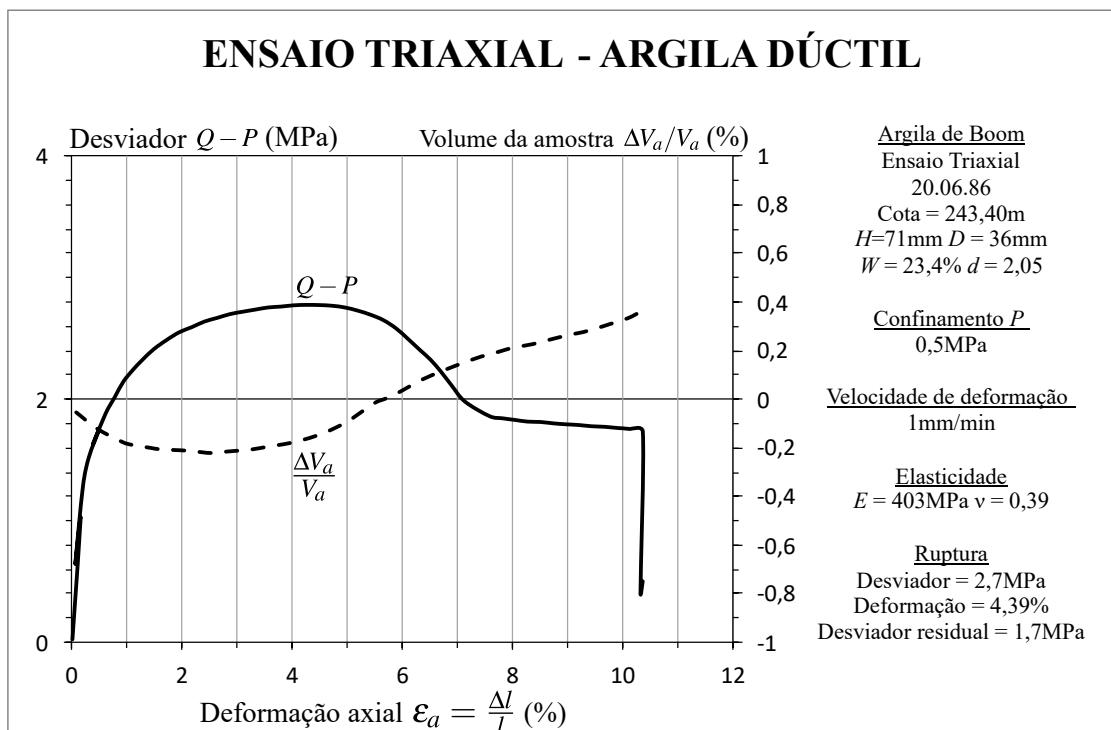


Figura 4.13 – Ensaio triaxial com medição da variação do volume para o caso de um maciço argiloso dúctil (adaptado de: Rousset (1988, p. 35))

No comportamento da Figura 4.13 podem-se destacar as seguintes fases (ROUSSET, 1988, p. 35):

- a) **fase elástica** ( $0 < \epsilon_a \leq 0,3\%$ ): pode-se ver que para esse caso, onde ambas as curvas são lineares, é uma fase muito pequena;
- b) **fase plástica com endurecimento** ( $0,3\% \leq \epsilon_a \leq 2\%$ ): durante essa fase o desviador continua a aumentar, mas a uma taxa decrescente. Da mesma forma, a redução do volume também teve sua taxa diminuída, mas o comportamento segue ainda de contração;
- c) **fase plástica perfeita** ( $2\% \leq \epsilon_a \leq 5\%$ ): o desviador agora segue quase constante e o volume da amostra acompanha o comportamento. Essa fase conduz a uma deformação significativa, superior a 5%;
- d) **fase plástica com amolecimento** ( $5\% \leq \epsilon_a \leq 8\%$ ): a resistência da amostra diminui gradualmente até um platô residual e o volume começa a aumentar;
- e) **fase plástica residual** ( $8\% \leq \epsilon_a \leq 10\%$ ): o desviador é agora novamente constante, cerca de 60% do valor máximo. O volume da amostra aumenta sensivelmente tendo uma dilatância moderada.

Para um maciço homogêneo, isotrópico e elástico linear a solução analítica para o campo de deslocamentos e tensões no entorno de uma seção circular afastada da zona de influência da face de escavação é conhecida desde Lamé (1852) e Kirsch (1898), sendo que este último generalizou a solução para um estado de tensões *in situ* anisotrópico.

Contudo, como visto nas figuras acima, a massa rochosa não é um material perfeitamente elástico e dependendo da magnitude das tensões *in situ* e do desvio das tensões causado pela escavação, o túnel pode apresentar uma zona plastificada ao redor da cavidade. Quando a seção do túnel é circular, o maciço homogêneo, isotrópico, elastoplástico, com tensões iniciais geostáticas-hidrostáticas, essa zona plástica é circular e caracterizada por um raio plástico  $R^p$ . Figura 4.14 ilustra a solução analítica de um maciço elástico e um elastoplástico. Apesar de a solução depender da forma da lei constitutiva elastoplástica, em geral, para túneis não revestidos, há uma diminuição nas tensões ao redor da cavidade e um aumento na convergência.

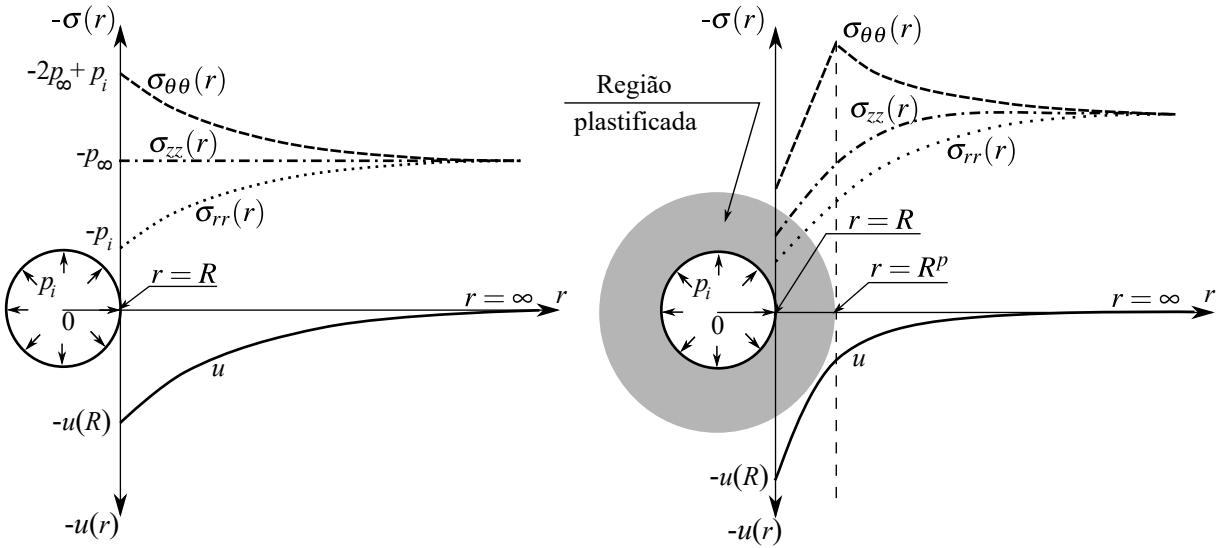


Figura 4.14 – Deslocamentos e tensões no entorno de um maciço submetido à pressão geostática-hidrostática  $p_\infty$  e pressão interna  $p_i$  no interior da seção do túnel. À esquerda, maciço elástico e à direita, elastoplástico.

Algumas soluções analíticas considerando leis elastoplásticas específicas para túneis não revestidos podem ser encontradas, por exemplo, em Salençon (1969), Hoek e Brown (1980), Brown et al. (1983), Detournay e Fairhurst (1987), Carranza-Torres e Fairhurst (1999), Carranza-Torres (2004), Sharan (2003, 2005) e Alejano et al. (2009).

Um dos objetivos dessa tese é justamente implementar um algoritmo geral para considerar esse comportamento instantâneo elastoplástico conjuntamente com o fenômeno diferido no tempo.

#### 4.3.2 Comportamento diferido no tempo

O comportamento viscoso do maciço, caracterizado pela deformação contínua no tempo, mesmo sobre tensão e temperatura constantes, é denominado **fluênciça** (*Creep*). E ocorre devido aos deslizamentos, quebras e acomodações no interior do maciço e, também, em conjunto com transporte e difusão de massa fluída. Em solos argilosos com condições drenadas, parte da fluênciça é dada conjuntamente com a dissipação de poro-pressão. Em maciços rochosos, com pouca umidade, essa condição está bastante relacionada com o avanço de trincas e fissuras sobre grande confinamento. Esse comportamento é geralmente caracterizado através de um ensaio triaxial de fluênciça com uma amostra do maciço. Nesse teste, sobre condições de temperatura e umidade controladas, registram-se as deformações axiais da amostra temporalmente, mantendo-se uma pressão hidrostática e um dado desviador constante. Dessa forma, tem-se a curva típica apresentada na Figura 4.15.

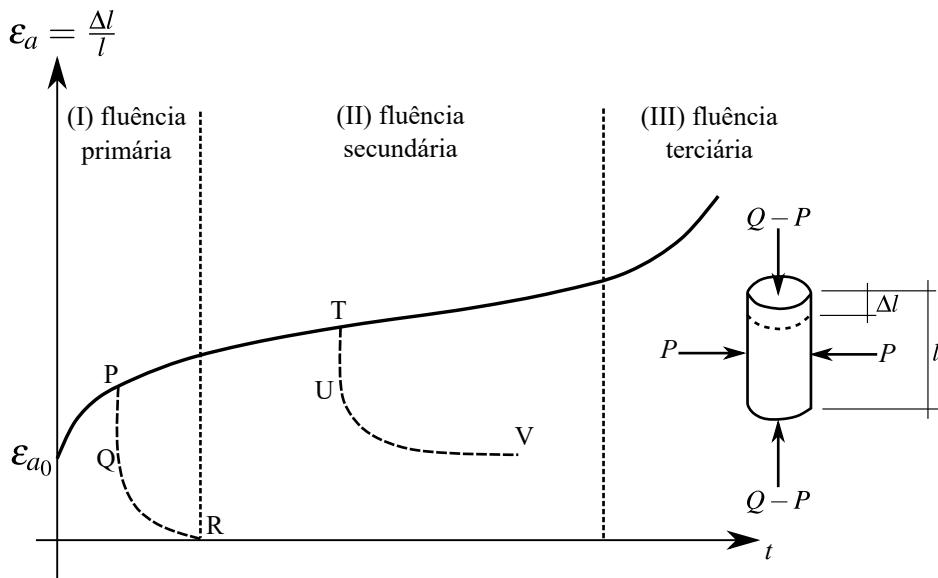


Figura 4.15 – Curva característica em um ensaio de fluência com os três estágios de comportamento (adaptado de: Costa (1984, p. 107))

Conforme pode-se ver na figura acima, no instante de aplicação da carga axial o corpo de prova sofre uma deformação instantânea inicial  $\epsilon_{a0}$  elástica ou, dependendo do nível das tensões, elastoplástica. Conforme o tempo avança as deformações continuam aumentando, porém, a uma taxa decrescente. Esse estágio é chamado de **fluência primária** (ou transitória), pois em seguida a taxa de deformação diminui até ficar constante iniciando dessa forma o segundo estágio chamado de **fluência secundária** (permanente ou estacionária). Após essa fase, que pode consumir a maior parte do tempo, as deformações podem evoluir para o terceiro estágio chamado de **fluência terciária** (instável), onde a taxa de deformação passa a aumentar até que o material atinge a ruptura (COSTA, 1984). Contudo, dependendo do nível das tensões, nem sempre a amostra apresenta os três estágios, podendo, inclusive, haver uma estabilização das deformações no tempo.

Além desses estágios de comportamento citados, a recuperação das deformações é outro fenômeno característico de materiais em regime de fluência. Se durante a fluência primária for retirada a carga desviadora o corpo recuperará a sua configuração original seguindo a trajetória  $\overline{PQR}$ , sendo o trecho  $\overline{PQ}$  uma recuperação rápida e instantânea e o trecho  $\overline{QR}$  uma recuperação lenta, assintótica e completa (salvo se houverem deformações plásticas durante o carregamento). Nesse caso, em que a recuperação é completa, o maciço está em regime viscoelástico. Contudo, se a descarga for feita no segundo estágio, haverá o mesmo comportamento instantâneo (trecho  $\overline{TU}$ ) e assintótico (trecho  $\overline{UV}$ ), mas a recuperação pode não ser mais completa. Nesse caso, evidencia-se o material comportando-se em seu regime viscoplastico (COSTA, 1984). Um exemplo típico desse ensaio pode ser visto na Figura 4.16.

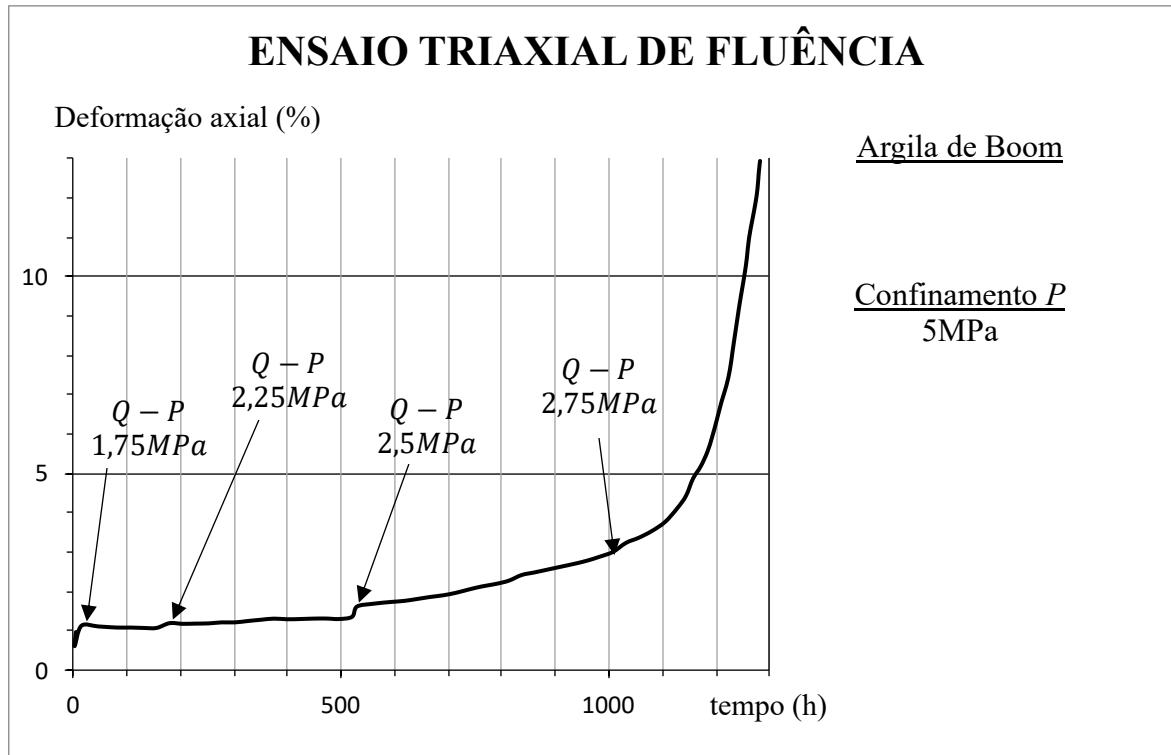


Figura 4.16 – Ensaio triaxial de fluência da Argila de Boom (adaptado de: Rousset (1988, p. 42))

Na figura acima, pode-se destacar as seguintes fases (ROUSSET, 1988, p. 42):

- para um pequeno desviador (1,75MPa) a deformação aumenta rapidamente no início. Sua evolução, em seguida, diminui e se estabiliza depois de alguns dias. Nessa etapa foi observado apenas a fase primária, transitória;
- para um desviador moderado (2,25MPa), após uma fase rápida, mas desacelerada (fase primária), observa-se o desenvolvimento de uma fase com taxa de deformação constante ( $\dot{\varepsilon}_a \simeq 7 \cdot 10^{-6} h^{-1}$ ). Essa é uma fase de fluência secundária, que leva a deformações relativamente importantes, da ordem de 3,5% após três meses;
- para um desviador forte (2,75MPa), próximo do limite máximo de resistência do comportamento instantâneo (Figura 4.13), a taxa de deformação da fase secundária é cinco vezes maior do que a anterior. Após duas semanas, leva a um aumento na taxa de deformação (fase terciária) e, finalmente, a ruptura da amostra, logo que a deformação ultrapassa 6%.

Como pode-se ver na Figura 4.16, o ensaio de fluência permite conhecer os diferentes limiares que separam os diferentes comportamentos viscosos: fluência primária, secundária, secundária

com terciária seguida de ruptura. Também é possível estimar a velocidade das deformações por fluência durante a fase secundária, dependendo da magnitude do desviador. Dessa forma, pode-se obter os principais parâmetros de viscosidade para o modelo do material. Cabe salientar que a fluência depende da interação entre fatores intrínsecos do maciço (como a forma, defeitos e composição da micro e macroestrutura) com fatores extrínsecos (como a magnitude da tensão desviadora, temperatura, pressão de confinamento e umidade). Consequentemente, os ensaios procuram simular esses fatores externos de modo a obter parâmetros mais próximos da realidade para uma correta modelagem. Maiores detalhes sobre ensaios de fluência e caracterização desse comportamento podem ser obtidos em Rousset (1988), para o caso de maciços argilosos profundos ou ainda em Feda (1992), Hunsche (1994), Dusseault e Fordham (1993) e Cristescu e Hunsche (1998) para outros diversos casos.

Portanto, no comportamento do túnel, além da deformação instantânea (resultante da redistribuição das tensões e possível plastificação do maciço ao redor da cavidade), deformações diferidas podem ocorrer e, dado a magnitude dos efeitos, pode tender a estabilização ou levar o sistema maciço-revestimento a danos e colapso. De forma ilustrativa, a Figura 4.17 mostra a convergência  $U$  em função do tempo  $t$  e do avanço da escavação  $x$  para uma dada seção.

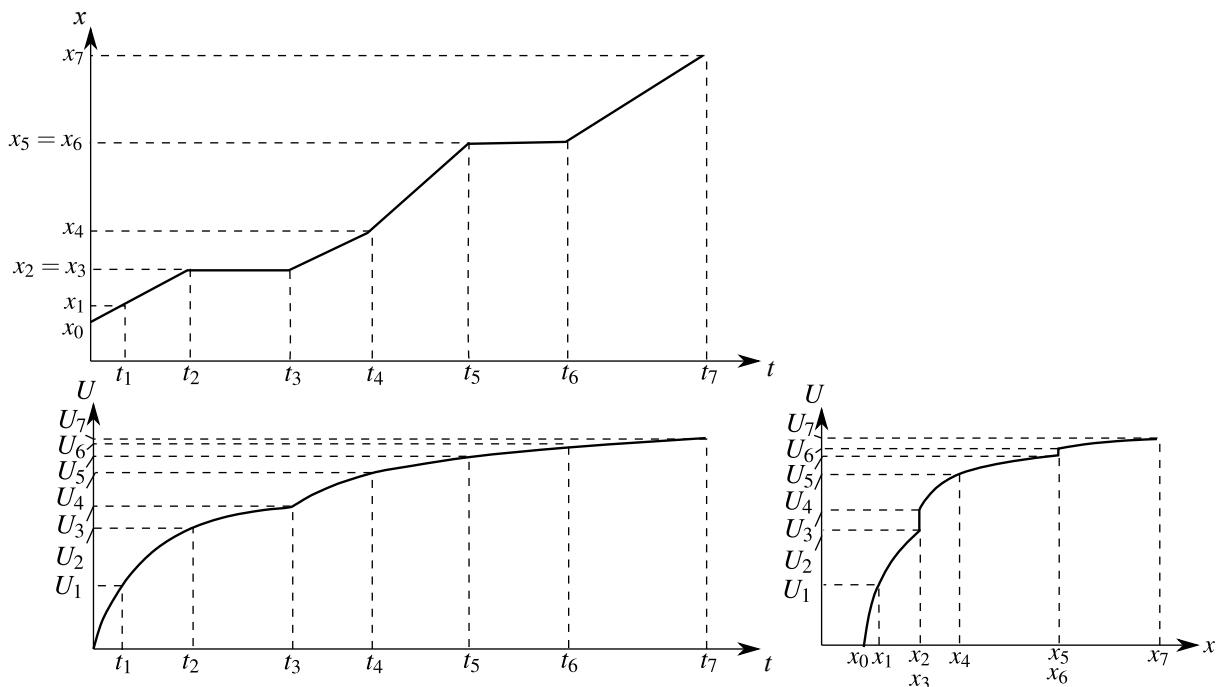


Figura 4.17 – Evolução da convergência  $U$  no tempo  $t$  em função do avanço da escavação  $x$  (adaptado de: Panet (1995, p. 12))

Como pode-se ver na figura acima, mesmo sem escavar nos intervalos  $[t_2, t_3]$  e  $[t_5, t_6]$  a convergência não é constante, tal como seria em um maciço apenas elástico ou elastoplástico. Além disso, nesse caso ilustrativo, a convergência não só evoluiu como também se estabiliza em uma

assintótica com o tempo, indicando que a fluênciá está em um regime primário ou secundário.

Do ponto de vista da modelagem há diversas formas de introduzir esse comportamento nas análises de túneis, sejam em soluções analíticas ou numéricas, diversas leis constitutivas são empregadas. Podem-se classificar essas leis como:

- a) **empírico-experimentais**: geralmente são leis expressas por funções ajustadas empiricamente. Para tal existem funções potenciais, como em Obert (1965), exponeciais em Singh e Mitchell (1968) e hiperbólicas como em Mesri et al. (1981) e Phienwej, Thakur e Cording (2007);
- b) **acoplamento hidro-mecânico**: leis que consideram o maciço como sendo constituído por uma fase sólida e fluída. Exemplos dessa abordagem podem ser encontrados nos trabalhos de Griffiths (1994), Leem e Kemeny (1999), Wong et al. (2008), Dele-ruyelle et al. (2014) e Prassetyo e Gutierrez (2018).
- c) **Viscoelásticas**: leis formuladas através da analogia com sistemas mecânicos derivados da associação de elementos simples (mola e amortecedor). Estudos com essa abordagem podem ser encontrados em Sakurai (1978), Panet (1979), Sulem, Panet e Guenot (1987), Ladanyi e Gill (1988), Goodman (1989), Pan e Dong (1991a, 1991b), Fahimifar et al. (2010), Wang, Utili e Jiang (2014) e Wang et al. (2018);
- d) **Viscoplásticas**: leis formuladas através da teoria da plasticidade dependente do tempo, que, tal como as leis viscoelásticas, também possuem uma analogia com sistemas mecânicos elementares, mas introduzem um elemento de atrito, para representar o estado de tensões a partir do qual o fenômeno passa a ter importância. Leis desse tipo podem ser encontradas nos estudos de Bérest e Nguyen (1983), Fritz (1984), Cristescu (1985, 1988), Ottosen (1986), Bernaud (1991), Gioda e Cividini (1994), Boidy, Bouvard e Pellet (2002), Sekine et al. (2009) e Roateşti (2012,2014).

Um exemplo da magnitude dos efeitos viscosos frente a leis elásticas e elastoplásticas em túneis profundos, pode ser vista no perfil de convergências da Figura 4.18 obtidas de análises em axissimetria. Quando se considera no modelo apenas a lei elastoviscoplástica em regime secundário, tal possui um comportamento intermediário entre as leis elásticas e elastoplásticas. Além disso, quanto mais rápido a escavação, mais a resposta se aproxima da solução em elasticidade e quanto mais lenta mais se aproxima da elastoplasticidade. Isso é uma característica própria dos modelos viscoplásticos, por exemplo.

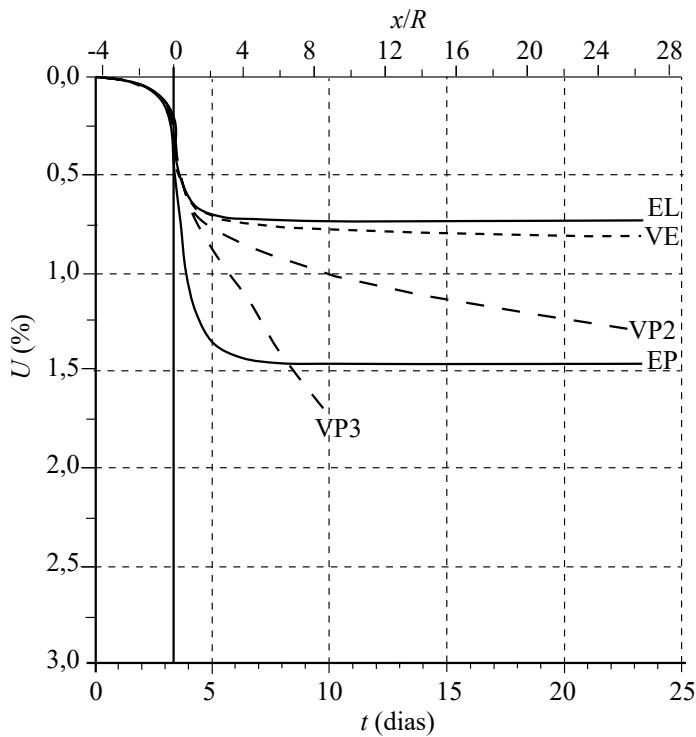


Figura 4.18 – Perfil de convergências, em análises numéricas axissimétricas com maciço elástico (EL), elastoplástico (EP), viscoelástico (VE), viscoplástico com fluência no regime secundário (VP) e em regime terciário (VP3), todos na ausência de revestimento (adaptado de: Sterpi e Gioda (2009, p. 329))

Outra abordagem é a combinação de diversos comportamentos, tanto instantâneos quanto diferidos. Esse é o principal enfoque dessa tese, que compreenderá a implementação de um comportamento elastoplástico-viscoplástico.

#### 4.3.3 Alguns estudos considerando leis elastoplásticas e viscoplásticas

Alguns estudos considerando leis elastoplásticas-viscoplásticas podem ser encontrados em Rousset (1988, 1990), Piepi (1995), Purwodihardjo e Cambou (2005), Kleine (2007), Shafiq, Taha e Chik (2008), Debernardi e Barla (2009), Souley et al. (2011), Manh et al. (2015) e Vrakas e Anagnostou (2015). A seguir alguns comentários sobre cada um desses estudos.

**Rousset (1988)**, no intuito de estudar túneis em maciços argilosos profundos (usados para estocagem de rejeitos radioativos) fez um excelente trabalho de caracterização experimental do comportamento desses e classificou-os em rígidos e dúcteis. Propôs um modelo elastoplástico-viscoplástico com critério tanto de Tresca quanto Mohr-Coulomb, perfeito (para as argilas rígidas) e com amolecimento bi-linear (para as dúcteis). O modelo de Perzyna (1966) foi adotado como sendo o mecanismo viscoso com as mesmas superfícies de escoamento da elastoplasticidade. O

seu trabalho comprehende principalmente soluções analíticas.

Segundo os mesmos passos de Rousset, **Piepi (1995)** estudando argilas rígidas, desenvolveu um cálculo semi-analítico para um túnel circular em um maciço elastoplástico-viscoplástico com critério de Tresca sem endurecimento ou amolecimento. Também, no mesmo trabalho implementou essa lei constitutiva (entre outras como von-Mises, Drucker-Prager e Mohr-Coulomb) em elementos finitos, para abordar túneis em axissimetria, calibrou os parâmetros através de ensaios e verificou os resultados com sua solução analítica.

**Purwodihardjo e Cambou (2005)**, apresentam o modelo elastoplástico-viscoplástico composto pelo modelo elastoplástico CJS desenvolvido por Cambou e Jafari (1987), que, além de dividir o mecanismo em uma parcela volumétrica e desviatória, leva em conta a dependência da densidade do maciço através da teoria do estado crítico, como pode-se ver em Maleki, Dubujet e Cambou (2000). A parcela diferida é dada pelo modelo viscoplástico de Perzyna (1966) com o parâmetro de viscosidade em função da distância entre o estado de tensões e a superfície de ruptura, para representar a fase terciária. O critério viscoplástico é inspirado na teoria da superfície delimitadora de Kaliakin e Dafalias (1990). O modelo foi calibrado com os ensaios triaxiais feitos por Piepi (1995). Por fim, seu modelo foi utilizado para analisar um estudo de caso referente ao túnel de *Tartaigneille*, localizado entre *Valence* e *Montélimar* (França), utilizando análises axissimétricas e em estado plano de deformações.

**Kleine (2007)** propõe um novo modelo reológico chamado de L&K (Laigle & Kleine) para prever o comportamento a curto, médio e longo prazo de maciços rochosos. Esse modelo é baseado no modelo CJS com o critério de plasticidade de Hoek-Brown. A parcela diferida também é dada por um modelo viscoplástico de Perzyna (1966) não associado. É aplicado em dois estudos de caso: do laboratório de pesquisas nucleares canadense da AECL (*Atomic Energy of Canada Limited*) localizado no interior do granito *Lac du Bonnet*, e da galeria GMR do laboratório *Meuse/Haute-Marne*.

**Shafiq, Taha e Chik (2008)** incorporaram o modelo elastoplástico-viscoplástico de Kaliakin e Dafalias (1990) e Kaliakin (2005) em um programa de elementos finitos escrito em *Fortran90* para análise bidimensional (estado plano de deformações e axissimetria) do túnel contratado N-2 para o Projeto da estação de tratamento de água no nordeste da península de *San Francisco*. Também modelaram a dissipação da poropressão através de uma versão da equação matricial de Biot (1941) dada por Lewis e Schrefler (1998). Chegaram à conclusão que o modelo elástico subestima os deslocamentos no revestimento quando comparado com aqueles previstos pelo seu modelo elastoplástico-viscoplástico.

**Barla, Bonini e Debernardi (2008, 2010)** compararam os resultados de três modelos: dois modelos numéricos elastoplástico-viscoplástico (CVISC nativo do software FLAC2D, conforme

ITASCA (2006) e SHELVIP desenvolvido por Debernardi (2008)) e um elastoviscoplástico analítico (VIPLA desenvolvido por Lemaitre e Chaboche (1994)). Essa comparação é feita em relação ao acesso de *Saint Martin La Porte* (no túnel de Base *Lyon-Turin*) em análises de deformação plana e axissimétricas. A ênfase desses pesquisadores estava na aplicação do modelo mais recente SHELVIP que comprehende uma superfície de plasticidade sem lei de endurecimento/amolecimento e uma superfície viscoplastica com endurecimento. Mais tarde, Debernardi e Barla (2009), seguiram desenvolvendo esse modelo apresentando soluções analíticas.

**Souley et al. (2011)** apresentam o desenvolvimento de um modelo para prever o comportamento instantâneo e diferido do maciço argiloso *Callovo-Oxfordian* onde se encontra o laboratório subterrâneo para estocagem radioativa *Meuse/Haute-Marne* em Paris. A resposta instantânea é assumida como elastoplástica com superfície de plasticidade de Hoek-Brown e apresenta endurecimento/amolecimento. Já o comportamento diferido é baseado no modelo de Lemaitre modificado proposto por Su (2007). Após calibrar esse modelo com ensaios triaxiais de laboratório, partem para aplicação da galeria GED que possui tensão *in situ* horizontal e vertical diferentes. Contudo, tal como apontado pelos autores do estudo, seu modelo subestimou os valores das convergências verticais e superestimou as horizontais.

**Manh et al. (2015)**, utilizaram o modelo CVISC, cuja formulação pode ser encontrada em Bonini et al. (2009), para simular o comportamento diferido anisotrópico da galeria de acesso *Saint Martin La Port* (no túnel de Base *Lyon-Turin*). Nesse modelo, a componente volumétrica é modelada utilizando um comportamento puramente elastoplástico com função de escoamento de Mohr-Coulomb e, na componente desviadora, o mesmo modelo elastoplástico associado com o modelo reológico de Burger (Kelvin associado com Maxwell). Esses autores também apresentam uma solução analítica em estado plano de deformações para esse modelo considerando uma seção circular, maciço homogêneo, incompressível e tensões geostáticas-hidrostáticas. Mais tarde Mata (2018) aplicou esse mesmo modelo no estudo de caso do túnel rodoviário *Fréjus* e sua galeria de segurança. Comparando o método de escavação com perfuração e detonação com TBM, viu que este ultimo reduz significativamente as deformações no longo prazo.

**Vrakas e Anagnostou (2015)** desenvolveram uma função hiperbólica para corrigir a convergência obtida em soluções que consideram pequenas deformações, eliminando assim a necessidade de análises em grandes deformações (para túneis cujas convergências excedem 10% do raio do túnel) que estão associadas com o comportamento diferido no tempo.

**Kargar (2019)** apresenta soluções analíticas para alguns modelos viscoelásticos e o modelo CVISC.

#### 4.4 INFLUÊNCIA DA FORMA DA SEÇÃO

Muitas análises consideram, por simplificação, a seção circular. Esse formato de seção com um estado inicial de tensões geostático-hidrostático em um maciço homogêneo e isotrópico, fora da zona de influência da face de escavação, garante um campo de deslocamentos puramente radial. Essas condições são particularmente comuns nas soluções analíticas que consideram estado plano de deformações. Contudo, seções diferentes das circulares apresentam um campo de tensões e deformações não uniformes, havendo concentração de tensões próximo às quinas. Isso pode ser visto na Figura 4.19.

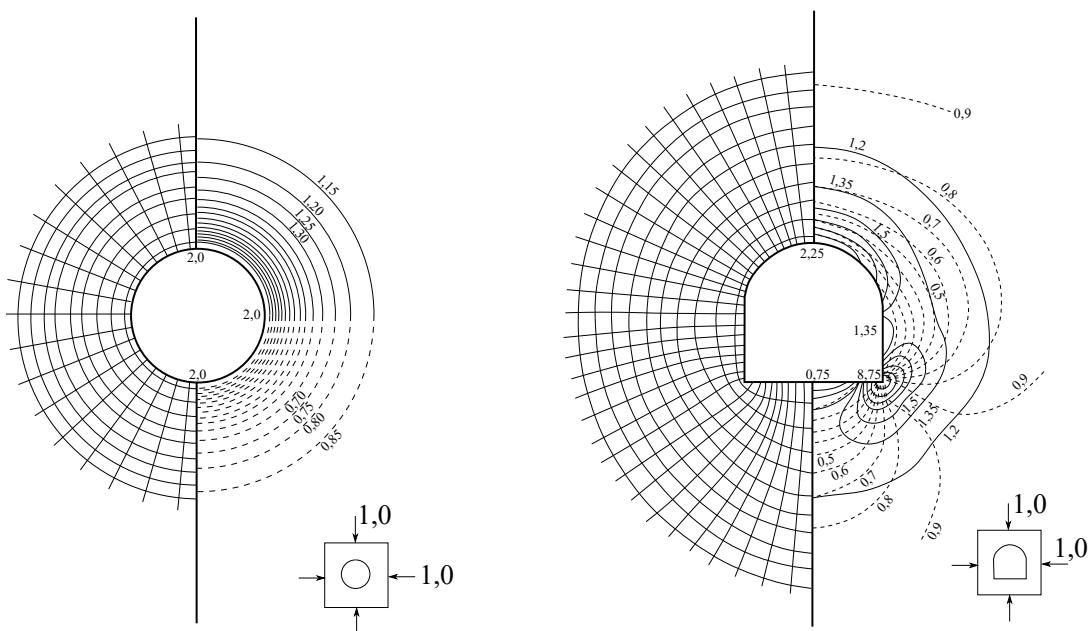


Figura 4.19 – Trajetória das tensões principais e linhas de isotensão, da maior e menor tensão principal, para seção circular (à esquerda) e ferradura (à direita) em condições geostáticas hidrostáticas (adaptado de: Hoek e Brown (1980, p. 469, 484))

#### 4.5 INFLUÊNCIA DA PROFUNDIDADE DO TÚNEL

A profundidade do túnel está diretamente relacionada com o estado de tensões iniciais. Dados empíricos (Figura 4.20a) sugerem que a tensão vertical pode ser estimada através da seguinte expressão (HOEK; BROWN, 1980, p. 96):

$$\sigma_v(z = H) = \gamma_m H, \quad (4.1)$$

em que  $\gamma_m$  é o peso específico do maciço e  $H$  a profundidade do túnel. Hoek e Brown (1980) reunem diversos dados que indicam que  $\gamma_m$  (para maciços rochosos) situa-se na faixa de  $20\text{kN/m}^3$  à  $30\text{kN/m}^3$ . Contudo, esses limites podem variar dependendo do banco de dados utilizado como, por exemplo, em Martin, Kaiser e Christiansson (2003, p. 1030).

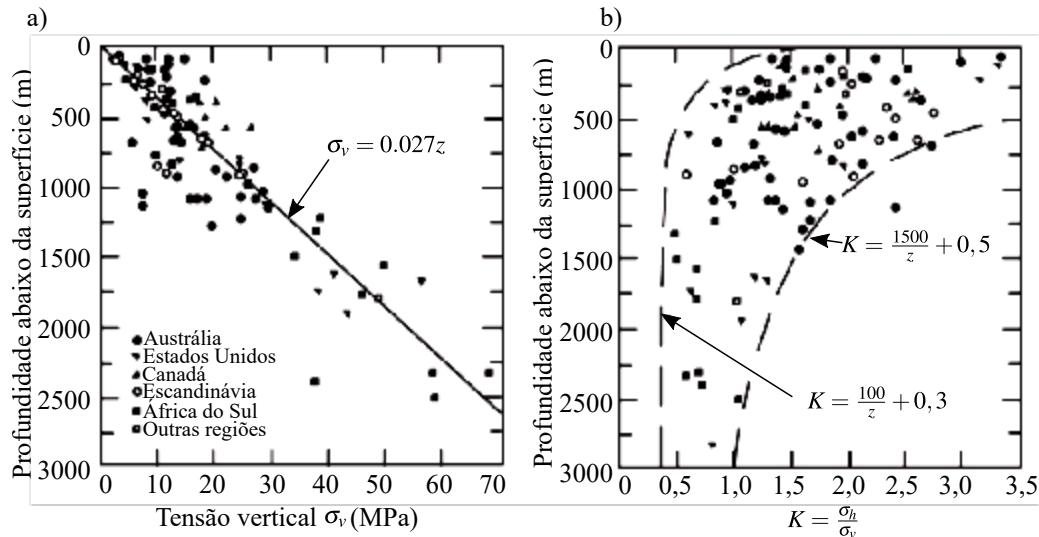


Figura 4.20 – a) tensões verticais e b) razão entre a tensão horizontal e vertical (coeficiente de empuxo  $K$ ) (adaptado de: Hoek e Brown (1980, p. 99-100))

Como pode ser visto na Figura 4.20b, há certa dispersão da tensão horizontal. Esse aspecto ainda hoje é objeto de estudo e uma boa revisão desses trabalhos pode ser obtida em Zhu (2013). Muitos desses trabalhos propõem equações simplificadas para obter o valor do coeficiente de empuxo  $K$ . Por exemplo, Sheorey (1994, p. 32) desenvolveu um modelo elasto-estático termal para as tensões na crosta da terra e obteve a seguinte equação simplificada que pode ser utilizada para estimar o coeficiente de empuxo  $K$  em maciços rochosos:

$$K = 0,25 + 7E_h(0,001 + 1/H). \quad (4.2)$$

Sendo  $H$  (m) a profundidade e  $E_h$  (GPa) o módulo de deformação médio horizontal na parte superior da crosta terrestre. Contudo, como apontado por Sheorey, seu trabalho não explica a ocorrência de tensões verticais mais altas do que a profundidade indicaria ou o porquê de duas tensões horizontais raramente serem iguais. Segundo Hoek, Kaiser e Bawden (1998, p. 67), essas diferenças provavelmente se devem às características topográficas e geológicas locais, que não podem ser consideradas em um modelo de grande escala. Consequentemente, em maciços onde as tensões *in situ* tendem a ter uma influência significativa no comportamento de aberturas subterrâneas é melhor medi-las *in loco*.

Para túneis profundos, quando  $H/D > 10$ , sendo  $D$  o diâmetro equivalente da seção, é comum durante as análises, desprezar-se a variação da tensão vertical com a profundidade. Uma vez que, em túneis profundos, a variação de tensão ao longo do diâmetro da seção é irrelevante frente a magnitude da tensão na cota da profundidade, ou seja,

$$|\Delta\sigma_v| = |\sigma_v(H + D/2) - \sigma_v(H - D/2)| = |\sigma_v(D)| \ll |\sigma_v(H)|. \quad (4.3)$$

Esse princípio pode ser melhor entendido através da Figura 4.21.

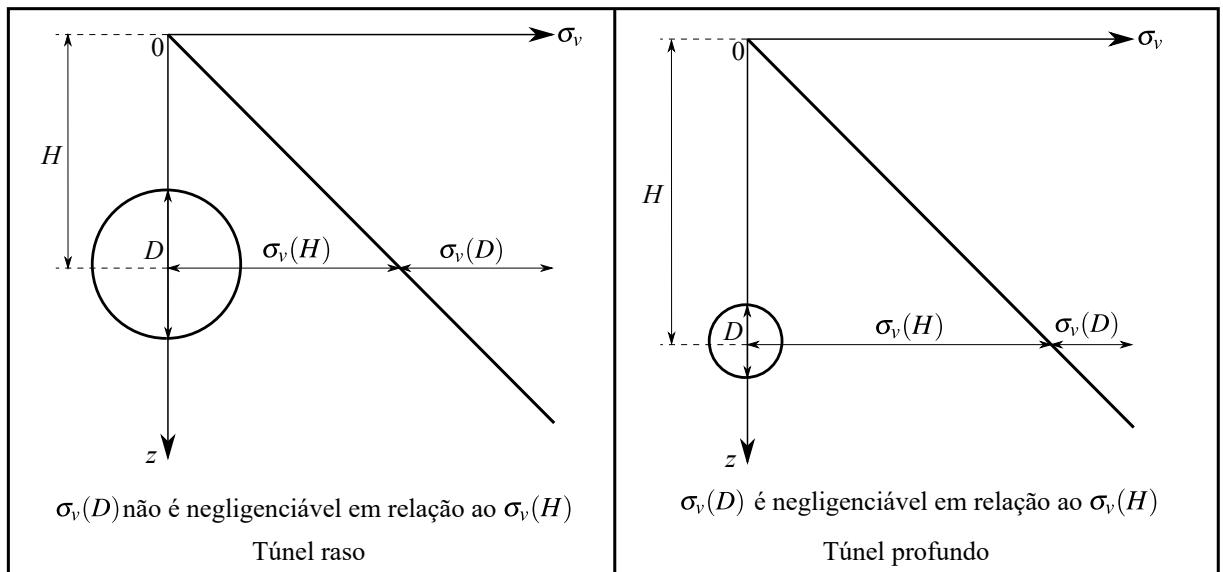


Figura 4.21 – Princípio para se desconsiderar a variação da tensão vertical na região próxima ao túnel (adaptado de: Benamar (1996, p. 8))

De qualquer forma, conforme a Figura 4.20, a consideração das tensões iniciais geostática hidrostática é apenas um caso específico de tensões *in situ*, ou seja, quando  $K = 1$ . A diferença entre as tensões verticais e horizontais afetam fortemente o campo de tensões e deformações após a escavação. Isso pode ser visto em análises elásticas com estado plano de deformações através, por exemplo, da comparação entre a Figura 4.19 e a Figura 4.22 obtidas por Hoek e Brown (1980).

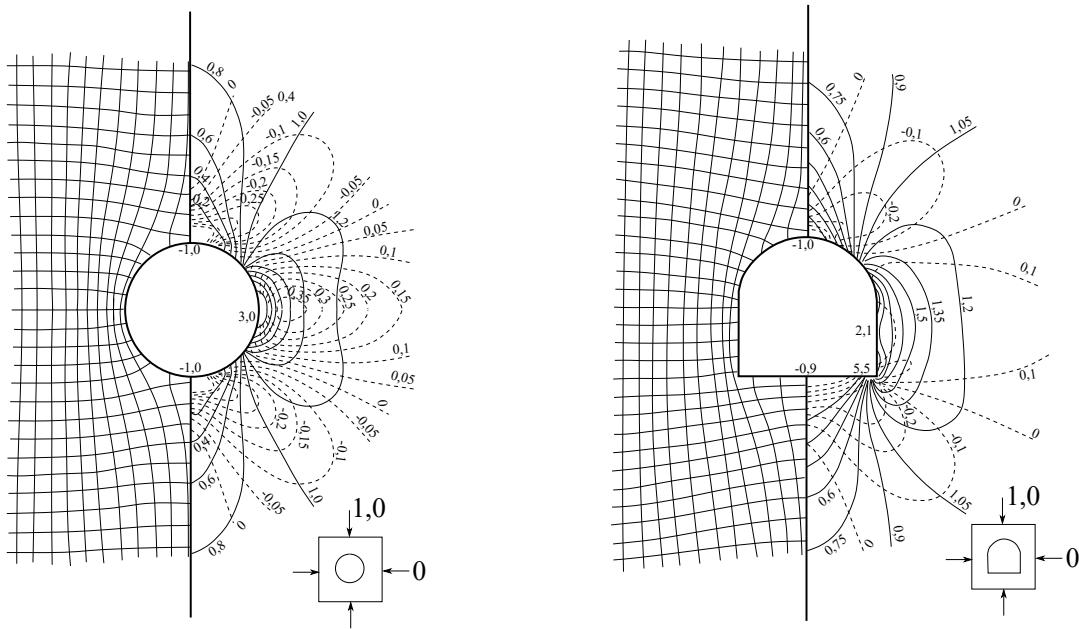


Figura 4.22 – Trajetória das tensões principais e linhas de isotensão da maior e menor tensão principal para seção circular (à esquerda) e ferradura (à direita) considerando  $K = 0$  (adaptado de: Hoek e Brown (1980, p. 468,483))

Além disso, quando o maciço apresenta um comportamento elastoplástico, a anisotropia das tensões *in situ* afeta o formato da zona de plastificação. Isso pode ser visto no estudo de Detournay e St. John (1988). Utilizando soluções analíticas para seções circulares em um maciço elastoplástico com lei do comportamento de Mohr-Coulomb, esses autores apresentam um ábaco identificando os **modos de falha** (formas das zonas de plastificação) de acordo com o grau de anisotropia das tensões iniciais (Figura 4.23).

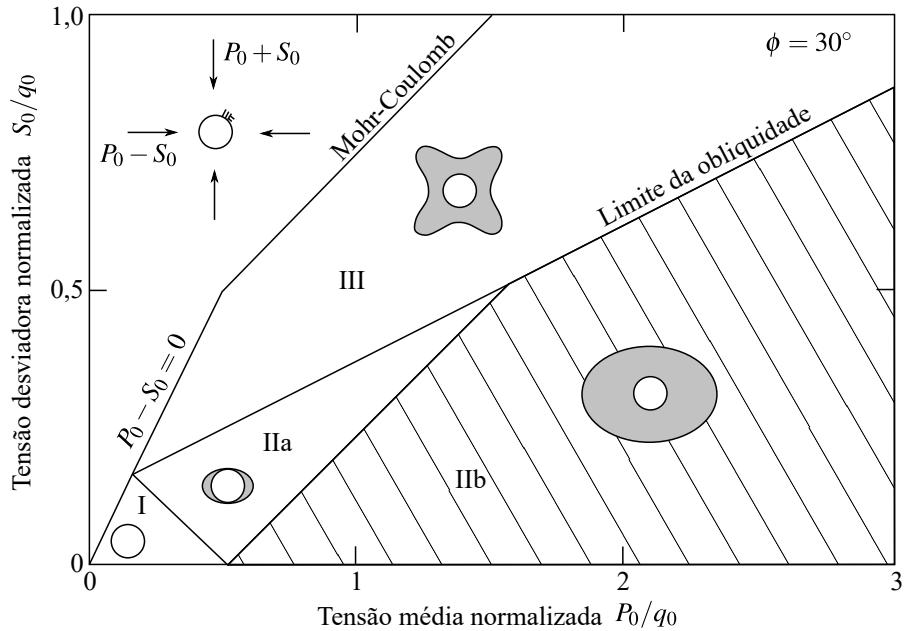


Figura 4.23 – Relação entre o estado de tensões iniciais e os modos de falha, onde  $q_0$  é a resistência à compressão uniaxial do maciço (adaptado de: Detournay e St. John (1988, p. 121))

Como se pode ver na Figura 4.23, esses autores identificaram quatro zonas:

- região I:** a massa rochosa se comporta como um material elástico linear, ou seja, onde o estado de tensões não excedeu o critério de plasticidade em qualquer ponto;
- região IIa:** a plastificação da rocha ao redor do túnel se estende em uma direção perpendicular a maior tensão principal de compressão, mas ainda não engloba completamente a seção do túnel;
- região IIb:** a seção está completamente rodeada por uma zona de plastificação oval;
- região III:** a zona de plastificação apresenta um formato de borboleta.

Além disso, quando há revestimento a anisotropia das tensões poderá ocasionar tração ou falha por compressão e cisalhamento na coroa ou nas paredes laterais do revestimento (BRADY; BROWN, 2006). Contudo, para uma situação em que  $0 \leq K \leq 1$ , em túneis profundos, a consideração de um estado geostático hidrostático ( $K = 1$ ) pode ser conservadora, para o dimensionamento do revestimento, como pode ser visto no estudo de Shrestha e Panthi (2015).

## 4.6 INFLUÊNCIA DA PROXIMIDADE DA SUPERFÍCIE

Quando o túnel está muito próximo da superfície, a região do maciço acima da seção não possui condições para formar a parte superior do arco transversal e desviar as tensões ao redor da cavidade. Isso faz com que essa parcela do maciço atue como sobrecarga sobre o revestimento. Dessa forma, o maciço no entorno de uma seção circular, por exemplo, não possui o campo de deslocamentos puramente radial. A rigor essa condição de túnel raso vai depender da capacidade resistente do maciço, contudo há na literatura indicações de que essa condição é atingida quando a altura de maciço sobre a coroa da seção transversal é menor que duas vezes o diâmetro (CHAPMAN; METJE; STÄRK, 2018, p. 67). Como consequência, a deformação da seção passa a apresentar três modos de deformações sobrepostos: uma convergência uniforme, uma distorção e translação vertical (Figura 4.24).

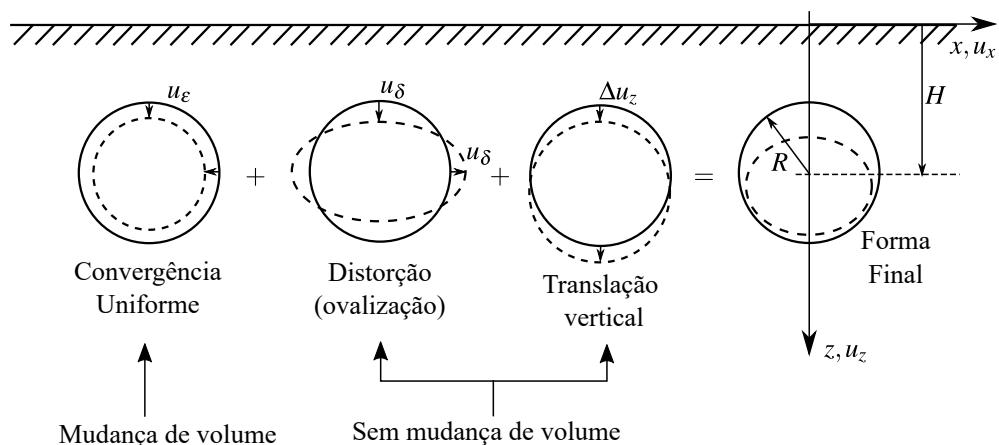


Figura 4.24 – Modos de deformações em túneis superficiais de seção circular (adaptado de: Pinto e Whittle (2014, p. 4))

Quando o túnel apresenta um revestimento de concreto, por exemplo, o modo de deformação de distorção poderá induzir tensões de tração no interior do revestimento. Além disso, tão ou mais importante que a deformada da seção é o recalque induzido na superfície pelo processo de escavação. Conforme o túnel avança ele forma uma bacia de assentamento superficial que pode afetar as estruturas existentes (Figura 4.25).

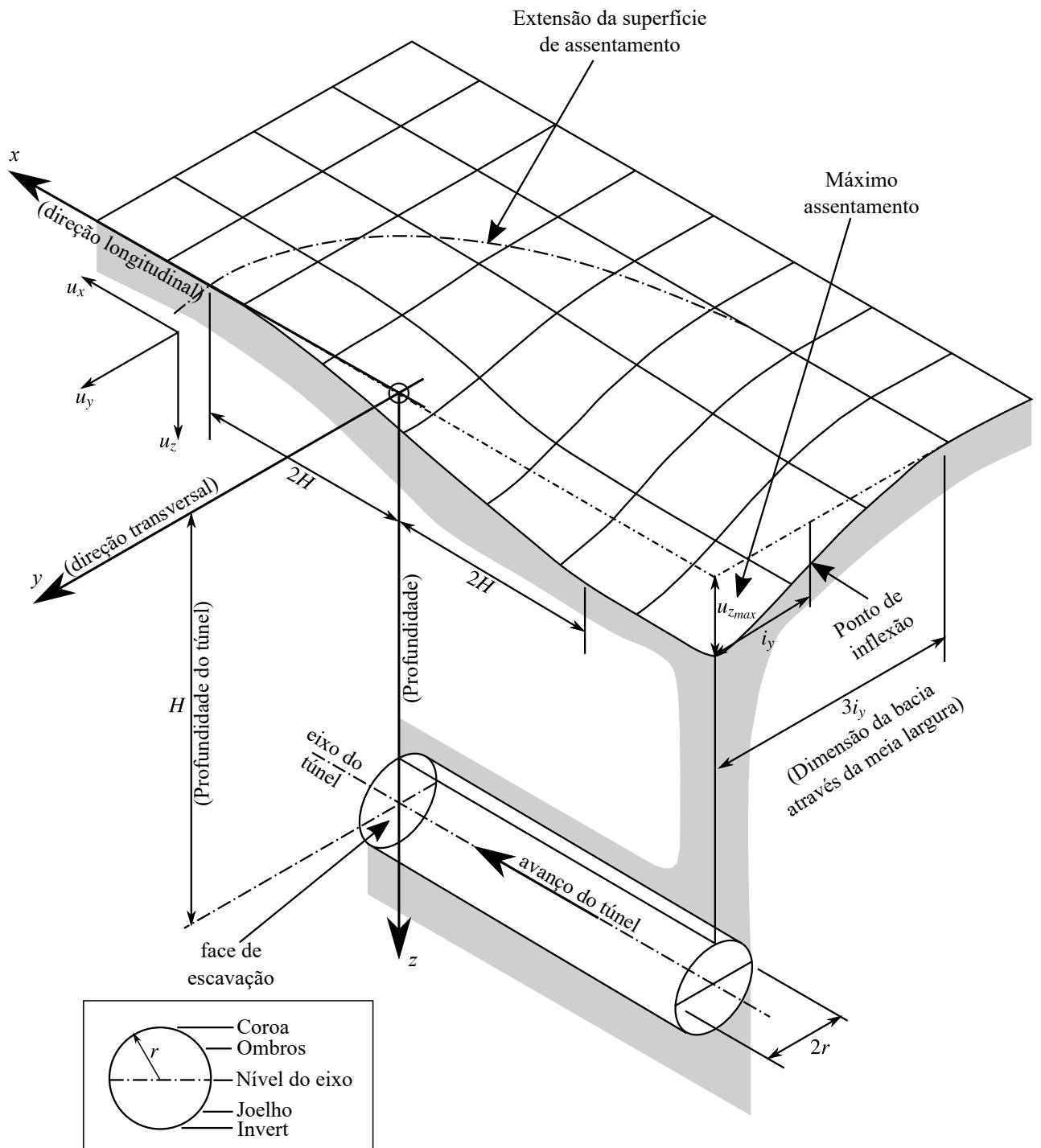


Figura 4.25 – Representação tridimensional da bacia de assentamento superficial durante a construção de um túnel superficial (adaptado de: Yeates e Geddes (1985) *apud* Rankin (1988, p. 80))

Seguindo o trabalho de Martos (1958) sobre assentamentos causados por minas Schmidt (1969) e Peck (1969), e posteriormente muitos outros autores, mostraram que o perfil de assentamento no plano transversal pode muito bem ser descrito e ajustado, de forma empírica, através de uma

curva de distribuição Gaussiana (Figura 4.26).

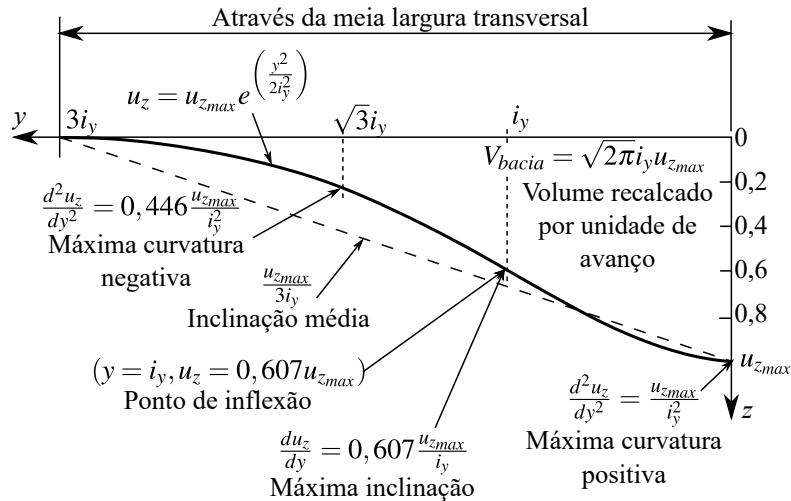


Figura 4.26 – Perfil idealizado de assentamento transversal com distribuição normal (adaptado de: O'Reilly e New (1982) *apud* Rankin (1988, p. 80))

Após Peck (1969) propor sua forma empírica para descrever a bacia de assentamentos, adaptações dela e outros métodos semi-empíricos foram desenvolvidos com base em mais observações. Devido ao comportamento bastante específico relacionado a proximidade da superfície, os estudos sobre túneis se dividem em **túneis superficiais** e **túneis profundos**. Apesar da generalidade do modelo proposto na tese, a influência da superfície não será estudada no presente trabalho, que envolverá apenas túneis profundos, contudo, um bom resumo bibliográfico de soluções semi-empíricas pode ser encontrado em Zhou et al. (2018) e soluções numéricas na introdução de Panji et al. (2016).

## 4.7 INFLUÊNCIA DO REVESTIMENTO E PARÂMETROS ADIMENSIONAIS

Dependendo da qualidade da rocha e das dimensões da abertura, muitos maciços conseguem desenvolver o arqueamento das tensões com pouca deformação ou ausência de plastificação. Isso caracteriza um maciço **autoportante** e, nesse caso, é necessário apenas um revestimento estético ou primário para evitar quedas localizadas. Contudo, se a redistribuição das tensões puder levar o maciço à plastificação ou deformações excessivas, nesse caso, é necessária a utilização de um **revestimento com função estrutural**. Dessa forma, a redistribuição das tensões para as zonas vizinhas no interior do maciço vai depender também dos deslocamentos permitidos por esse revestimento. Portanto, o estado de equilíbrio após a escavação não dependerá apenas das características do maciço, tensões iniciais, da geometria da seção e escavação, mas também

do comportamento conjunto do maciço com esse revestimento. Consequentemente, o campo de tensões e deformações dependerão da rigidez relativa entre o maciço e o revestimento, da deformação do maciço no instante de colocação do revestimento, da distância não suportada em relação à frente de escavação e, quando há comportamentos diferidos no tempo, da velocidade de avanço da construção do túnel.

A Figura 4.27 ilustra, em um corte longitudinal, o perfil de convergências e tensões verticais sobre um túnel profundo revestido. À esquerda do ponto A o maciço encontra-se na zona não perturbada pela frente de escavação, mantendo, portanto, sua tensão vertical inicial  $p_\infty$ . Contudo, próximo à frente de escavação há um aumento das tensões verticais (entre os pontos A e B) devido ao arqueamento longitudinal das tensões próximo à face de escavação. No trecho não suportado  $d_0$  as tensões verticais são nulas, uma vez que não há impedimento à deformação da seção. Todavia, a partir da ponta do revestimento (ponto D) há um acréscimo de tensões verticais (até o ponto E), novamente ocasionado pelo arqueamento longitudinal. Conforme a frente de escavação se afasta as tensões diminuem até atingirem um valor constante  $p_{eq}$  (ponto F) e o perfil de convergências atinge um valor máximo e constante  $U_{eq}$ .

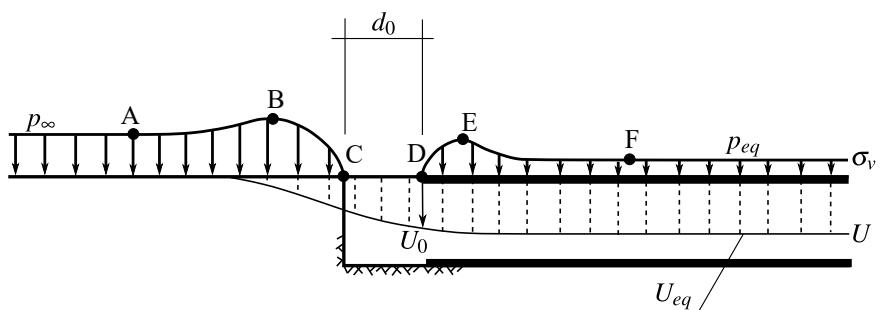


Figura 4.27 – Perfil de tensões verticais e de convergências ao longo de uma linha longitudinal situada no teto do túnel (adaptado de: Eisenstein, Heinz e Negro (1984) *apud* Couto (2011, p. 41))

O revestimento também possui interação com o comportamento diferido do maciço. O tempo entre ciclos de escavação-revestimento permitem que deformações viscosas ocorram durante a fase construtiva, ocasionando picos no perfil de convergência. Isso pode ser visto nas soluções numéricas axisimétricas obtidas por Bernaud (1991) considerando uma lei elastoviscoplástica. A Figura 4.28 mostra o efeito dessa interação no perfil de convergências. Pode-se ver que quanto maior a velocidade de escavação menores são os picos. É possível notar também que a frequência desses picos está relacionada com o passo de escavação, que neste caso é de  $1R$ . Se o passo fosse menor, de  $1/3R$ , por exemplo, os picos seriam sensivelmente menores.

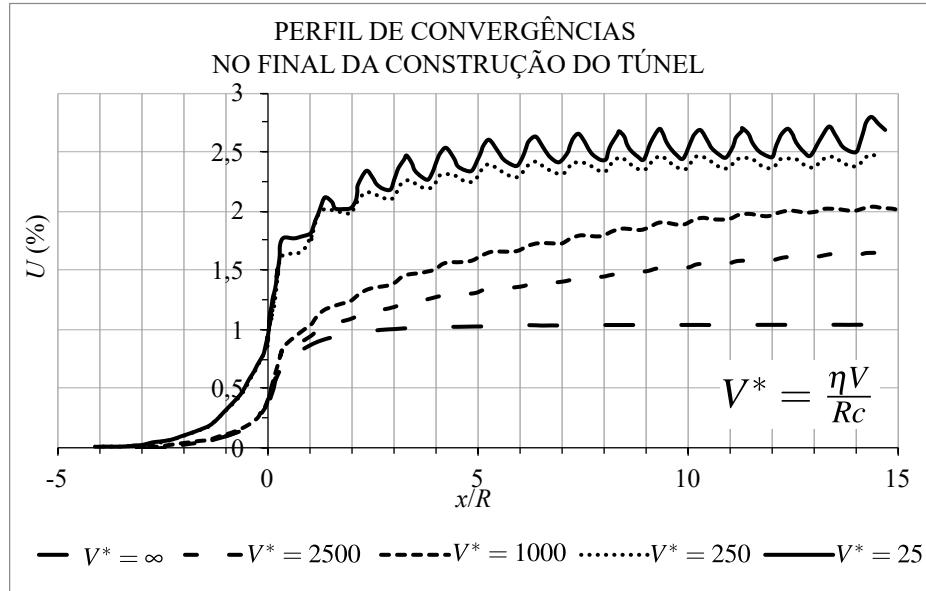


Figura 4.28 – Perfil de convergência em função da velocidade adimensional de avanço no final da construção do túnel (adaptado de: Bernaud (1991, p. 214))

Contudo, os efeitos viscosos continuam mesmo após a construção do túnel. Com o tempo a convergência da seção vai aumentando e a pressão no revestimento diminuindo. Além disso, quanto mais rápido for o ciclo de escavação-revestimento, maior será a diferença entre a convergência no final da construção e após estabilizados os efeitos viscosos no longo prazo. Isso pode ser visto comparando-se a Figura 4.28 com a Figura 4.29.

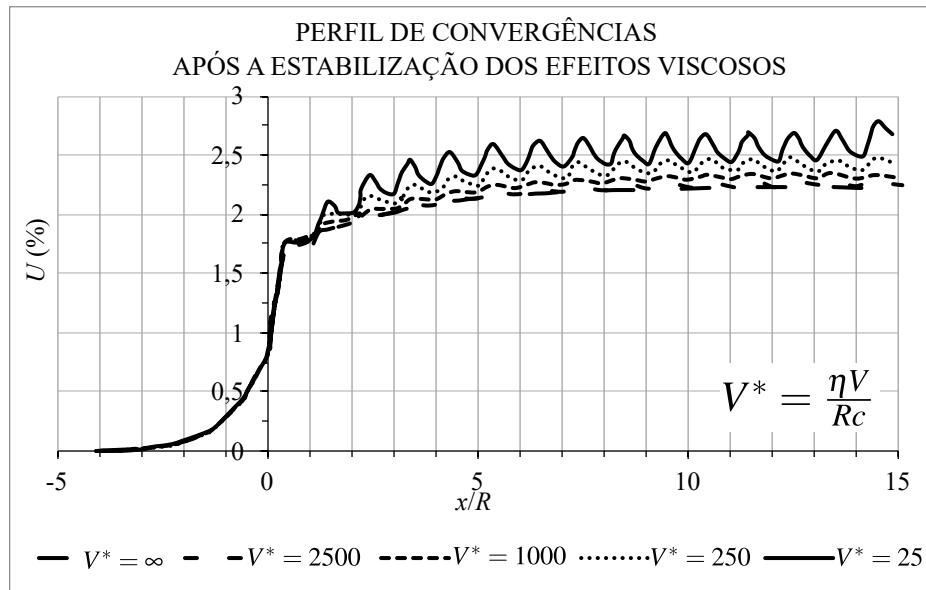


Figura 4.29 – Perfil de convergência em função da velocidade de construção admensurada no final da construção do túnel (adaptado de: Bernaud (1991, p. 214))

Um aspecto importante derivado das soluções analíticas é a identificação de parâmetros adimensionais que governam a problemática de túneis e permitem extrapolar os valores de uma análise para outra adimensionalmente equivalente. Dada essa generalidade são parâmetros muito utilizados para apresentação de resultados, como os que constam na Figura 4.28 e Figura 4.29.

Segundo Bernaud, Benamar e Rousset (1994, p. 5), nas soluções analíticas em estado plano de deformações, considerando tanto o maciço quanto o revestimento com leis constitutivas elásticas, obtém-se os seguintes parâmetros adimensionais:

$$p_{\infty}^* = \frac{p_{\infty}}{E}, \quad K_r^* = \frac{K_r}{E}, \quad d_0^* = \frac{d_0}{R} \quad (4.4)$$

em que  $E$  é o módulo de elasticidade do maciço,  $p_{\infty}$  a pressão geostática hidrostática,  $K_r$  a rigidez equivalente do revestimento,  $d_0$  a distância não revestida logo atrás da frente de escavação e  $R$  o raio externo da abertura circular do túnel. Quando o maciço possui lei constitutiva elastoplástica de Tresca ou von-Mises, acrescenta-se mais um parâmetro adimensional:

$$c^* = \frac{c}{E} \quad (4.5)$$

sendo  $c$  a coesão do maciço. Além disso, quando o túnel se encontra imerso em um meio elastoviscoplástico perfeito com modelo de Perzyna, tem-se cinco parâmetros adimensionais, que são (BERNAUD, 1991, p. 198):

$$E^* = \frac{E}{c}, \quad p_{\infty}^* = \frac{p_{\infty}}{c}, \quad K_r^* = \frac{K_r}{c}, \quad d_0^* = \frac{d_0}{R}, \quad V^* = \frac{\eta V}{Rc} \quad (4.6)$$

em que  $\eta$  é a constante de viscosidade dinâmica (em unidade de tensão vezes tempo) e  $V$  a velocidade de avanço do túnel.

Contudo, a principal dificuldade na determinação do estado de equilíbrio de um túnel revestido está no fato de que o maciço já possui uma convergência  $U_0$  no instante de instalação do revestimento. E essa convergência é dependente da interação entre o maciço e o revestimento que já foi aplicado. Uma forma de lidar com essa complexidade é através do método Convergência-Confinamento (também conhecido como o método das Curvas Características).

## 4.8 MÉTODO CONVERGÊNCIA-CONFINAMENTO

Muitos autores propuseram contribuições para essa abordagem como Fenner (1938), Pacher (1964), Panet e Guellec (1974) e Bernaud e Rousset (1992). Esse método consiste em desacoplar o problema da interação entre o maciço e o revestimento utilizando os conceitos de curva de convergência do maciço e de curva de confinamento do revestimento.

A **curva de convergência do maciço (CV)** é obtida graficando-se a convergência  $U_i$  em função de uma pressão interna fictícia  $p_i$  atuante no interior da cavidade, partindo essa pressão da tensão inicial geostática-hidrostática  $p_\infty$  até zero. Essa curva de convergência é independente do suporte e carrega consigo o comportamento do maciço frente a uma descompressão simulada pela variação de  $p_i$  (ver curva azul na Figura 4.30). Quando o maciço possui um comportamento elastoplástico, a curva apresenta um trecho linear elástico até que a descompressão atinge um valor limite  $p_{lim}$ , sendo a partir daí um trecho não-linear. Resumo de soluções analíticas para essa curva, considerando estado plano de deformações, seção circular e tensões iniciais geostáticas-hidrostáticas, pode ser encontrado, por exemplo, em Brown et al. (1983) e Corbetta (1990).

A aplicação desse método está no fato de que é possível também construir uma curva análoga referente ao suporte, chamada de **curva de confinamento do revestimento (CF)** (ver curva vermelha na Figura 4.30) cuja intersecção com a curva de convergência fornecerá o ponto de equilíbrio ( $p_{eq}, U_{eq}$ ) que é a solução do problema da interação entre o maciço e o revestimento. Tal como utilizado por Panet (1995, p. 29) soluções analíticas para tubos espessos ou casca cilíndrica, mesmo em elasticidade, podem corresponder como uma primeira aproximação da curva de confinamento para um dado revestimento.

Apesar do comportamento da curva de confinamento depender exclusivamente da lei constitutiva do revestimento, a convergência inicial  $U_0$ , a partir da qual essa curva inicia, vai depender da interação entre o maciço e do revestimento que foi anteriormente instalado, uma vez que a seção do túnel, afastada de  $d_0$  da face de escavação, já possui essa convergência durante o avanço construtivo do túnel.

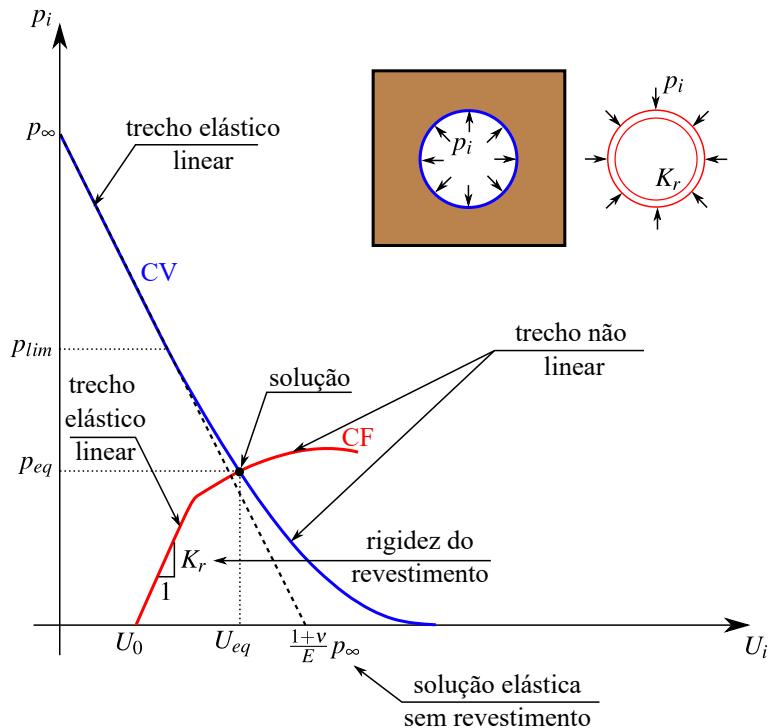


Figura 4.30 – Método da Convergência-Confinamento (adaptado de: Bernaud, Benamar e Rousset (1994, p. 6))

As curvas de convergência (CV) e de confinamento (CF) podem ser obtidas tanto de soluções analíticas como numéricas em estado plano de deformações, sendo que no caso numérico podem considerar leis mais complexas de comportamento do maciço. Contudo, a determinação de  $U_0$  só pode ser feita através de um método que considere a completa interação entre o maciço e o revestimento, como análises tridimensionais, axissimétricas ou ainda medidas *in situ*.

Existem métodos simplificados que se diferenciam justamente nas propostas de  $U_0$  através de estudos, por exemplo, em axissimetria. Nesse aspecto, Bernaud e Rousset (1992), mostraram que o método CV-CF proposto até então, estava em desfavor da segurança, pois desconsiderava a rigidez do revestimento na determinação de  $U_0$  (Figura 4.31), o que significa que o método CV-CF não considerava de forma correta a interação entre o maciço e o revestimento.

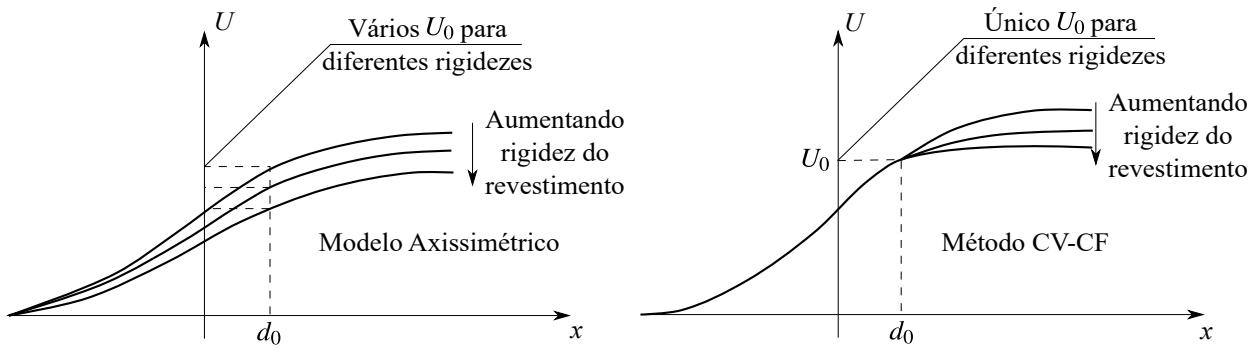


Figura 4.31 – Influência da rigidez do revestimento no perfil de convergências do túnel e no parâmetro  $U_0$  (adaptado de: Bernaud e Rousset (1992, p. 13))

Em vista disso, esses autores propuseram uma correção ao método Convergência-Confinamento criando o *New Implicit Method* (NIM). Um método implícito, pois  $U_0$  depende tanto da rigidez do revestimento quanto da convergência ao equilíbrio (que se quer determinar). Esse método foi desenvolvido para leis de comportamento do maciço em elasticidade, plasticidade e viscoplasticidade, conforme Bernaud e Rousset (1992) e Bernaud, Benamar e Rousset (1994).

## 5 MODELO MECÂNICO

Esse capítulo traz uma descrição geral do modelo mecânico que será utilizado neste trabalho. Portanto, são apresentadas as equações de equilíbrio e constitutivas que foram utilizadas, sem aprofundar, no entanto, nas particularidades que compreendem o domínio de um túnel profundo. Essas serão vistas no final do Capítulo 6, após a descrição da solução desse modelo mecânico.

### 5.1 EQUAÇÕES DE EQUILÍBRIO LOCAL E A HIPÓTESE DA EVOLUÇÃO QUASE ESTÁTICA

Sendo  $\{\underline{e}_1, \underline{e}_2, \underline{e}_3\}$  a base de um espaço  $\mathbb{R}^3$ , a segunda lei fundamental do equilíbrio dinâmico, ou seja, o princípio da conservação do momento linear, aplicada sobre um subdomínio contínuo  $\Omega'$ , exige que para  $\forall \Omega' \subset \Omega$ :

$$\int_{\Omega'} \rho(\underline{\gamma} - \underline{f}) d\Omega' = \int_{\partial\Omega'} \underline{T} dS \quad (5.1)$$

sendo  $\rho$  a densidade do domínio,  $\underline{\gamma}$  o campo de acelerações referente às forças iniciais,  $\underline{f}$  o campo de acelerações referente às forças de corpo (por exemplo, a gravidade) e  $\underline{T}$  o vetor tensão que atua na superfície  $dS$  contida na superfície  $\partial\Omega'$  de  $\Omega'$  (Figura 5.1).

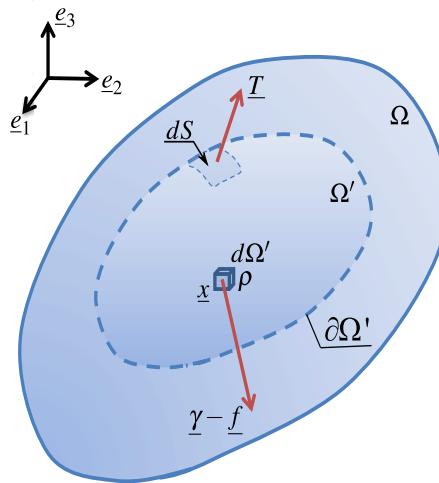


Figura 5.1 – Subsistema material  $\Omega'$  no interior de um sistema material  $\Omega$  submetido a um campo de forças de corpo

Considerando a definição  $\underline{T} = \underline{\sigma} \cdot \underline{n}$ , em que  $\underline{n}$  é o vetor normal à superfície  $dS$  e  $\underline{\sigma}$  o tensor de tensões, aplicando o teorema da divergência no termo à direita da igualdade (5.1) pode-se

escrever que

$$\forall \Omega' \subset \Omega \quad \int_{\Omega'} (\underline{\nabla} \cdot \underline{\underline{\sigma}} + \rho(\underline{\gamma} - \underline{f})) d\Omega' = 0 \quad (5.2)$$

e, portanto,

$$\underline{\nabla} \cdot \underline{\underline{\sigma}} + \rho(\underline{\gamma} - \underline{f}) = 0 \quad (5.3)$$

em que  $\underline{\nabla} \cdot$  é o operador divergente. Aplicando a hipótese de evolução quase estática, ou seja,  $\underline{\gamma} = 0$ , tem-se o seguinte sistema de equações de equilíbrio estático local:

$$\underline{\nabla} \cdot \underline{\underline{\sigma}} + \rho \underline{f} = 0. \quad (5.4)$$

Salienta-se também que pela conservação do momento angular tem-se que o tensor de tensões é simétrico, ou seja,  $\underline{\underline{\sigma}} = \underline{\underline{\sigma}}^T$  e o sistema (5.4), em três dimensões, possui 3 equações e 6 incógnitas de tensões.

## 5.2 ADMISSIBILIDADE ESTÁTICA, NATUREZA EULERIANA DO CAMPO DE TENSÕES, TRANSFORMAÇÃO GEOMÉTRICA E MEDIDA DE DEFORMAÇÃO

Para que o sistema material  $\Omega$  da Figura 5.2 esteja em equilíbrio, ou seja, **estáticamente admissível (E.A)**, o campo de tensões deve satisfazer as equações de campo de equilíbrio local, conjuntamente com as condições de continuidade interna e de contorno (relativo ao princípio da ação-reação) representadas por (5.5).

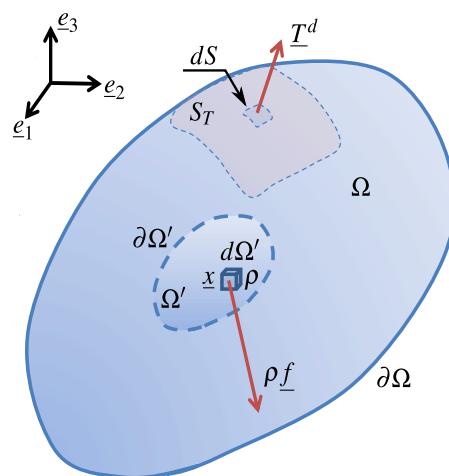


Figura 5.2 – Sistema material  $\Omega'$  com condição de contorno  $\underline{T}^d$  imposta na fronteira  $S_T$

$$\underline{\underline{\sigma}} \text{ é E.A.} \leftrightarrow \begin{cases} \text{eqs. campo: } \begin{cases} \nabla \cdot \underline{\underline{\sigma}} + \rho f = 0 \\ \underline{\underline{\sigma}} \cdot \underline{n} \text{ contínuo ao longo de } \Sigma \end{cases}, \\ \text{cond. contorno: } \underline{\underline{\sigma}} \cdot \underline{n} = \underline{T}^d \text{ em } \forall \underline{x} \in S_T \subset \partial \Omega \end{cases}, \quad (5.5)$$

em que  $\Sigma$  representa as superfícies de descontinuidades de  $\underline{\underline{\sigma}}$  no interior do corpo, se houver. A rigor o campo de tensões  $\underline{\underline{\sigma}}$  que satisfaz (5.5) se refere sempre à configuração atual durante a evolução do sistema, ou seja, possui uma natureza Euleriana (conforme Figura 5.3).

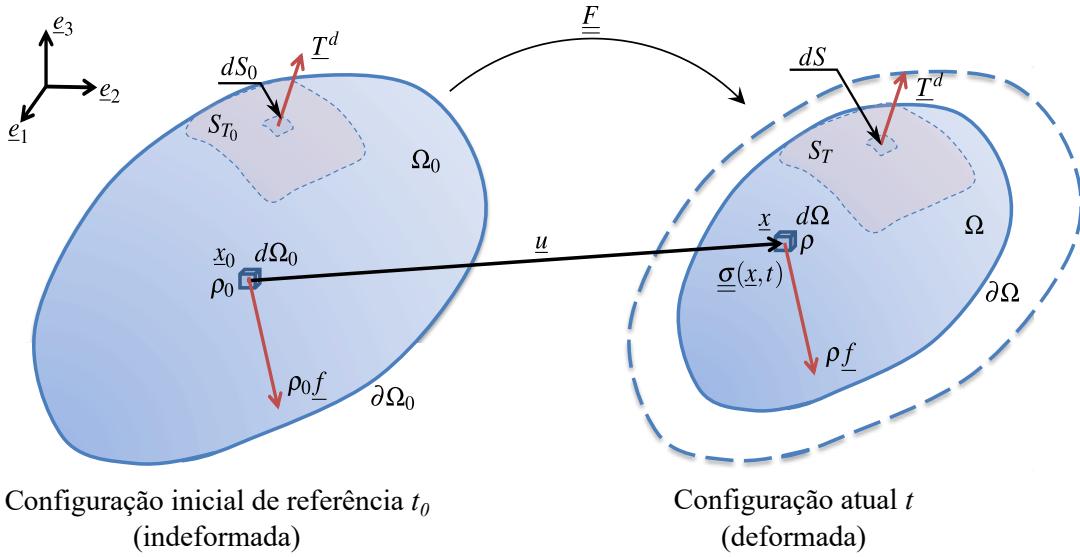


Figura 5.3 – Natureza Euleriana do campo de tensões

O vetor  $\underline{u} = \underline{x} - \underline{x}_0$  é o deslocamento da partícula durante a evolução do sistema e  $\underline{\underline{F}}$  é o gradiente da transformação geométrica que associa a posição de cada partícula  $\underline{x}_0$  a sua posição  $\underline{x}$  na configuração atual, definido por:

$$\underline{\underline{F}} = \nabla \underline{x} = \nabla (\underline{x}_0 + \underline{u}) = \underline{\underline{1}} + \nabla \underline{u} \quad (5.6)$$

em que  $\nabla$  é o operador gradiente e  $\underline{\underline{1}}$  o tensor de segunda ordem unitário. Nesse contexto geral, a medida de deformação mais comum é dada pelo desvio da transformação em relação à isometria  $\underline{\underline{F}}^T \cdot \underline{\underline{F}} = \underline{\underline{1}}$  e é descrita através do tensor de deformações de Green-Lagrange:

$$\underline{\underline{e}} = \frac{1}{2} (\underline{\underline{F}}^T \cdot \underline{\underline{F}} - \underline{\underline{1}}) = \frac{1}{2} (\nabla \underline{u} + \nabla \underline{u}^T + \nabla \underline{u}^T \cdot \nabla \underline{u}). \quad (5.7)$$

Em problemas quase-estáticos isotérmicos, quando os deslocamentos, as deformações e as rotações são pequenas, a determinação dos campos de tensões e deformações durante a evolução do sistema pode ser simplificada descrevendo os elementos da admissibilidade estática (5.5) em termos da configuração de referência ao invés da atual. Para tanto, é necessário verificar-se a hipótese das pequenas perturbações.

### 5.3 HIPÓTESE DAS PEQUENAS PERTURBAÇÕES E A DESCRIÇÃO LANGEANA

A **hipótese das transformações infinitesimais (HTI)** supõe que o gradiente da transformação é aproximadamente a identidade, ou seja,  $\underline{F} \approx \underline{\underline{1}}$ . Isso implica, por (5.6), que  $|\nabla \underline{u}| \ll 1$  e, como consequência, pode-se desprezar os termos de derivada mais alta no tensor de deformações de Green-Lagrange, de modo que:

$$\underline{\epsilon} = \frac{1}{2} (\underline{\underline{F}}^T \cdot \underline{\underline{F}} - \underline{\underline{1}}) = \frac{1}{2} (\nabla \underline{u} + \nabla \underline{u}^T + \nabla \underline{u}^T \cdot \nabla \underline{u}) \approx \frac{1}{2} (\nabla \underline{u} + \nabla \underline{u}^T) = \nabla^s \underline{u} = \underline{\epsilon} \quad (5.8)$$

em que  $\underline{\epsilon}$  é um tensor simétrico conhecido como tensor de deformações de Green-Lagrange linearizado, ou simplesmente, como tensor de deformações. Dessa hipótese segue-se também uma simplificação no **Jacobiano da transformação** (que dá a relação entre o volume infinitesimal da configuração atual e de referência):

$$J = \frac{d\Omega}{d\Omega_0} = \det(\underline{\underline{1}} + \nabla \underline{u}) \approx 1 + \text{tr}(\underline{\epsilon}) \quad (5.9)$$

sendo  $\det(*)$  e  $\text{tr}(*)$  as funções determinante e traço, respectivamente. Como  $|\nabla \underline{u}| \ll 1$  tem-se também que  $|\nabla \underline{\epsilon}| \ll 1$ , ou seja, **pequenas deformações**, o que implica  $\text{tr}(\underline{\epsilon}) \ll 1$  e, portanto, mudanças infinitesimais no volume e na densidade durante a evolução do sistema, fazendo com que  $\Omega \approx \Omega_0$  e  $\rho \approx \rho_0$ , respectivamente. Supondo que também ocorram **pequenos deslocamentos**  $|\underline{u}/l_0| \ll 1$ , em que  $l_0$  é uma dimensão característica do problema tal que os efeitos sobre os esforços internos devido a mudança de geometria sejam desprezíveis, tem-se a **hipótese das pequenas perturbações (HPP)**. Com as consequências dessa hipótese, pode-se adotar a configuração inicial (de referência) ao invés da atual para expressar os termos da admissibilidade estática (5.5).

### 5.4 MODELO CONSTITUTIVO ELÁSTICO

De uma forma geral, a energia interna específica  $w$  necessária para deformar um material elástico não depende do trajeto e nem da velocidade de deformação durante a evolução do sistema, dependendo apenas do estado atual das deformações. Com isso a energia interna específica pode ser caracterizada pelas deformações e direções principais do tensor de deformações, de modo que:

$$w(\underline{\epsilon}) = w(\epsilon_1, \epsilon_2, \epsilon_3, \eta_1, \eta_2, \eta_3). \quad (5.10)$$

Contudo, na **elasticidade isótropa** a energia de deformação é independente das direções principais e pode ser descrita em função apenas da magnitude das deformações principais, ou dos

invariantes do tensor de deformação, de modo que

$$w(\underline{\underline{\varepsilon}}) = w(\varepsilon_1, \varepsilon_2, \varepsilon_3) = w(I_1, I_2, I_3), \quad (5.11)$$

sendo que os invariantes do tensor de deformações são dados por:

$$I_1 = \text{tr}(\underline{\underline{\varepsilon}}) = \varepsilon_{ii}, \quad (5.12)$$

$$I_2 = \text{tr}(\underline{\underline{\varepsilon}}^2) = \frac{1}{2} \varepsilon_{ij} \varepsilon_{ji}, \quad (5.13)$$

$$I_3 = \text{tr}(\underline{\underline{\varepsilon}}^3) = \frac{1}{3} \varepsilon_{ij} \varepsilon_{jk} \varepsilon_{ki}. \quad (5.14)$$

A lei do comportamento elástico se obtém de  $\underline{\underline{\sigma}} = \partial w / \partial \underline{\underline{\varepsilon}}$ . Aplicando a regra da cadeia em relação aos invariantes e fazendo uma aproximação de primeira ordem em torno de  $\underline{\underline{\sigma}}_0$  tem-se a seguinte lei constitutiva da **elasticidade linear isótropa**

$$\underline{\underline{\sigma}} - \underline{\underline{\sigma}}_0 = \underline{\underline{\underline{D}}} : \underline{\underline{\varepsilon}}, \quad (5.15)$$

em que  $\underline{\underline{\underline{D}}}$  é o tensor constitutivo elástico de quarta ordem simétrico dado por

$$\underline{\underline{\underline{D}}} = \lambda^e \underline{\underline{1}} \otimes \underline{\underline{1}} + 2\mu^e \underline{\underline{\underline{1}}} \quad (5.16)$$

sendo  $\underline{\underline{1}} \otimes \underline{\underline{1}}$  o tensor de quarta ordem dado pelo produto tensorial ( $\otimes$ ) entre dois tensores unitários de segunda ordem e  $\underline{\underline{\underline{1}}}$  o tensor unitário de quarta ordem. As constantes  $\lambda^e$  e  $\mu^e$  são conhecidos como os coeficientes de Lamé, que possuem as seguintes relações com o módulo de Young  $E$  e o coeficiente de Poisson  $\nu$ :

$$\lambda^e = \frac{Ev}{(1+\nu)(1-2\nu)}, \quad (5.17)$$

$$\mu^e = \frac{E}{2(1+\nu)}. \quad (5.18)$$

## 5.5 MODELO CONSTITUTIVO ELASTOPLÁSTICO

Para problemas com evolução isotérmica, quase-estáticos em transformações infinitesimais, o modelo constitutivo elastoplástico pode ser completamente descrito através da:

- a) decomposição do tensor de deformação total;
- b) superfície de escoamento;
- c) regra de fluxo plástico;

- d) lei de endurecimento/amolecimento;
- e) condições de carregamento/descarregamento.

### 5.5.1 Decomposição do tensor de deformação total

Considerando a hipótese das pequenas transformações (que inclui a hipótese das pequenas deformações) é válida a decomposição do tensor de deformação total em uma componente elástica e outra plástica, de modo que:

$$\underline{\dot{\varepsilon}} = \underline{\dot{\varepsilon}}^e + \underline{\dot{\varepsilon}}^p \quad (5.19)$$

sendo  $\underline{\dot{\varepsilon}}^e$  e  $\underline{\dot{\varepsilon}}^p$  as taxas de deformação elástica e plástica, respectivamente. A taxa de deformação plástica também é conhecida por fluxo plástico. Diferentemente do modelo elástico, o modelo elastoplástico é dependente do trajeto das tensões e por isso (5.19) é descrito em forma de taxas. No entanto, na elastoplasticidade, o tempo físico não entra nas leis constitutivas, tratando-se de um fenômeno instantâneo. A marcação do tempo serve apenas para acompanhar o histórico de tensões, se tratando, portanto, de um pseudo-tempo.

Dentro do contexto de processos termodinâmicos determinísticos, a energia livre específica  $\psi$  de um material elastoplástico do qual se deriva as relações constitutivas, para o caso de uma evolução isotérmica em pequenas deformações, pode ser escrita e decomposta da seguinte maneira (de SOUZA NETO; PERI; OWEN, 2008, p. 149):

$$\psi(\underline{\varepsilon}, \underline{\varepsilon}^p, \underline{\alpha}) = \psi^e(\underline{\varepsilon} - \underline{\varepsilon}^p) + \psi^p(\underline{\alpha}) = \psi^e(\underline{\varepsilon}^e) + \psi^p(\underline{\alpha}) \quad (5.20)$$

em que  $\underline{\alpha}$  é o conjunto de variáveis internas (coesão, ângulo de atrito e etc) cuja evolução está relacionada com o fenômeno de endurecimento/amolecimento. Dessa expressão e da aplicação da segunda lei da termodinâmica, que leva à inequação de Clausius-Duhem, deriva-se as seguintes relações constitutivas:

$$\left\{ \begin{array}{l} \underline{\sigma} = \frac{\partial \psi^e}{\partial \underline{\varepsilon}^e} \\ \underline{q} = \frac{\partial \psi^p}{\partial \underline{\alpha}} \end{array} \right. \quad (5.21)$$

em que  $\underline{q}$  é o conjunto das forças termodinâmicas (escalares ou tensoriais) associadas às variáveis internas. De (5.19) e (5.21)<sub>1</sub> obtém-se a seguinte relação constitutiva:

$$\underline{\dot{\sigma}} = \underline{\underline{D}}^{ep} : \underline{\dot{\varepsilon}} = \underline{\underline{D}} : \underline{\dot{\varepsilon}}^e = \underline{\underline{D}} : (\underline{\dot{\varepsilon}} - \underline{\dot{\varepsilon}}^p) \quad (5.22)$$

em que  $\underline{\underline{D}}^{ep}$  é um tensor de quarta ordem que representa o módulo elastoplástico contínuo.

### 5.5.2 Superfície de escoamento

Uma característica fenomenológica dos materiais elastoplásticos é a existência de um limite dentro do qual o material se comporta elasticamente. Em problemas tridimensionais isotrópicos

esse domínio é delimitado por uma hiper superfície no espaço das tensões principais, chamada de **superfície de escoamento**, pois, assim que o estado de tensões atinge essa superfície tem inicio a evolução das deformações plásticas. Essa superfície é definida como (de SOUZA NETO; PERI; OWEN, 2008, p. 150):

$$\partial\Gamma = \left\{ \underline{\underline{\sigma}} | f(\underline{\underline{\sigma}}, \underline{q}) = 0 \right\} \quad (5.23)$$

em que  $f$  é a **função de escoamento**. Essa superfície delimita o conjunto de tensões que estão dentro do domínio elástico, ou seja, **elasticamente admissíveis (E. A.)**:

$$\Gamma^* = \left\{ \underline{\underline{\sigma}} | f(\underline{\underline{\sigma}}, \underline{q}) < 0 \right\}, \quad (5.24)$$

e o conjunto de tensões **plasticamente admissíveis (P. A.)**:

$$\Gamma = \left\{ \underline{\underline{\sigma}} | f(\underline{\underline{\sigma}}, \underline{q}) \leq 0 \right\}. \quad (5.25)$$

A Figura 5.4 ilustra de uma forma genérica esse domínio plasticamente admissível no espaço das tensões principais.

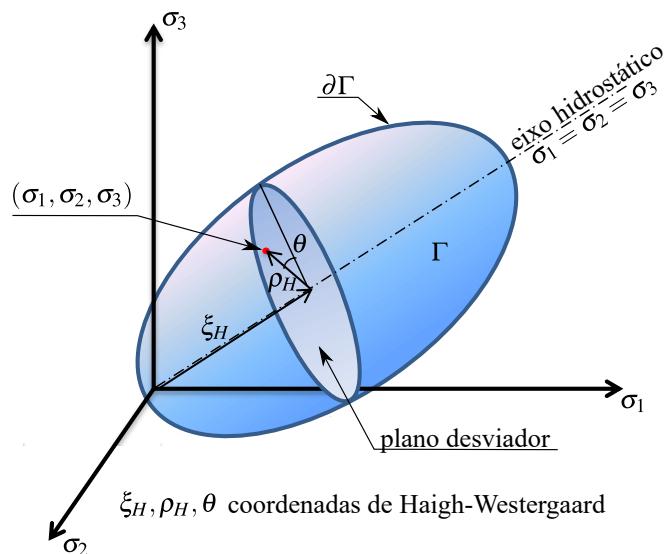


Figura 5.4 – Domínio genérico plasticamente admissível  $\Gamma$  no espaço das tensões principais

Em elastoplasticidade isotrópica, a função de escoamento pode ser descrita apenas em função dos invariantes do tensor de tensões e das forças associadas às variáveis internas. São, portanto, comuns as seguintes representações equivalentes (adaptado de CHEN; HAN, 1988, p. 57-72):

$$f(\underline{\underline{\sigma}}, \underline{q}) = f(I_1, J_2, J_3, \underline{q}) = f(\xi_H, \rho_H, \theta, \underline{q}) = f(p, q, \theta, \underline{q}) = f(\sigma_{oct}, \tau_{oct}, \theta, \underline{q}) \quad (5.26)$$

em que:

$$\begin{aligned}
 I_1 &= \text{tr}(\underline{\underline{\sigma}}) = \sigma_{11} + \sigma_{22} + \sigma_{33} \\
 J_2 &= \frac{1}{2} \text{tr}(\underline{\underline{s}}^2) = \frac{1}{6} [(\sigma_{11} - \sigma_{22})^2 + (\sigma_{22} - \sigma_{33})^2 + (\sigma_{33} - \sigma_{11})^2] + \sigma_{12}^2 + \sigma_{23}^2 + \sigma_{13}^2, \\
 J_3 &= \frac{1}{3} \text{tr}(\underline{\underline{s}}^3) = \det(\underline{\underline{s}}) = s_{11}s_{22}s_{33} - s_{11}\sigma_{23}^2 - s_{22}\sigma_{13}^2 - s_{33}\sigma_{12}^2 + 2\sigma_{12}\sigma_{23}\sigma_{13}, \\
 \xi_H &= p = \sigma_{oct} = \frac{1}{3}I_1, \quad \rho_H = \sqrt{\underline{\underline{s}} : \underline{\underline{s}}} = \sqrt{2J_2}, \quad \theta = \frac{1}{3} \arcsen \left( \frac{-3\sqrt{3}}{2} \frac{J_3}{J_2^{3/2}} \right), \\
 -\frac{\pi}{6} &\leq \theta \leq \frac{\pi}{6}, \quad q = \sqrt{\frac{3}{2} \underline{\underline{s}} : \underline{\underline{s}}} = \sqrt{3J_2}, \quad \tau_{oct} = \sqrt{\frac{3}{2} J_2},
 \end{aligned} \tag{5.27}$$

sendo  $(\xi_H, \rho_H, \theta)$  as coordenadas de Haigh-Westergaard (em que  $\theta$  também é conhecido como ângulo de Lode),  $p$  a pressão hidrostática,  $q$  a tensão equivalente de von-Mises,  $(\sigma_{oct}, \tau_{oct})$  a tensão normal e cisalhante octaédrica, respectivamente, e  $s_{ij}$  são as componentes do tensor de tensões desviadoras  $\underline{\underline{s}}$ , dado por:

$$\underline{\underline{s}} = \underline{\underline{\sigma}} : \left[ \frac{1}{3} - \frac{1}{3} \otimes \frac{1}{3} \right] = \underline{\underline{\sigma}} - p \underline{\underline{1}}. \tag{5.28}$$

Quando a função de escoamento não depende de  $I_1$  diz-se que a plasticidade é independente da pressão hidrostática, sendo determinada apenas pelo estado de tensões ao longo do plano desviador.

Diversas funções de escoamento podem ser obtidas na literatura, tal como as apresentadas no resumo de Viladkar, Noorzaei e Godbole (1995) que reúne tanto as funções de escoamentos clássicas (von-Mises, Tresca, Drucker-Prager, Mohr-Coulomb) quanto mais sofisticadas (*Cap Models, Critical State Model, Desai's Generalized Model*). O presente trabalho utilizará as funções de escoamento de Drucker-Prager e Mohr-Coulomb que compreendem também generalizações das funções de von-Mises e Tresca, respectivamente (Figura 5.5).

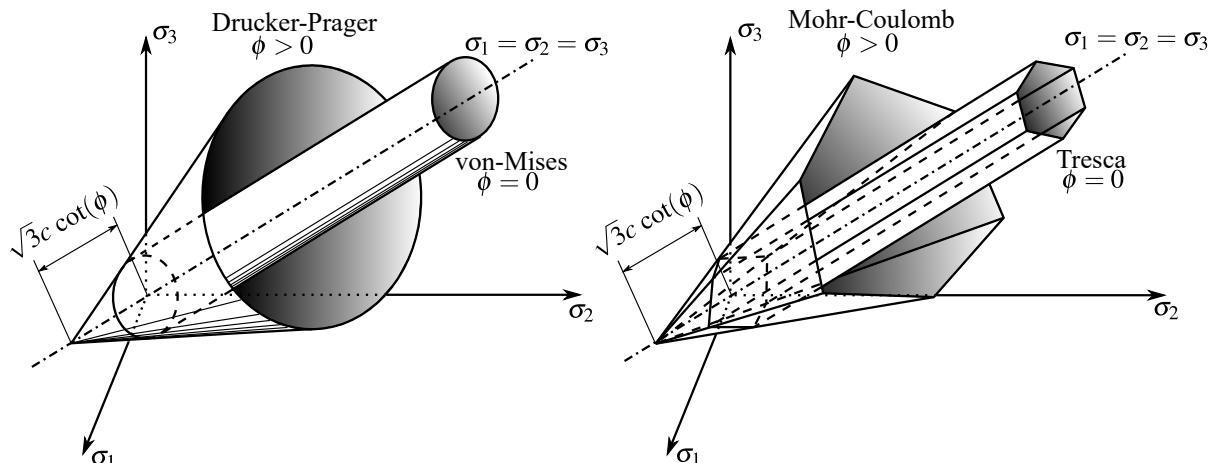


Figura 5.5 – Funções de escoamento de a) Drucker-Prager e b) Mohr-Coulomb (adaptado de: Zienkiewicz e Cormeau (1974, p. 824))

A função de escoamento de Mohr-Coulomb, representada através de invariantes, é dada por (de SOUZA NETO; PERI; OWEN, 2008, p. 166):

$$f(\underline{\sigma}, \underline{q}) = f(I_1, J_2, \theta, c, \phi) = \frac{\sin(\phi)}{3} I_1 + \left( \cos(\theta) - \frac{1}{\sqrt{3}} \sin(\theta) \sin(\phi) \right) \sqrt{J_2} - c \cos(\phi) \quad (5.29)$$

em que  $c$  é a coesão e  $\phi$  o ângulo de atrito. De forma análoga, a função de escoamento de Drucker-Prager é dada por (de SOUZA NETO; PERI; OWEN, 2008, p. 167):

$$f(\underline{\sigma}, \underline{q}) = f(I_1, J_2, \beta, k) = \beta I_1 + \sqrt{J_2} - k \quad (5.30)$$

em que os parâmetros  $\beta$  e  $k$  podem ser relacionados com a coesão e o ângulo de atrito do modelo de Mohr-Coulomb. Para o caso em que a superfície de Drucker-Prager coincide com as bordas mais externas da superfície de Mohr-Coulomb tem-se (de SOUZA NETO; PERI; OWEN, 2008, p. 167):

$$\beta = \frac{2 \sin \phi}{\sqrt{3}(3 - \sin(\phi))}, \quad k = \frac{6 \cos \phi}{\sqrt{3}(3 - \sin(\phi))} c, \quad (5.31)$$

e para o caso em que a superfície de Drucker-Prager coincide com as bordas mais internas da superfície de Mohr-Coulomb, tem-se (de SOUZA NETO; PERI; OWEN, 2008, p. 167):

$$\beta = \frac{2 \sin \phi}{\sqrt{3}(3 + \sin(\phi))}, \quad k = \frac{6 \cos \phi}{\sqrt{3}(3 + \sin(\phi))} c. \quad (5.32)$$

Essa aproximação pode ser vista no plano desviador conforme a Figura 5.6.

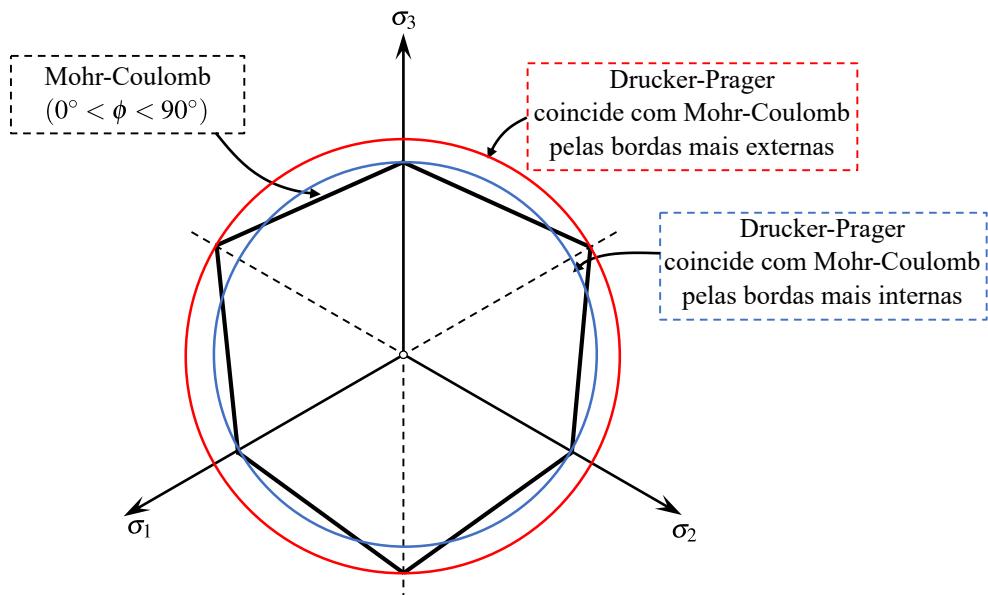


Figura 5.6 – Representação no plano desviador da aproximação da superfície de Mohr-Coulomb pela superfície de Drucker-Prager (adaptado de: de SOUZA NETO; PERI; OWEN, 2008, p. 169)

Quando  $\phi = 0$  a superfície de Mohr-Coulomb e a de Drucker-Prager se tornam independentes da pressão hidrostática e se particularizam, respectivamente, para a superfície de Tresca e von-Mises:

$$f(\underline{\sigma}, \underline{q}) = f(J_2, \theta, c) = \sqrt{J_2} \cos \theta - c, \quad (5.33)$$

$$f(\underline{\sigma}, \underline{q}) = f(J_2, \theta, c) = \sqrt{J_2} - \frac{2c}{\sqrt{3}}. \quad (5.34)$$

Igualando-se as expressões (5.34) e (5.33) à zero e isolando  $\sqrt{J_2}$  é possível relacionar ambas as superfícies através da coesão (Figura 5.7):

$$c_{TR} = \frac{2}{\sqrt{3}} \cos(\theta) c_{VMS} = \begin{cases} \frac{2}{\sqrt{3}} c_{VMS}, & \text{se } \theta = 0^\circ \\ c_{VMS}, & \text{se } \theta = 30^\circ \end{cases}. \quad (5.35)$$

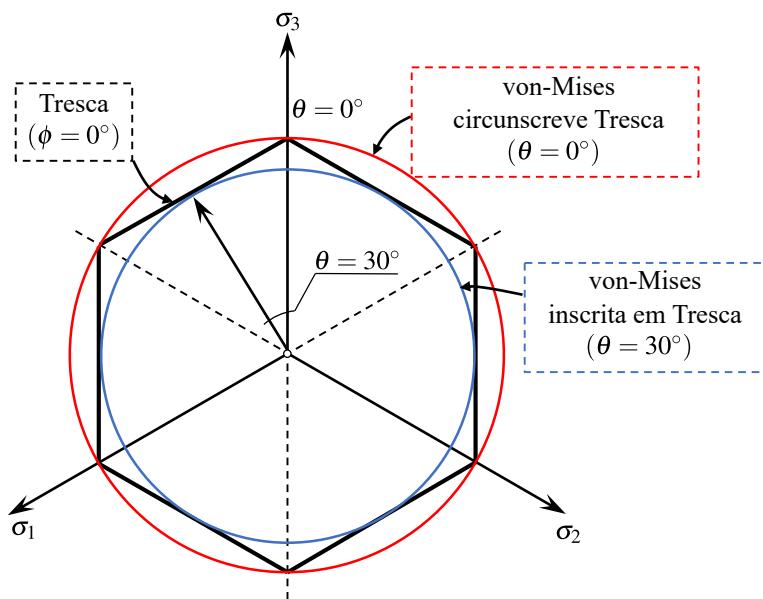


Figura 5.7 – Representação no plano desviador da aproximação da superfície de Tresca pela superfície de von-Mises (adaptado de: de SOUZA NETO; PERI; OWEN, 2008, p. 159, 164)

### 5.5.3 Regra de fluxo plástico

A regra de fluxo plástico descreve a lei de evolução das deformações plásticas com relação às tensões. Essa regra é postulada da seguinte forma:

$$\dot{\underline{\epsilon}}^p = \dot{\lambda} \underline{\underline{g}}_\sigma \quad (5.36)$$

em que  $\dot{\lambda}$  é a taxa da magnitude de deformação plástica  $\lambda$  (chamado também de multiplicador plástico) e  $\underline{\underline{g}}_\sigma$  o tensor que dá a direção do fluxo plástico (conhecido também como vetor de

fluxo ou gradiente do potencial plástico), sendo definido como:

$$\underline{\underline{g}}_{\sigma} = \frac{\partial g}{\partial \underline{\underline{\sigma}}} \quad (5.37)$$

em que  $g$  é uma função análoga a  $f$  chamada de potencial plástico. No caso em que  $g = f$  tem-se a **plasticidade associada** (ou seja, a direção do fluxo plástico é perpendicular à superfície de plastificação) (Figura 5.8).

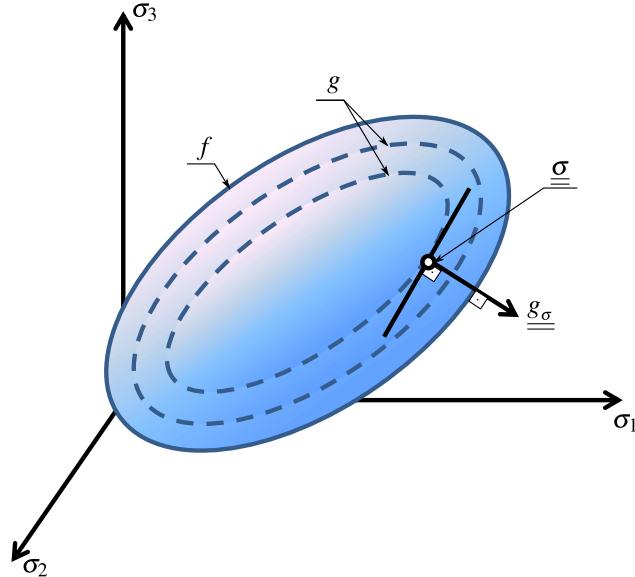


Figura 5.8 – Representação geométrica do vetor de fluxo em plasticidade associada (adaptado de: Chen e Han (1988, p. 182))

Tal como a função de escoamento, o potencial plástico geralmente é descrito através dos invariantes do tensor de tensões e seu gradiente pode ser determinado aplicando a regra da cadeia em (5.37). Por exemplo, se  $g(I_1, \sqrt{J_2}, J_3, q)$ , tem-se (adaptado de VILADKAR; NOORZAEI; GODEBOLE, 1995, p. 333):

$$\begin{aligned} \underline{\underline{g}}_{\sigma} &= C_1 \underline{\underline{g}}_1 + C_2 \underline{\underline{g}}_2 + C_3 \underline{\underline{g}}_3, \\ \underline{\underline{g}}_1 &= \frac{\partial I_1}{\partial \underline{\underline{\sigma}}} = \underline{\underline{1}}, \quad \underline{\underline{g}}_2 = \frac{\partial \sqrt{J_2}}{\partial \underline{\underline{\sigma}}} = \frac{1}{2\sqrt{J_2}} \underline{\underline{s}}, \quad \underline{\underline{g}}_3 = \frac{\partial J_3}{\partial \underline{\underline{\sigma}}}, \\ C_1 &= \frac{\partial g}{\partial I_1}, \quad C_2 = \frac{\partial g}{\partial \sqrt{J_2}} - \frac{\tan(3\theta)}{\sqrt{J_2}} \frac{\partial g}{\partial \theta}, \quad C_3 = \frac{\sqrt{3}}{2\cos(3\theta)} - \frac{1}{J_2^{3/2}} \frac{\partial g}{\partial \theta}, \end{aligned} \quad (5.38)$$

sendo que nessa descrição, apenas as constantes  $C_1$ ,  $C_2$  e  $C_3$  são particularidades das diferentes superfícies potenciais. Para a superfície de Mohr-Coulomb tem-se:

$$C_1 = \frac{1}{3} \sin(\phi), \quad (5.39)$$

$$C_2 = \cos(\theta) \left[ 1 + \tan(\theta) \tan(3\theta) + \frac{\sin(\phi)(\tan(3\theta) - \tan(\theta))}{\sqrt{3}} \right], \quad (5.40)$$

$$C_3 = \frac{\sqrt{3} \sin(\theta) + \cos(\theta) \sin(\phi)}{2J_2 \cos(3\theta)}, \quad (5.41)$$

e para Drucker-Prager, tem-se:

$$C_1 = \beta, \quad C_2 = 1, \quad C_3 = 0. \quad (5.42)$$

Nas expressões de  $C_2$  e  $C_3$ , pode-se ver que o vetor de fluxo de Mohr-Coulomb, e consequentemente o de Tresca, possui uma singularidade quando  $\theta = \pm\pi/6$ . Isso ocorre devido a essas superfícies apresentarem um vértice nessas coordenadas no plano desviador. Há diversas formas de se resolver esse problema, sendo que a adotada no presente trabalho, dada por Owen e Hinton (1980, p. 234), será utilizar os valores de  $C_1, C_2$  e  $C_3$  de Drucker-Prager (ou von-Mises) quando  $\theta = \pm\pi/6$ .

Um aspecto comum na geomecânica é a variação do volume do material durante a evolução das deformações plásticas. Esse efeito é comumente introduzido através da plasticidade não associada, adotando, ao invés do ângulo de atrito, um ângulo de dilatância  $0 < \psi < \phi$  na função potencial  $g$ .

#### 5.5.4 Lei de endurecimento/amolecimento

A lei de endurecimento/amolecimento fornece a regra de evolução das forças termodinâmicas associadas ao longo das deformações plásticas. Essa lei de endurecimento/amolecimento é postulada da seguinte forma (BELYTSCHKO; LIU; MORAN, 2000, p. 249):

$$\underline{\dot{q}} = \dot{\lambda} \underline{h} = \dot{\lambda} \frac{\partial h}{\partial \underline{q}} \quad (5.43)$$

em que  $\underline{h}$  é um vetor que contém os gradientes de uma função potencial  $h$  com relação às forças termodinâmicas associadas. Como a função de escoamento  $f$  é dependente das forças associadas a mudança dessas ao longo da deformação plástica irá alterar a posição e/ou a forma da superfície de escoamento. Quando a superfície de escoamento é estática, ou seja,  $\underline{\dot{q}} = \underline{0}$ , tem-se a plasticidade perfeita, quando esta aumenta tem-se o endurecimento isotrópico e quando se desloca tem-se o endurecimento cinemático, sendo mista, quando composta das duas últimas (Figura 5.9).

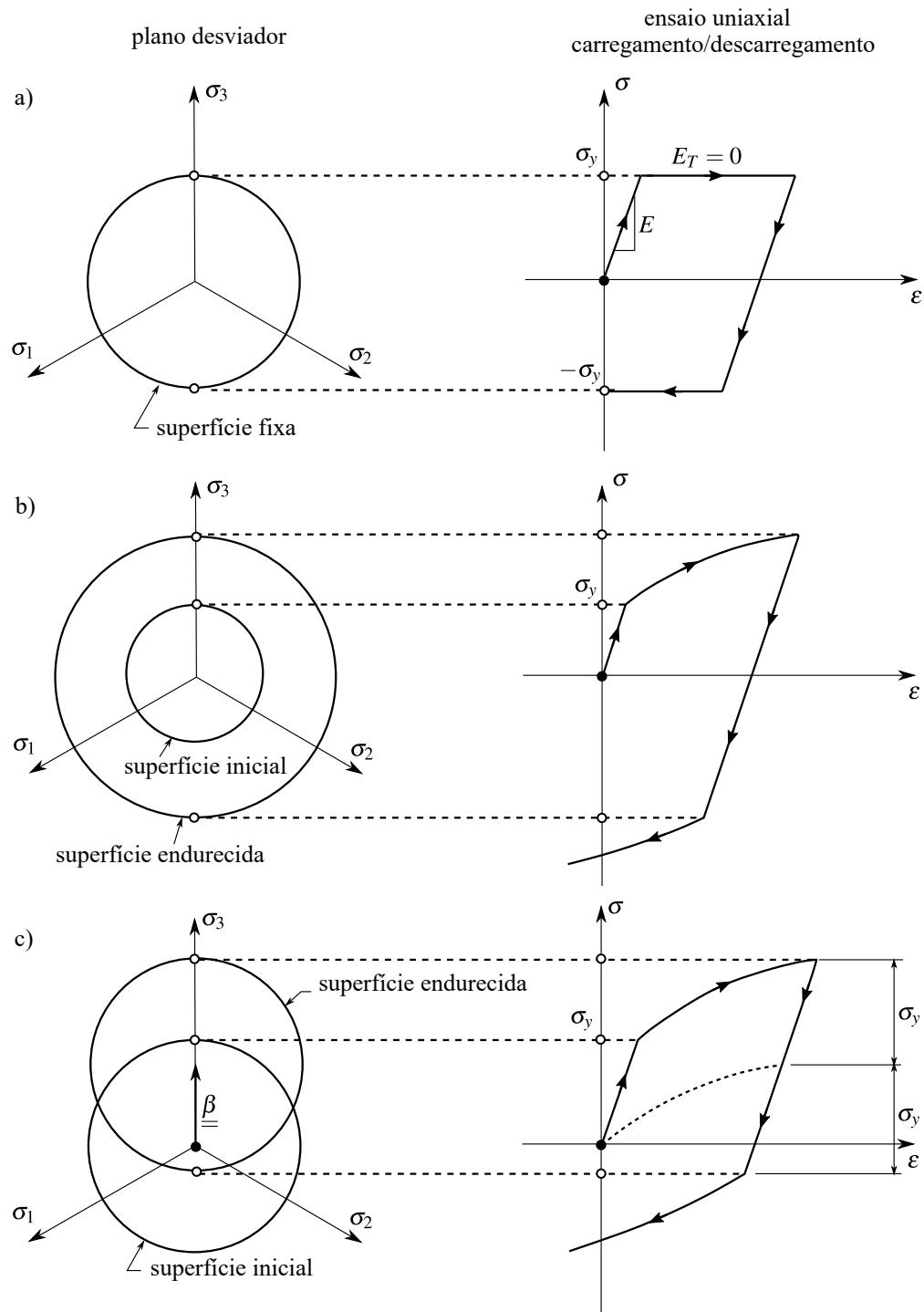


Figura 5.9 – Representação dos tipos de endurecimento no plano desviador e na curva tensão-deformação: a) elastoplasticidade perfeita, b) endurecimento isotrópico e c) endurecimento cinemático (adaptado de: SOUZA NETO; PERI; OWEN, 2008, p. 178, 179, 186)

Em um primeiro momento, no presente trabalho, não é considerado a influência da lei de endurecimento e as variáveis internas serão constantes ao longo do histórico de deformações, ou

seja,  $\dot{q} = 0$ . Nesse caso, tem-se a elastoplasticidade perfeita. Considerando apenas o endurecimento/amolecimento isotrópico, nos modelos adotados, isso significa que a coesão e o ângulo de atrito permanecem constantes durante a deformação plástica. Em um segundo momento é considerado uma função linear definida por partes para representar o endurecimento/amolecimento característico do maciço, tal como vistos no Capítulo 4.3, contudo em caráter associado ( $h = f$ ) e isotrópico. Essa implementação, é feita exclusivamente através da coesão que dependerá da deformação plástica efetiva ao longo do histórico de tensões (conforme Figura 5.10).

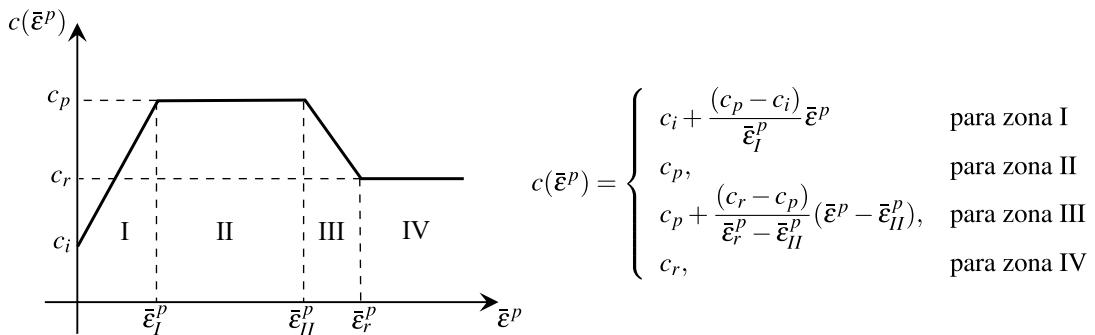


Figura 5.10 – Função linear definida por partes para representar o endurecimento/amolecimento através do parâmetro coesivo (adaptado de: Potts e Zdravkovic (1999, p. 158)

Portanto, usando a regra da cadeia, escreve-se (5.43) da seguinte forma:

$$\dot{q} = \dot{\lambda} \frac{\partial f}{\partial q} = \dot{\lambda} \left( \frac{\partial f}{\partial c} \frac{\partial c}{\partial \bar{\varepsilon}^p} + \frac{\partial f}{\partial \phi} \frac{\partial \phi}{\partial \bar{\varepsilon}^p} \right) \quad (5.44)$$

Como não haverá variação do ângulo de atrito, tem-se  $\partial \phi / \partial \bar{\varepsilon}^p = 0$  e apenas a parcela relacionada com a coesão permanece, sendo, seus termos, conforme (5.29) e (5.30), dados por:

$$\frac{\partial f}{\partial c} = \begin{cases} -\cos(\phi), & \text{para Mohr-Coulomb} \\ -\frac{6\cos(\phi)}{\sqrt{3}(3 \pm \sin(\phi))}, & \text{para Drucker-Prager} \end{cases} \quad (5.45)$$

e

$$\frac{\partial c}{\partial \bar{\varepsilon}^p} = \begin{cases} \frac{(c_p - c_i)}{\bar{\varepsilon}_I^p} & \text{para zona I} \\ 0, & \text{para zona II} \\ \frac{(c_r - c_p)}{\bar{\varepsilon}_r^p - \bar{\varepsilon}_{II}^p}, & \text{para zona III} \\ 0, & \text{para zona IV} \end{cases}. \quad (5.46)$$

O valor da deformação plástica efetiva é calculada a partir da seguinte expressão:

$$\dot{\underline{\varepsilon}}^p = C \|\underline{\dot{\varepsilon}}^p\| \quad (5.47)$$

em que  $C$  a rigor depende da superfície de plasticidade, do gradiente do potencial plástico e do estado de tensões ao qual está submetido a amostra no ensaio. Sua dedução é feita através do trabalho plástico por unidade de volume. Para o presente trabalho, será utilizado a seguinte expressão deduzida para Drucker-Prager, que considera plasticidade associada e estados de tensões gerais (adaptado de CHEN; HAN, 1988, p. 257-259):

$$C = \frac{\beta + 1/\sqrt{3}}{\sqrt{3\beta^2 + 1/2}}. \quad (5.48)$$

Quando  $\phi = 0$  o material é independente da pressão hidrostática, ou seja,  $\beta = 0$  e tem-se  $C = \sqrt{2/3}$ .

### 5.5.5 Condições de carregamento e descarregamento

A evolução das equações (5.36) e (5.43) estão sujeitas à três condições (condições de Kuhn-Tucker), que são (de SOUZA NETO; PERI; OWEN, 2008, p. 170):

$$f \leq 0, \quad \dot{\lambda} \geq 0, \quad \dot{\lambda} f = 0. \quad (5.49)$$

Essas condições estabelecem que apenas ocorre fluxo plástico quando o estado de tensões está sobre a superfície de escoamento e, neste caso, não há variação da função de escoamento, ou seja:

$$\dot{f} = \frac{\partial f}{\partial \underline{\underline{\sigma}}} : \dot{\underline{\underline{\sigma}}} + \frac{\partial f}{\partial \underline{\underline{q}}} \cdot \dot{\underline{\underline{q}}} = \underline{\underline{f}_\sigma} : \dot{\underline{\underline{\sigma}}} + \underline{\underline{f}_q} \cdot \dot{\underline{\underline{q}}} = 0. \quad (5.50)$$

A equação (5.50) é conhecida como **condição de consistência**.

### 5.5.6 Multiplicador plástico e módulo elastoplástico contínuo

Introduzindo na condição de consistência (5.50) a relação constitutiva (5.22), o fluxo plástico (5.36), a lei de endurecimento/amolecimento (5.43) e isolando o multiplicador plástico tem-se:

$$\dot{\lambda} = \frac{\underline{\underline{f}_\sigma} : \dot{\underline{\underline{D}}} : \dot{\underline{\underline{\epsilon}}}}{\underline{\underline{f}_\sigma} : \dot{\underline{\underline{D}}} : \underline{\underline{g}_\sigma} - \underline{\underline{f}_q} \cdot \dot{\underline{\underline{h}}}} \quad (5.51)$$

que introduzindo na relação constitutiva (5.22) leva à:

$$\dot{\underline{\underline{D}}}^{ep} = \dot{\underline{\underline{D}}} - \frac{\left( \dot{\underline{\underline{D}}} : \underline{\underline{g}_\sigma} \right) \otimes \left( \underline{\underline{f}_\sigma} : \dot{\underline{\underline{D}}} \right)}{\underline{\underline{f}_\sigma} : \dot{\underline{\underline{D}}} : \underline{\underline{g}_\sigma} - \underline{\underline{f}_q} \cdot \dot{\underline{\underline{h}}}} \quad (5.52)$$

em que  $\otimes$  é o produto tensorial. Através de (5.52) pode-se notar que se a plasticidade for associada o tensor constitutivo elastoplástico é simétrico. Também, pelo sinal do segundo termo, pode-se ver que a plasticidade representa uma redução no módulo de elasticidade do material.

## 5.6 MODELO CONSTITUTIVO VISCOPLÁSTICO

### 5.6.1 Decomposição do tensor de deformação total

Considerando a hipótese das pequenas transformações é válida a decomposição do tensor de deformação total em uma componente elástica e outra viscoplástica, de modo que:

$$\underline{\dot{\epsilon}} = \underline{\dot{\epsilon}}^e + \underline{\dot{\epsilon}}^{vp} \quad (5.53)$$

em que  $\underline{\dot{\epsilon}}^{vp}$  é conhecido como fluxo viscoplástico. No caso da viscoplastidade, a lei constitutiva depende tanto do trajeto das tensões quanto do tempo (e por isso também conhecida como *rate-dependent plasticity*), representando-se então as quantidades como taxas em um tempo real. Seguindo o mesmo raciocínio da elastoplastidade, a relação constitutiva elastoviscoplástica linearizada pode ser escrita conforme:

$$\underline{\sigma} = \underline{\underline{D}}^{vp} : \underline{\dot{\epsilon}} = \underline{\underline{D}} : \underline{\dot{\epsilon}}^e = \underline{\underline{D}} : \left( \underline{\dot{\epsilon}} - \underline{\dot{\epsilon}}^{vp} \right) \quad (5.54)$$

em que  $\underline{\underline{D}}^{vp}$  é o tensor de quarta ordem que representa o módulo elastoviscoplástico contínuo.

### 5.6.2 Superfície de escoamento

Em viscoplastidade nem sempre se tem um regime elástico, por exemplo, a altas temperaturas certos materiais podem fluir sempre sobre tensão, ou seja, a função de escoamento é zero (de SOUZA NETO; PERI; OWEN, 2008, p. 448). Para esses casos, existem modelos como o de Norton (1929), Lemaitre e Chaboche (1994), e também funções provenientes de ajustes empíricos que descrevem o fluxo viscoplástico através da tensão, tempo e temperatura, como por exemplo, as resumidas por Skrzypek (1993). Porém, em geral, o comportamento viscoso do maciço em túneis evidencia-se após um determinado nível de tensões, conforme visto na Figura 4.16. Para esses casos são adotadas superfícies de escoamento análogas as da elastoplastidade. No presente trabalho serão utilizadas as mesmas superfícies do capítulo 5.5.2. Porém, ao contrário da elastoplastidade, essa superfície não delimita um domínio plasticamente admissível podendo  $f(\underline{\sigma}, q) > 0$ .

### 5.6.3 Regra de fluxo viscoplástico

Tal como na elastoplastidade, a regra de fluxo viscoplástico é postulada da seguinte forma:

$$\underline{\dot{\epsilon}}^{vp} = \lambda \underline{\underline{g}}_{\sigma} \quad (5.55)$$

em que  $\underline{\dot{\epsilon}}^{vp}$  é o fluxo viscoplástico (ou taxa de deformação viscoplástica),  $\lambda$  a magnitude da deformação viscoplástica e  $\underline{\underline{g}}_{\sigma}$  o vetor de fluxo viscoplástico, definido de forma igual ao da elastoplastidade, ou seja, através do gradiente de uma função potencial  $g$ , porém viscoplástica.

### 5.6.4 Lei de endurecimento/amolecimento

Na viscoplasticidade o endurecimento pode ser incorporado fazendo com que as variáveis internas sejam função da magnitude da deformação viscoplástica acumulada:

$$\underline{q} = \underline{h}(\bar{\varepsilon}^{vp}) \quad (5.56)$$

em que

$$\bar{\varepsilon}^{vp} = \int_0^t |\dot{\lambda}| dt. \quad (5.57)$$

Contudo, no presente trabalho, apesar da generalidade dos algoritmos descritos na seção posterior, não será incorporado o endurecimento/amolecimento, se tratando, portanto, de uma viscoplasticidade perfeita.

### 5.6.5 Multiplicador viscoplástico

Como as deformações viscoplásticas ocorrem quando  $f > 0$  não há a imposição da condição de consistência. Dessa forma, tem-se que a taxa do multiplicador viscoplástico  $\dot{\lambda}$  não pode ser obtida de uma condição do tipo  $\dot{f} = 0$ . Para contornar esse aspecto, existem modelos que fornecem uma expressão explícita para  $\dot{\lambda}$ , e no presente trabalho será adotado o modelo de Perzyna (ZIENKIEWICZ; CORMEAU, 1974, p. 823):

$$\dot{\lambda} = \frac{\Phi(f/f_0)}{\eta} \quad (5.58)$$

$$\Phi = \left\langle \frac{f(\underline{\sigma}, \underline{q})}{f_0} \right\rangle^n \quad (5.59)$$

em que  $\eta$  é a constante de viscosidade dinâmica (unidade de tempo),  $\Phi$  é a função de sobretensão, nesse caso, uma função potencial com expoente  $n$ ,  $f_0$  parâmetro de tensão convenientemente adotado e  $\langle * \rangle$  é a função de McCauley, que é nulo quando  $* < 0$ , ou seja, apenas ocorrerá fluxo viscoplástico quando o critério  $f/f_0$  for positivo.

Muitas vezes o parâmetro  $f_0$  não consta na expressão como, por exemplo, em Rousset (1988, p. 222). Nesse caso, seu valor está implícito na constante  $\eta$  que possuí unidade de tempo vezes tensão elevada na potência  $n$ , ao invés de apenas a unidade de tempo, como em Zienkiewicz e Cormeau (1974). Isso não constitui um problema, pois, é mantida a consistência dimensional da expressão. Contudo, essa sutileza é importante no momento de adimensionalizar resultados com a expressão (4.6) da velocidade. Nessa expressão, Bernaud (1991) utiliza a constante de viscosidade dinâmica conforme Rousset (1988).

## 5.7 MODELO CONSTITUTIVO ELASTOPLÁSTICO-VISCOPLÁSTICO

O modelo elastoplástico-viscoplástico proposto nessa tese, dentro das hipóteses de pequenas transformações, comprehende justamente a associação em série dos modelos constitutivos acima, portanto:

$$\dot{\underline{\epsilon}} = \dot{\underline{\epsilon}}^e + \dot{\underline{\epsilon}}^p + \dot{\underline{\epsilon}}^{vp}. \quad (5.60)$$

Essa associação pode ser vista na representação reológica da Figura 5.11.

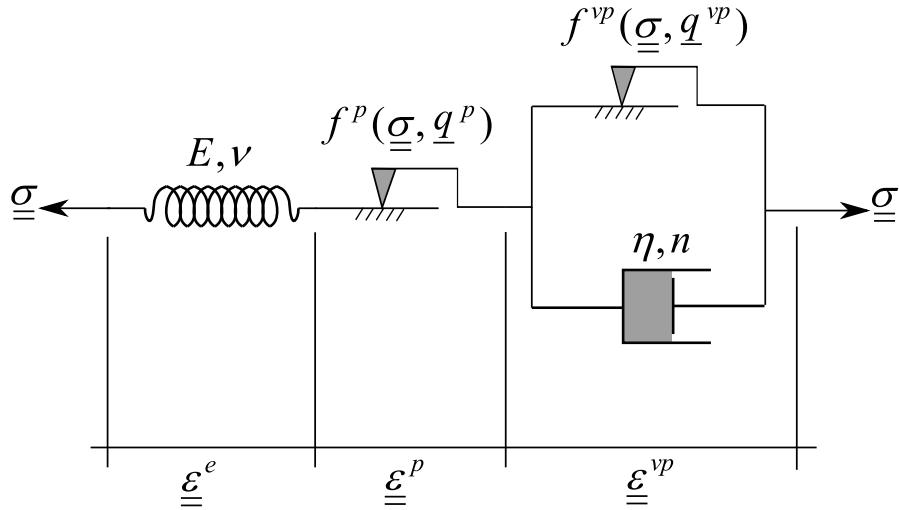


Figura 5.11 – Representação reológica do modelo elastoplástico-viscoplástico (adaptado de: Rousset (1988, p. 220))

Dessa forma, dentro das mesmas hipóteses dos modelos anteriores, a relação constitutiva linearizada fica sendo:

$$\dot{\underline{\sigma}} = \underline{D}^{epvp} : \dot{\underline{\epsilon}} = \underline{D} : \dot{\underline{\epsilon}}^e = \underline{D} : \left( \dot{\underline{\epsilon}} - \dot{\underline{\epsilon}}^p - \dot{\underline{\epsilon}}^{vp} \right). \quad (5.61)$$

Uma observação importante é que as superfícies de escoamentos e as variáveis internas que definem a parcela elastoplástica e viscoplástica desse modelo podem ser diferentes entre si, incluindo a associação das suas respectivas funções potenciais com suas superfícies de escoamento. Apesar dessa abordagem genérica, na presente tese será adotada inicialmente a proposta seguida pelas soluções analíticas de Rousset (1988) em que as forças termodinâmicas associadas às variáveis internas que governam a lei de endurecimento/amolecimento instantâneas e diferidas  $\underline{q}^p$  e  $\underline{q}^{vp}$ , respectivamente, são funções multilineares de parâmetros coesivos em função da deformação plástica e viscoplástica equivalentes. Por exemplo para ilustrar esse comportamento, de forma unidimensional, segue-se as seguintes expressões (ROUSSET, 1988, p. 220):

$$c(\epsilon^p) = \begin{cases} 2c - \frac{2(c - c_0)}{\epsilon_0} \epsilon^p & \\ 2c_0 & \text{se } \epsilon^p > \epsilon_0 \end{cases} \quad (5.62)$$

que podem ser vistas graficamente na Figura 5.12.

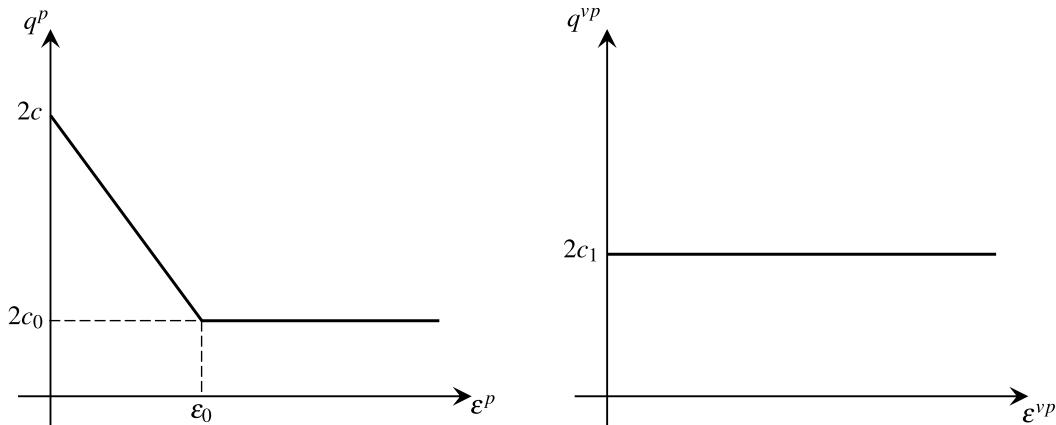


Figura 5.12 – Leis de endurecimento e amolecimento para a parcela elastoplástica (à esquerda) e viscoplastica (à direita) (adaptado de: Rousset (1988, p. 220))

Nesse modelo, pode-se notar que a elastoplasticidade possui um amolecimento bilinear e a viscoplasticidade é perfeita. Os valores das coesões possuem a seguinte relação entre si:  $c_0 < c_1 < c$ . Essa relação não é arbitrária e pretende representar o inicio do comportamento diferido frente ao comportamento instantâneo. Essa desigualdade implica que as deformações viscoplásticas tenham inicio antes mesmo do maciço atingir sua resistência máxima de curto prazo e se mantém mesmo após o maciço ter atingido sua coesão residual. Generalizando para o caso tridimensional, para um determinado ponto no interior do maciço, tem-se, para seu estado de tensões, os domínios apresentados na Figura 5.13.

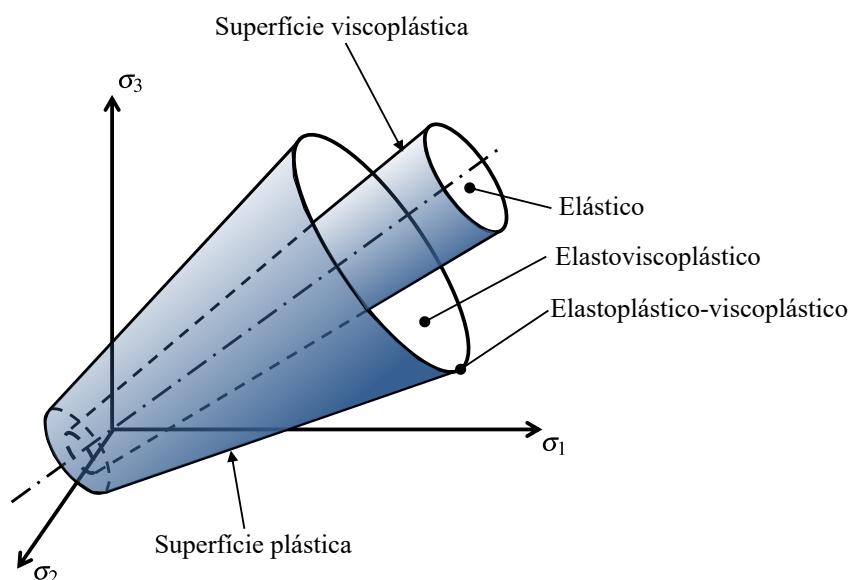


Figura 5.13 – Domínios e superfícies do modelo elastoplástico-viscoplastico (adaptado de: Debernardi e Barla (2009, p. 263))

O comportamento desse modelo reológico pode ainda ser melhor entendido através da resposta das tensões frente a uma taxa de deformação constante. Esse comportamento é ilustrado na Figura 5.14, sendo  $\dot{\epsilon}_1 = \infty > \dot{\epsilon}_2 > \dot{\epsilon}_3 > \dot{\epsilon}_4 = 0$ .

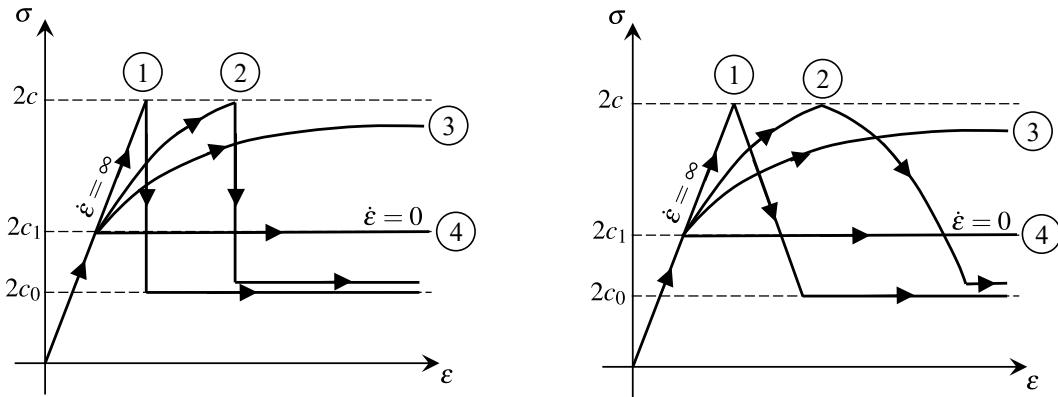


Figura 5.14 – Resposta do sistema a uma solicitação  $\dot{\epsilon} = \text{const}$  (adaptado de: Rousset (1988, p. 221))

Para altas taxas de deformação (caso 1 e 2), a tensão aumenta rapidamente até atingir o valor limite de  $2c$  e em seguida diminui abruptamente (ruptura frágil) ou gradualmente (ruptura dúctil) mantendo uma tensão residual de  $2c_0$ . Pode-se notar que no caso 1, quando a taxa de deformação é muito alta, ao contrário do caso 2, os efeitos viscosos praticamente não ocorrem, tendo apenas o comportamento elastoplástico. Contudo, para taxas menores de deformação (caso 3) o limiar de ruptura não é atingido e a tensão evolui assintoticamente para um valor intermediário entre  $2c$  e  $2c_1$ . Pode-se notar que no caso 4, quando a taxa de deformação é muito lenta, o modelo possui uma resposta elastoplástica perfeita com o limiar em  $2c_1$ .

## 6 SOLUÇÃO DO MODELO MECÂNICO

A solução do modelo mecânico será feita através do *software ANSYS* e a primeira parte desse capítulo descreverá a solução numérica pelo método dos elementos finitos (de forma mais genérica possível) comentando as opções do ANSYS, quando pertinente. Posteriormente, será dada ênfase na solução numérica envolvendo as do modelo constitutivo do material (que é o foco principal do trabalho).

### 6.1 FORMA FRACA DAS EQUAÇÕES DE CAMPO

No contexto da evolução quase estática e da hipótese das pequenas perturbações podem-se escrever as equações de campo na sua forma fraca através do princípio dos trabalhos virtuais. Sendo assim, aplicando um campo de deslocamento virtual  $\underline{\delta u}$ , cinematicamente admissível, em (5.4), porém ao longo de todo o volume  $\Omega$  tem-se que:

$$\int_{\Omega} \left( \nabla \cdot \underline{\underline{\sigma}} + \rho \underline{f} \right) d\Omega \cdot \underline{\delta u} = 0, \quad (6.1)$$

$$\int_{\Omega} \nabla \cdot \underline{\underline{\sigma}} d\Omega \cdot \underline{\delta u} + \int_{\Omega} \rho \underline{f} d\Omega \cdot \underline{\delta u} = 0. \quad (6.2)$$

Aplicando o Teorema da Divergência no termo mais à esquerda da igualdade (6.2) obtém-se:

$$\int_{\Omega} \underline{\underline{\sigma}} : \underline{\underline{\delta \epsilon}} d\Omega - \left( \int_{\Omega} \rho \underline{f} \cdot \underline{\delta u} d\Omega + \int_{\partial\Omega} \underline{T}^d \cdot \underline{\delta u} dS \right) = U_{int} - W_{ext} = 0 \quad (6.3)$$

A expressão (6.1) é uma equação integral em que, no equilíbrio, o trabalho das forças externas  $W_{ext}$  sobre o sistema é totalmente convertido em energia potencial interna  $U_{int}$  de deformação.

### 6.2 NOTAÇÃO DE VOIGT

Os tensores simétricos de segunda e quarta ordem são comumente representados, respectivamente, por arranjos (*arrays*) vetoriais e matriciais convenientes à álgebra computacional. Dessa forma é utilizada a seguinte notação (ZIENKIEWICZ; TAYLOR; ZHU, 2005, p. 682):

$$\underline{\underline{\sigma}} \rightarrow \underline{\sigma} = \{\sigma_{11} \ \ \sigma_{22} \ \ \sigma_{33} \ \ \sigma_{12} \ \ \sigma_{23} \ \ \sigma_{13}\}^T \quad (6.4)$$

$$\underline{\underline{\varepsilon}} \rightarrow \underline{\underline{\varepsilon}} = \{\varepsilon_{11} \ \ \varepsilon_{22} \ \ \varepsilon_{33} \ \ 2\varepsilon_{12} \ \ 2\varepsilon_{23} \ \ 2\varepsilon_{13}\}^T \quad (6.5)$$

$$\underline{\underline{D}} \rightarrow \underline{\underline{D}} = \begin{bmatrix} D_{1111} & D_{1122} & D_{1133} & D_{1112} & D_{1123} & D_{1113} \\ D_{2211} & D_{2222} & D_{2233} & D_{2212} & D_{2223} & D_{2213} \\ D_{3311} & D_{3322} & D_{3333} & D_{3312} & D_{3323} & D_{3313} \\ D_{1211} & D_{1222} & D_{1233} & D_{1212} & D_{1223} & D_{1213} \\ D_{2311} & D_{2322} & D_{2333} & D_{2312} & D_{2323} & D_{2313} \\ D_{1311} & D_{1322} & D_{1333} & D_{1312} & D_{1323} & D_{1313} \end{bmatrix} \quad (6.6)$$

$$\underline{\underline{g}_\sigma} \rightarrow \underline{\underline{g}_\sigma} = \left\{ \frac{\partial g}{\partial \sigma_{11}} \ \ \frac{\partial g}{\partial \sigma_{22}} \ \ \frac{\partial g}{\partial \sigma_{33}} \ \ \frac{\partial g}{\partial \sigma_{12}} \ \ \frac{\partial g}{\partial \sigma_{23}} \ \ \frac{\partial g}{\partial \sigma_{13}} \right\}^T \quad (6.7)$$

$$\underline{\underline{1}} \rightarrow \underline{\underline{1}} = \{1 \ \ 1 \ \ 1 \ \ 0 \ \ 0 \ \ 0\}^T \quad (6.8)$$

$$\underline{\underline{1}} \rightarrow \underline{\underline{1}} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1/2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1/2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1/2 \end{bmatrix} \quad (6.9)$$

$$\underline{\underline{1}} \otimes \underline{\underline{1}} \rightarrow \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \quad (6.10)$$

sendo o subscrito  $T$  a operação de transposição. Como se pode ver é utilizada a mesma simbologia de tensores de primeira ordem e de segunda ordem representando vetores (arranjos unidimensionais) e matrizes (arranjos bidimensionais), respectivamente. Nessa notação, as operações também são transformadas, de tal forma que:

$$\begin{aligned} \underline{a} \cdot \underline{b} &\rightarrow \underline{b}^T \underline{a}, \\ \underline{\underline{a}} : \underline{\underline{b}} &\rightarrow \underline{\underline{a}}^T \underline{\underline{b}}, \\ \underline{\underline{a}} \otimes \underline{\underline{b}} &\rightarrow \underline{\underline{a}} \underline{\underline{b}}^T, \\ \underline{\underline{C}} : \underline{\underline{b}} &\rightarrow \underline{\underline{C}} \underline{b}, \\ \underline{\underline{b}} : \underline{\underline{C}} : \underline{\underline{b}} &\rightarrow \underline{\underline{b}}^T \underline{\underline{C}} \underline{b}, \\ \left( \underline{\underline{C}} : \underline{\underline{a}} \right) \otimes \left( \underline{\underline{b}} : \underline{\underline{C}} \right) &\rightarrow \underline{\underline{C}} \underline{\underline{a}} \underline{\underline{b}}^T \underline{\underline{C}}. \end{aligned} \quad (6.11)$$

Essa será a notação adotada para o restante do trabalho. Logo, o teorema dos trabalhos virtuais (6.12) pode ser reescrito da seguinte forma:

$$\int_{\Omega} \underline{\delta \varepsilon}^T \underline{\sigma} d\Omega - \left( \int_{\Omega} \rho \underline{\delta u}^T \underline{f} d\Omega + \int_{\partial\Omega} \underline{\delta u}^T \underline{T}^d dS \right) = U_{int} - W_{ext} = 0 \quad (6.12)$$

### 6.3 DISCRETIZAÇÃO ESPACIAL EM ELEMENTOS FINITOS

A solução por elementos finitos consiste em discretizar o domínio  $\Omega$  em um conjunto de elementos contíguos  $\Omega_e$ , estabelecendo o que se chama de malha de elementos finitos (Figura 6.2). Cada elemento da malha tem um formato simples: linha, triângulo ou quadrilátero, tetraedro ou hexaedro, dependendo da dimensão (1D, 2D ou 3D) do domínio a ser discretizado. Cada elemento está conectado a outros elementos compartilhando "nós" sendo que a principal incógnita do problema são os deslocamentos nodais.

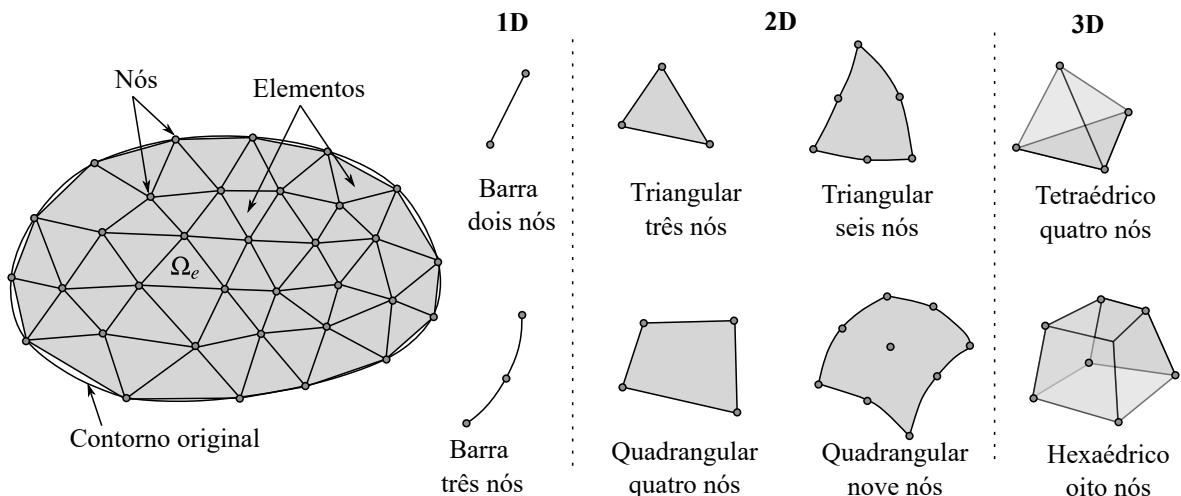


Figura 6.1 – Discretização de um domínio genérico em elementos finitos  
(adaptado de: de Souza (2003, p. 1-2))

Nesse método, o campo de deslocamentos no interior dos elementos é relacionado com os deslocamentos nodais através de funções de interpolação, por exemplo, lineares ou quadráticas, cujos coeficientes são postos em função dos deslocamentos nodais. Dessa forma, o campo de deslocamentos no interior do elemento pode ser descrito como:

$$\underline{u}(\underline{x}) = \underline{u}(x_1, x_2, x_3) = \underline{\underline{N}}(\underline{x}) \underline{u}_e. \quad (6.13)$$

sendo  $\underline{u}(\underline{x})$  o campo de deslocamentos no interior do elemento,  $\underline{u}_e$  os deslocamentos nodais e  $\underline{\underline{N}}$  a matriz contendo as funções de interpolação (também conhecidas como funções de forma). A

matriz  $\underline{\underline{N}}$  tem a seguinte estrutura:

$$\underline{\underline{N}} = \begin{bmatrix} N_1 & 0 & 0 & N_2 & 0 & 0 & \dots & N_{n_e} & 0 & 0 \\ 0 & N_1 & 0 & 0 & N_2 & 0 & \dots & 0 & N_{n_e} & 0 \\ 0 & 0 & N_1 & 0 & 0 & N_2 & \dots & 0 & 0 & N_{n_e} \end{bmatrix}_{n_d \times (n_e \cdot n_d)} \quad (6.14)$$

em que  $N_i$  são as funções de interpolação de cada nó  $i$ ,  $n_e$  número de nós do elemento e  $n_d$  o número de dimensões. Introduzindo (6.13) nas equações de compatibilidade (5.8) tem-se:

$$\underline{\varepsilon}(\underline{x}) = \underline{\varepsilon}(x_1, x_2, x_3) = \nabla^s \underline{u}(\underline{x}) = \nabla^s \underline{\underline{N}} \underline{u}_e = \underline{\underline{B}} \underline{u}_e \quad (6.15)$$

sendo  $\underline{\varepsilon}$  o campo de deformações e  $\underline{\underline{B}} = \nabla^s \underline{\underline{N}}$  a matriz que relaciona os deslocamentos nodais com as deformações no interior do elemento. Para problemas tridimensionais, o operador gradiente simétrico  $\nabla^s$ , na notação de Voigt, é dado por:

$$\nabla^s = \begin{bmatrix} \frac{\partial}{\partial x_1} & 0 & 0 \\ 0 & \frac{\partial}{\partial x_2} & 0 \\ 0 & 0 & \frac{\partial}{\partial x_3} \\ \frac{\partial}{\partial x_2} & \frac{\partial}{\partial x_1} & 0 \\ 0 & \frac{\partial}{\partial x_3} & \frac{\partial}{\partial x_2} \\ \frac{\partial}{\partial x_3} & 0 & \frac{\partial}{\partial x_1} \end{bmatrix}_{n_c \times n_d} \quad (6.16)$$

em que  $n_c$  é o número de componentes de deformações. Introduzindo (6.15) na lei de comportamento do material, é possível determinar as tensões no interior do elemento também em função dos deslocamentos nodais:

$$\underline{\sigma}(\underline{x}) = \underline{\sigma}(x_1, x_2, x_3) = \underline{\underline{D}} \underline{\underline{B}} \underline{u}_e + \underline{\underline{D}} \underline{\varepsilon}_0 + \underline{\underline{\sigma}}_0 \quad (6.17)$$

na qual  $\underline{\varepsilon}_0$  e  $\underline{\sigma}_0$  são deformações e tensões iniciais no interior do elemento, respectivamente. Nos problemas de túneis, é através de  $\underline{\sigma}_0$  que é introduzido as tensões *in situ*. Para o caso de tensão geostática hidrostática, em um túnel de profundidade  $H$  em um maciço com peso específico  $\gamma_m$  a seguinte expressão é utilizada:

$$\underline{\sigma}_0 = \gamma_m H \underline{1} \quad (6.18)$$

Introduzindo as expressões (6.13), (6.15) e (6.17) no princípio dos trabalhos virtuais (6.12), considerando o domínio de um elemento  $\Omega_e$ , obtém-se a seguinte equação de equilíbrio em forças:

$$\underline{F}_{int_e} - \underline{F}_{ext_e} = \underline{0} \quad (6.19)$$

em que:

$$\underline{F}_{int_e} = \int_{\Omega_e} \underline{\underline{B}}^T \underline{\underline{\sigma}} d\Omega_e = \underline{\underline{K}}_e \underline{u}_e + \underline{F}_{\varepsilon_{0e}} + \underline{F}_{\sigma_{0e}} \quad (6.20)$$

$$\underline{F}_{ext_e} = \underline{F}_{V_e} + \underline{F}_{S_e} + \underline{F}_{C_e} + \underline{F}_{N_e} \quad (6.21)$$

nos quais:

$$\underline{\underline{K}}_e = \int_{\Omega_e} \underline{\underline{B}}^T \underline{\underline{\sigma}} d\Omega_e, \quad \underline{F}_{\varepsilon_{0e}} = \int_{\Omega_e} \underline{\underline{B}}^T \underline{\underline{D}} \underline{\varepsilon}_0 d\Omega_e, \quad \underline{F}_{\sigma_{0e}} = \int_{\Omega_e} \underline{\underline{B}}^T \underline{\underline{\sigma}}_0 d\Omega_e, \quad (6.22)$$

$$\underline{F}_{V_e} = \int_{\Omega_e} \rho \underline{\underline{N}}^T \underline{f} d\Omega_e, \quad \underline{F}_{S_e} = \int_{\partial\Omega_e} \underline{\underline{N}}^T \underline{T}^d dS_e, \quad \underline{F}_{C_e} = \int_{\partial\Omega_e} \underline{\underline{N}}^T \underline{T}^c dS_c, \quad (6.23)$$

sendo que  $\underline{F}_{int_e}$  e  $\underline{F}_{ext_e}$  são as forças internas e externas no elemento, respectivamente,  $\underline{\underline{K}}_e$  a matriz de rigidez do elemento,  $\underline{F}_{\varepsilon_{0e}}$  e  $\underline{F}_{\sigma_{0e}}$  forças internas no elemento devido às deformações iniciais e tensões iniciais, respectivamente,  $\underline{F}_{V_e}$  forças de volume do elemento,  $\underline{F}_{S_e}$  forças de superfície no contorno livre do elemento,  $\underline{F}_{C_e}$  forças de contato entre elementos vizinhos e  $\underline{F}_{N_e}$  forças nodais. A Figura 6.2 ilustra as forças externas de um elemento genérico.

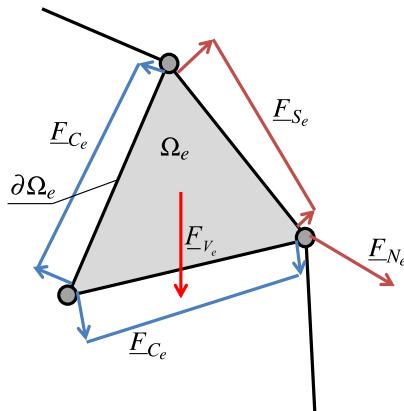


Figura 6.2 – Diagrama de corpo livre de um elemento finito (adaptado de: Lizarza (2011, p. 19))

No método dos elementos finitos, as integrais de volume no domínio  $\Omega_e$ , por eficiência, são geralmente resolvidas em um domínio de referência  $\Omega_\xi$  com geometria normalizada  $-1 \leq \xi_i \leq 1$ . As coordenadas  $\xi$  também são conhecidas como coordenadas naturais do elemento. Portanto, é feita a seguinte troca de variáveis nas integrais de volume (ZIENKIEWICZ; TAYLOR; ZHU, 2005, p. 147):

$$\int_{\Omega_e} d\Omega_e = \iiint dx_1 dx_2 dx_3 = \int_{\Omega_\xi} \det(\underline{\underline{J}}) d\Omega_\xi = \int_{-1}^1 \int_{-1}^1 \int_{-1}^1 \det(\underline{\underline{J}}) d\xi_1 d\xi_2 d\xi_3 \quad (6.24)$$

em que  $\underline{\underline{J}} = \frac{\partial \underline{x}}{\partial \xi}$  é o Jacobiano da transformação entre as coordenadas  $\underline{x}$  e  $\xi$ , sendo calculado com as mesmas funções de interpolação usadas para os deslocamentos no interior do elemento,

se tratando, portanto, de um **elemento isoparamétrico**. A integral assim representada é então resolvida pelo método da Quadratura de Gauss-Legendre. Portanto, para uma função  $f(\underline{x})$  qualquer, no domínio  $\Omega_e$ , tem-se:

$$\int_{\Omega_e} f(\underline{x}) d\Omega_e = \int_{-1}^1 \int_{-1}^1 \int_{-1}^1 f(\underline{\xi}) \det(\underline{J}) d\xi_1 d\xi_2 d\xi_3 = \sum_{i_p=1}^{n_p} W_{i_p} J_{i_p} f(\underline{\xi}_{i_p}) \quad (6.25)$$

em que  $n_p$  é o número de pontos de integração (ou pontos de Gauss),  $W_{i_p}$  é o peso referente ao ponto de integração,  $f(\underline{\xi}_{i_p})$  é o valor da função nas coordenadas naturais do ponto de integração e  $J_{i_p}$  é o determinante do Jacobiano da transformação (nas coordenadas do ponto de integração) dado por (ZIENKIEWICZ; TAYLOR; ZHU, 2005, p. 206-207):

$$J_{i_p} = \begin{cases} \det(\underline{J})_{i_p} & \text{em 3D e estado plano de deformações} \\ 2\pi \xi_{r_{i_p}} \det(\underline{J})_{i_p} & \text{em axissimetria} \end{cases} \quad . \quad (6.26)$$

sendo  $\xi_{r_{i_p}}$  a coordenada radial natural do ponto de Gauss. A equação (6.26) integra exatamente se este for um polinômio de ordem menor ou igual a  $2n_p - 1$ .

Os elementos finitos que serão utilizados nesse trabalho com suas funções de interpolação, pesos e coordenadas dos pontos de integração podem ser vistos na Figura 6.3, para análises em estado plano de deformações e, para análises tridimensionais, que consomem maior tempo de processamento, será utilizado o elemento da Figura 6.4.

PLANE 183 - QUADRILÁTERO QUADRÁTICO, 8 NÓS, 4 PONTOS DE GAUSS (Q8)

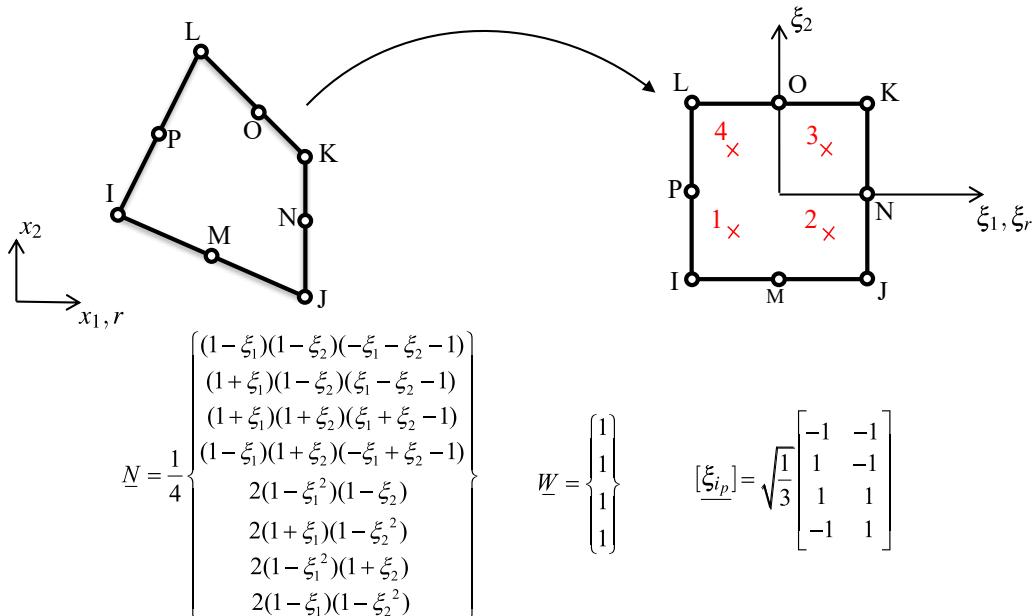


Figura 6.3 – Funções de interpolação, pesos e coordenadas dos pontos de Gauss para o elemento quadrilátero quadrático *serendipity* isoparamétrico (adaptado de: ANSYS Inc (2018b, p. 337, 369-370))

## SOLID185 - HEXAEDRO TRILINEAR, 8 NÓS, 8 PONTOS DE GAUSS

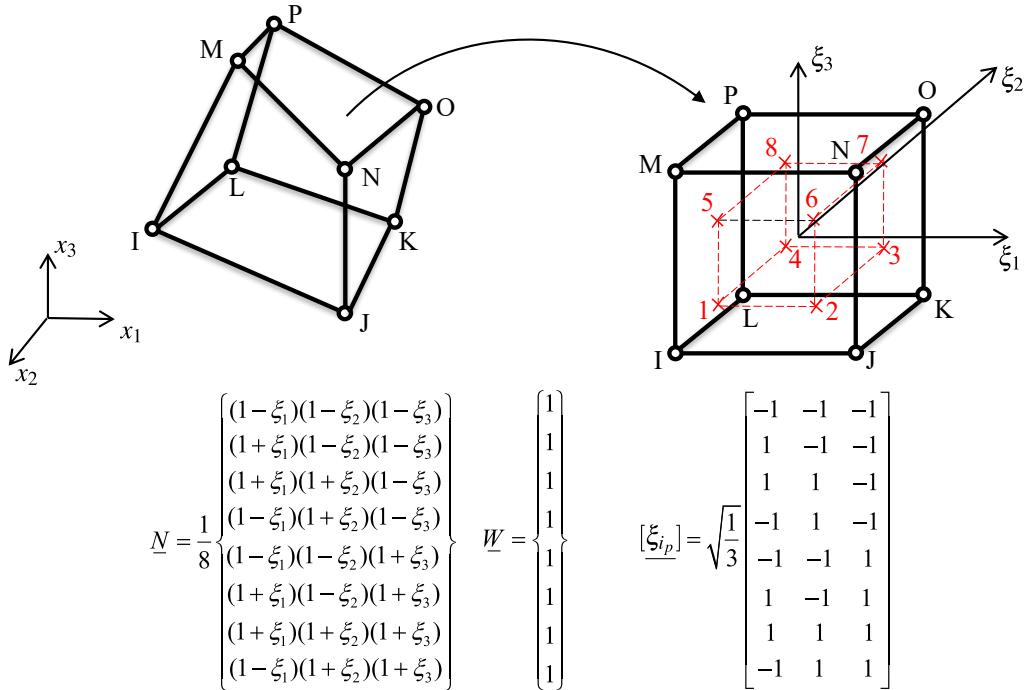


Figura 6.4 – Funções de interpolação, pesos e coordenadas dos pontos de Gauss para o elemento hexaedro trilinear isoparamétrico (adaptado de: ANSYS Inc (2018b, p. 345, 369-370))

No ANSYS, ambos elementos possuem a opção degenerada em que é possível trabalhar de forma colapsada, triangular, por exemplo, no caso do PLANE183, e prisma, tetraédrica ou piramidal, no caso do SOLID185. Nas análises não serão utilizadas essas formas.

O elemento SOLID185 possuí também opções que lidam com problemas de travamento (*Locking*) e modos espúrios (*Hourglass*). O travamento é caracterizado por uma rigidez excessiva do elemento, e ocorre principalmente em elementos de primeira ordem com integração completa que estão sujeitos a flexão. Ou ainda, quando o material é quase incompressível. Também podem ocorrer em elementos de segunda ordem, quando as deformações plásticas são da ordem das deformações elásticas. Esse problema evita-se com refinamento da malha, técnicas de subintegração e funções de formas extras. O ANSYS possuí as duas últimas técnicas para o SOLID185 (*Uniform Reduced Integration with Hourglass Control* e *Enhanced Strain Formulation*). Os modos espúrios ocorrem quando se utiliza as técnicas de subintegração e é caracterizado por uma distorção no elemento porém com zero deformação. Esse problema é evitado utilizando integração completa ou refinamento da malha. No presente trabalho se utilizará a **integração completa** (*Full integration with B method*) e se tentará evitar esses problemas através do **refinamento da malha**.

## 6.4 SOLUÇÃO DO SISTEMA NÃO LINEAR

Após o processo de discretização do domínio  $\Omega$  é necessário fazer a montagem e a solução do seguinte sistema global de equações:

$$(\underline{\underline{K}} \underline{u} + \underline{F}_{\varepsilon_0} + \underline{F}_{\sigma_0}) - (\underline{F}_V + \underline{F}_S + \underline{F}_N) = \underline{F}_{int} - \underline{F}_{ext} = f(\underline{u}) = \underline{0} \quad (6.27)$$

em que  $\underline{\underline{K}}$  é a matriz de rigidez global resultante da montagem das matrizes de rigidezes  $\underline{\underline{K}}_e$  de cada elemento,  $\underline{u}$  é o vetor incógnito de deslocamentos nodais global proveniente da montagem dos deslocamentos nodais  $\underline{u}_e$  de cada elemento,  $\{\underline{F}_V, \underline{F}_S, \underline{F}_N, \underline{F}_{\varepsilon_0}, \underline{F}_{\sigma_0}\}$  são as forças globais resultantes da montagem das forças em cada elemento, conforme (6.22) e (6.23). Evidentemente não há um vetor de forças de contato global  $\underline{F}_C$ , uma vez que as forças de contato entre elementos vizinhos possuem a mesma magnitude e sentidos contrários e, portanto, se anulam no somatório global.

Quando há uma não linearidade envolvendo as leis constitutivas do material (tal como na plasticidade ou viscoplasticidade, em que o problema é dependente da trajetória das tensões), a matriz de coeficientes  $\underline{\underline{K}}$  passa a depender dos deslocamentos nodais incógnitos  $\underline{u}$ , tornando o sistema (6.27) não linear. O **método de Newton-Raphson** (NR) é o processo iterativo comumente utilizado para resolver esse sistema e é utilizado pelo ANSYS. Dessa forma, aproximando (6.27) por uma série de Taylor truncada na primeira ordem (linearização) tem-se:

$$\underline{f}(\underline{u}) \approx \underline{f}(\underline{u}_i) + \underline{f}'(\underline{u}_i)(\underline{u}_{i+1} - \underline{u}_i). \quad (6.28)$$

Fazendo  $\underline{f}(\underline{u}) = \underline{0}$ , isolando  $\underline{u}_{i+1}$  e substituindo (6.27) em (6.28), considerando que  $\underline{F}_{ext}$  não depende dos deslocamentos (devido à hipótese das pequenas perturbações), tem-se a seguinte expressão iterativa para aproximar  $\underline{u}$ :

$$\underline{u}_{i+1} = \underline{u}_i - \underline{\underline{K}}(\underline{u}_i)^{-1} (\underline{F}_{int}(\underline{u}_i) - \underline{F}_{ext}) = \underline{u}_i - \underline{\underline{K}}_i^{-1} (\underline{F}_{int_i} - \underline{F}_{ext}) = \underline{u}_i + \underline{\underline{K}}_i^{-1} \underline{R}_i = \underline{u}_i + \Delta \underline{u}_i \quad (6.29)$$

em que  $\Delta \underline{u}_i$  é o incremento de deslocamentos nodais da iteração atual  $i$ ,  $\underline{F}_{int_i}$  são as forças internas (ou forças restauradoras) da iteração atual (calculadas com  $\underline{u}_i$ ),  $\underline{R}_i$  é o vetor de carga desbalanceado (também chamado de resíduo) para a iteração atual,  $\underline{\underline{K}}_i$  a matriz de rigidez global tangente na iteração atual,  $\underline{u}_i$  os deslocamentos nodais na iteração atual e  $\underline{u}_{i+1}$  os deslocamentos nodais atualizados para a próxima iteração.

Como  $\Delta \underline{u}_i = \underline{\underline{K}}_i^{-1} \underline{R}_i$  é um sistema de equações esparso (contém muitos elementos nulos) e geralmente simétrico, há diversas técnicas de solução que buscam explorar essas características para obter eficiência computacional. O ANSYS possui uma técnica de **solução direta**, que busca resolver o sistema através de operações que compreendem a inversão da matriz de rigidez, e três técnicas de **soluções indiretas**, que se aproximam da solução do sistema de forma interativa com uma dada tolerância.

A solução direta (*SPARSE - Sparse Direct Solver*) consiste em aplicar a fatorização de Cholesky modificada  $\underline{\underline{K}} = \underline{\underline{L}} \underline{\underline{D}} \underline{\underline{L}}^T$  (em que  $\underline{\underline{L}}$  é uma matriz triangular inferior e  $\underline{\underline{D}}$  uma matriz diagonal) e, através de substituições progressivas e retroativas, resolver o sistema. Em geral, para problemas com poucos graus de liberdade, é uma solução bastante eficiente e não possui problemas de instabilidade numérica. Algoritmos de solução direta análogas podem ser encontrados em Felippa (1975) e Smith, Griffiths e Margetts (2014).

As soluções indiretas, implementadas no ANSYS, se baseiam na família de Métodos dos Gradientes Conjugados Pré-Condicionados, que consistem em minimizar o potencial  $V(\Delta\underline{u}) = \frac{1}{2} \Delta\underline{u}^T \underline{\underline{K}} \Delta\underline{u} - \Delta\underline{u}^T \underline{\underline{R}}$  com aproximações  $\Delta\underline{u}^{(j+1)} = \Delta\underline{u}^j + a_j \underline{d}^{(j)}$  para  $j = 0, 1, 2, \dots, m$ , sendo  $\underline{d}^{(j)}$  os gradientes conjugados, ou seja,  $\underline{d}^{(i)^T} \underline{\underline{K}} \underline{d}^{(j)} = 0, \forall i \neq j$ . Quando o sistema é bem condicionado, sua solução converge para  $m \leq n_{gdl}$  iterações e o número de operações é proporcional à raiz quadrada do número de condição da matriz  $\underline{\underline{K}}$ , numero este que é a razão entre o maior e menor autovalor da matriz  $\underline{\underline{K}}$ . Em vista disso, há diversas técnicas de transformação do sistema para melhorar o condicionamento dessa matriz através de uma transformação do tipo  $\underline{\underline{M}}^{-1} \underline{\underline{K}} \underline{u} = \underline{\underline{M}}^{-1} \underline{\underline{R}}$ , em que  $\underline{\underline{M}}$  é o pré-condicionador. O ANSYS possui três métodos implementados (ANSYS Inc, 2018b, p. 647):

- a) JCG (*Jacobi Conjugate Gradiente*): o pré-condicionador é tomado como sendo uma matriz diagonal cujos termos são as diagonais da matriz de rigidez;
- b) ICCG (*Incomplete Cholesky Conjugate Gradiente*), o pré-condicionador é tomado através de uma fatorização incompleta de Cholesky. O algoritmo é internamente desenvolvido pela ANSYS e não publicado, e é mais robusto que o primeiro para matrizes mal condicionadas;
- c) PCG (*Preconditioned Conjugate Gradiente*) é um solucionador da *Computational Applications and System Integration, Inc* que não consta nos manuais do *software*. Contudo, é dito eficiente e confiável para problemas mal condicionados.

Maiores explicações dessas soluções indiretas, podem ser encontrados em Mendonça e Fancello (2019, p. 316). Cabe salientar que, tanto os métodos diretos quanto indiretos, são implementados buscando a eficiência computacional, evitando-se trabalhar com os elementos nulos, diminuindo o armazenamento e o número de operações. Alguns métodos que compreendem reordenamento e armazenamento eficiente do sistema, utilizados pelo ANSYS, podem ser encontrados em George e Liu (1981). Além disso, uma vantagem do ANSYS é a possibilidade de trabalhar com computação de alto desempenho (*High Performance Computing*) com opções de aceleração usando placas de vídeo da Nvidia, memória compartilhada (*SMP - Shared-Memory Parallel*) ou computação distribuída (*MPI - Message Passing Interface*). Para o presente trabalho, foi

utilizado a opção de SMP com 12 processadores.

A rigor para um problema não linear a escolha do melhor método de solução vai depender de testagem. Por padrão o ANSYS utiliza o SPARSE. Contudo, recomenda utilizar o método PCG para estruturas sólidas 3D que possuem mais de 200.000 graus de liberdade. Para problemas mal condicionados, seja pela forma dos elementos, grandes diferenças entre as propriedades dos materiais ou ainda por insuficiente condições de contorno, recomenda-se o SPARSE (ANSYS Inc, 2018a, p. 242).

Para incorporar a dependência do histórico de cargas/tempo, para um dado passo de carga/tempo  $p$ , a expressão (6.29) é discretizada em  $1 \leq n \leq n_s$  subpassos em que a carga externa e o tempo do passo são incrementados linearmente. Dessa forma, itera-se o sistema (6.29) repetidas vezes para cada subpasso  $n$  tendo-se:

$$\underline{\Delta u}_{n,i} = \underline{\underline{K}}_{n,i}^{-1} (\underline{F}_{ext_{n+1}} - \underline{F}_{int_{n,i}}) = \underline{\underline{K}}_{n,i}^{-1} \underline{R}_{n,i}, \quad (6.30)$$

$$\underline{u}_{n,i+1} = \underline{u}_{n,i} + \underline{\Delta u}_{n,i}, \quad (6.31)$$

$$\underline{F}_{ext_{n+1}} = \underline{F}_{ext_n} + \underline{\Delta F}_p, \quad (6.32)$$

$$t_{n+1} = t_n + \Delta t_p, \quad (6.33)$$

em que

$$\underline{F}_{int_{n,i}} = \left( \int_{\Omega} \underline{\underline{B}}^T \underline{\sigma} d\Omega \right)_{n,i} \quad (6.34)$$

sendo  $\underline{u}_{0,0}$ ,  $\underline{F}_{int_{0,0}}$ ,  $\underline{F}_{ext_0}$  e  $t_0$  nulos. Para os próximos subpassos os valores de  $\underline{u}_{n,0}$  e  $\underline{F}_{int_{n,0}}$ , correspondem aos valores da solução convergente no subpasso anterior  $n - 1$ . O número de subpassos  $n_s$  e o incremento de força externa  $\underline{\Delta F}_p$  são dependentes do incremento de tempo utilizado no passo  $\Delta t_p$ , e são dados por:

$$n_s = \frac{t_p}{\Delta t_p}, \quad \underline{\Delta F}_p = \frac{\underline{F}_{ext_p}}{n_s} \quad (6.35)$$

sendo  $t_p$  e  $\underline{F}_{ext_p}$ , nessa ordem, o tempo e a força no final do passo. Em busca da convergência e eficiência computacional, o ANSYS tem a opção de variar automaticamente o  $\Delta t_p$  dentro de um intervalo  $\Delta t_{p_{min}} \leq \Delta t_p \leq \Delta t_{p_{max}}$  fornecido pelo usuário. É possível que o algoritmo não convirja em um dado subpasso durante as iterações e, portanto, é utilizado um limite de  $n_{eqit} = 25$  iterações de equilíbrio por subpasso. Quando a solução não converge dentro desse limite, o ANSYS divide pela metade o incremento de tempo, e consequentemente a carga, e reinicia o cálculo do passo. Esse procedimento é chamado de Método da Bisseção e é executado tantas

vezes quanto necessárias até atingir a convergência ou  $\Delta t_p \leq \Delta t_{p_{min}}$  a partir do qual a solução é dada como não convergente e estabelecido o critério de parada (ANSYS Inc, 2018b, p. 637).

A convergência é verificada sobre o vetor resíduo e o incremento de deslocamentos nodais para cada iteração de equilíbrio, através das seguintes expressões (omitindo-se o subíndice  $n$ ) (ANSYS Inc, 2018b, p. 667):

$$\|\underline{R}_i\| \leq \varepsilon_R R_{ref}, \quad \|\Delta \underline{u}_i\| \leq \varepsilon_u u_{ref} \quad (6.36)$$

em que  $\varepsilon_R$  e  $\varepsilon_u$  são as tolerâncias para o resíduo (de 0,5%) e deslocamentos (de 5%), respectivamente. Os valores de referência  $R_{ref}$  e  $u_{ref}$  são  $\|\underline{F}_{ext_p}\|$  e  $\|\underline{u}_{n,i}\|$ , respectivamente. Ou seja, por padrão o critério para o resíduo é de 0,5% do valor das forças externas e os deslocamentos não podem apresentar uma variação maior do que 5%. No ANSYS, a norma pode ser calculada de três formas: a máxima componente em valor absoluto, a soma absoluta das componentes ou a norma euclidiana das componentes, conforme:

$$\|\underline{*}\| = \begin{cases} \|\underline{*}\|_\infty = \max(*_j) \\ \|\underline{*}\|_1 = \sum_j |*_j| \\ \|\underline{*}\|_2 = (\sum_j *_j^2)^{1/2} \end{cases} . \quad (6.37)$$

em que  $j$  é o índice da componente do vetor  $\underline{*} = \underline{R}$  ou  $\underline{*} = \Delta \underline{u}$ . Para o presente trabalho foi escolhida a norma euclidiana que era o padrão do ANSYS. A Figura 6.5 ilustra o andamento da solução ao longo dos subpassos. Pode-se ver que o resíduo e o incremento de deformações vão ficando cada vez menores ao longo das iterações de equilíbrio.

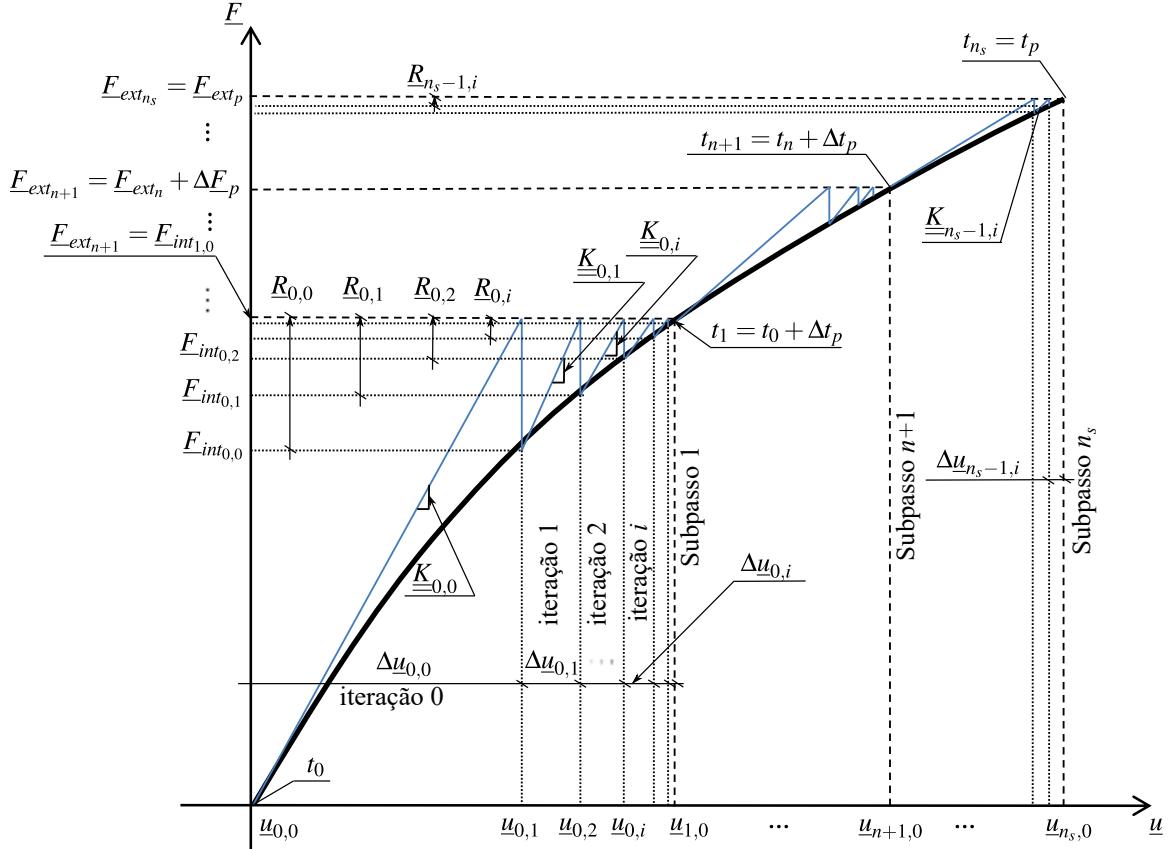


Figura 6.5 – Ilustração das iterações do método de Newton-Raphson  
(adaptado de: Chen e Han (1988, p. 301))

O ANSYS possui ainda três variações do método de Newton-Raphson de acordo com a estratégia de atualização da matriz de rigidez  $\underline{\underline{K}}_{n,i}$  (2018b, p. 666):

- Completo (Full)**: quando a matriz de rigidez é atualizada a cada iteração  $i$ , ou seja,  $\underline{\underline{K}}_{n,i} \leftarrow \underline{\underline{K}}_{n,i}$ . Essa opção reduz o número de iterações de equilíbrio (convergência quadrática), porém, exige a montagem, fatorização e inversão da matriz a cada iteração;
- Modificado (Modified)**: quando a matriz de rigidez é atualizada apenas a cada subpasso de carga/tempo  $n$ , ou seja,  $\underline{\underline{K}}_{n,i} \leftarrow \underline{\underline{K}}_{n,0}$ ;
- Inicial (Initial Stiffness)**: quando é utilizada a mesma matriz para todos os subpassos e iterações, ou seja,  $\underline{\underline{K}}_{n,i} \leftarrow \underline{\underline{K}}_{0,0}$ .

Além dessas opções, para problemas estáticos, o ANSYS possui três técnicas para melhorar a convergência do método de Newton-Raphson, que são (ANSYS Inc, 2018b, p. 668-673):

- a) **Predictor** (*Predictor*): extrapola o vetor de deslocamentos iniciais de cada subpasso utilizando os incrementos de deslocamentos acumulados do subpasso anterior multiplicados pela relação entre os incrementos de tempo entre ambos subpassos;
- b) **Descida Adaptativa** (*Adaptative Descent*): consiste em alternar entre a matriz de rigidez tangente e secante conforme o andamento do resíduo durante as iterações de equilíbrio. Só é utilizada em conjunto com o método de Newton-Raphson Completo;
- c) **Pesquisa de linha** (*Line Search*): tenta melhorar a solução multiplicando o incremento de deslocamentos por um escalar determinado pela minimização da energia do sistema;
- d) **Método do comprimento de arco** (*Arc-Length Method*): utilizado para solução de equilíbrio estático não-linear de problemas instáveis como flambagem e pós-flambagem.

Na Figura 6.6 tem-se o fluxograma do método de Newton-Raphson, mostrando as três opções de atualização da matriz de rigidez, o método da bisseção e os laços das iterações de equilíbrio e de subpassos.

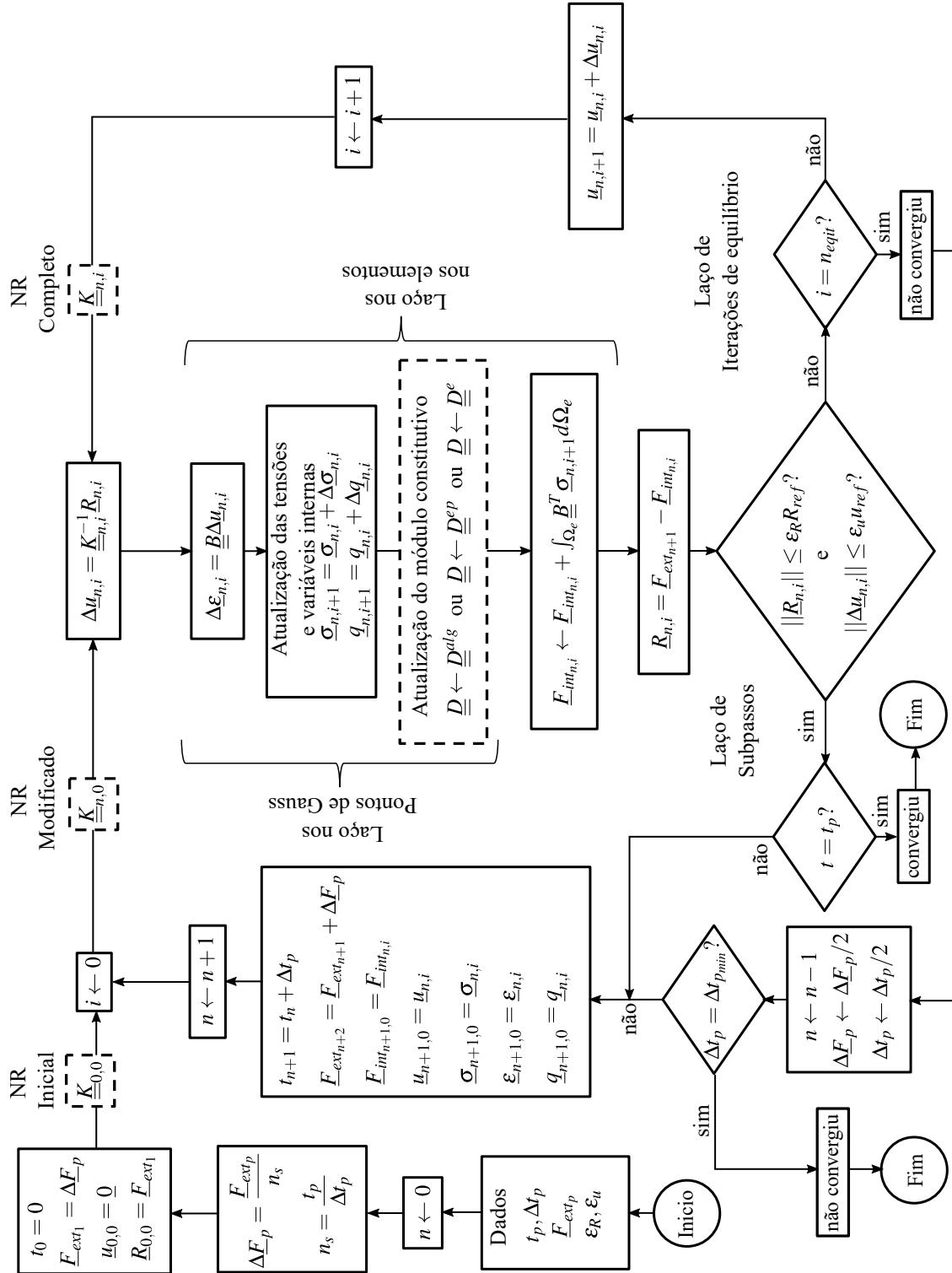


Figura 6.6 – Fluxograma do método de Newton-Raphson para solução do sistema de equações globais não lineares

Ainda na Figura 6.6 está detalhado a parte de atualização das tensões e variáveis internas e do módulo constitutivo, que serão os temas do próximo capítulo. É importante que esteja nesse fluxograma o detalhe dos laços nos elementos e nos pontos de Gauss, pois a customização do

modelo do material, através da subrotina USERMAT, como veremos, estará justamente aninhado nesse laço mais interno dos pontos de Gauss.

A convergência quadrática da opção de Newton-Raphson Completo só é efetivamente obtida se for utilizado o módulo consistente  $\underline{D}^{alg}$  após o algoritmo de integração das tensões, conforme Simo e Taylor (1985).

## 6.5 ALGORITMO DE ATUALIZAÇÃO DAS TENSÕES E VARIÁVEIS INTERNAS

Como visto no capítulo anterior, durante as iterações de equilíbrio é necessário fazer a integração espacial das forças internas no contexto do método dos elementos finitos. Essa integração pode ser escrita da seguinte maneira (omitindo o subíndice  $n$  referente ao subpasso):

$$\underline{F}_{int_i} = \int_{\Omega} \underline{\underline{B}}^T \underline{\sigma}_{i+1} d\Omega = \sum_{i_e=1}^{n_e} \sum_{i_p=1}^{n_p} (\underline{\underline{B}}^T \underline{\sigma}_{i+1} WJ)_{i_p, i_e} \quad (6.38)$$

sendo  $\underline{\sigma}_{i+1}$  dado pela relação constitutiva do material. Contudo, as relações constitutivas, por dependerem da trajetória das tensões e/ou do tempo, estão descritas em forma de taxas, conforme visto no Capítulo 5. E, portanto, é necessária a solução desse sistema de equações diferenciais ordinárias por algum método de integração juntamente com as iterações de equilíbrio. Essa etapa de integração, no esquema de elementos finitos, é conhecida como algoritmo de atualização das tensões e variáveis internas. Tal como ilustrado na Figura 6.6, esse algoritmo ocorre para cada ponto de Gauss de cada elemento e tem por finalidade obter o incremento de tensão  $\Delta\underline{\sigma}$  e de forças associadas às variáveis internas  $\Delta\underline{q}$  a cada iteração de equilíbrio.

### 6.5.1 Integração das equações constitutivas elastoplásticas

Como visto no Capítulo 5, considerando a hipótese das pequenas transformações, as equações constitutivas da elastoplasticidade, já na notação de Voigt, podem ser escritas como:

$$\left\{ \begin{array}{l} \dot{\underline{\sigma}} = \underline{\underline{D}} \dot{\underline{\varepsilon}}^e = \underline{\underline{D}}(\dot{\underline{\varepsilon}} - \dot{\underline{\varepsilon}}^p) \\ \dot{\underline{\varepsilon}}^p = \dot{\lambda} g_{\sigma} \\ \dot{\underline{q}} = \dot{\lambda} h \\ \dot{f} = \underline{f}_{\sigma}^T \dot{\underline{\sigma}} + \underline{f}_q^T \dot{\underline{q}} = 0 \\ f \leq 0, \quad \dot{\lambda} \geq 0, \quad \dot{\lambda} f = 0 \end{array} \right. . \quad (6.39)$$

Em geral, a proposta dos algoritmos de integração consiste em integrar as equações constitutivas através de métodos numéricos, como os de Runge-Kutta, com técnicas explícitas, implícitas

ou semi-implícitas. E dessa forma, conhecido o conjunto de  $\{\underline{\varepsilon}_i, \underline{\varepsilon}_i^p, \underline{\sigma}_i, \underline{q}_i\}$  na iteração  $i$  e o incremento de deformação total  $\Delta\underline{\varepsilon}_i$  busca-se os valores  $\{\underline{\varepsilon}_{i+1}, \underline{\varepsilon}_{i+1}^p, \underline{\sigma}_{i+1}, \underline{q}_{i+1}\}$  da iteração seguinte  $i + 1$ . No presente trabalho será implementado um **esquema semi-implícito de Euler de dois passos para a relação constitutiva elastoplástica**, inicialmente em elastoplasticidade perfeita, e posteriormente com as leis de endurecimento/amolecimento bilineares para fins de análise na problemática de túneis.

Em geral, em elastoplasticidade, o método de Runge-Kutta de primeira ordem (também conhecido como o método de Euler) é comumente utilizado para fazer a integração das relações constitutivas (6.39), tendo-se o seguinte esquema de integração:

$$\begin{cases} \underline{\varepsilon}_{i+1} = \underline{\varepsilon}_i + \Delta\underline{\varepsilon}_i \\ \underline{\varepsilon}_{i+1}^p = \underline{\varepsilon}_i^p + [(1 - \theta)\Delta\lambda_i \underline{g}_{\sigma_i} + \theta\Delta\lambda_{i+1} \underline{g}_{\sigma_{i+1}}] \\ \underline{q}_{i+1} = \underline{q}_i + [(1 - \theta)\Delta\lambda_i \underline{h}_i + \theta\Delta\lambda_{i+1} \underline{h}_{i+1}] \\ \underline{\sigma}_{i+1} = \underline{\underline{\sigma}} \underline{\varepsilon}_{i+1}^e = \underline{\underline{\sigma}}(\underline{\varepsilon}_{i+1} - \underline{\varepsilon}_{i+1}^p) \\ f_{i+1} = f(\underline{\sigma}_{i+1}, \underline{q}_{i+1}) = 0 \end{cases} \quad (6.40)$$

em que  $\Delta\lambda = \dot{\lambda}\Delta t$  e  $0 \leq \theta \leq 1$  fornece a regra trapezoidal generalizada para o fluxo plástico e evolução das variáveis internas. Quando  $\theta = 0$  tem-se a forma completamente explícita (*fully explicit forward Euler*) e  $\theta = 1$  completamente implícita (*fully implicit backward Euler*). Os algoritmos semi-implícitos adotam  $0 \leq \theta < 1$  ou ainda uma combinação implícita e explícita de  $\Delta\lambda$ ,  $\underline{g}_\sigma$  e  $\underline{h}$ .

Os esquemas explícitos, como os de Nayak e Zienkiewicz (1972), Zienkiewicz, Valliappan e King (1969) e Owen e Hinton (1980) foram largamente usados até que Simo e Taylor (1985) propuseram um método implícito de dois passos conhecido como projeção do ponto mais próximo (*Closest Point Projection Method* ou abreviadamente CPPM). Isso pois, os esquemas completamente explícitos não satisfaziam a condição de consistência  $f_{i+1} = f(\underline{\sigma}_{i+1}, \underline{q}_{i+1}) = 0$  no final do passo, uma vez que o multiplicador plástico e os vetores de fluxo são calculados com as tensões do passo anterior  $i$ . Segundo Belytschko, Liu e Moran (2000, p. 278) isso faz com que a solução acumule uma certa imprecisão. Esse fato levou a comunidade a desenvolver e utilizar cada vez mais os algoritmos implícitos e semi-implícitos que buscam satisfazer  $f_{i+1} = 0$ . E, portanto, será o método adotado nesse trabalho. Alguns dos principais métodos implícitos e semi-implícitos para elastoplasticidade podem ser encontrados em Simo e Hughes (1998), Belytschko, Liu e Moran (2000), de SOUZA NETO, Peri e Owen (2008) e Huang e Griffiths (2009).

Atualmente esses métodos empregados nos algoritmos de atualização das tensões consistem em um esquema preditor-corretor de dois passos. Primeiro aplica-se a etapa do preditor elástico e, se necessário, a do corretor plástico. Dessa forma, definindo  $\Delta\underline{\varepsilon}_{i+1}^p \equiv \underline{\varepsilon}_{i+1}^p - \underline{\varepsilon}_i^p$ , o preditor elástico

pode ser explicitado de (6.40)<sub>4</sub>, conforme:

$$\underline{\sigma}_{i+1} = \underline{D}(\underline{\varepsilon}_{i+1} - \underline{\varepsilon}_{i+1}^p) = \underline{D}(\underline{\varepsilon}_i + \Delta\underline{\varepsilon}_i - \underline{\varepsilon}_{i+1}^p) = \underline{\sigma}_{i+1}^{trial} + \Delta\underline{\sigma}_{i+1} \quad (6.41)$$

em que  $\underline{\sigma}_{i+1}^{trial} = \underline{\sigma}_i + \underline{D}\Delta\underline{\varepsilon}_i$  é o preditor elástico (também conhecido como tensão tentativa). Desse modo, no primeiro passo calcula-se a tensão tentativa e testa-se a função de escoamento  $f$ . Caso  $f < 0$  o estado de tensões está no domínio elástico e não há necessidade de aplicar o corretor plástico. Contudo, se  $f > 0$ , ou seja, o estado de tensões está fora do domínio plasticamente admissível, é necessário aplicar a etapa do corretor plástico.

O corretor plástico, nada mais é do que o procedimento de solução do sistema (6.40)<sub>2,3,5</sub> que determinará o valor de  $\Delta\underline{\sigma}_{i+1}$  e  $\Delta\underline{q}_{i+1}$ . Quando não é possível obter uma solução analítica para esse sistema, o procedimento de solução comumente utilizado é o de Newton-Raphson que itera  $k$  vezes no espaço das tensões e variáveis internas até que o estado de tensões retorne sobre a superfície de escoamento (plasticamente admissível). Por isso esses esquemas também são conhecidos como algoritmos de retorno mapeado (*Return Mapping Algorithm*). A Figura 6.8 ilustra geometricamente esse procedimento.

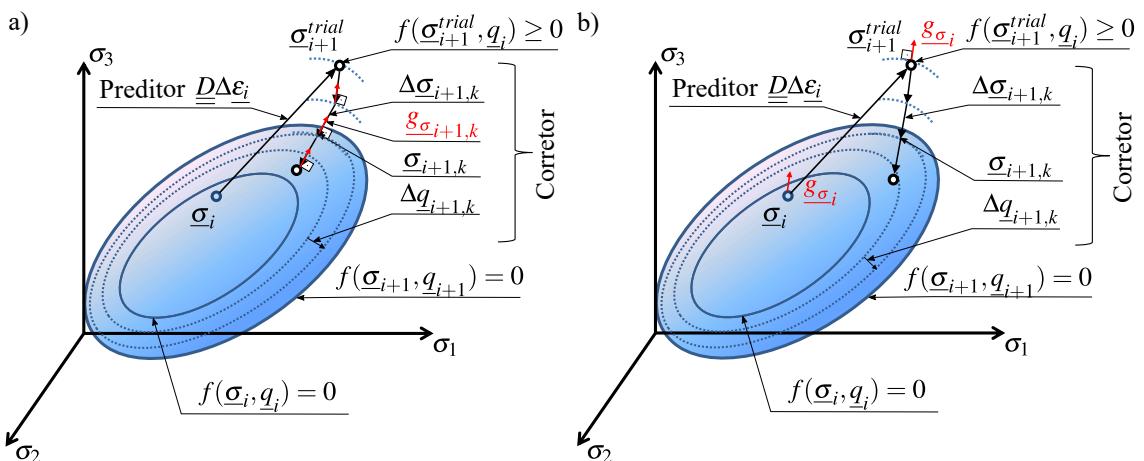


Figura 6.7 – Ilustração do algoritmo de retorno mapeado genérico com  $k$  iterações locais de Newton-Raphson: a) totalmente implícito e b) semi-implícito.

Uma dificuldade do método totalmente implícito é a necessidade da obtenção de gradientes de segunda ordem das funções potenciais, o que levou ao desenvolvimento e utilização de algoritmos semi-implícitos. No presente trabalho será implementado o algoritmo de Moran, Ortiz e Shih (1990) descrito em Belytschko, Liu e Moran (2000, p. 287) que adotam para o multiplicador plástico um esquema implícito e para o vetor de fluxo e módulo de endurecimento um esquema explícito.

Portanto, para resolver por Newton-Raphson o sistema que dá origem ao corretor plástico, se

escreve as equações (6.40)<sub>2,3,5</sub> da seguinte forma residual (omitindo-se o índice  $i + 1$ ):

$$\begin{cases} \underline{a} = -\underline{\varepsilon}^p + \underline{\varepsilon}_i^p + \Delta\lambda \underline{g}_{\sigma_i} = 0 \\ \underline{b} = -\underline{q} + \underline{q}_i + \Delta\lambda \underline{h}_i = 0 \\ f = f(\underline{\sigma}, \underline{q}) = 0 \end{cases}. \quad (6.42)$$

Linearizando essas equações em relação à  $\Delta\lambda$ , sendo que  $\Delta\underline{\varepsilon}^p = -\underline{\underline{D}}^{-1}\Delta\underline{\sigma}$ , tem-se:

$$\begin{cases} \underline{a}_k + \underline{\underline{D}}^{-1}\Delta\underline{\sigma}_k + \delta\lambda_k \underline{g}_{\sigma_i} = 0 \\ \underline{b}_k - \Delta\underline{q}_k + \delta\lambda_k \underline{h}_i = 0 \\ f_k + \underline{f}_{\sigma_k}^T \Delta\underline{\sigma}_k + \underline{f}_{q_k}^T \Delta\underline{q}_k = 0 \end{cases}. \quad (6.43)$$

Reorganizando (6.43)<sub>1,2</sub> tem-se o seguinte corretor plástico:

$$\begin{Bmatrix} \Delta\underline{\sigma}_k \\ \Delta\underline{q}_k \end{Bmatrix} = -\delta\lambda_k \begin{bmatrix} \underline{\underline{A}}_k \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \underline{g}_{\sigma_i} \\ \underline{h}_i \end{Bmatrix} \quad (6.44)$$

em que

$$\begin{bmatrix} \underline{\underline{A}}_k \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \underline{\underline{A}} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \underline{\underline{D}} & 0 \\ 0 & -1 \end{bmatrix}. \quad (6.45)$$

Devido a esse tratamento explícito do vetor de fluxo plástico e do módulo de endurecimento tem-se em (6.45) uma expressão fechada para  $\begin{bmatrix} \underline{\underline{A}}_k \end{bmatrix}$  envolvendo apenas o módulo elástico. Além disso, como o sistema (6.43) é composto de funções lineares em relação à  $\Delta\lambda$  os resíduos  $\underline{a}_k$  e  $\underline{b}_k$  serão automaticamente nulos, dispensando sua verificação no critério de convergência. Substituindo (6.44) em (6.43)<sub>3</sub> tem-se o termo de atualização do multiplicador plástico durante as iterações:

$$\delta\lambda_k = \frac{f_k}{\begin{bmatrix} \underline{f}_{\sigma_k}^T & \underline{f}_{q_k}^T \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \underline{\underline{A}}_k \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \underline{g}_{\sigma_i} \\ \underline{h}_i \end{Bmatrix}} \quad (6.46)$$

O fluxograma desse algoritmo pode ser visto na Figura 6.8.

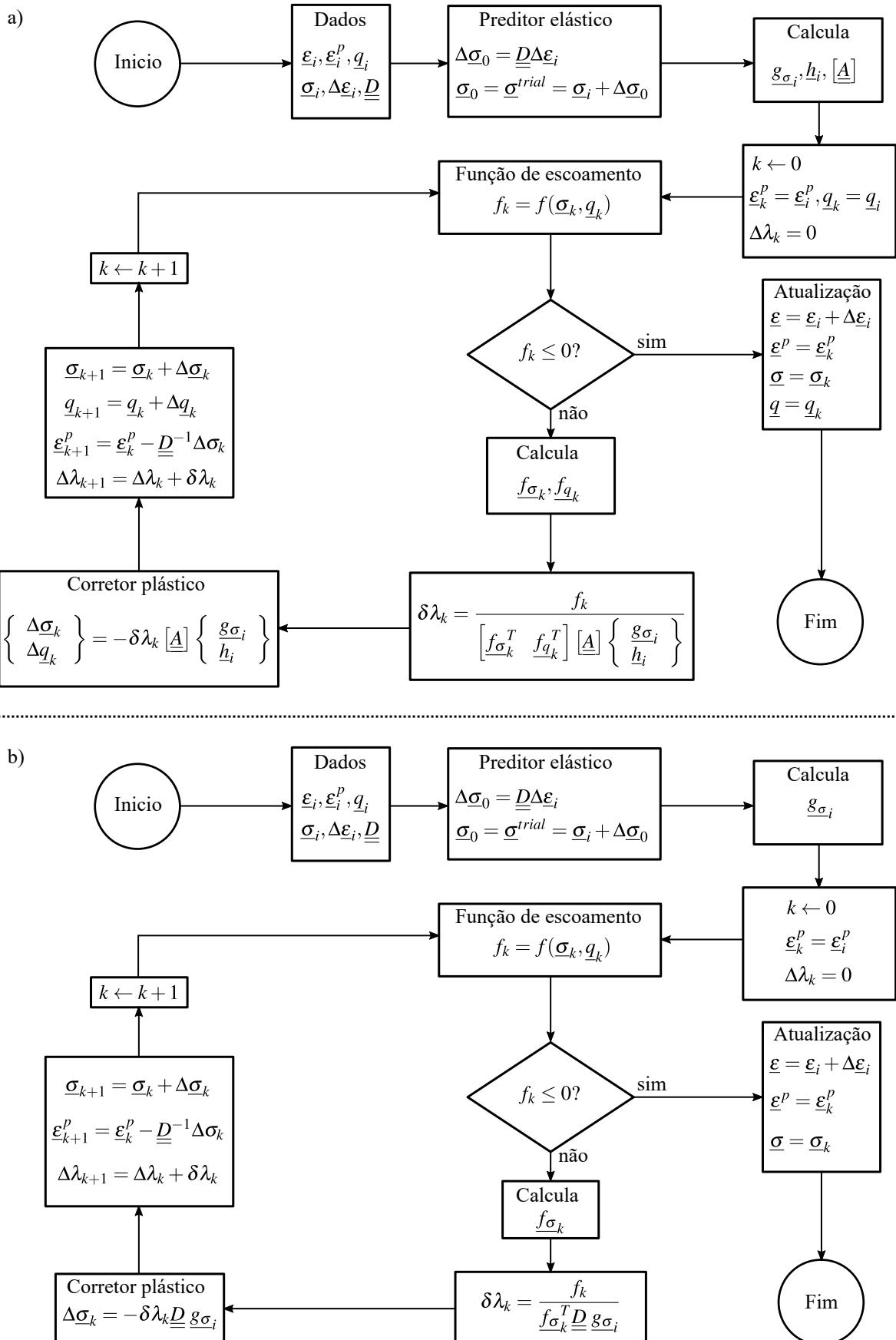


Figura 6.8 – Algoritmo de integração para elastoplasticidade utilizando um esquema de Euler semi-implícito a) com edurecimento e b) sem endurecimento (omitindo o índice  $i+1$ ).

### 6.5.2 Integração das equações constitutivas viscoplásticas

Como visto no Capítulo 5, considerando a hipótese das transformações infinitesimais, as equações constitutivas da viscoplasticidade, já na notação de Voigt, podem ser escritas como:

$$\left\{ \begin{array}{l} \underline{\dot{\sigma}} = \underline{\underline{D}} \underline{\dot{\varepsilon}}^e = \underline{\underline{D}} (\underline{\dot{\varepsilon}} - \underline{\dot{\varepsilon}}^{vp}) \\ \underline{\dot{\varepsilon}}^{vp} = \lambda \underline{g}_\sigma \\ \underline{\dot{q}} = \lambda \underline{h} \\ \dot{f} = \underline{f}_\sigma^T \underline{\dot{\sigma}} + \underline{f}_q^T \underline{\dot{q}} = 0 \\ \lambda = \frac{\Phi(\underline{\sigma}, \underline{q})}{\eta} \end{array} \right. . \quad (6.47)$$

Tal como na elastoplasticidade, aqui também se emprega um algoritmo de integração explícito, implícito ou semi-implícito para apartir de  $\{\underline{\varepsilon}_i, \underline{\varepsilon}_i^{vp}, \underline{\sigma}_i, \underline{q}_i\}$  e do incremento de deformação total  $\Delta\underline{\varepsilon}_i$  chegar aos valores  $\{\underline{\varepsilon}_{i+1}, \underline{\varepsilon}_{i+1}^{vp}, \underline{\sigma}_{i+1}, \underline{q}_{i+1}\}$  da iteração seguinte  $i+1$ . Contudo, na viscoplasticidade não há mais a imposição da condição de consistência, ou seja, que  $f_{i+1} = 0$ .

Diferentes algoritmos de integração para viscoplasticidade podem ser encontrados na literatura, tais como em Cormeau (1975), Zienkiewicz e Cormeau (1974), Hughes e Taylor (1978), Marques e Owen (1983), Peirce, Shih e Needleman (1984), Bernaud (1991), Belytschko, Liu e Moran (2000), de SOUZA NETO, Peri e Owen (2008) e Smith, Griffiths e Margetts (2014).

Para o presente trabalho será utilizado um esquema introduzido por Peirce, Shih e Needleman (1984) conhecido como método da taxa do módulo tangente (*Rate Tangente Modulus Method*), descrito em Belytschko, Liu e Moran (2000, p. 290), que compreende um esquema de Euler explícito para todas as variáveis, exceto  $\Delta\lambda$  que é integrado de acordo com a regra trapezoidal generalizada. Portanto, de (6.47) tem-se:

$$\left\{ \begin{array}{l} \underline{\varepsilon}_{i+1} = \underline{\varepsilon}_i + \Delta\underline{\varepsilon}_i \\ \underline{\varepsilon}_{i+1}^{vp} = \underline{\varepsilon}_i^{vp} + \Delta\lambda \underline{g}_{\sigma_i} \\ \underline{q}_{i+1} = \underline{q}_i + \Delta\lambda \underline{h}_i \\ \underline{\sigma}_{i+1} = \underline{\underline{D}} \underline{\varepsilon}_{i+1}^e = \underline{\underline{D}} (\underline{\varepsilon}_{i+1} - \underline{\varepsilon}_{i+1}^{vp}) \\ \Delta\lambda = \frac{\Delta t}{\eta} [(1-\theta)\Phi_i + \theta\Phi_{i+1}] \end{array} \right. . \quad (6.48)$$

em que a função de sobretensão  $\Phi_{i+1}$  é obtida através da seguinte linearização:

$$\Phi_{i+1} = \Phi_i + \underline{\Phi}_{\sigma_i} \Delta\underline{\sigma} + \underline{\Phi}_{q_i} \Delta\underline{q} \quad (6.49)$$

sendo  $\underline{\Phi}_\sigma = \partial\Phi_\sigma / \partial\underline{\sigma}$  e  $\underline{\Phi}_q = \partial\Phi_\sigma / \partial\underline{q}$ . Substituindo (6.49) em (6.48)<sub>5</sub> tem-se:

$$\Delta\lambda = \frac{\Delta t}{\eta} \Phi_i + \frac{\theta\Delta t}{\eta} (\underline{\Phi}_{\sigma_i} \Delta\underline{\sigma} + \underline{\Phi}_{q_i} \Delta\underline{q}). \quad (6.50)$$

Introduzindo (6.48)<sub>2</sub> em (6.48)<sub>4</sub> e reescrevendo (6.48)<sub>3</sub> tem-se, na forma compacta:

$$\begin{Bmatrix} \underline{\Delta\sigma} \\ \underline{\Delta q} \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} \underline{\underline{D}}(\underline{\Delta\varepsilon}_i - \underline{\Delta\lambda}\underline{g}_{\sigma_i}) \\ \underline{\Delta\lambda}\underline{h}_i \end{Bmatrix}. \quad (6.51)$$

Substituindo (6.51) em (6.50) e isolando  $\Delta\lambda$  tem-se:

$$\Delta\lambda = \frac{\Phi_i + \theta \underline{\Phi}_{\sigma_i}^T \underline{\underline{D}} \underline{\Delta\varepsilon}_i}{\frac{\eta}{\Delta t} + \theta (\underline{\Phi}_{\sigma_i}^T \underline{\underline{D}} \underline{g}_{\sigma_i} - \underline{\Phi}_{q_i}^T \underline{h}_i)}. \quad (6.52)$$

Quando  $0 < \theta < 1$  tem-se um algoritmo semi-implícito e quando  $\theta = 0$  tem-se um algoritmo totalmente explícito, com  $\Delta\lambda = \Delta t \frac{\Phi_i}{\eta}$ . Como pode-se ver nessa dedução, ao contrário da integração da relação constitutiva em elastoplásticidade, não há necessidade de resolver o sistema de forma iterativa. E, além disso, todas as variáveis são da iteração conhecida  $i$ . Esse fato, como será visto no próximo item, facilitará o acoplamento entre o algoritmo de viscoplasticidade e elastoplasticidade. Além disso, para viscoplasticidade não utilizaremos o endurecimento, simplificando a expressão (6.52) para:

$$\Delta\lambda = \frac{\Phi_i + \theta \underline{\Phi}_{\sigma_i}^T \underline{\underline{D}} \underline{\Delta\varepsilon}_i}{\frac{\eta}{\Delta t} + \theta \underline{\Phi}_{\sigma_i}^T \underline{\underline{D}} \underline{g}_{\sigma_i}}. \quad (6.53)$$

Contudo, diferentemente do algoritmo em elastoplásticidade, que possui a imposição da condição de consistência, um aspecto importante dos esquemas de integração em viscoplasticidade é sua estabilidade numérica. Essa estabilidade é garantida desde que o incremento de tempo fique abaixo de um certo limite, que depende, à rigor, dos parâmetros do material, de aspectos como o esquema de integração, superfície de escoamento e regra de fluxo. Caso o algoritmo encontre dificuldades de estabilidade numérica, nesse trabalho, utilizaram-se os limites de Cormeau (1975, p. 829), em que para superfície de Drucker-Prager tem-se:

$$\Delta t \leq \begin{cases} \frac{4}{3} \frac{\eta(1+\nu)}{\Phi' E} \sqrt{3J_2} \\ \frac{\eta f_0 (1+\nu)(1-2\nu)}{\Phi' E} \frac{(3-\sin\phi)^2}{\frac{3}{4}(1-2\nu)(3-\sin\phi)^2 + 6(1+\nu)\sin\phi^2} \end{cases} \quad (6.54)$$

e para Mohr-Coulomb:

$$\Delta t \leq \frac{\eta f_0}{\Phi'} \frac{(1+\nu)(1-2\nu)}{E} \frac{1}{1-2\nu+\sin\phi^2} \quad (6.55)$$

sendo  $\Phi' = d\Phi/d(f/f_0)$ . Quando  $\phi = 0$  têm-se os casos específicos para as superfícies de von-Mises e Tresca. Esses limites são deduzidos considerando viscoplasticidade associada e com esquema de integração totalmente explícito. O fluxograma para o algoritmo de integração das equações viscoplásticas pode ser visto na Figura 6.9.

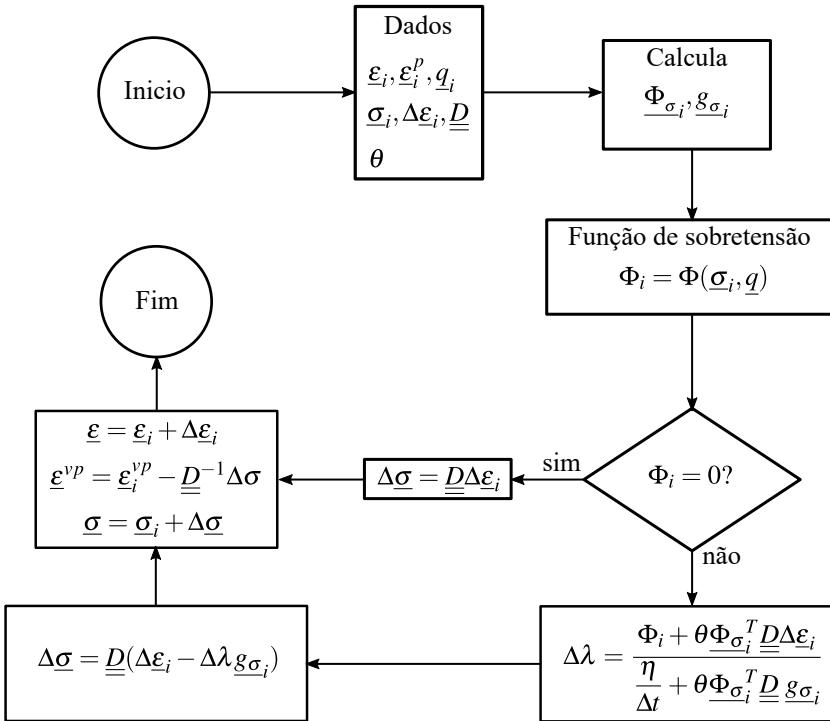


Figura 6.9 – Algoritmo de integração para viscoplasticidade utilizando um esquema de Euler semi-implícito ou totalmente explícito (quando  $\theta = 0$ ) sem endurecimento/amolecimento (omizando o índice  $i+1$ ).

### 6.5.3 Integração das equações constitutivas elastoplástica-viscoplásticas

Como visto no Capítulo 5, considerando a hipótese das transformações infinitesimais, as equações constitutivas da elastoplasticidade e viscoplasticidade são acopladas em série de forma a obter a relação constitutiva elastoplástica-viscoplástica linearizada (5.61). Além disso, como a viscoplasticidade é integrada através de uma regra semi-implícita na qual todas as incógnitas são calculadas com as variáveis conhecidas do subpasso  $i$ , o incremento de deformação viscoplástica pode ser descontado diretamente do incremento de deformação total na etapa de predição elástica do algoritmo de elastoplasticidade.

O algoritmo para integração das equações constitutivas elastoplástica-viscoplástica pode ser visto no fluxograma da Figura 6.10, a) considerando elastoplasticidade com endurecimento/amolecimento e esquema semi-implícito para viscoplasticidade e em b) considerando elastoplasticidade sem endurecimento/amolecimento com esquema totalmente explícito para viscoplasticidade.

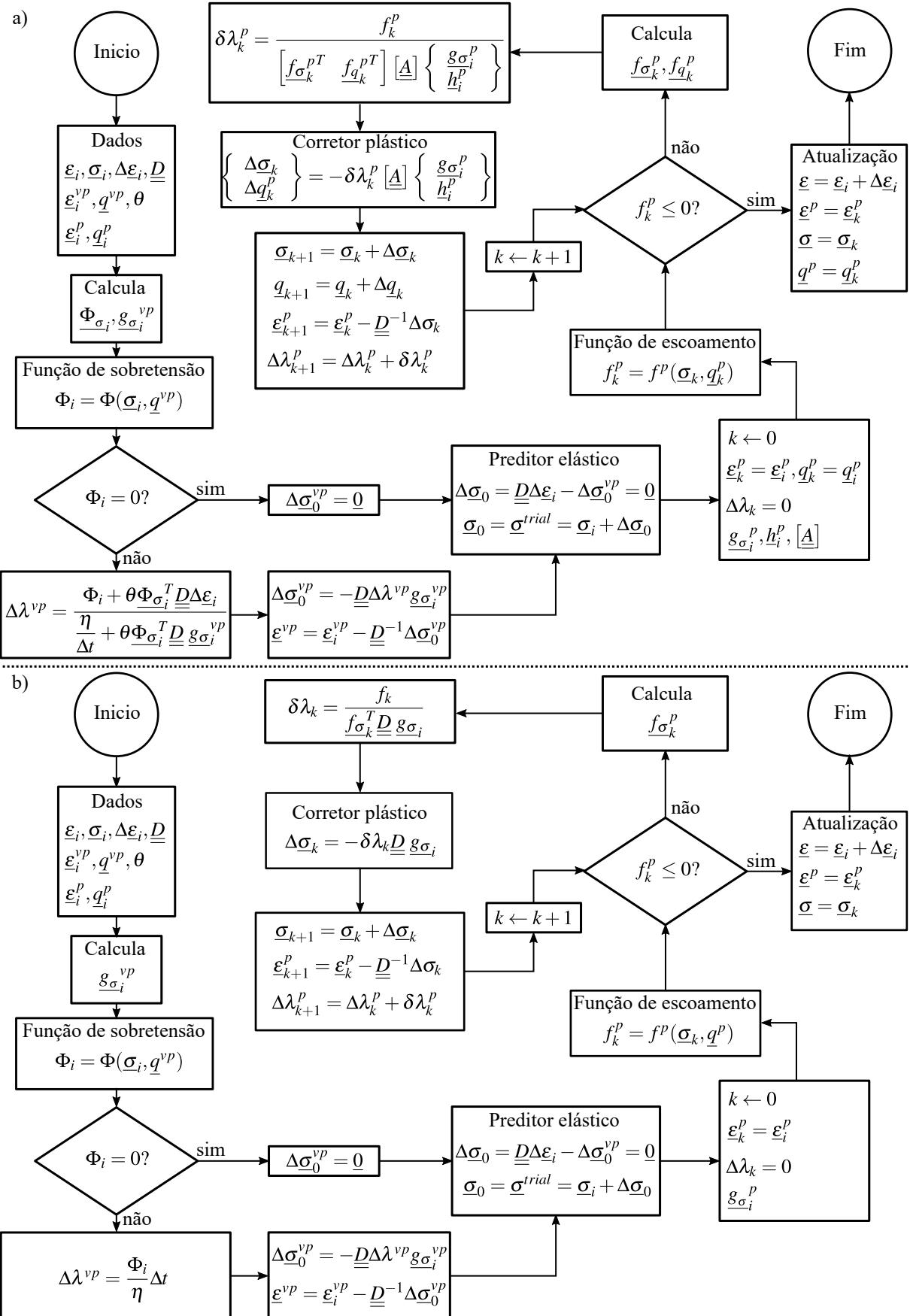


Figura 6.10 – Integração modelo acoplado a) elastoplasticidade com endurecimento b) elastoplasticidade sem endurecimento e viscoplasticidade explícita (omitindo o índice  $i+1$ ).

## 6.6 ATUALIZAÇÃO DO MÓDULO CONSTITUTIVO

Como visto no diagrama da Figura 6.6, após a atualização das tensões e variáveis internas tem-se a possibilidade de atualizar o módulo constitutivo. Segundo Belytschko, Liu e Moran (2000, p. 287), devido à abrupta transição do comportamento plástico durante o escoamento, o módulo elastoplástico tangente contínuo pode causar carregamentos e descarregamentos espúrios (que não são reais). Para evitar esse tipo de problema, é recomendado utilizar um módulo tangente consistente com a linearização feita durante o algoritmo de integração das leis constitutivas. Além disso, como comentado no seção 6.4 sua utilização aumenta a taxa de convergência das iterações de equilíbrio. Sua expressão geral é definida por:

$$\underline{\underline{D}}^{alg} = \left( \frac{d\underline{\underline{\sigma}}}{d\underline{\underline{\varepsilon}}} \right)_{i+1}. \quad (6.56)$$

Para derivar a expressão de  $\underline{\underline{D}}^{alg}$  escreve-se (6.39)<sub>1,2,3,4</sub> e (6.47)<sub>1,2,3,4</sub> na sua forma incremental e resolve-se para  $d\underline{\underline{\sigma}}/d\underline{\underline{\varepsilon}}$  (BELYTSCHKO; LIU; MORAN, 2000, p. 285). Com isso, tem-se, para a elastoplasticidade, a seguinte relação (omitindo-se o índice  $i + 1$ ):

$$\underline{\underline{D}}^{alg} = \underline{\underline{D}} - \frac{\underline{\underline{D}} \underline{g}_{\sigma_i} \underline{f}_{\sigma}^T \underline{\underline{D}}}{\underline{f}_{\sigma}^T \underline{\underline{D}} \underline{g}_{\sigma_i} - \underline{f}_q \underline{h}_i} \quad (6.57)$$

e para viscoplasticidade (com todas as variáveis calculadas no subpasso  $i$ ):

$$\underline{\underline{D}}^{alg} = \underline{\underline{D}} - \frac{\theta \underline{\underline{D}} \underline{g}_{\sigma_i} \underline{\Phi}_{\sigma}^T \underline{\underline{D}}}{\eta/\Delta t + \theta \underline{\Phi}_{\sigma}^T \underline{\underline{D}} \underline{g}_{\sigma}} - \frac{\underline{\Phi} \underline{\underline{D}} \underline{g}_{\sigma}}{\eta/\Delta t + \theta \underline{\Phi}_{\sigma}^T \underline{\underline{D}} \underline{g}_{\sigma}}. \quad (6.58)$$

Para o modelo acoplado elastoplástico-viscoplastico tem-se (omitindo-se o índice  $i + 1$ ):

$$\underline{\underline{D}}^{alg} = \underline{\underline{D}} - \frac{\underline{\underline{D}} \underline{g}_{\sigma_i}^p \underline{f}_{\sigma}^p \underline{\underline{D}}}{\underline{f}_{\sigma}^p \underline{\underline{D}} \underline{g}_{\sigma_i}^p - \underline{f}_q \underline{h}_i} - \frac{\theta \underline{\underline{D}} \underline{g}_{\sigma_i}^{vp} \underline{\Phi}_{\sigma}^T \underline{\underline{D}}}{\eta/\Delta t + \theta \underline{\Phi}_{\sigma}^T \underline{\underline{D}} \underline{g}_{\sigma_i}^{vp}} - \frac{\underline{\Phi}_i \underline{\underline{D}} \underline{g}_{\sigma_i}^{vp}}{\eta/\Delta t + \theta \underline{\Phi}_{\sigma_i}^T \underline{\underline{D}} \underline{g}_{\sigma_i}^{vp}}. \quad (6.59)$$

Adotar o módulo tangente consistente faz com que a convergência seja atingida com menos iterações de equilíbrio globais, contudo, o procedimento tem um custo para sistemas grandes, uma vez que a cada iteração é exigida a montagem e fatorização da matriz de rigidez global (caso seja utilizado a opção de Newton-Raphson completo). Portanto, é comum para sistemas grandes utilizar o módulo elástico  $\underline{\underline{D}} \leftarrow \underline{\underline{D}}^e$ , exceto quando se tem problemas de convergência.

Outra questão importante relacionada a esse módulo está em sua simetria. Por exemplo, como visto em (5.52) o módulo elastoplástico contínuo é simétrico se houver fluxo associado, ou seja,  $f = g$ . Contudo, essa propriedade não é transferida de forma geral para o módulo tangente consistente. Isso dependerá também do esquema de integração utilizado. Para o caso, do presente trabalho, com as superfícies utilizadas, será sempre simétrico se  $g^p = f^p$  e  $g^{vp} = f^{vp}$ .

## 6.7 PARTICULARIZANDO PARA ESTADO PLANO DE DEFORMAÇÕES E AXISSIMETRIA

Em problemas tridimensionais, com materiais isotrópicos, a relação constitutiva elástica linearizada, em termos das seis componentes de tensão e de deformação pode ser escrita, na notação de Voigt, conforme (adaptado de Smith, Griffiths e Margetts (2014, p. 44)):

$$\begin{Bmatrix} \sigma_{11} \\ \sigma_{22} \\ \sigma_{33} \\ \sigma_{21} \\ \sigma_{23} \\ \sigma_{31} \end{Bmatrix} = \underline{\underline{D}} \begin{Bmatrix} \epsilon_{11} \\ \epsilon_{22} \\ \epsilon_{33} \\ \epsilon_{21} \\ \epsilon_{23} \\ \epsilon_{31} \end{Bmatrix}, \quad (6.60)$$

$$\underline{\underline{D}} = \frac{E}{(1+\nu)(1-2\nu)} \begin{bmatrix} (1-\nu) & \nu & \nu & 0 & 0 & 0 \\ \nu & (1-\nu) & \nu & 0 & 0 & 0 \\ \nu & \nu & (1-\nu) & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \frac{(1-2\nu)}{2} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \frac{(1-2\nu)}{2} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \frac{(1-2\nu)}{2} \end{bmatrix}. \quad (6.61)$$

Particularizando essa relação para problemas em estado plano de deformações e axissimetria tem-se (adaptado de Smith, Griffiths e Margetts (2014, p. 42)):

$$\begin{Bmatrix} \sigma_{11} \\ \sigma_{22} \\ \sigma_{33} \\ \sigma_{21} \end{Bmatrix} = \frac{E}{(1+\nu)(1-2\nu)} \begin{bmatrix} (1-\nu) & \nu & \nu & 0 \\ \nu & (1-\nu) & \nu & 0 \\ \nu & \nu & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & (1-2\nu)/2 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \epsilon_{11} \\ \epsilon_{22} \\ \epsilon_{33} \\ \epsilon_{21} \end{Bmatrix} \quad (6.62)$$

sendo que em axissimetria as direções 1,2 e 3 correspondem respectivamente as direções  $r, \theta$  e  $z$  em coordenadas polares. Além disso, em problemas axissimétricos, a expressão (6.16) particulariza-se para (adaptado de Smith, Griffiths e Margetts (2014, p. 41)):

$$\nabla^s = \begin{bmatrix} \frac{\partial}{\partial r} & 0 \\ 0 & 1/r \\ 0 & \frac{\partial}{\partial z} \\ \frac{\partial}{\partial z} & \frac{\partial}{\partial r} \end{bmatrix} \quad (6.63)$$

Ademais, para o gradiente da função potencial em  $(5.38)_2$ , na notação de Voigt, para o caso 3D, tem-se (adaptado de Owen e Hinton (1980, p. 231)):

$$\underline{g}_1 = \{1, 1, 1, 0, 0, 0\}^T \quad (6.64)$$

$$\underline{g}_2 = \frac{1}{2\sqrt{J_2}} \{s_{11}, s_{22}, s_{33}, 2\sigma_{12}, 2\sigma_{23}, 2\sigma_{13}\}^T \quad (6.65)$$

$$\underline{g}_3 = \left\{ \begin{array}{l} s_{22}s_{33} - \sigma_{23}^2 + J_2/3 \\ s_{11}s_{33} - \sigma_{13}^2 + J_2/3 \\ s_{11}s_{22} - \sigma_{12}^2 + J_2/3 \\ 2(\sigma_{23}\sigma_{13} - s_{33}\sigma_{12}) \\ 2(\sigma_{13}\sigma_{12} - s_{11}\sigma_{23}) \\ 2(\sigma_{12}\sigma_{23} - s_{22}\sigma_{13}) \end{array} \right\}. \quad (6.66)$$

e para o estado plano de deformações e axissimetria, tem-se (adaptado de Owen e Hinton (1980, p. 233)):

$$\underline{g}_1 = \{1, 1, 1, 0\}^T, \quad (6.67)$$

$$\underline{g}_2 = \frac{1}{2\sqrt{J_2}} \{s_{11}, s_{22}, s_{33}, 2\sigma_{12}\}^T, \quad (6.68)$$

$$\underline{g}_3 = \left\{ \begin{array}{l} s_{22}s_{33} + J_2/3 \\ s_{11}s_{33} + J_2/3 \\ s_{11}s_{22} - \sigma_{12}^2 + J_2/3 \\ -2s_{33}\sigma_{12} \end{array} \right\}. \quad (6.69)$$

## 6.8 DOMÍNIOS, DISCRETIZAÇÃO, CONDIÇÕES DE CONTORNO E CICLO CONSTRUTIVO PARA OS MODELOS DE VERIFICAÇÃO

Tal como visto na seção 6.3 o domínio  $\Omega$  é discretizado em um conjunto de elementos contíguos  $\Omega_e$  estabelecendo a malha de elementos finitos. No presente estudo, o domínio discretizado é o entorno de um túnel profundo, conforme Figura 6.11.

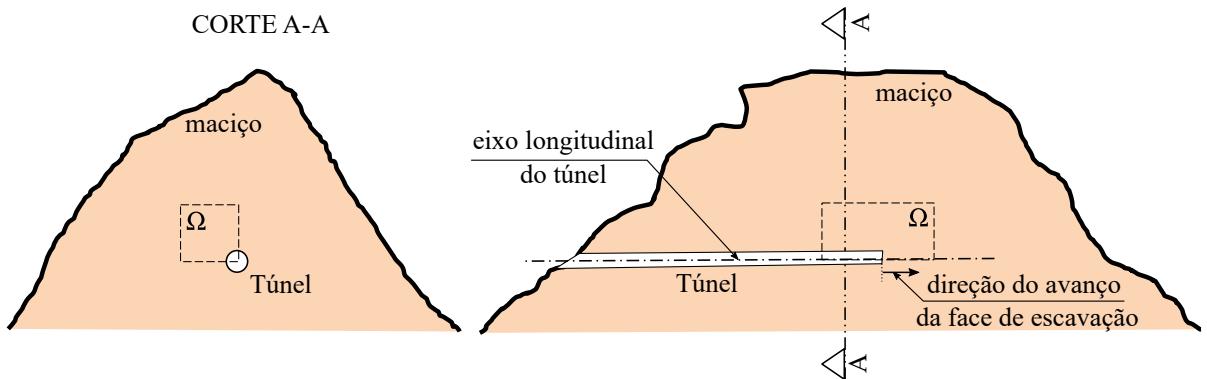


Figura 6.11 – Representação do domínio  $\Omega$  a ser discretizado

As leis constitutivas vistas no Capítulo 5 são implementadas nesse domínio e estudadas em três condições: em estado plano de deformações, tridimensional e em axissimetria.

Com o intuito de obter uma malha de fácil alteração, conveniente aos estudos de convergência de malha ou análises paramétricas, o domínio foi discretizado utilizando o pré-processamento do *software ANSYS v.19.2* através da linguagem APDL (*Ansys Parametric Design Language*). Com o auxílio dessa linguagem é possível controlar a discretização do domínio em função de parâmetros que podem ser alterados facilmente e, dessa forma, obtido rapidamente uma nova malha para os estudos. As discretizações apresentadas vêm da experiência obtidas em estudos anteriores (QUEVEDO, 2017) considerando isoladamente a elasticidade, elastoplásticidade e viscoplasticidade do maciço.

A Figura 6.12 apresenta o domínio para análises em estado plano de deformações com seus parâmetros, condições de contorno e malha. Como visto na seção 4.1, esse modelo é útil no estudo de seções fora da zona de influência da frente de escavação na qual se pode admitir a ausência de deslocamento ao longo do eixo longitudinal do túnel. Quando implementado a lei do material, esse modelo também é ideal para obter as curvas de convergência do maciço, tais como as da seção 4.8.

Como pode-se ver na Figura 6.12, é considerada condição de simetria para reduzir o modelo, sendo discretizada apenas uma quarta parte da região no entorno do túnel. Isso é possível em maciços homogêneos, com seção duplamente simétrica, tais como, a elíptica ou a circular ( $R_{h_i} = R_{v_i}$ ). Também, nesse modelo, tanto a carga horizontal, vertical, bem como as tensões internas não poderão variar ao longo do domínio (condições geostáticas hidrostáticas). Como visto na seção 4.5, é uma condição de estudo comum em túneis profundos. Contudo, essa condição seria facilmente modificada para considerar tensões variáveis com a profundidade e seção simétrica em torno do eixo  $y$  e apenas rebatendo a malha em torno do eixo  $x$ .

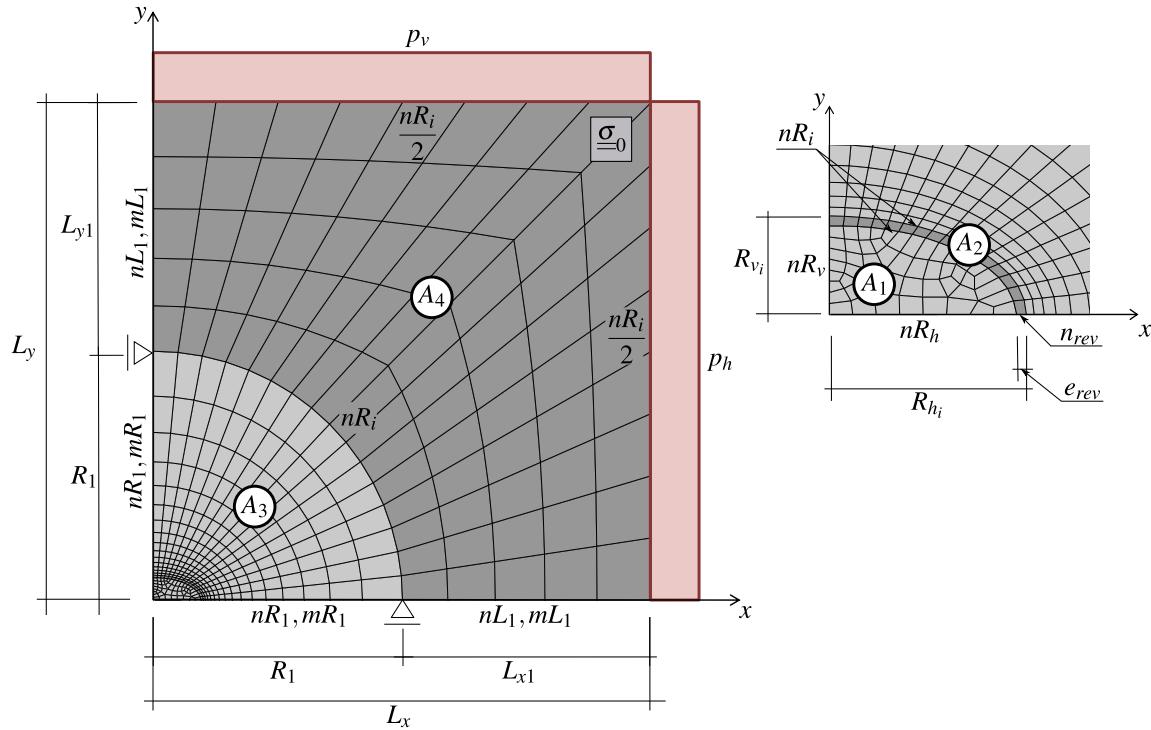


Figura 6.12 – Domínio, parâmetros geométricos, condições de contorno e malha para o modelo em estado plano de deformações

Conforme a Figura 6.12, essa malha possui quatro regiões de refinamento: a região  $A_1$  representando o interior da seção do túnel, cujos elementos serão desativados já no início das análises; a região  $A_2$  referente ao revestimento (que estará presente sempre que o parâmetro  $e_{rev} > 0$ ); a região  $A_3$ , circular, no entorno do túnel onde se dará maior esforço de refinamento, pela proximidade da região escavada e, por último, a região  $A_4$  relativa ao restante do domínio, onde os gradientes de tensão e deformação serão pequenos. Para a malha da Figura 6.12, tem-se a definição dos parâmetros e seus valores na Tabela 6.1.

Tabela 6.1 – Parâmetros para a construção da malha em estado plano de deformações da Figura 6.12

PARÂMETROS	SÍMBOLO	UNIDADE	VALORES
GEOMETRIA			
Raio horizontal na interface entre o túnel e o maciço	$R_{h_i}$	m	2
Raio vertical na interface entre o túnel e o maciço	$R_{v_i}$	m	1
Espessura do revestimento (se houver)	$e_{rev}$	m	0,1
Largura transversal do domínio	$L_x$	m	$20R_{v_i}$
Altura do domínio	$L_y$	m	$20R_{v_i}$
Raio da região A3	$R_1$	m	$10R_{v_i}$
Largura além da região A3	$L_{x_1}$	m	$L_x - R_1$
Altura além da região A3	$L_{y_1}$	m	$L_y - R_1$
DISCRETIZAÇÃO			
Elementos na direção ortoradial	$nR_i$	un	10
Elementos na altura da seção escavada	$nR_v$	un	$nR_i/2$
Elementos na largura da seção escavada	$nR_h$	un	$nR_i/2$
Elementos na espessura do revestimento	$n_{rev}$	un	2
Elementos ao longo do raio da região A3	$nR1$	un	15
Razão entre primeiro e último elemento de A3	$mR1$	adm	15
Elementos ao longo do raio da região A4	$nL1$	un	5
Razão entre primeiro e último elemento de A4	$mL1$	adm	1,2

A discretização do domínio tridimensional faz uso dos mesmos parâmetros do estado plano de deformações, contudo, possui parâmetros adicionais para levar em consideração a dimensão ao longo do eixo longitudinal do túnel e o processo de escavação e colocação do revestimento. Esse domínio, seus parâmetros, suas condições de contorno e sua malha podem ser vistos na Figura 6.13 e Tabela 6.2.

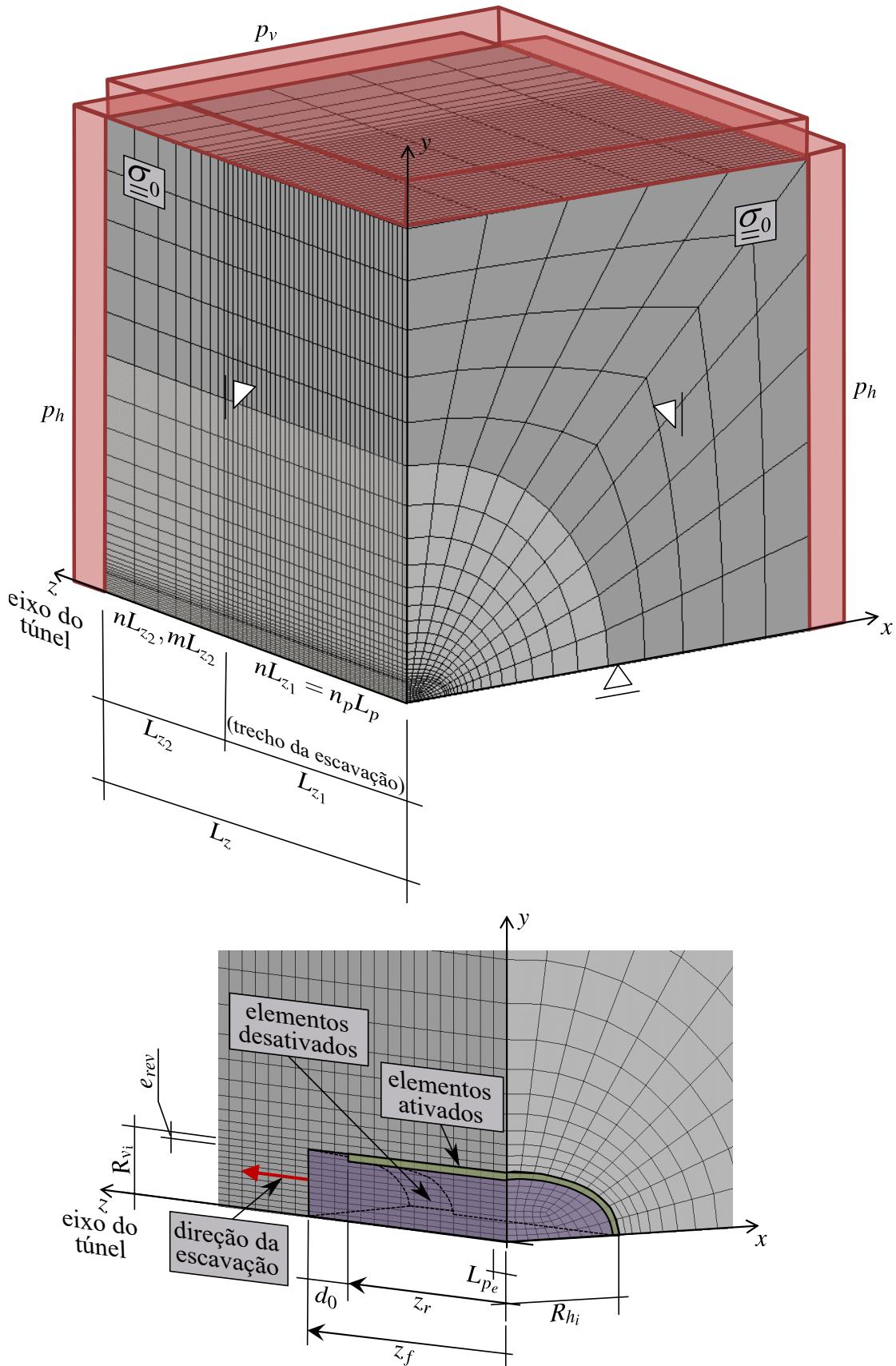


Figura 6.13 – Domínio, parâmetros geométricos, condições de contorno e malha para o modelo tridimensional

Tabela 6.2 – Parâmetros adicionais a malha EPD para a malha em estado tridimensional de deformações da Figura 6.13

PARÂMETROS	SÍMBOLO	UNIDADE	VALORES
ESCAVAÇÃO E COLOCAÇÃO DO REVESTIMENTO			
Número de passos de escavação	$n_p$	un	39
Número de passos na primeira escavação	$n_{p_1}$	un	3
Tamanho do passo de escavação	$L_p$	m	$1/3R_{v_i}$
Dimensão não suportada	$d_0$	m	$3L_p$
Cota da face do revestimento	$z_r$	m	$(i_p - 1)L_p + n_{p_1}L_p - d_0$
Cota da face de escavação	$z_f$	m	$(i_p - 1)L_p + n_{p_1}L_p$
GEOMETRIA			
Comprimento longitudinal do domínio	$L_z$	m	$L_{z_1} + L_{z_2}$
Comprimento do trecho escavado	$L_{z_1}$	m	$n_p L_p$
Comprimento do trecho não escavado	$L_{z_2}$	m	$25L_p$
DISCRETIZAÇÃO			
Tamanho do elemento no trecho escavado	$L_{p_e}$	m	$L_p$
Número de elementos no trecho não escavado	$nL_{z_2}$	un	8
Razão entre o primeiro e último elemento em $L_{z_2}$	$mL_{z_2}$	adm	5

A cada passo  $1 \leq i_p \leq n_p$  de escavação é desativado os elementos até a cota da face de escavação  $z_f$  e ativado os elementos do revestimento que estão defasados de  $d_0$  dessa face, até a cota  $z_r$ . Tanto nas análises tridimensionais quanto axissimétricas, os efeitos diferidos ao longo do processo construtivo são obtidos considerando o tempo transcorrido  $t_p$  durante cada passo de escavação. Esse tempo é calculado através da seguinte expressão:

$$t_p = \frac{L_p}{V_p} \quad (6.70)$$

em que  $V_p$  é a velocidade do passo em m/dias. A cada passo, conforme o seção 6.4 e a Figura 6.6, esse tempo é dividido em subpassos e feita as iterações de equilíbrio de Newton-Raphson em cada subpasso. Após a convergência, segue-se o próximo passo e assim por diante. Após o término dos passos de escavação e revestimento do túnel, para os modelos dependentes do tempo, a análise roda um último passo até o tempo final da análise ou até o tempo em que se obteve a convergência das iterações globais de Newton-Raphson.

Como pode-se notar, o modelo tridimensional possui a vantagem de considerar tanto o processo construtivo quanto seções diferentes da circular, contudo, tem um custo computacional elevado. Nesse aspecto as análises axissimétricas possuem vantagem, apesar da restrição de simetria axial. Pelo baixo custo computacional, são ideais para estudos paramétricos. O domínio para o modelo axissimétrico, seus parâmetros, condições de contorno e sua malha podem ser vistos na Figura 6.14.

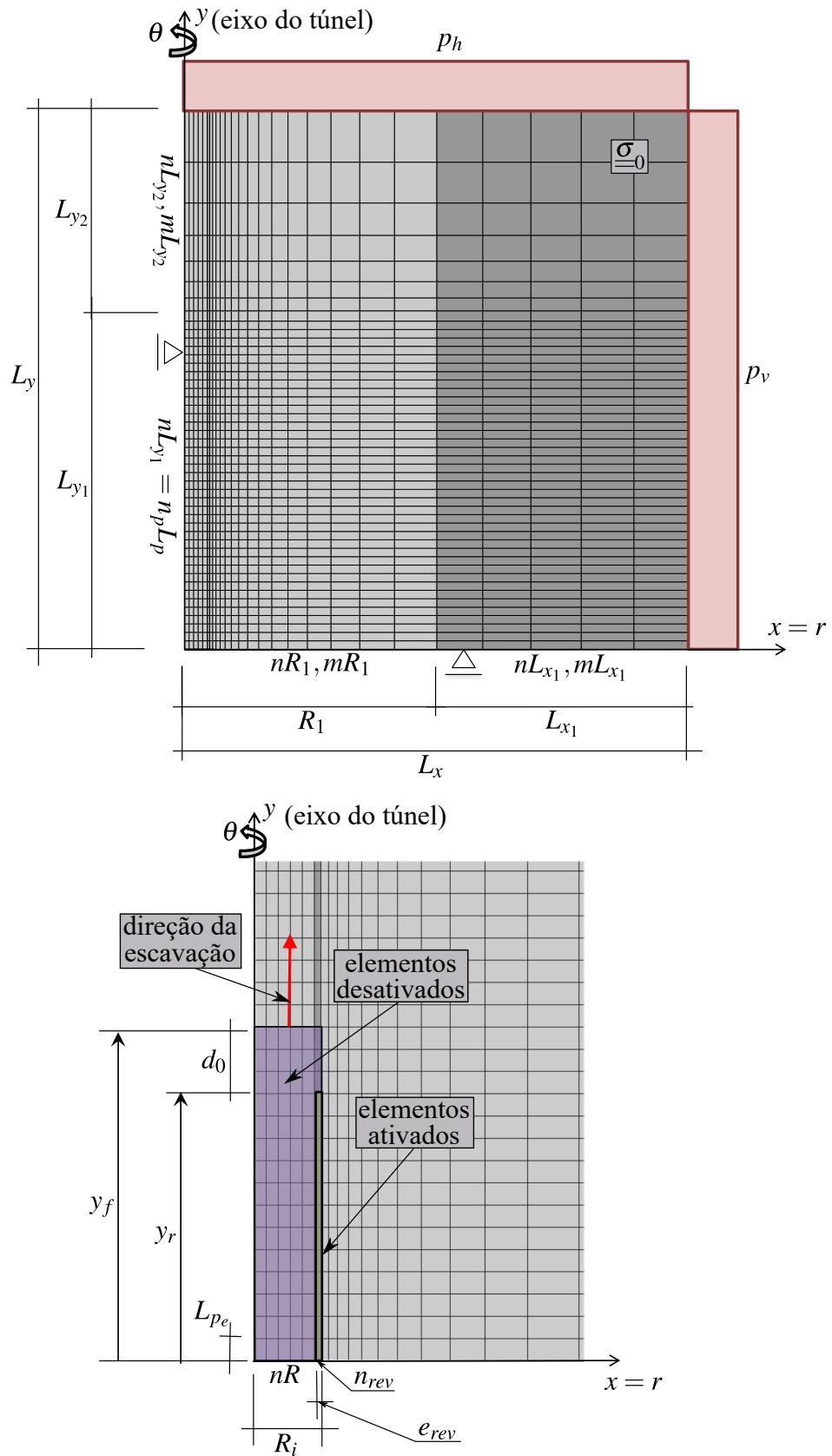


Figura 6.14 – Domínio, parâmetros geométricos, condições de contorno e malha para o modelo axissimétrico

Conforme Figura 6.14, no modelo axissimétrico o eixo longitudinal do túnel (eixo de rotação) está ao longo do eixo  $y$ , enquanto que o eixo  $x$  representa o eixo radial. Os parâmetros para esse modelo podem ser vistos na Tabela 6.3.

Tabela 6.3 – Parâmetros adicionais para a malha em estado tridimensional de deformações da Figura 6.13

PARÂMETROS	SÍMBOLO	UNIDADE	VALORES
ESCAVAÇÃO E COLOCAÇÃO DO REVESTIMENTO			
Raio da interface entre o túnel e o maciço	$R_i$	m	1
Espessura do revestimento (se houver)	$e_{rev}$	m	0,1
Raio total do domínio	$L_x$	m	$20R_i$
Trecho do raio além da região próxima ao túnel	$L_{x_1}$	m	$L_x - R_1$
Comprimento longitudinal do domínio	$L_y$	m	$L_{y_1} + L_{y_2}$
Comprimento do trecho escavado	$L_{y_1}$	m	$n_p L_p$
Comprimento do trecho não escavado	$L_{y_2}$	m	$25L_p$
ESCAVAÇÃO E COLOCAÇÃO DO REVESTIMENTO			
Número de passos de escavação	$n_p$	un	39
Número de passos na primeira escavação	$n_{p_1}$	un	3
Tamanho do passo de escavação	$L_p$	m	$1/3R_i$
Dimensão não suportada	$d_0$	m	$3L_p$
Cota da face do revestimento	$y_r$	m	$(i_p - 1)L_p + n_{p_1}L_p - d_0$
Cota da face de escavação	$y_f$	m	$(i_p - 1)L_p + n_{p_1}L_p$
DISCRETIZAÇÃO			
Elementos ao longo de $R_i$	$nR_i$	un	5
Elementos na espessura do revestimento	$n_{rev}$	un	2
Elementos ao longo de $R_1$	$nR_1$	un	15
Razão primeiro e último elemento de $R_1$	$mR_1$	adm	15
Elementos ao longo de $L_{x_1}$	$nL_{x_1}$	un	5
Razão primeiro e último elemento de $L_{x_1}$	$gL_{x_1}$	adm	5
Tamanho do elemento no trecho escavado	$L_{p_e}$	m	$L_p$
Número de elementos ao longo de $L_{y_2}$	$nL_{y_2}$	un	8
Razão entre o primeiro e último elemento em $L_{y_2}$	$gL_{y_2}$	adm	5

Para simular o ciclo contrutivo de escavação e revestimento é utilizado o recurso de **ativação/desativação de elementos** em cada passo de solução. A desativação, à rigor, compreende três modificações:

- a) a primeira consiste em substituir o valor do módulo de elasticidade do elemento por um valor pequeno, ou seja, 1E-12, isso fará com que durante as iterações de equilíbrio esses elementos pouco contribuam na matriz de rigidez e no incremento

- de forças internas, distribuindo então as tensões para os elementos vizinhos ativados;
- b) a segunda alteração consiste em zerar as tensões internas nos pontos de Gauss do elemento, que estavam acumuladas dos passos anteriores;
  - c) a terceira alteração consiste em zerar as forças externas (se houver forças, na fronteira desses elementos) para que não entrem no cálculo do resíduo no método de Newton-Raphson.

O custo computacional desses modelos é refletido diretamente no tempo de processamento de cada subpasso durante a solução do sistema global. Esse tempo é função de diversos fatores. Dentre os mais simples estão a quantidade de operações em ponto flutuante (precisão simples ou dupla) necessários para a fatoração e solução do sistema frente à tecnologia de processamento (velocidade do processador e recursos de paralelização). A ordem de grandeza da quantidade de operações em ponto flutuante pode ser estimada através do tamanho do sistema. Portanto, a Tabela 6.4, resume o tamanho do sistema para as malhas desses três modelos. Porém, para o tempo global, é necessário considerar as estratégias de atualização da matriz de rigidez e a quantidade de passos, sendo que este último aumenta tempo computacional linearmente.

Tabela 6.4 – Tamanho do sistema para cada modelo

<b>MODELO</b>	<b>No. ELEMENTOS</b>	<b>No. NÓS</b>	<b>SISTEMA nxn</b>
EPD	235	768	1536
3D	13395	15456	46368
AXI	1222	3813	7626

## REFERÊNCIAS

- ALEJANO, L. R.; RODRIGUEZ-DONO, A.; ALONSO, E.; FDEZ.-MANÍN, G. Ground reaction curves for tunnels excavated in different quality rock masses showing several types of post-failure behaviour. **Tunnelling and Underground Space Technology**, Pergamon, v. 24, n. 6, p. 689–705, nov 2009. ISSN 08867798. Disponível em: <<https://www.sciencedirect.com/science/article/pii/S0886779809000686>>. Acesso em: 24 mar. 2021. Citado na página 63.
- ANSYS Inc. **Structural Analysis Guide**. [S.l.], 2018. 454 p. Citado na página 114.
- \_\_\_\_\_. **Theory reference guide**. [S.l.], 2018. 904 p. Citado 7 vezes nas páginas 15, 16, 110, 111, 113, 115 e 116.
- ARMAND, G.; NOIRET, A.; ZGHONDI, J.; SEYEDI, D. M. Short- and long-term behaviors of drifts in the Callovo-Oxfordian claystone at the Meuse/Haute-Marne Underground Research Laboratory. **Journal of Rock Mechanics and Geotechnical Engineering**, Chinese Academy of Sciences, v. 5, n. 3, p. 221–230, jun 2013. ISSN 16747755. Disponível em: <<https://www.sciencedirect.com/science/article/pii/S1674775513000395>>. Acesso em: 24 mar. 2021. Citado na página 58.
- AUGARDE, C. E.; BURD, H. J. Three-dimensional finite element analysis of lined tunnels. **International Journal for Numerical and Analytical Methods in Geomechanics**, v. 25, n. 3, p. 243–262, 2001. ISSN 03639061. Disponível em: <<https://onlinelibrary.wiley.com/doi/10.1002/nag.127>>. Acesso em: 15 mar. 2021. Citado na página 50.
- BARLA, G.; BONINI, M.; DEBERNARDI, D. Time Dependent Deformations in Squeezing Tunnels. **The 12th International Conference of International Association for Computer Methods and Advances in Geomechanics (IACMAG)**, p. 1–6, 2008. Disponível em: <[https://www.researchgate.net/publication/237746659\\_Time\\_Dependent\\_Deformations\\_in\\_Squeezing\\_Tunnels](https://www.researchgate.net/publication/237746659_Time_Dependent_Deformations_in_Squeezing_Tunnels)>. Acesso em: 31 mar. 2021. Citado na página 69.
- \_\_\_\_\_. Time dependent deformations in squeezing tunnels. **International Journal of Geoengineering Case Histories**, v. 2, n. 1, p. 40–65, 2010. Disponível em: <<http://dx.doi.org/10.4417/IJGCH-02-01-03>>. Acesso em: 09 mar. 2021. Citado 3 vezes nas páginas 11, 33 e 69.
- BELYTSCHKO, T.; LIU, W. K.; MORAN, B. **Nonlinear Finite Elements for continua and Structures**. 1. ed.. ed. John Wiley and Sons, 2000. 1–650 p. ISBN 0471987743. Disponível em: <<http://library.lol/main/787C6236E61EE8A85FECD4240F8CE6C9>>. Citado 5 vezes nas páginas 96, 120, 121, 124 e 128.
- BENAMAR, I. **Etude des effets différenciés dans les tunnels profonds**. 205 p. Tese (Doutorado) — Ecole Nationale des Ponts et Chaussées, 1996. Disponível em: <<https://pastel.archives-ouvertes.fr/tel-00523617>>. Acesso em: 19 abr. 2021. Citado 2 vezes nas páginas 13 e 73.

BÉREST, P.; NGUYEN, D. M. modèle viscoplastique pour le comportement d'un tunnel revêtu. **Revue Française de Géotechnique**, p. 19–25, 1983. Disponível em: <<https://www.geotechnique-journal.org/articles/geotech/pdf/1983/03/geotech1983024p19.pdf>>. Acesso em: 29 mar. 2021. Citado na página 67.

BERNAUD, D. **Tunnels profonds dans les milieux viscoplastiques: approches expérimentale et numérique**. 354 p. Tese (Doutorado) — Ecole Nationale des Ponts et Chaussées, 1991. Disponível em: <<https://pastel.archives-ouvertes.fr/tel-00529719>>. Acesso em: 11 mar. 2021. Citado 8 vezes nas páginas 14, 50, 67, 79, 80, 81, 101 e 124.

BERNAUD, D.; BENAMAR, I.; ROUSSET, G. La ((nouvelle méthode implicite)) pour le calcul des tunnels dans les milieux élastoplastiques et viscoplastiques. **Revue Française de Géotechnique**, n. 68, p. 3–19, 1994. Disponível em: <<https://www.geotechnique-journal.org/articles/geotech/pdf/1994/03/geotech1994068p3.pdf>>. Acesso em: 26 abr. 2021. Citado 4 vezes nas páginas 14, 81, 83 e 84.

BERNAUD, D.; MAGHOUS, S.; BUHAN, P. de; COUTO, E. A numerical approach for design of bolt-supported tunnels regarded as homogenized structures. **Tunnelling and Underground Space Technology**, Elsevier Ltd, v. 24, n. 5, p. 533–546, 2009. ISSN 08867798. Disponível em: <<http://dx.doi.org/10.1016/j.tust.2009.02.002>>. Acesso em: 18 mar. 2021. Citado na página 50.

BERNAUD, D.; ROUSSET, G. La « nouvelle méthode implicite » pour l'étude du dimensionnement des tunnels. **Revue Française de Géotechnique**, n. 60, p. 5–26, 1992. Disponível em: <<https://www.geotech-fr.org/sites/default/files/rfg/article/60-1.pdf>>. Acesso em: 27 abr. 2021. Citado 4 vezes nas páginas 14, 82, 83 e 84.

BIOT, M. A. General Theory of Three-Dimensional Consolidation. **Journal of Applied Physics**, v. 12, p. 164, oct 1941. Disponível em: <<https://doi.org/10.1063/1.1712886>>. Acesso em: 30 mar. 2021. Citado na página 69.

BOIDY, E.; BOUVARD, A.; PELLET, F. Back analysis of time-dependent behaviour of a test gallery in claystone. **Tunnelling and Underground Space Technology**, v. 17, n. 4, p. 415–424, oct 2002. ISSN 08867798. Disponível em: <<https://linkinghub.elsevier.com/retrieve/pii/S0886779802000664>>. Acesso em: 29 mar. 2021. Citado na página 67.

BONINI, M.; DEBERNARDI, D.; BARLA, M.; BARLA, G. The Mechanical Behaviour of Clay Shales and Implications on the Design of Tunnels. **Rock Mechanics and Rock Engineering**, v. 42, n. 2, p. 361–388, apr 2009. ISSN 0723-2632. Disponível em: <<http://link.springer.com/10.1007/s00603-007-0147-6>>. Acesso em: 31 mar. 2021. Citado na página 70.

BRADY, B. H. G.; BROWN, E. T. **Rock Mechanics for underground mining**. 3 ed.. ed. Kluwer Academic, 2006. 628 p. Disponível em: <<http://libgen.rs/book/index.php?md5=06018329FE47B8115831FB3A5A9D4044>>. Acesso em: 21 abr. 2021. Citado na página 75.

BROWN, E. T.; BRAY, J. W.; LADANYI, B.; HOEK, E. Ground Response Curves for Rock Tunnels. **Journal of Geotechnical Engineering**, v. 109, n. 1, p. 15–39, 1983. ISSN 0733-9410. Disponível em: <[https://sci-hub.do/10.1061/\(ASCE\)0733-9410\(1983\)109:1\(15\)](https://sci-hub.do/10.1061/(ASCE)0733-9410(1983)109:1(15))>. Acesso em: 24 mar. 2021. Citado 2 vezes nas páginas 63 e 82.

BROX, D. **Practical Guide to Rock Tunneling**. London: CRC Press Taylor e Francis Group, 2017. 274 p. ISBN 9781315210117. Citado na página 44.

BURD, H. J.; HOULSBY, G. T.; AUGARDE, C. E.; LIU, G. Modelling tunnellmg-induced settlement of masonry buildings. **Proceedings of the Institution of Civil Engineers: Geotechnical Engineering**, v. 143, n. 1, p. 17–29, 2000. ISSN 13532618. Disponível em: <<https://www.icevirtuallibrary.com/doi/full/10.1680/geng.2000.143.1.17>>. Acesso em: 15 mar. 2021. Citado na página 50.

CAMBOU, B.; JAFARI, K. Constitutive model for granular materials based on two plasticity mechanisms. In: SAADA, A.; BIANCHINI, G. (Ed.). **International Workshop on Constitutive Equations for Granular non-Cohesive soils**. [S.l.]: CRC Press, 1987. p. 149–167. Citado na página 69.

CARRANZA-TORRES, C. Elasto-plastic solution of tunnel problems using the generalized form of the Hoek-Brown failure criterion. **International Journal of Rock Mechanics and Mining Sciences**, Elsevier BV, v. 41, n. SUPPL. 1, p. 1–11, may 2004. ISSN 13651609. Disponível em: <<https://www.sciencedirect.com/science/article/pii/S1365160904001583>>. Acesso em: 24 mar. 2021. Citado na página 63.

CARRANZA-TORRES, C.; FAIRHURST, C. The elasto-plastic response of underground excavations in rock masses that satisfy the Hoek-Brown failure criterion. **International Journal of Rock Mechanics and Mining Sciences**, Elsevier Science Ltd, v. 36, n. 6, p. 777–809, sep 1999. ISSN 01489062. Disponível em: <<https://www.sciencedirect.com/science/article/pii/S0148906299000479>>. Acesso em: 24 mar. 2021. Citado na página 63.

CHAKERI, H.; HASANPOUR, R.; HINDISTAN, M. A.; ÜNVER, B. Analysis of interaction between tunnels in soft ground by 3D numerical modeling. **Bulletin of Engineering Geology and the Environment**, v. 70, n. 3, p. 439–448, 2011. ISSN 14359529. Disponível em: <<https://link.springer.com/article/10.1007/s10064-010-0333-8>>. Acesso em: 15 mar. 2021. Citado na página 50.

CHAN, A.; OU, J. Three-Dimensional Numerical Analysis of a Dynamic Structure, Saturated Soil and Pore Fluid Interaction Problem. In: PAPADRAKAKIS, M.; TOPPING, B. H. V. (Ed.). **Trends in Engineering Computational Technology**. Stirlingshire: Saxe-Coburg Publications, 2008. cap. 17, p. 335–353. Disponível em: <<https://www.ctresources.info/csets/chapter.html?id=18>>. Citado 2 vezes nas páginas 50 e 51.

CHAPMAN, D.; METJE, N.; STÄRK, A. **Introduction to tunnel construction**. 2. ed. Boca Raton: CRC Press Taylor e Francis Group, 2018. ISBN 9781315120164. Citado 5 vezes nas páginas 11, 44, 45, 46 e 76.

CHEN, W. F.; HAN, D. J. **Plasticity for Structural Engineers**. New York: Springer-Verlag, 1988. 609 p. ISBN 978-1-4612-8380-5. Disponível em: <<http://libgen.rs/book/index.php?md5=1BD099ECCC8CD644C33488ED5B6EBA70>>. Acesso em: 09 jun. 2021. Citado 6 vezes nas páginas 15, 16, 91, 95, 99 e 116.

CORBETA, F. **Nouvelles méthodes d'étude des tunnels profonds: calculs analytiques et numériques**. Tese (Doutorado) — École Nationale Supérieure des Mines, 1990. Disponível em: <<https://www.theses.fr/1990ENMP0227>>. Citado na página 82.

CORMEAU, I. Numerical stability in quasi-static elasto-visco-plasticity. **International Journal for Numerical Methods in Engineering**, v. 9, n. 1, p. 109–127, 1975. ISSN 0029-5981. Disponível em: <<https://sci-hub.do/10.1002/nme.1620090110>>. Acesso em: 26 jun. 2021. Citado 2 vezes nas páginas 124 e 125.

COSTA, A. M. da. **Uma aplicação de métodos computacionais e princípios de mecânica das rochas no projeto e análise de escavações destinadas à mineração subterrânea.** 1488 p. Tese (Doutorado), 1984. Disponível em: <<http://www.coc.ufrj.br/pt/teses-de-doutorado/128-1984/718-alvaro-maia-da-costa>>. Acesso em: 25 mar. 2021. Citado 2 vezes nas páginas 13 e 64.

COUTO, E. C. **Um modelo tridimensional para túneis escavados em rocha reforçada por tirantes passivos.** 141 p. Tese (Doutorado) — Universidade Federal do Rio Grande do Sul, Porto Alegre, 2011. Disponível em: <<https://www.lume.ufrgs.br/bitstream/handle/10183/38962/000822209.pdf?...1>>. Acesso em: 18 mar. 2021. Citado 5 vezes nas páginas 12, 14, 50, 55 e 79.

CRISTESCU, N. Viscoplastic creep of rocks around horizontal tunnels. **International Journal of Rock Mechanics and Mining Sciences and**, Pergamon, v. 22, n. 6, p. 453–459, dec 1985. ISSN 01489062. Disponível em: <[https://doi.org/10.1016/0148-9062\(85\)90009-9](https://doi.org/10.1016/0148-9062(85)90009-9)>. Acesso em: 29 mar. 2021. Citado na página 67.

CRISTESCU, N. D. Viscoplastic creep of rocks around a lined tunnel. **International Journal of Plasticity**, v. 4, n. 4, p. 393–412, 1988. ISSN 07496419. Disponível em: <[https://doi.org/10.1016/0749-6419\(88\)90026-5](https://doi.org/10.1016/0749-6419(88)90026-5)>. Acesso em: 25 mar. 2021. Citado na página 67.

CRISTESCU, N. D.; HUNSCHE, U. **Time Effects in Rock Mechanics.** New York: Jhon Wiley and Sons, 1998. 336 p. ISBN 0-471-95517-5. Disponível em: <<http://libgen.rs/book/index.php?md5=B7EFB419F5A06D40B550ADD2E0F4818>>. Acesso em: 25 mar. 2021. Citado na página 66.

de SOUZA NETO, E. A.; PERI, D.; OWEN, D. R. J. **Computational Methods for Plasticity.** Chichester, UK: John Wiley and Sons, Ltd, 2008. 791 p. ISBN 9780470694626. Disponível em: <<http://libgen.rs/book/index.php?md5=82D92BB71B5D2452E068E8AA61D6B1F4>>. Acesso em: 08 jun. 2021. Citado 10 vezes nas páginas 15, 90, 91, 93, 94, 97, 99, 100, 120 e 124.

de Souza, R. M. **O Método dos Elementos Finitos Aplicado ao Problema de Condução de Calor.** Belém, 2003. 40 p. Disponível em: <[http://www.inf.ufes.br/\\$sim\\$luciac/fem/livros-fem/ApostilaElementosFinitosNiCAE.pdf](http://www.inf.ufes.br/$sim$luciac/fem/livros-fem/ApostilaElementosFinitosNiCAE.pdf)>. Acesso em: 16 jun. 2021. Citado 2 vezes nas páginas 15 e 107.

DEBERNARDI, D. **Viscoplastic behaviour and design of tunnels.** 302 p. Tese (Doutorado) — Politecnico di Torino, 2008. Disponível em: <[https://www.danieledebernardi.it/sites/danieledebernardi.it/files/Daniele\\_Debernardi\\_PhD\\_Thesis.pdf](https://www.danieledebernardi.it/sites/danieledebernardi.it/files/Daniele_Debernardi_PhD_Thesis.pdf)>. Acesso em: 31 mar. 2021. Citado na página 70.

DEBERNARDI, D.; BARLA, G. New Viscoplastic Model for Design Analysis of Tunnels in Squeezing Conditions. **Rock Mechanics and Rock Engineering**, v. 42, n. 2, p. 259–288, apr 2009. ISSN 0723-2632. Disponível em: <<https://sci-hub.do/10.1007/s00603-009-0174-6>>. Acesso em: 30 mar. 2021. Citado 4 vezes nas páginas 15, 68, 70 e 103.

DELERUYELLE, F.; BUI, T. A.; WONG, H.; DUFOUR, N. Analytical modelling of a deep tunnel in a viscoplastic rock mass accounting for a simplified life cycle and extension to a particular case of porous media. **Geological Society, London, Special Publications**, v. 400, n. 1, p. 367–379, 2014. ISSN 0305-8719. Disponível em: <[https://www.researchgate.net/publication/274972493\\_Analytical\\_modelling\\_of\\_a\\_deep\\_tunnel\\_in\\_a\\_viscoplastic\\_rock\\_mass\\_account](https://www.researchgate.net/publication/274972493_Analytical_modelling_of_a_deep_tunnel_in_a_viscoplastic_rock_mass_account)>.

ing\_for\_a\_simplified\_life\_cycle\_and\_extension\_to\_a\_particular\_case\_of\_porous\_media>. Acesso em: 29 mar. 2021. Citado na página 67.

**DEPARTAMENTO DE ESTRADAS E RODAGEM (SÃO PAULO). Instrução de Projeto para elaboração de túneis subterrâneos (NATM).** São Paulo, 2005. 52 p. Disponível em: <<http://www.portaldageotecnica.com.br/wp-content/uploads/2018/05/Projeto-de-T{ú}nel-Instruções-{~}{a}o-de->>>. Acesso em: 11 mar. 2021. Citado 2 vezes nas páginas 12 e 47.

DETournay, E.; FAIRHURST, C. Two-dimensional elastoplastic analysis of a long, cylindrical cavity under non-hydrostatic loading. **International Journal of Rock Mechanics and Mining Sciences and**, Pergamon, v. 24, n. 4, p. 197–211, aug 1987. ISSN 01489062. Disponível em: <<https://www.sciencedirect.com/science/article/pii/0148906287901756>>. Acesso em: 24 mar. 2021. Citado na página 63.

DETournay, E.; St. John, C. M. Design charts for a deep circular tunnel under non-uniform loading. **Rock Mechanics and Rock Engineering**, v. 21, n. 2, p. 119–137, 1988. ISSN 0723-2632. Disponível em: <<https://sci-hub.do/10.1007/bf01043117>>. Acesso em: 20 abr. 2021. Citado 3 vezes nas páginas 14, 74 e 75.

DIEDERICHS, M. S. The 2003 Canadian Geotechnical Colloquium: Mechanistic interpretation and practical application of damage and spalling prediction criteria for deep tunnelling. **Canadian Geotechnical Journal**, v. 44, n. 9, p. 1082–1116, sep 2007. ISSN 0008-3674. Disponível em: <<http://www.nrcresearchpress.com/doi/10.1139/T07-033>>. Acesso em: 23 mar. 2021. Citado 2 vezes nas páginas 12 e 58.

DO, N. A.; DIAS, D.; ORESTE, P.; DJERAN-MAIGRE, I. Three-dimensional numerical simulation of a mechanized twin tunnels in soft ground. **Tunnelling and Underground Space Technology**, Elsevier Ltd, v. 42, p. 40–51, 2014. ISSN 08867798. Disponível em: <<http://dx.doi.org/10.1016/j.tust.2014.02.001>>. Acesso em: 15 mar. 2021. Citado na página 50.

DUSSEAUT, M. B.; FORDHAM, C. J. Time-dependent Behavior of Rocks. In: **Rock Testing and Site Characterization**. Elsevier, 1993. v. 3, p. 119–149. Disponível em: <<https://sci-hub.do/10.1016/b978-0-08-042066-0.50013-6>>. Acesso em: 25 mar. 2021. Citado na página 66.

EISENSTEIN, Z.; HEINZ, H.; NEGRO, A. On Three-Dimensional Ground Response to Tunnelling. In: LO, K. Y. (Ed.). **Tunnelling in Soil and Rock: Two Sessions at GEOTECH '84**. New York: American Society of Civil Engineers (ASCE), 1984. p. 107–127. Citado 2 vezes nas páginas 14 e 79.

FAHIMIFAR, A.; TEHRANI, F. M.; HEDAYAT, A.; VAKILZADEH, A. Analytical solution for the excavation of circular tunnels in a visco-elastic Burger's material under hydrostatic stress field. **Tunnelling and Underground Space Technology**, Elsevier Ltd, v. 25, n. 4, p. 297–304, 2010. ISSN 08867798. Disponível em: <<https://doi.org/10.1016/j.tust.2010.01.002>>. Acesso em: 29 mar. 2021. Citado na página 67.

FEDA, J. **Creep of soils and related phenomena**. Prague: Elsevier, 1992. 422 p. ISBN 0-444-98822-X. Disponível em: <<http://libgen.rs/book/index.php?md5=8965DFF5DC77F3DB5D6A594F0A76B748>>. Acesso em: 25 mar. 2021. Citado na página 66.

**FEDERAL HIGHWAY ADMINISTRATION (U.S.). Technical Manual for Design and Construction of Road Tunnels — Civil Elements.** Fhwa-nhi-1. Books Express Publishing,

2009. 702 p. ISBN 1782661727. Disponível em: <[https://www.fhwa.dot.gov/bridge/Tunnel/pubs/nhi09010/tunnel\\_manual.pdf](https://www.fhwa.dot.gov/bridge/Tunnel/pubs/nhi09010/tunnel_manual.pdf)>. Acesso em: 09 mar. 2021. Citado 5 vezes nas páginas 11, 12, 41, 46 e 48.

FELIPPA, C. A. Solution of linear equations with skyline-stored symmetric matrix. **Computers and Structures**, v. 5, n. 1, p. 13–29, apr 1975. ISSN 00457949. Disponível em: <<https://sci-hub.do/10.1016/0045-7949%2875%2990016-4>>. Acesso em: 21 jun. 2021. Citado na página 113.

FENNER, R. Untersuchungen zur Erkenntnis des Gebirgsdruckes. **Glückauf**, v. 74, p. 681–695, 705–715, 1938. Citado na página 82.

FERRÃO, W. C.; JENSEN, B. M.; BERNAUD, D. Numerical modeling of shallow tunnels: analysis of the surface settlements. In: **Ibero-Latin-American Congress on Computational Methods in Engineering**. Foz do Iguaçu: ABMEC, 2020. p. 7. ISSN 2675-6269. Disponível em: <<https://lume.ufrgs.br/handle/10183/217231>>. Acesso em: 18 mar. 2021. Citado na página 50.

FRANÇA, P. T. **Estudo do comportamento de túneis: análise numérica tridimensional com modelos elasto-plásticos**. 185 p. Tese (Doutorado) — Universidade de São Paulo, São Paulo, aug 2006. Disponível em: <<http://www.teses.usp.br/teses/disponiveis/3/3145/tde-08122006-151549/>>. Acesso em: 19 mar. 2021. Citado 3 vezes nas páginas 12, 52 e 53.

FRITZ, P. An analytical solution for axisymmetric tunnel problems in elasto-viscoplastic media. **International Journal for Numerical and Analytical Methods in Geomechanics**, v. 8, n. 4, p. 325–342, 1984. ISSN 10969853. Disponível em: <<https://sci-hub.do/10.1002/nag.1610080403>>. Acesso em: 29 mar. 2021. Citado na página 67.

GEORGE, A.; LIU, J. W. H. **Computer Solution of Large Sparse Positive Definite Systems**. Prentice Hall, 1981. 335 p. Disponível em: <<http://libgen.rs/book/index.php?md5=6AB741BD045A8D4CC43D6BC8C4687DEC>>. Acesso em: 21 jun. 2021. Citado na página 113.

GERMANOVICH, L.; DYSKIN, A. Fracture mechanisms and instability of openings in compression. **International Journal of Rock Mechanics and Mining Sciences**, v. 37, n. 1-2, p. 263–284, jan 2000. ISSN 13651609. Disponível em: <<https://linkinghub.elsevier.com/retrieve/pii/S1365160999001057>>. Acesso em: 23 mar. 2021. Citado 2 vezes nas páginas 12 e 57.

GIODA, G.; CIVIDINI, A. Finite Element Analysis of Time Dependent Effects in Tunnels. In: CRISTESCU, N.; GIODA, G. (Ed.). **Visco-Plastic Behaviour of Geomaterials**. New York: Springer-Verlag Wien, 1994. cap. 4, p. 209–243. Disponível em: <[https://link.springer.com/chapter/10.1007/978-3-7091-2710-0\\_4](https://link.springer.com/chapter/10.1007/978-3-7091-2710-0_4)>. Acesso em: 29 mar. 2021. Citado na página 67.

GOODMAN, R. E. **Introduction to Rock Mechanics**. 2 ed. ed. John Wiley and Sons, 1989. 562 p. ISBN 0471812005. Disponível em: <<http://libgen.rs/book/index.php?md5=D0043C73A14DF689B1292CAC2732B82E>>. Acesso em: 29 mar. 2021. Citado na página 67.

GRAD, P. **Pioneering drill+blast work in Hong Kong - TunnelTalk**. 2013. 1 p. Disponível em: <<https://www.tunneltalk.com/Hong-Kong-4Dec2013-Pioneering-double-deck-blasting-method-for-successful-South-Island-Line-drill-blast-excavation.php>>. Acesso em: 10 mar. 2021. Citado 2 vezes nas páginas 11 e 43.

GRIFFITHS, D. V. Coupled Analyses in Geomechanics. In: CRISTESCU, N.; GIODA, G. (Ed.). **Visco-Plastic Behaviour of Geomaterials**. New York: Springer-Verlag Wien, 1994. cap. 5, p. 245–317. Disponível em: <<https://link.springer.com/content/pdf/10.1007%2F978-3-7091-2710-0.pdf>>. Acesso em: 26 mar. 2021. Citado na página 67.

GUAYACÁN-CARRILLO, L. M.; SULEM, J.; SEYEDI, D. M.; GHABEZLOO, S.; NOIRET, A.; ARMAND, G. Analysis of Long-Term Anisotropic Convergence in Drifts Excavated in Callovo-Oxfordian Claystone. **Rock Mechanics and Rock Engineering**, v. 49, n. 1, p. 97–114, 2016. ISSN 07232632. Disponível em: <<https://link.springer.com/article/10.1007/s00603-015-0737-7>>. Acesso em: 24 mar. 2021. Citado 2 vezes nas páginas 13 e 59.

HANAFY, E. A.; EMERY, J. J. Advancing face simulation of tunnel excavations and lining placement. In: **Canadian Rock Mechanics Symposium (Proceedings)**. [S.I.]: CIM, 1980. v. 18, n. 6, p. 119–125. ISSN 01489062. Citado 2 vezes nas páginas 12 e 55.

Health and Safety Executive (HSE). **Safety of New Austrian Tunnelling Method (NATM) Tunnels: A review of sprayed concrete lined tunnels with particular reference to London clay**. [S.I.], 1996. 137 p. Disponível em: <<https://www.hse.gov.uk/pubns/natm.pdf>>. Acesso em: 23 mar. 2021. Citado na página 55.

HEINIÖ, M. **Rock Excavation Handbook**. [S.I.]: Sandvik Tamrock, 1999. 364 p. Citado 2 vezes nas páginas 11 e 43.

HOEK, E.; BROWN, E. T. **Underground Excavations in Rock**. London: CRC Press, 1980. 532 p. ISBN 9781482288926. Disponível em: <<http://libgen.rs/book/index.php?md5=A31AA664D8C93E11BC9181B7A6C024FA>>. Acesso em: 24 mar. 2021. Citado 7 vezes nas páginas 13, 14, 63, 71, 72, 73 e 74.

HOEK, E.; KAISER, P. K.; BAWDEN, W. F. **Support of Underground Excavations in Hard Rock**. 3 ed.. ed. Rotterdam: A.A. Balkema, 1998. 215 p. ISBN 9054101865. Disponível em: <<http://libgen.rs/book/index.php?md5=BBFCD945E7183BC8D2B9A9D2ED097FB9>>. Acesso em: 19 abr. 2021. Citado na página 72.

HUANG, J.; GRIFFITHS, D. V. Return Mapping Algorithms and Stress Predictors for Failure Analysis in Geomechanics. **Journal of Engineering Mechanics**, v. 135, n. 4, p. 276–284, 2009. ISSN 0733-9399. Disponível em: <[https://sci-hub.do/10.1061/\(ASCE\)0733-9399\(2009\)135:4\(276\)](https://sci-hub.do/10.1061/(ASCE)0733-9399(2009)135:4(276))>. Acesso em: 26 jun. 2021. Citado na página 120.

HUGHES, T. J.; TAYLOR, R. L. Unconditionally stable algorithms for quasi-static elasto-viscoplastic finite element analysis. **Computers and Structures**, v. 8, n. 2, p. 169–173, apr 1978. ISSN 00457949. Disponível em: <<https://sci-hub.do/10.1016/0045-7949%2878%2990019-6>>. Acesso em: 26 jun. 2021. Citado na página 124.

HUNSCHE, U. Uniaxial and triaxial creep and failure tests on rock: experimental technique and interpretation. In: CRISTESCU, N. D.; GIODA, G. (Ed.). **Visco-Plastic Behaviour of Geomaterials**. New York: Springer-Verlag Wien, 1994. cap. 1, p. 1–54. Disponível em: <<https://link.springer.com/content/pdf/10.1007%2F978-3-7091-2710-0.pdf>>. Acesso em: 25 mar. 2021. Citado na página 66.

ITASCA, I. **User's Manual Creep Material Models**. Minneapolis, 2006. 124 p. Disponível em: <<https://web.mst.edu/~norbert/ge5471/Assignments/Assign%201%20-%20FLAC%20I/FLAC%20manual/FLAC%20manual/f2d421.pdf>>. Acesso em: 31 mar. 2021. Citado na página 70.

JING, L. A review of techniques, advances and outstanding issues in numerical modelling for rock mechanics and rock engineering. **International Journal of Rock Mechanics and Mining Sciences**, v. 40, n. 3, p. 283–353, 2003. ISSN 13651609. Disponível em: <<https://www.sciencedirect.com/science/article/pii/S1365160903000133>>. Acesso em: 18 mar. 2021. Citado na página 51.

KALIAKIN, V. N. Parameter Estimation for Time-Dependent Bounding Surface Models for Cohesive Soils. In: **Soil Constitutive Models**. Reston, VA: American Society of Civil Engineers (ASCE), 2005. p. 237–256. ISSN 08950563. Disponível em: <<https://sci-hub.do/10.1061/40771%28169%2910>>. Acesso em: 30 mar. 2021. Citado na página 69.

KALIAKIN, V. N.; DAFALIAS, Y. F. Theoretical Aspects of the Elastoplastic-Viscoplastic Bounding Surface Model for Cohesive Soils. **Soils and Foundations**, v. 30, n. 3, p. 11–24, sep 1990. ISSN 00380806. Disponível em: <[https://sci-hub.do/10.3208/sandf1972.30.3\\_11](https://sci-hub.do/10.3208/sandf1972.30.3_11)>. Acesso em: 30 mar. 2021. Citado na página 69.

KARGAR, A. R. An analytical solution for circular tunnels excavated in rock masses exhibiting viscous elastic-plastic behavior. **International Journal of Rock Mechanics and Mining Sciences**, Elsevier Ltd, v. 124, p. 104128, dec 2019. ISSN 13651609. Disponível em: <<https://linkinghub.elsevier.com/retrieve/pii/S1365160919301984>>. Acesso em: 31 mar. 2021. Citado na página 70.

KIRSCH, G. Die theorie der elastizität und die bedürfnisse der festigkeitslehre. **Zeitschrift des Vereines deutscher Ingenieure**, v. 42, p. 797–807, 1898. Citado na página 62.

KLEINE, A. **Modélisation numérique du comportement des ouvrages souterrains par une approche viscoplastique**. 313 p. Tese (Doutorado) — Institut National Polytechnique de Lorraine, Lorraine, nov 2007. Disponível em: <<https://hal.univ-lorraine.fr/tel-01752829/document>>. Acesso em: 23 mar. 2021. Citado 3 vezes nas páginas 57, 68 e 69.

LADANYI, B.; GILL, D. E. Design of tunnel linings in a creeping rock. **International Journal of Mining and Geological Engineering**, v. 6, n. 2, p. 113–126, 1988. ISSN 02690136. Disponível em: <<https://link.springer.com/article/10.1007/BF00880802>>. Acesso em: 29 mar. 2021. Citado na página 67.

LAMÉ, G. **Leçons sur la théorie mathématique de l'élasticité des corps solides**. Paris: Bachelier, 1852. 384 p. Disponível em: <<https://archive.org/details/leonssurlathori09lamgoog/page/n1/mode/2up>>. Acesso em: 24 mar. 2021. Citado na página 62.

LEEM, J.; KEMENY, J. Finite element micromechanical-based model for hydro-mechanical coupling. In: **The 37th U.S. Symposium on Rock Mechanics (USRMS)**. OnePetro, 1999. Disponível em: <<https://onepetro.org/ARMAUSRMS/proceedings-abstract/ARMA99/All-ARM-A99/ARMA-99-0153/130892>>. Acesso em: 15 mar. 2021. Citado 2 vezes nas páginas 50 e 67.

LEMAITRE, J.; CHABOCHE, J.-L. **Mechanics of solid materials**. Cambridge: Cambridge University Press, 1994. 556 p. ISBN 978-0-521-47758-1. Disponível em: <<http://libgen.rs/book/index.php?md5=27B3867CA5939D1B5C83133A2F908B62>>. Acesso em: 31 mar. 2021. Citado 2 vezes nas páginas 70 e 100.

LEWIS, R. W.; SCHREFLER, B. A. **The Finite Element Method in the Static and Dynamic Deformation and Consolidation of Porous Media**. 2. ed. Chichester: Jhon Wiley and Sons,

1998. 475 p. Disponível em: <<http://libgen.rs/book/index.php?md5=F2F37588E5F080329BA044570DFBA920>>. Acesso em: 30 mar. 2021. Citado na página 69.

LIZARZA, J. T. C. **Método de los Elementos Finitos para Análisis Estructural**. UNICOPIA C.B., 2011. 287 p. ISBN 8492197021. Disponível em: <<http://dadun.unav.edu/handle/10171/19069>>. Acesso em: 16 jun. 2021. Citado 2 vezes nas páginas 15 e 109.

LUNARDI, P. Application de la mécanique des roches aux tunnels autoroutiers exemple des tunnels du Fréjus (côté Italie) et du Gran Sasso. **Revue Française de Geotechnique**, n. 12, p. 43, 1980. Disponível em: <<https://www.geotechnique-journal.org/articles/geotech/pdf/1980/03/geotech1980012p5.pdf>>. Acesso em: 24 mar. 2021. Citado 2 vezes nas páginas 13 e 59.

MAIDL, B.; THEWES, M.; MAIDL, U. **Handbook of Tunnel Engineering Volume I : Structures and Methods**. 1. ed. Berlin: Wilhelm Ernst e Sohn, 2013. I. 455 p. ISBN 9783433030486. Citado na página 46.

MALEKI, M.; DUBUJET, P.; CAMBOU, B. Modélisation hiérarchisée du comportement des sols. **Revue Française de Génie Civil**, Informa UK Limited, v. 4, n. 7-8, p. 895–928, jan 2000. ISSN 1279-5119. Disponível em: <<https://www.tandfonline.com/doi/pdf/10.1080/12795119.2000.9692702?needAccess=true>>. Acesso em: 30 mar. 2021. Citado na página 69.

MANCHAO, H.; Leal e Sousa, R.; MÜLLER, A.; VARGAS, E.; Ribeiro e Sousa, L.; XIN, C. Analysis of excessive deformations in tunnels for safety evaluation. **Tunnelling and Underground Space Technology**, Elsevier Ltd, v. 45, p. 190–202, jan 2015. ISSN 08867798. Disponível em: <<http://dx.doi.org/10.1016/j.tust.2014.09.006>>. Acesso em: 09 mar. 2021. Citado 2 vezes nas páginas 11 e 33.

MANH, H. T.; SULEM, J.; SUBRIN, D.; BILLAUX, D. Anisotropic Time-Dependent Modeling of Tunnel Excavation in Squeezing Ground. **Rock Mechanics and Rock Engineering**, v. 48, n. 6, p. 2301–2317, nov 2015. ISSN 0723-2632. Disponível em: <[link.springer.com/10.1007/s00603-015-0717-y](http://link.springer.com/10.1007/s00603-015-0717-y)>. Acesso em: 30 mar. 2021. Citado 2 vezes nas páginas 68 e 70.

MARQUES, J. M.; OWEN, D. R. Strain hardening representation for implicit quasistatic elasto-viscoplastic algorithms. **Computers and Structures**, v. 17, n. 2, p. 301–304, 1983. ISSN 00457949. Disponível em: <[https://sci-hub.do/10.1016/0045-7949\(83\)90018-4](https://sci-hub.do/10.1016/0045-7949(83)90018-4)>. Acesso em: 26 jun. 2021. Citado na página 124.

MARTIN, C.; KAISER, P.; CHRISTIANSSON, R. Stress, instability and design of underground excavations. **International Journal of Rock Mechanics and Mining Sciences**, v. 40, n. 7-8, p. 1027–1047, oct 2003. ISSN 13651609. Disponível em: <<https://linkinghub.elsevier.com/retrieve/pii/S1365160903001102>>. Acesso em: 19 abr. 2021. Citado na página 72.

MARTOS, F. Concerning an approximate equation of the subsidence trough and its time factors. In: **International Strata Control Congress**. Leipzig: [s.n.], 1958. p. 191–205. Citado na página 77.

MATA, M. d. L. F. **Tunneling under squeezing conditions : Effect of the excavation method**. 207 p. Tese (Doutorado) — Université Paris-Est, 2018. Disponível em: <<https://pastel.archives-ouvertes.fr/tel-02122931/file/TH2018PESC1071.pdf>>. Acesso em: 31 mar. 2021. Citado na página 70.

MAYNAR, M. J.; RODRÍGUEZ, L. E. Discrete Numerical Model for Analysis of Earth Pressure Balance Tunnel Excavation. **Journal of Geotechnical and Geoenvironmental Engineering**, v. 131, n. 10, p. 1234–1242, 2005. ISSN 1090-0241. Disponível em: <[https://sci-hub.do/10.1061/\(ASCE\)1090-0241\(2005\)131:10\(1234\)](https://sci-hub.do/10.1061/(ASCE)1090-0241(2005)131:10(1234))>. Acesso em: 18 mar. 2021. Citado na página 51.

MENDONÇA, P. d. T. R.; FANCELLO, E. A. **O Método de Elementos Finitos aplicado à Mecânica dos Sólidos**. 1 ed. ed. Florianópolis, SC: Orsa Maggiore, 2019. 706 p. ISBN 978-85-907153-1-3. Citado na página 113.

MESRI, G.; CASTRO, A.; FEBRES-CORDERO, E.; SHIELDS, D. R. Shear stress-strain-time behaviour of clays. **Geotechnique**, v. 31, n. 4, p. 537–552, dec 1981. ISSN 17517656. Disponível em: <<https://sci-hub.do/10.1680/geot.1981.31.4.537>>. Acesso em: 26 mar. 2021. Citado na página 67.

MITTERNDORFER, K. H. **Roadheaders in Tunneling - Tunnel Business Magazine**. 2013. 1 p. Disponível em: <<http://tunnelingonline.com/roadheaders-tunneling/>>. Acesso em: 03 mar. 2021. Citado 2 vezes nas páginas 11 e 42.

MORAN, B.; ORTIZ, M.; SHIH, C. F. Formulation of implicit finite element methods for multiplicative finite deformation plasticity. **International Journal for Numerical Methods in Engineering**, v. 29, n. 3, p. 483–514, mar 1990. ISSN 0029-5981. Disponível em: <<https://sci-hub.do/10.1002/nme.1620290304>>. Acesso em: 23 jun. 2021. Citado na página 121.

MROUEH, H.; SHAHOUR, I. A full 3-D finite element analysis of tunneling-adjacent structures interaction. **Computers and Geotechnics**, v. 30, n. 3, p. 245–253, 2003. ISSN 0266352X. Disponível em: <<https://www.sciencedirect.com/science/article/abs/pii/S0266352X02000472>>. Acesso em: 15 mar. 2021. Citado na página 50.

NAYAK, G. C.; ZIENKIEWICZ, O. C. Elasto-plastic stress analysis. A generalization for various constitutive relations including strain softening. **International Journal for Numerical Methods in Engineering**, v. 5, n. 1, p. 113–135, sep 1972. ISSN 0029-5981. Disponível em: <<https://sci-hub.do/10.1002/nme.1620050111>>. Acesso em: 23 jun. 2021. Citado na página 120.

NORTON, F. H. **The creep of steel at high temperatures**. McGraw-Hill, 1929. 90 p. Disponível em: <<https://archive.org/details/creepofsteelathi00nort/page/74/mode/1up>>. Acesso em: 11 jun. 2021. Citado na página 100.

OBERT, L. **Creep in Model Pillars**. [S.I.], 1965. 23 p. Disponível em: <<https://www.osti.gov/servlets/purl/7106658>>. Acesso em: 26 mar. 2021. Citado na página 67.

O'REILLY, M. P.; NEW, B. M. Settlements above tunnels in the United Kingdom, their magnitude and prediction. In: **Proceedings of Tunnelling**. Brighton: [s.n.], 1982. p. 173–181. Citado 2 vezes nas páginas 14 e 78.

OTTOSEN, N. Viscoelastic—viscoplastic formulas for analysis of cavities in rock salt. **International Journal of Rock Mechanics and Mining Sciences and Geomechanics Abstracts**, v. 23, n. 3, p. 201–212, jun 1986. ISSN 01489062. Disponível em: <<https://linkinghub.elsevier.com/retrieve/pii/0148906286909666>>. Acesso em: 29 mar. 2021. Citado na página 67.

- OWEN, D. R. J.; HINTON, E. **Finite elements in plasticity: theory and practice.** Swansea: Pineridge Press Limited, 1980. 603 p. ISBN 0906674050. Disponível em: <<http://libgen.rs/book/index.php?md5=B5CC28CFE34CDD384CD6633D1DDB5AB4>>. Acesso em: 10 jun. 2021. Citado 3 vezes nas páginas 96, 120 e 130.
- PACHER, F. Deformationsmessungen im Versuchsstollen als Mittel zur Erforschung des Gebirgsverhaltens und zur Bemessung des Ausbaues. In: MÜLLER, L.; FAIRHURST, C. (Ed.). **Grundfragen auf dem Gebiete der Geomechanik - Principles in the Field of Geomechanics.** Berlin, Heidelberg: Springer Berlin Heidelberg, 1964. p. 149–161. ISBN 978-3-662-23624-6. Disponível em: <<http://libgen.rs/book/index.php?md5=75078FC914D518325EDD34854E4C16A1>>. Acesso em: 27 abr. 2021. Citado na página 82.
- PAN, Y. W.; DONG, J. J. Time-dependent tunnel convergence-I. Formulation of the model. **International Journal of Rock Mechanics and Mining Sciences and**, v. 28, n. 6, p. 469–475, 1991. ISSN 01489062. Disponível em: <[https://doi.org/10.1016/0148-9062\(91\)91122-8](https://doi.org/10.1016/0148-9062(91)91122-8)>. Acesso em: 29 mar. 2021. Citado na página 67.
- \_\_\_\_\_. Time-dependent tunnel convergence-II. Advance rate and tunnel-support interaction. **International Journal of Rock Mechanics and Mining Sciences and**, v. 28, n. 6, p. 477–488, 1991. ISSN 01489062. Disponível em: <[https://doi.org/10.1016/0148-9062\(91\)91123-9](https://doi.org/10.1016/0148-9062(91)91123-9)>. Acesso em: 29 mar. 2021. Citado na página 67.
- PANET, M. Time-Dependent Deformations In Underground Works. In: **4th ISRM Congress. International Society for Rock Mechanics and Rock Engineering.** Montreux: OnePetro, 1979. p. 279–290. Disponível em: <<https://onepetro.org/isrmcongress/proceedings-abstract/CONGRESS79/All-CONGRESS79/ISRM-4CONGRESS-1979-221/166422>>. Acesso em: 29 mar. 2021. Citado na página 67.
- \_\_\_\_\_. **Le Calcul des Tunnels par la Méthode Convergence-Confinement.** Presses De L'école Nationale Des Ponts Et Chaussees, 1995. 161 p. ISBN 2859782303. Disponível em: <<https://pt.scribd.com/document/456649940/1995-Calcul-Des-Tunnels-Par-La-Methode-Convergence-Confinement-Panet>>. Acesso em: 27 abr. 2021. Citado 5 vezes nas páginas 12, 13, 54, 66 e 82.
- PANET, M.; GUELLEC, P. Contribution à l'étude du soutènement derrière le front de taille. In: **3rd Congress ISRM, Denver, 2, part B.** [S.l.: s.n.], 1974. p. 1130–1134. Citado na página 82.
- PANJI, M.; KOOHSARI, H.; ADAMPIRA, M.; ALIELAH, H.; Asgari Marnani, J. Stability analysis of shallow tunnels subjected to eccentric loads by a boundary element method. **Journal of Rock Mechanics and Geotechnical Engineering**, Elsevier Ltd, v. 8, n. 4, p. 480–488, aug 2016. ISSN 16747755. Disponível em: <<http://dx.doi.org/10.1016/j.jrmge.2016.01.006>>. Acesso em: 23 abr. 2021. Citado na página 78.
- PECK, R. B. Deep excavations and tunnelling in soft ground. In: **Proc. 7th International Conference Soil Mechanics and Foundation Engineering.** Mexico City: [s.n.], 1969. p. 225–290. Citado 2 vezes nas páginas 77 e 78.
- PEIRCE, D.; SHIH, C. F.; NEEDLEMAN, A. A tangent modulus method for rate dependent solids. **Computers and Structures**, v. 18, n. 5, p. 875–887, 1984. ISSN 00457949. Disponível em: <[https://sci-hub.do/10.1016/0045-7949\(84\)90033-6](https://sci-hub.do/10.1016/0045-7949(84)90033-6)>. Acesso em: 26 jun. 2021. Citado na página 124.

PELLET, F. L.; ROOSEFID, M. Time dependent behavior of rock and practical implications to tunnel design. In: **Proc. 11th International Congress on Rock Mechanics, Lisboa, Portugal.** [S.l.: s.n.], 2007. p. 1079–1082. ISBN 9780415450843. Acesso em: 15 mar. 2021. Citado na página 50.

PERZYNA, P. Fundamental Problems in Viscoplasticity. In: **Advances in Applied Mechanics.** [s.n.], 1966. v. 9, n. C, p. 243–377. ISBN 9780120020096. Disponível em: <<https://sci-hub.do/10.1016/S0065-2156%2808%2970009-7>>. Acesso em: 30 mar. 2021. Citado 2 vezes nas páginas 68 e 69.

PHIENWEJ, N.; THAKUR, P. K.; CORDING, E. J. Time-Dependent Response of Tunnels Considering Creep Effect. **International Journal of Geomechanics**, American Society of Civil Engineers (ASCE), v. 7, n. 4, p. 296–306, jul 2007. ISSN 1532-3641. Disponível em: <<http://ascelibrary.org/doi/10.1061/%28ASCE%291532-3641%282007%297%3A4%28296%29>>. Acesso em: 26 mar. 2021. Citado na página 67.

PIEPI, G. T. **Comportement viscoplastique avec rupture des argiles raides: applications aux ouvrages souterrains.** 155 p. Tese (Doutorado) — Ecole Nationale des Ponts et Chaussées, 1995. Disponível em: <<https://pastel.archives-ouvertes.fr/tel-00523616/document>>. Acesso em: 30 mar. 2021. Citado 2 vezes nas páginas 68 e 69.

PIERRAT, C. **Las excavadoras sobre cadenas Liebherr R 944 C Tunnel impulsan el proyecto ferroviario «Stuttgart-Ulm».** 2014. 1 p. Disponível em: <<https://www.liebherr.com/es/deu/actualidad/noticias-y-comunicados-de-prensa/detalle/las-excavadoras-sobre-cadenas-liebherr-r-944-c-tunnel-impulsan-el-proyecto-ferroviario-\T1\guillemotleftstuttgart-ulm\T1\guillemotright.html>>. Acesso em: 03 mar. 2021. Citado 2 vezes nas páginas 11 e 42.

PINTO, F.; WHITTLE, A. J. Ground Movements due to Shallow Tunnels in Soft Ground. I: Analytical Solutions. **Journal of Geotechnical and Geoenvironmental Engineering**, American Society of Civil Engineers (ASCE), v. 140, n. 4, p. 04013040, apr 2014. ISSN 1090-0241. Disponível em: <<https://sci-hub.do/10.1061/%28ASCE%29GT.1943-5606.0000948>>. Citado 2 vezes nas páginas 14 e 76.

POTTS, D. M.; ZDRAVKOVIC, L. **Finite element analysis in geotechnical engineering: theory.** London: Thomas Telford, 1999. 459 p. Disponível em: <<https://libgen.is/book/index.php?md5=A0F67F135CC35BD9AAE8FD96AE7F625C>>. Acesso em: 14 jul. 2021. Citado 2 vezes nas páginas 15 e 98.

PRASSETYO, S. H.; GUTIERREZ, M. Effect of transient coupled hydro-mechanical response on the longitudinal displacement profile of deep tunnels in saturated ground. **Tunnelling and Underground Space Technology**, Elsevier, v. 75, n. July 2017, p. 11–20, 2018. ISSN 08867798. Disponível em: <<https://doi.org/10.1016/j.tust.2018.02.003>>. Acesso em: 29 mar. 2021. Citado na página 67.

PURWODIHARDJO, A.; CAMBOU, B. Effect of strain-softening on settlement due to tunnelling in soft soil. In: ROSENBAUM, M. S.; TURNER, A. K. (Ed.). **New Paradigms in Subsurface Prediction.** 99. ed. Berlin, Heidelberg: Springer Berlin Heidelberg, 2003. cap. 16, p. 173–188. Disponível em: <[http://link.springer.com/10.1007/3-540-48019-6\\_16](http://link.springer.com/10.1007/3-540-48019-6_16)>. Acesso em: 15 mar. 2021. Citado na página 50.

\_\_\_\_\_. Time-dependent modelling for soils and its application in tunnelling. **International Journal for Numerical and Analytical Methods in Geomechanics**, v. 29, n. 1, p. 49–71, jan

2005. ISSN 0363-9061. Disponível em: <<https://sci-hub.do/10.1002/nag.404>>. Acesso em: 30 mar. 2021. Citado 2 vezes nas páginas 68 e 69.

QUEVEDO, F. P. d. M. **Comportamento a longo prazo de túneis profundos revestidos com concreto : modelo em elementos finitos**. 210 p. Tese (Doutorado) — Universidade Federal do Rio Grande do Sul, Porto Alegre, 2017. Disponível em: <<https://lume.ufrgs.br/handle/10183/163886>>. Acesso em: 15 mar. 2021. Citado 2 vezes nas páginas 50 e 131.

RABCEWICZ, L. v. The New Austrian Tunnelling Method: part one. **Water Power**, v. 16, n. 11, p. 453–457, nov 1964. Disponível em: <<https://www.eoas.ubc.ca/courses/eosc547/lecture-material/Rabcewicz-NATM.pdf>>. Acesso em: 22 mar. 2021. Citado na página 55.

\_\_\_\_\_. The New Austrian Tunnelling Method: part two. **Water Power**, v. 16, n. 12, p. 511–515, dec 1964. Disponível em: <<https://www.eoas.ubc.ca/courses/eosc547/lecture-material/Rabcewicz-NATM.pdf>>. Acesso em: 22 mar. 2021. Citado na página 55.

\_\_\_\_\_. The New Austrian Tunnelling Method: part three. **Water Power**, v. 17, n. 1, p. 19–24, jan 1965. Disponível em: <<https://www.eoas.ubc.ca/courses/eosc547/lecture-material/Rabcewicz-NATM.pdf>>. Acesso em: 22 mar. 2021. Citado na página 55.

RABCEWICZ, L. v.; GOLSER, J. Principles of dimensioning the supporting system for the New Austrian Tunnelling Method. **Water Power**, v. 25, n. 3, p. 88–93, 1973. Citado na página 55.

RAMONI, M.; ANAGNOSTOU, G. Thrust force requirements for TBMs in squeezing ground. **Tunnelling and Underground Space Technology**, Elsevier Ltd, v. 25, n. 4, p. 433–455, 2010. ISSN 08867798. Disponível em: <<http://dx.doi.org/10.1016/j.tust.2010.02.008>>. Acesso em: 09 mar. 2021. Citado na página 34.

\_\_\_\_\_. Tunnel boring machines under squeezing conditions. **Tunnelling and Underground Space Technology**, v. 25, n. 2, p. 139–157, 2010. ISSN 08867798. Disponível em: <<https://doi.org/10.1016/j.tust.2009.10.003>>. Acesso em: 09 mar. 2021. Citado na página 34.

RANKIN, W. J. Ground movements resulting from urban tunnelling: predictions and effects. **Geological Society, London, Engineering Geology Special Publications**, v. 5, n. 1, p. 79–92, 1988. ISSN 0267-9914. Disponível em: <<https://sci-hub.do/10.1144/gsl.eng.1988.005.01.06>>. Acesso em: 23 abr. 2021. Citado 3 vezes nas páginas 14, 77 e 78.

REYNOLDS, P. **Collapse and flooding delay progress in Iceland**. 2015. 1 p. Disponível em: <<https://tunneltalk.com/Iceland-17Jun2015-Vadlaheidi-road-tunnel-progressive-face-collapse-and-flood-delays-progress.php>>. Acesso em: 11 mar. 2021. Citado 2 vezes nas páginas 12 e 46.

ROADTRAFFIC-TECHNOLOGY. **Nordhavnsvej (Northern Harbour Link) Project, Copenhagen - Verdict Traffic**. 2017. Disponível em: <<https://www.roadtraffic-technology.com/projects/nordhavnsvej-northern-harbour-link-project-copenhagen/>>. Acesso em: 09 mar. 2021. Citado 2 vezes nas páginas 11 e 41.

ROATEŞI, S. Finite Element Analysis for the Problem of Tunnel Excavation Successive Phases and Lining Mounting. In: EBRAHIMI, F. (Ed.). **Finite Element Analysis - New Trends and Developments**. InTech, 2012. cap. 14, p. 301–332. Disponível em: <<http://www.intechopen.com/books/finite-element-analysis-new-trends-and-developments/finite-element-analysis-for-the-problem-of-tunnel-excavation-successive-phases-and-lining-mounting>>. Acesso em: 29 mar. 2021. Citado na página 67.

\_\_\_\_\_. Analytical and numerical approach for tunnel face advance in a viscoplastic rock mass. **International Journal of Rock Mechanics and Mining Sciences**, v. 70, p. 123–132, 2014. ISSN 13651609. Disponível em: <<https://linkinghub.elsevier.com/retrieve/pii/S1365160914000987>>. Acesso em: 15 mar. 2021. Citado 2 vezes nas páginas 50 e 67.

**ROUSSET, G. Comportement Mecanique des Argiles Profondes: application au stockage de dechets radioactifs.** Tese (Doutorado) — L'Ecole Nationale des Ponts et Chaussees, 1988. Citado 13 vezes nas páginas 13, 15, 58, 60, 61, 62, 65, 66, 68, 101, 102, 103 e 104.

ROUSSET, G. Les sollicitations à long terme des revêtements des tunnels. **Revue Française de Géotechnique**, n. 53, p. 5–20, oct 1990. ISSN 0181-0529. Disponível em: <<http://www.geotechnique-journal.org/10.1051/geotech/1990053005>>. Acesso em: 30 mar. 2021. Citado na página 68.

SAKURAI, S. Approximate time-dependent analysis of tunnel support structure considering progress of tunnel face. **International Journal for Numerical and Analytical Methods in Geomechanics**, v. 2, n. 2, p. 159–175, 1978. ISSN 10969853. Disponível em: <<https://sci-hub.do/10.1002/nag.1610020205>>. Acesso em: 29 mar. 2021. Citado na página 67.

SALENÇON, J. Contraction quasi-statique d'une cavité symétrie sphérique ou cylindrique dans un milieu élastoplastique. In: **Annales des Ponts et Chaussées**. [S.l.: s.n.], 1969. p. 231–236. Citado na página 63.

**SCHMIDT, B. Settlements and ground movements associated with tunneling in soils.** Tese (Doutorado) — University of Illinois, 1969. Citado na página 77.

SCHOFIELD, A. N. Cambridge Geotechnical Centrifuge Operations. **Géotechnique**, v. 30, n. 3, p. 227–268, sep 1980. ISSN 0016-8505. Disponível em: <<http://www.icevirtuallibrary.com/doi/10.1680/geot.1980.30.3.227>>. Acesso em: 11 mar. 2021. Citado 2 vezes nas páginas 12 e 46.

SCHWEIGER, H. F.; MARCHER, T.; SCHÄDLICH, B. Application of a New Shotcrete Constitutive Model to the Numerical Analysis of a Tunnel Excavation. **Tunneling and Underground Construction**, American Society of Civil Engineers, p. 890–899, 2014. Disponível em: <<http://ascelibrary.org/doi/10.1061/9780784413449.088>>. Acesso em: 15 mar. 2021. Citado na página 50.

SEIDENFUSS, T. **Collapses in Tunnelling**. 194 p. Dissertação (Mestrado) — Foundation Engineering and Tunnelling, 2006. Disponível em: <<https://pt.scribd.com/document/369445627/Collapses-in-tunnelling-pdf>>. Acesso em: 15 mar. 2021. Citado na página 55.

SEKINE, Y.; ZHANG, F.; TASAKA, Y.; OHMORI, T.; KUROSE, H. Model tests and numerical analysis on the evaluation of long-term stability of existing tunnel. **Proceedings of the 17th International Conference on Soil Mechanics and Geotechnical Engineering**, p. 1848–1851, 2009. Disponível em: <<https://ebooks.iospress.nl/publication/30340>>. Acesso em: 29 mar. 2021. Citado na página 67.

SHAFIQU, Q. S. M.; TAHA, M. R.; CHIK, Z. H. (PDF) Finite element analysis of tunnels using the elastoplastic-viscoplastic bounding surface model. **Journal of Engineering and Applied Sciences**, v. 3, n. 3, p. 36–42, jun 2008. Disponível em: <[https://www.researchgate.net/publication/242375508\\_Finite\\_element\\_analysis\\_of\\_tunnels\\_using\\_the\\_elastoplastic-viscoplastic\\_bounding\\_surface\\_model](https://www.researchgate.net/publication/242375508_Finite_element_analysis_of_tunnels_using_the_elastoplastic-viscoplastic_bounding_surface_model)>. Acesso em: 30 mar. 2021. Citado 2 vezes nas páginas 68 e 69.

SHARAN, S. K. Elastic-brittle-plastic analysis of circular openings in Hoek-Brown media. **International Journal of Rock Mechanics and Mining Sciences**, Elsevier BV, v. 40, n. 6, p. 817–824, sep 2003. ISSN 13651609. Disponível em: <<https://www.sciencedirect.com/science/article/pii/S1365160903000406>>. Acesso em: 24 mar. 2021. Citado na página 63.

\_\_\_\_\_. Exact and approximate solutions for displacements around circular openings in elastic-brittle-plastic Hoek-Brown rock. **International Journal of Rock Mechanics and Mining Sciences**, Elsevier BV, v. 42, n. 4, p. 542–549, jun 2005. ISSN 13651609. Disponível em: <<https://www.sciencedirect.com/science/article/pii/S1365160905000274>>. Acesso em: 24 mar. 2021. Citado na página 63.

SHEOREY, P. A theory for In Situ stresses in isotropic and transverseley isotropic rock. **International Journal of Rock Mechanics and Mining Sciences and Geomechanics Abstracts**, Pergamon, v. 31, n. 1, p. 23–34, feb 1994. ISSN 01489062. Disponível em: <<https://www.sciencedirect.com/science/article/pii/0148906294923124>>. Acesso em: 19 abr. 2021. Citado na página 72.

SHI, J.; ORTIGAO, J. A. R.; BAI, J. MODULAR NEURAL NETWORKS FOR PREDICTING SETTLEMENTS DURING TUNNELING. **Journal of Geotechnical and Geoenvironmental Engineering**, v. 124, n. May, p. 389–395, 1998. Disponível em: <[https://sci-hub.do/10.1061/\(ASCE\)1090-0241\(1998\)124:5\(389\)](https://sci-hub.do/10.1061/(ASCE)1090-0241(1998)124:5(389))>. Acesso em: 18 mar. 2021. Citado na página 51.

SHRESTHA, P. K.; PANTHI, K. K. Assessment of the effect of stress anisotropy on tunnel deformation in the Kaligandaki project in the Nepal Himalaya. **Bulletin of Engineering Geology and the Environment**, Springer Verlag, v. 74, n. 3, p. 815–826, aug 2015. ISSN 1435-9529. Disponível em: <[https://www.researchgate.net/publication/264037936\\_Assessment\\_of\\_the\\_effect\\_of\\_stress\\_anisotropy\\_on\\_tunnel\\_deformation\\_in\\_the\\_Kaligandaki\\_project\\_in\\_the\\_Nepal\\_Himalaya](https://www.researchgate.net/publication/264037936_Assessment_of_the_effect_of_stress_anisotropy_on_tunnel_deformation_in_the_Kaligandaki_project_in_the_Nepal_Himalaya)>. Citado na página 75.

SIMO, J.; HUGHES, T. **Computational Inelasticity**. Springer, 1998. 392 p. ISBN 0387975209. Disponível em: <<https://link.springer.com/content/pdf/10.1007%2Fb98904.pdf>>. Acesso em: 23 jun. 2021. Citado na página 120.

SIMO, J.; TAYLOR, R. Consistent tangent operators for rate-independent elastoplasticity. **Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering**, v. 48, n. 1, p. 101–118, feb 1985. ISSN 00457825. Disponível em: <<https://sci-hub.do/10.1016/0045-7825%2885%2990070-2>>. Acesso em: 21 jun. 2021. Citado 2 vezes nas páginas 119 e 120.

SINGH, A.; MITCHELL, J. K. General Stress-Strain-Time Function for Soils. **Journal of the Soil Mechanics and Foundations Division**, American Society of Civil Engineers (ASCE), v. 94, n. 1, p. 21–46, jan 1968. ISSN 0044-7994. Disponível em: <<https://ascelibrary.org/doi/abs/10.1061/JSFEAQ.0001084>>. Citado na página 67.

SKRZYPEK, J. J. **Plasticity and creep. Theory, examples and problems**. [S.l.]: CRC Press, 1993. Citado na página 100.

SMITH, I. M.; GRIFFITHS, D. V.; MARGETTS, L. **Programming the finite element method**. 5 ed. ed. John Wiley and Sons, 2014. 684 p. ISBN 978-1-119-97334-8. Disponível em: <<http://libgen.rs/book/index.php?md5=0277B58B01F8C9A6016EFFD72102E356>>. Acesso em: 21 jun. 2021. Citado 3 vezes nas páginas 113, 124 e 129.

SOULEY, M.; ARMAND, G.; SU, K.; GHOREYCHI, M. Modeling the viscoplastic and damage behavior in deep argillaceous rocks. **Physics and Chemistry of the Earth, Parts A/B/C**, Elsevier Ltd, v. 36, n. 17-18, p. 1949–1959, jan 2011. ISSN 14747065. Disponível em: <<https://linkinghub.elsevier.com/retrieve/pii/S1474706511002890>>. Acesso em: 30 mar. 2021. Citado 2 vezes nas páginas 68 e 70.

SOUZA, R. L. **Risk Analysis for Tunneling Projects**. 589 p. Tese (Doutorado) — Massachusetts Institute of Technology, 2010. Disponível em: <<https://dspace.mit.edu/handle/1721.1/58282>>. Acesso em: 23 mar. 2021. Citado 3 vezes nas páginas 12, 55 e 56.

ŠPAČKOVÁ, O. **Risk management of tunnel construction projects**. 164 p. Tese (Doutorado) — Czech Technical University in Prague, Prague, jun 2012. Disponível em: <[https://mech.fsv.cvut.cz/wiki/images/7/7a/PhD\\_dissertation\\_Spackova\\_2012.pdf](https://mech.fsv.cvut.cz/wiki/images/7/7a/PhD_dissertation_Spackova_2012.pdf)>. Acesso em: 23 mar. 2021. Citado 3 vezes nas páginas 12, 55 e 56.

STALLMANN, M. **Verbrüche im Tunnelbau: Ursachen und Sanierung**. Stuttgart: VDM Verlag Dr. Müller, 2005. 128 p. ISBN 9783639306422. Citado na página 55.

STERPI, D.; GIODA, G. Visco-Plastic Behaviour around Advancing Tunnels in Squeezing Rock. **Rock Mechanics and Rock Engineering**, v. 42, n. 2, p. 319–339, apr 2009. ISSN 0723-2632. Disponível em: <<http://link.springer.com/10.1007/s00603-007-0137-8>>. Acesso em: 29 mar. 2021. Citado 2 vezes nas páginas 13 e 68.

SU, K. **Development of Hydro-mechanical models of the Callovo-Oxfordian Argillites for the Geological Disposal of Radioactive Waste (MODEX-REP): Final Report. Contract No. FIKW-CT-2000-00029**. [S.l.], 2007. 71 p. Disponível em: <[https://cordis.europa.eu/docs/projects/files/FIKW/FIKW-CT-2000-00029/92334551-6\\_en.pdf](https://cordis.europa.eu/docs/projects/files/FIKW/FIKW-CT-2000-00029/92334551-6_en.pdf)>. Acesso em: 31 mar. 2021. Citado na página 70.

SULEM, J.; PANET, M.; GUENOT, A. An analytical solution for time-dependent displacements in a circular tunnel. **International Journal of Rock Mechanics and Mining Sciences and**, v. 24, n. 3, p. 155–164, 1987. ISSN 01489062. Disponível em: <[https://doi.org/10.1016/0148-9062\(87\)90523-7](https://doi.org/10.1016/0148-9062(87)90523-7)>. Acesso em: 29 mar. 2021. Citado na página 67.

VILADKAR, M.; NOORZAEI, J.; GODBOLE, P. Convenient forms of yield criteria in elasto-plastic analysis of geological materials. **Computers and Structures**, v. 54, n. 2, p. 327–337, jan 1995. ISSN 00457949. Disponível em: <<https://sci-hub.do/10.1016/0045-7949%2894%29e0199-c>>. Acesso em: 09 jun. 2021. Citado 2 vezes nas páginas 92 e 95.

VRAKAS, A.; ANAGNOSTOU, G. A simple equation for obtaining finite strain solutions from small strain analyses of tunnels with very large convergences. **Géotechnique**, v. 65, n. 11, p. 936–944, aug 2015. ISSN 0016-8505. Disponível em: <<https://www.icevirtuallibrary.com/doi/pdf/10.1680/jgeot.15.P.036>>. Acesso em: 30 mar. 2021. Citado 2 vezes nas páginas 68 e 70.

WANG, H.; CHEN, X.; JIANG, M.; SONG, F.; WU, L. The analytical predictions on displacement and stress around shallow tunnels subjected to surcharge loadings. **Tunnelling and Underground Space Technology**, v. 71, n. March 2017, p. 403–427, jan 2018. ISSN 08867798. Disponível em: <<https://linkinghub.elsevier.com/retrieve/pii/S0886779817302262>>. Acesso em: 29 mar. 2021. Citado na página 67.

WANG, H. N.; UTILI, S.; JIANG, M. J. An analytical approach for the sequential excavation of axisymmetric lined tunnels in viscoelastic rock. **International Journal of Rock Mechanics and Mining Sciences**, Elsevier, v. 68, p. 85–106, 2014. ISSN 13651609. Disponível em: <<http://dx.doi.org/10.1016/j.ijrmms.2014.02.002>>. Acesso em: 29 mar. 2021. Citado na página 67.

WONG, H.; MORVAN, M.; DELERUYELLE, F.; LEO, C. J. Analytical study of mine closure behaviour in a poro-visco-elastic medium. **International Journal for Numerical and Analytical Methods in Geomechanics**, v. 32, n. 14, p. 1737–1761, oct 2008. ISSN 03639061. Disponível em: <<https://onlinelibrary.wiley.com/doi/abs/10.1002/nag.694>>. Acesso em: 26 mar. 2021. Citado na página 67.

WORD HIGHWAYS. **Improving tunneling method selection**. 2015. 1 p. Disponível em: <<https://www.worldhighways.com/wh10/feature/improving-tunneling-method-selection>>. Acesso em: 09 mar. 2021. Citado 2 vezes nas páginas 11 e 42.

XIN, W.; ZENG RONG, L. The FEM analysis of influence of metro construction and operation on the historic buildings considering soil-structure interaction. **2009 International Conference on Information Management, Innovation Management and Industrial Engineering, ICIII 2009**, v. 2, p. 585–588, 2009. Disponível em: <<https://sci-hub.do/10.1109/iciii.2009.299>>. Acesso em: 15 mar. 2021. Citado na página 50.

YEATES, J.; GEDDES, J. D. The response of buried pipelines to ground movements caused by tunneling in soil. In: **Ground Movements and Structures: Proc., 3rd Int. Conf. held at the University of Wales Institute of Science and Technology**. Plymouth: Pentech Press, 1985. p. 145–160. Citado 2 vezes nas páginas 14 e 77.

ZHONG, D.; HU, N.; CHENG, Z.; LÜ, P.; TONG, D. 3D finite element analysis of TBM water diversion tunnel segment coupled with seepage field. **Transactions of Tianjin University**, v. 22, n. 1, p. 35–42, feb 2016. ISSN 1006-4982. Disponível em: <<https://link.springer.com/content/pdf/10.1007/s12209-016-2527-z.pdf>>. Acesso em: 15 mar. 2021. Citado na página 50.

ZHOU, J.; CHEN, D.; WANG, D.; ZHANG, L.-L.; ZHANG, L.-M. Failure Probability of Transverse Surface Settlement Induced by EPB Shield Tunneling in Clayey Soils. **ASCE-ASME Journal of Risk and Uncertainty in Engineering Systems, Part A: Civil Engineering**, American Society of Civil Engineers (ASCE), v. 4, n. 3, p. 04018030, sep 2018. ISSN 2376-7642. Disponível em: <[https://www.researchgate.net/publication/326343499\\_Failure\\_Probability\\_of\\_Transverse\\_Surface\\_Settlement\\_Induced\\_by\\_EPB\\_Shield\\_Tunneling\\_in\\_Clayey\\_Soils](https://www.researchgate.net/publication/326343499_Failure_Probability_of_Transverse_Surface_Settlement_Induced_by_EPB_Shield_Tunneling_in_Clayey_Soils)>. Acesso em: 23 abr. 2021. Citado na página 78.

ZHU, Z. Evaluation of the range of horizontal stresses in the earth's upper crust by using a collinear crack model. **Journal of Applied Geophysics**, Elsevier B.V., v. 88, p. 114–121, jan 2013. ISSN 09269851. Disponível em: <<http://dx.doi.org/10.1016/j.jappgeo.2012.10.007>>. Acesso em: 19 abr. 2021. Citado na página 72.

ZIENKIEWICZ, O.; TAYLOR, R.; ZHU, J. **The Finite Element Method: its Basis and Fundamentals**. 6 ed. ed. Elsevier, 2005. 709 p. ISBN 9781856176330. Disponível em: <<http://libgen.rs/book/index.php?md5=FE045473539241D9A2690AD8966384BD>>. Acesso em: 16 jun. 2021. Citado 3 vezes nas páginas 105, 109 e 110.

ZIENKIEWICZ, O. C.; CORMEAU, I. C. Visco-plasticity-plasticity and creep in elastic solids-a unified numerical solution approach. **International Journal for Numerical Methods in Engineering**, v. 8, n. 4, p. 821–845, 1974. ISSN 00295981. Disponível em: <<https://sci-hub.do/10.1002/nme.1620080411>>. Acesso em: 09 jun. 2021. Citado 4 vezes nas páginas 15, 92, 101 e 124.

ZIENKIEWICZ, O. C.; VALLIAPPAN, S.; KING, I. P. Elasto-plastic solutions of engineering problems ‘initial stress’, finite element approach. **International Journal for Numerical Methods in Engineering**, v. 1, n. 1, p. 75–100, jan 1969. ISSN 0029-5981. Disponível em: <<https://sci-hub.do/10.1002/nme.1620010107>>. Acesso em: 23 jun. 2021. Citado na página 120.