

Universidade Federal do Rio Grande do Sul  
Escola de Engenharia  
Programa de Pós-Graduação em Engenharia Civil

**ANÁLISE COMPUTACIONAL DAS  
DEFORMAÇÕES EM TÚNEIS PROFUNDOS  
CONSIDERANDO O ACOPLAGAMENTO  
PLASTICIDADE-VISCOPLASTICIDADE**

**Felipe Pinto da Motta Quevedo**

Porto Alegre  
2021

FELIPE PINTO DA MOTTA QUEVEDO

**ANÁLISE COMPUTACIONAL DAS DEFORMAÇÕES EM  
TÚNEIS PROFUNDOS CONSIDERANDO O ACOPLAMENTO  
PLASTICIDADE-VISCOPLASTICIDADE**

Tese de Doutorado apresentada ao Programa de Pós-Graduação  
em Engenharia Civil da Universidade Federal do Rio Grande do  
Sul como parte dos requisitos para obtenção do título de Doutor  
em Engenharia.

Porto Alegre  
2021

**FELIPE PINTO DA MOTTA QUEVEDO**

**ANÁLISE COMPUTACIONAL DAS DEFORMAÇÕES EM  
TÚNEIS PROFUNDOS CONSIDERANDO O  
ACOPLAMENTO PLASTICIDADE-VISCOPLASTICIDADE**

Esta tese de doutorado foi julgada adequada para a obtenção do título de DOUTOR EM ENGENHARIA, na área de concentração Estruturas, e aprovada em sua forma final pelo professor orientador e pelo Programa de Pós-Graduação em Engenharia Civil da Universidade Federal do Rio Grande do Sul.

Porto Alegre, 10 de dezembro de 2021

Prof. Samir Maghous  
Dr. pela École Nationale des Ponts et Chaussées  
Orientador

Profa. Denise Bernaud Maghous  
Dra. pela École Nationale des Ponts et  
Chaussées  
Orientadora

Lucas Festugato  
Dr. pela Universidade Federal do Rio Grande do Sul  
Coordenador do PPGEC/UFRGS

**BANCA EXAMINADORA**

**Prof. Américo Campos Filho (UFRGS)**  
Dr. pela Escola Politécnica da Universidade de São Paulo

**Prof. Mauro de Vasconcellos Real (FURG)**  
Dr. pela Universidade Federal do Rio Grande do Sul

**Prof. Liércio André Isoldi (FURG)**  
Dr. pela Universidade Federal do Rio Grande do Sul

Este trabalho é dedicado a minha mãe que foi meu principal suporte esse tempo todo.

## **AGRADECIMENTOS**

Agradeço ao Conselho Nacional de Desenvolvimento Científico Tecnológico (CNPq) pela oportunidade de estudar com bolsa durante esse doutorado, sem a qual, não seria possível minha dedicação nesse período.

Agradeço à UFRGS pela infraestrutura cedida, por possibilitar acesso à biblioteca e a artigos internacionais gratuitamente, além da oportunidade de cursar esse doutorado na área de Estruturas com destacados colegas e professores.

Agradeço a todo o corpo administrativo do Programa de Pós-Graduação em Engenharia Civil (PPGEC) pelos serviços prestados.

Agradeço imensamente aos meus orientadores, Denise Bernaud e Samir Maghous. Obrigado por me acolherem como orientando, me apresentarem sobre o tema de túneis, por compartilharem seus conhecimentos, pelo apoio e fé que tiveram comigo durante o desenvolvimento deste trabalho.

Agradeço ao professor Inácio Benvegnu Morsch pelo apoio, ensinamentos, ajuda e os bons conselhos desses anos todos. Obrigado também pelos excelentes momentos de descontração e churrascos com a turma.

Agradeço ao professor Eduardo Bittencourt pelos ensinamentos de plasticidade e pela disponibilidade que teve ao me ajudar com diversas dúvidas.

Agradeço aos demais docentes do PPGEC e do Centro de Mecânica Aplicada Computacional (CEMACOM) que além de me acolherem como aluno me ensinaram muito durante todo o curso.

Agradeço também aos meus professores de graduação que muito me ensinaram sobre estruturas. Professores Luiz Alberto Segovia, Roberto Rios, Acir Loredo de Souza e Américo Campos Filho.

Agradeço aos colegas Augusto Bopsin Borges e Mateus Forcelini por compartilharem os seus conhecimentos de geotecnia comigo e, juntamente com o Rodrigo Pereira, por me ajudarem a fazer o modelo Latex do qual essa tese é feita.

Agradeço também aos demais orientandos dos meus orientadores que sempre compartilharam um pouco de seus trabalhos, suas dissertações e teses comigo: Alex La Flor, Betina Jensen, Caio Cesar Cardoso, Evandro Pandia Cayro, Tiago Wagner Dada e Wallace Ferrão.

Agradeço aos demais colegas que me foram ótimas companhias durante esses anos todos e me enchem de saudades e boas lembranças. Obrigado Bárbara Chagas, Bárbara Sánchez, Bianca Funk, Bibiana Rossato, Bruna Spricigo, Cassiele Birk, Cássio Barros de Aguiar, Dani Airão, Daniel Matos, Eduardo Braun, Eduardo Gibbon Rosa, Eduardo Titello, Gabriela Bianchin (Gabi), Giancarlo Machado, Graciane Azevedo, Guilherme Bueno, Guilherme Fornel, Gustavo Ribeiro, Igor Souza Hoffman, Jose Rafael Yepez Aguirre (Chepel), Kellyn Pufal, Livio Pires, Lúcia Sangali, Marcela Palhares Miranda, Mateus Tonin, Matheus Benincá, Matheus Wanglon, Miguel Aguirre (Miguelito), Monique Wesz Vogado, Nilceane Lisboa, Paulo Baumbach, Raiza Guimarães, Rodrigo Benites Mendes, Rosangel Rojas Aguero (Rosi), Samuel Bandeira, Sandro Pieta Troian e Tenison Freire.

Agradeço ao suporte técnico da *Engineering Simulation and Scientific Software* (ESSS) pela assistência técnica frente às dúvidas relacionadas à utilização e customização do *software ANSYS*.

Agradeço ao pessoal da Estadio 3, meus ex-companheiros e companheiras de trabalho, não só pelo que me ensinaram, mas também pelo incentivo e apoio na minha decisão de seguir esse período acadêmico na minha vida.

Agradeço ao meu amigo, Rubens Salabarry, que mesmo distante esteve sempre presente e me ajudou na revisão do texto. Agradeço também a companhia da minha amiga Fernanda Ribas Tweedy que foi minha parceira de bike e de conversas filosóficas. Também aos meus amigos sempre presentes, Filipe Almeida, Jhonatas Nunes (Pedrão), Josias Soria Godoy, Leandro Rosito, Márcio Morgara e Piter Thomaz.

Agradeço a minha mãe Luzia e minha irmã Rita por estarem sempre perto de mim, confiando e incentivando os meus estudos, apesar de todas as dificuldades.

Em algum lugar, algo incrível está esperando para ser descoberto.

*Carl Sagan*

## RESUMO

**QUEVEDO, F. P. M. Análise Computacional das Deformações em Túneis Profundos considerando o Acoplamento Plasticidade-Viscoplasticidade.** 2021. 231p. Tese (Doutorado em Engenharia) – Programa de Pós-Graduação em Engenharia Civil, Universidade Federal do Rio Grande do Sul, Porto Alegre.

O projeto e verificação estrutural de túneis profundos envolvem diversos parâmetros geotécnicos bem como a necessidade de prever a convergência (fechamento) e a estabilidade da seção do túnel. Contudo, o campo de deformações e tensões ao redor da cavidade depende de diversos fatores inter-relacionados, tais como, a profundidade, a geometria da seção, a anisotropia das tensões *in situ*, a heterogeneidade do maciço, o processo construtivo e a interação com o revestimento. Somado a essa complexidade a reologia do maciço é um fator crucial. Um aspecto comum na problemática de túneis é o comportamento diferido ao longo do tempo. O objetivo principal dessa tese foi formular, programar e validar, no contexto dos elementos finitos em estado plano de deformações, axissimetria e tridimensional, um modelo constitutivo acoplado capaz de simular as deformações instantâneas (elásticas ou elastoplásticas) juntamente com o comportamento diferido (viscoso). Para a parcela instantânea foi adotado um modelo elastoplástico de Drucker-Prager com lei de endurecimento/amolecimento governada pela variável interna coesiva. No comportamento diferido foi utilizado um modelo viscoplástico conforme a teoria da sobretensão de Perzyna com a mesma superfície de elastoplasticidade, porém perfeita. Portanto, é apresentado um esquema de integração numérica para lidar, de forma geral, com o comportamento acoplado conjuntamente com suas variáveis internas. O modelo foi implementado no *software ANSYS* 2021R1 utilizando o seu recurso programável *Usermat*. O processo de escavação e colocação do revestimento é simulado através da ativação e desativação dos elementos finitos. Verificações e validações com soluções analíticas e numéricas demonstraram que modelo desenvolvido funcionou adequadamente. Diferenças da ordem de 10% a 30% foram encontradas na comparação desse modelo acoplado com o modelo apenas viscoplástico. Também foi estudado a influência desse modelo em seções transversais elípticas demonstrando a sua importância quando ocorrem plastificações no entorno do maciço.

**Palavras-chave:** *túneis profundos, elastoplasticidade, viscoplasticidade, método dos elementos finitos, leis constitutivas.*

## ABSTRACT

QUEVEDO, F. P. M. **Computational Analysis of Deformations in Deep Tunnels considering Plasticity-Viscoplastcity Coupling.** 2021. 231p. Thesis (Doctor in Engineering) – Postgraduate Program in Civil Engineering, Federal University of Rio Grande do Sul, Porto Alegre.

The design and structural verification of deep tunnels involves several geotechnical parameters as well as the need to predict the convergence (closure) and stability of the tunnel cross-section. However, the field of deformations and stresses around the cavity depends on several interrelated factors, such as depth, cross-section geometry, anisotropy of stresses *in situ*, rockmass heterogeneity, construction process, and lining interaction. Added to this complexity, the rheology of the rockmassif is a crucial factor. A common aspect in the problem of tunnels is the long-term behavior. The main objective of this thesis was to formulate, program and validate, in the context of the finite elements method in-plane, axisymmetry, and three-dimensional state strain, a coupled constitutive model capable of simulating instantaneous strains (elastic or elastoplastic) together with long-term (viscous) behavior. For the instantaneous behavior, an elastoplastic Drucker-Prager model with hardening/softening law governed by the cohesive internal variable was adopted. In the time-dependent behavior, a viscoplastic model was used according to the Perzyna overstress theory with the same elastoplasticity surface, however perfect. Therefore, a numerical integration scheme is presented to deal, in general, with the behavior coupled together with its internal variables. The model was implemented in software ANSYS 2021R1 using its programmable feature Usermat. The process of excavating and placing the lining is simulated by activating and deactivating the finite elements. Verifications and validations with analytical and numerical solutions showed that the developed model worked properly. Differences in the order of 10% to 30% were found when comparing this coupled model with the viscoplastic-only model. The influence of this model on an elliptical cross-section was also studied, demonstrating its importance when plasticization occurs in the rockmass.

**Keywords:** *deep tunnels. elastoplasticity. viscoplasticity. finite element method. constitutive laws.*

## LISTA DE FIGURAS

Figura 1.1 – Redução da seção transversal do Túnel de Base Lyon Turin na fronteira entre França e Itália (fonte: Barla, Bonini e Debernardi (2010, p. 41)) . . . . .	37
Figura 1.2 – Ruptura do suporte (perfil de aço) em uma mina de carvão na China (fonte: Manchao et al. (2015, p. 192)) . . . . .	37
Figura 2.1 – Organograma das etapas da pesquisa . . . . .	43
Figura 3.1 – Métodos de escavação de túneis . . . . .	44
Figura 3.2 – (a) <i>Cut and Cover</i> e (b) <i>Cover and Cut</i> (adaptado de: FEDERAL HIGHWAY ADMINISTRATION (U.S.) (2009, p. 5-2)) . . . . .	45
Figura 3.3 – Etapa de execução pelo método de vala recoberta direta no projeto <i>Nordhavnsvej</i> , em Compenhague, Dinamarca (fonte: ROADTRAFFIC-TECHNOLOGY (2017, p. 1)) . . . . .	45
Figura 3.4 – Superior à esquerda: escavadeiras (fonte: Pierrat (2014, p. 1)); superior à direita: escarificadora; inferior à esquerda: escavadeira rotativa (fonte: Mitterndorfer (2013, p. 1)) e inferior à direita: martelo hidráulico (fonte: WORD HIGHWAYS (2015, p. 1)) . . . . .	46
Figura 3.5 – Sequência executiva do método de construção por desmonte de rocha (adaptado de: Heinio (1999, p. 215)) . . . . .	47
Figura 3.6 – Superior à esquerda: perfuração; inferior à esquerda: instalação das cargas; à direita: frente de escavação após detonação (fonte: Grad (2013, p. 1)) . .	47
Figura 3.7 – Representação 3D de uma tuneladora (adaptado de: Chapman, Metje e Stärk (2018, p. 151)) . . . . .	48
Figura 3.8 – Ilustração do método de cravação de tubos sob um canal (adaptado de: Chapman, Metje e Stärk (2018, p. 227)) . . . . .	49
Figura 3.9 – À esquerda: vista de cima de um poço de macacos hidráulicos com a descida da TBM; à direita: vista frontal do túnel (fonte: Chapman, Metje e Stärk (2018, p. 227)) . . . . .	49

Figura 3.10 – À esquerda, simulação da falha na face de um túnel (fonte: Schofield (1980, p. 245)); à direita, o colapso progressivo da face do túnel rodoviário <i>Vadlaheidi</i> na Islândia (fonte: Reynolds (2015, p. 1)) . . . . .	50
Figura 3.11 – Ilustração do revestimento e elementos internos de um túnel rodoviário (adaptado de: DEPARTAMENTO DE ESTRADAS E RODAGEM (SÃO PAULO) (2005, p. 20)) . . . . .	51
Figura 3.12 – Ilustração de alguns elementos de pré-suporte e revestimento (adaptado de: FEDERAL HIGHWAY ADMINISTRATION (U.S.) (2009, p. 9-14)) . . . . .	52
Figura 4.1 – Ilustração do arqueamento das tensões principais (adaptado de: França (2006, p. 10-11)) . . . . .	57
Figura 4.2 – Campo vetorial de deslocamentos no maciço durante a escavação de um túnel (adaptado de: França (2006, p. 12)) . . . . .	58
Figura 4.3 – Ilustração das medidas geométricas que compõe a convergência de uma seção circular: a) corte transversal, b) corte longitudinal . . . . .	58
Figura 4.4 – Medidas da convergência em quatro direções de uma seção não circular (adaptado de: Panet (1995, p. 8)) . . . . .	59
Figura 4.5 – Perfil de convergências próximo à frente de escavação (adaptado de: Hanafy e Emery (1980) <i>apud</i> Couto (2011, p. 42)) . . . . .	59
Figura 4.6 – Número de incidentes em quatro banco de dados discriminados por autor e método de escavação (adaptado de: Špačková (2012, p. 19)) . . . . .	60
Figura 4.7 – Distribuição de incidentes de acordo com nove tipologias (adaptado de: Sousa (2010, p. 82)) . . . . .	61
Figura 4.8 – Mecanismo de ruptura por <i>Spalling</i> de um comprimento $L_s$ junto à seção do túnel: detalhamento do crescimento das fissuras e flambagem de uma profundidade $h_s$ da rocha no contorno da seção (adaptado de: Germanovich e Dyskin (2000, p. 267)) . . . . .	62
Figura 4.9 – À esquerda uma seção remanescente após moderada fragmentação e quebra em um túnel escavado com TBM e à direita uma seção em que parte do contorno apresentou instabilidade (flambagem) em um túnel escavado de forma não mecanizada (fonte: Diederichs (2007, p. 1084)) . . . . .	62

Figura 4.10 – Evolução da convergência do túnel Fréjus (adaptado de: Lunardi (1980, p. 17)) . . . . .	64
Figura 4.11 – Evolução do fechamento da seção (convergência) na galeria GED do laboratório <i>Meuse/Haute-Marne</i> (adaptado de: Guayacán-Carrillo et al. (2016, p. 103)) . . . . .	64
Figura 4.12 – Ensaio triaxial com medição da variação do volume para o caso de um maciço argiloso rígido (adaptado de: Rousset (1988, p. 35)) . . . . .	65
Figura 4.13 – Ensaio triaxial com medição da variação do volume para o caso de um maciço argiloso dúctil (adaptado de: Rousset (1988, p. 35)) . . . . .	66
Figura 4.14 – Deslocamentos e tensões no entorno de um maciço submetido à pressão geostática-hidrostática $p_\infty$ e pressão interna $p_i$ no interior da seção do túnel. À esquerda, maciço elástico e à direita, elastoplástico. . . . .	68
Figura 4.15 – Curva característica em um ensaio de fluência com os três estágios de comportamento (adaptado de: Costa (1984, p. 107)) . . . . .	69
Figura 4.16 – Ensaio triaxial de fluência da Argila de Boom (adaptado de: Rousset (1988, p. 42)) . . . . .	70
Figura 4.17 – Evolução da convergência $U$ no tempo $t$ em função do avanço da escavação $x$ (adaptado de: Panet (1995, p. 12)) . . . . .	71
Figura 4.18 – Perfil de convergências, em análises numéricas axissimétricas com maciço elástico (EL), elastoplástico (EP), viscoelástico (VE), viscoplástico com fluência no regime secundário (VP) e em regime terciário (VP3), todos na ausência de revestimento (adaptado de: Sterpi e Gioda (2009, p. 329)) . . . . .	73
Figura 4.19 – Trajetória das tensões principais e linhas de isotensão, da maior e menor tensão principal, para seção circular (à esquerda) e ferradura (à direita) em condições geostáticas hidrostáticas (adaptado de: Hoek e Brown (1980, p. 469, 484)) . . . . .	76
Figura 4.20 – a) tensões verticais e b) razão entre a tensão horizontal e vertical (coeficiente de empuxo $K$ ) (adaptado de: Hoek e Brown (1980, p. 99-100)) . . . . .	77
Figura 4.21 – Princípio para se desconsiderar a variação da tensão vertical na região próxima ao túnel (adaptado de: Benamar (1996, p. 8)) . . . . .	78

Figura 4.22 – Trajetória das tensões principais e linhas de isotensão da maior e menor tensão principal para seção circular (à esquerda) e ferradura (à direita) considerando $K = 0$ (adaptado de: Hoek e Brown (1980, p. 468,483)) . . . . .	79
Figura 4.23 – Relação entre o estado de tensões iniciais e os modos de falha, onde $q_0$ é a resistência à compressão do maciço (adaptado de: Detournay e St. John (1988, p. 121)) . . . . .	80
Figura 4.24 – Modos de deformações em túneis superficiais de seção circular (adaptado de: Pinto e Whittle (2014, p. 4)) . . . . .	81
Figura 4.25 – Representação tridimensional da bacia de assentamento superficial durante a construção de um túnel superficial (adaptado de: Yeates e Geddes (1985) <i>apud</i> Rankin (1988, p. 80)) . . . . .	82
Figura 4.26 – Perfil idealizado de assentamento transversal com distribuição normal (adaptado de: O'Reilly e New (1982) <i>apud</i> Rankin (1988, p. 80)) . . . . .	83
Figura 4.27 – Perfil de tensões verticais e de convergências ao longo de uma linha longitudinal situada no teto do túnel (adaptado de: Eisenstein, Heinz e Negro (1984) <i>apud</i> Couto (2011, p. 41)) . . . . .	84
Figura 4.28 – Perfil de convergência em função da velocidade adimensional de avanço no final da construção do túnel (adaptado de: Bernaud (1991, p. 214)) . . . . .	85
Figura 4.29 – Perfil de convergência em função da velocidade de construção admensionalizada no final da construção do túnel (adaptado de: Bernaud (1991, p. 214)) . . . . .	85
Figura 4.30 – Método da Convergência-Confinamento (adaptado de: Bernaud, Benamar e Rousset (1994, p. 6)) . . . . .	88
Figura 4.31 – Influência da rigidez do revestimento no perfil de convergências do túnel e no parâmetro $U_0$ (adaptado de: Bernaud e Rousset (1992, p. 13)) . . . . .	89
Figura 5.1 – Subsistema material $\Omega'$ no interior de um sistema material $\Omega$ submetido a um campo de forças de corpo . . . . .	90
Figura 5.2 – Sistema material $\Omega'$ com condição de contorno $\underline{T}^d$ imposta na fronteira $S_T$	91
Figura 5.3 – Natureza Euleriana do campo de tensões . . . . .	92
Figura 5.4 – Domínio genérico plasticamente admissível $\Gamma$ no espaço das tensões principais	96

Figura 5.5 – Funções de escoamento de a) Drucker-Prager e b) Mohr-Coulomb (adaptado de: Zienkiewicz e Cormeau (1974, p. 824)) . . . . .	97
Figura 5.6 – Representação no plano desviador da aproximação da superfície de Mohr-Coulomb pela superfície de Drucker-Prager (adaptado de: de SOUZA NETO; PERI; OWEN, 2008, p. 169 e BERNAUD, 1991, p. 89) . . . . .	98
Figura 5.7 – Representação no plano desviador da aproximação da superfície de Tresca pela superfície de von-Mises (adaptado de: de SOUZA NETO; PERI; OWEN, 2008, p. 159, 164) . . . . .	99
Figura 5.8 – Representação geométrica do vetor de fluxo em plasticidade associada (adaptado de: Chen e Han (1988, p. 182)) . . . . .	100
Figura 5.9 – Representação dos tipos de endurecimento no plano desviador e na curva tensão-deformação: a) elastoplasticidade perfeita, b) endurecimento isotrópico e c) endurecimento cinemático (adaptado de: de SOUZA NETO; PERI; OWEN, 2008, p. 178, 179, 186) . . . . .	102
Figura 5.10 – Função linear definida por partes para representar o endurecimento/amolecimento através do parâmetro coesivo (adaptado de: Potts e Zdravkovic (1999, p. 158))	103
Figura 5.11 – Representação reológica do modelo elastoplástico-viscoplástico (adaptado de: Rousset (1988, p. 220)) . . . . .	107
Figura 5.12 – Leis de endurecimento e amolecimento para a parcela elastoplástica (à esquerda) e viscoplástica (à direita) (adaptado de: Rousset (1988, p. 220))	108
Figura 5.13 – Domínios e superfícies do modelo elastoplástico-viscoplástico (adaptado de: Debernardi e Barla (2009, p. 263)) . . . . .	109
Figura 5.14 – Resposta do sistema a uma solicitação $\dot{\epsilon} = \text{const.}$ Ruptura frágil (à esquerda) e ruptura dúctil (à direita) (adaptado de: Rousset (1988, p. 221)) . . . . .	109
Figura 6.1 – Discretização de um domínio genérico em elementos finitos (adaptado de: de Souza (2003, p. 1-2)) . . . . .	113
Figura 6.2 – Diagrama de corpo livre de um elemento finito (adaptado de: Lizarza (2011, p. 19)) . . . . .	115
Figura 6.3 – Funções de interpolação, pesos e coordenadas dos pontos de Gauss para o elemento quadrilátero linear isoparamétrico PLANE182 (adaptado de: ANSYS Inc (2018b, p. 334, 369-370)) . . . . .	116

Figura 6.4 – Funções de interpolação, pesos e coordenadas dos pontos de Gauss para o elemento hexaedro trilinear isoparamétrico SOLID185 (adaptado de: ANSYS Inc (2018b, p. 345, 369-370)) . . . . .	117
Figura 6.5 – Ilustração das iterações do método de Newton-Raphson (adaptado de: Chen e Han (1988, p. 301)) . . . . .	122
Figura 6.6 – Fluxograma do método de Newton-Raphson para solução do sistema de equações globais não lineares . . . . .	124
Figura 6.7 – Ilustração do algoritmo de retorno mapeado genérico com $k$ iterações locais de Newton-Raphson: a) totalmente implícito e b) semi-implícito. . . . .	127
Figura 6.8 – Algoritmo de integração para elastoplasticidade utilizando um esquema de Euler semi-implícito (omitindo o índice $n+1$ ). . . . .	129
Figura 6.9 – Algoritmo de integração para viscoplasticidade utilizando um esquema de Euler semi-implícito ou totalmente explícito (quando $\Theta = 0$ ) sem endurecimento/amolecimento (omitindo o índice $n + 1$ ). . . . .	133
Figura 6.10 – Algoritmo de integração do modelo constitutivo elastoplástico-viscoplástico (omitindo o índice $n+1$ ). . . . .	134
Figura 6.11 – Representação do domínio $\Omega$ a ser discretizado . . . . .	137
Figura 6.12 – Domínio, parâmetros geométricos, condições de contorno e malha para o modelo em estado plano de deformações . . . . .	138
Figura 6.13 – Domínio, parâmetros geométricos, condições de contorno e malha para o modelo tridimensional . . . . .	140
Figura 6.14 – Domínio, parâmetros geométricos, condições de contorno e malha para o modelo axissimétrico . . . . .	142
Figura 7.1 – Domínio e discretização de um ensaio triaxial com modelo 3D, EPD e AXI	147
Figura 7.2 – Detalhe da determinação dos valores dos parâmetros para simulação do ensaio	148
Figura 7.3 – Resultado da análise para o ensaio triaxial . . . . .	148
Figura 7.4 – Variação da coesão: I - trecho de endurecimento linear e II - comportamento perfeitamente plástico (Bernaud e Quevedo (2020, p. 4)) . . . . .	149
Figura 7.5 – Solução numérica considerando elastoplasticidade com endurecimento . .	150

Figura 7.6 – Verificação solução numérica em elasticidade sem revestimento - $E = 1000$ MPa . . . . .	151
Figura 7.7 – Verificação solução numérica em elasticidade sem revestimento - $E = 5000$ MPa . . . . .	152
Figura 7.8 – Verificação solução numérica em elasticidade com revestimento - $E = 1000$ MPa, $E_{rev} = 30000$ MPa, $d_0 = 0$ . . . . .	153
Figura 7.9 – Verificação solução numérica em elasticidade com revestimento - $E = 1000$ MPa, $E_{rev} = 30000$ MPa, $d_0 = 4L_p$ . . . . .	154
Figura 7.10 – Verificação solução numérica em elastoplasticidade sem revestimento - $E = 1000$ MPa, $c_i = c_p = c_r = \sqrt{3}/2$ MPa . . . . .	155
Figura 7.11 – Verificação solução numérica em elastoplasticidade sem revestimento - $E = 1000$ MPa, $c_i = c_p = c_r = 3\sqrt{3}/2$ MPa . . . . .	156
Figura 7.12 – Verificação solução numérica elastoplasticidade sem revestimento $E = 1000$ MPa, $c_i = c_p = c_r = \sqrt{3}/2$ MPa, $\phi=15^\circ$ e $\psi=0^\circ$ . . . . .	157
Figura 7.13 – Verificação solução numérica em elastoplasticidade com revestimento - $E = 1000$ MPa, $E_{rev} = 30000$ MPa, $d_0 = 0$ , $c_i = c_p = c_r = \sqrt{3}/2$ MPa . . . . .	158
Figura 7.14 – Verificação solução numérica em elastoplasticidade com revestimento - $E = 1000$ MPa, $c_i = c_p = c_r = \sqrt{3}/2$ MPa, $V_p = 5$ m/dia . . . . .	159
Figura 7.15 – Verificação solução numérica em viscoplasticidade com revestimento - $E = 1000$ MPa, $c_i = c_p = c_r = \sqrt{3}/2$ MPa, $V_p = 10$ m/dia . . . . .	160
Figura 7.16 – Verificação solução numérica em viscoplasticidade com revestimento - $E = 1000$ MPa, $c_i = c_p = c_r = \sqrt{3}/2$ MPa, $E_{rev} = 3000$ MPa, $d_0 = 2L_p$ , $V_p = 5$ m/dia . . . . .	161
Figura 7.17 – Perfis de convergências no final da escavação para os diversos comportamentos implementados, considerando os parâmetros físicos do maciço de acordo com Piepi (1995) com $E = 1500$ MPa . . . . .	163
Figura 7.18 – Perfis de convergências no longo prazo para os diversos comportamentos implementados, considerando os parâmetros físicos do maciço de acordo com Piepi (1995) com $E = 1500$ MPa . . . . .	164

Figura 7.19 – Perfis de convergências no final da escavação para os diversos comportamentos implementados, considerando os parâmetros físicos do maciço de acordo com Piepi (1995) com $E = 2000$ MPa . . . . .	164
Figura 7.20 – Perfil de convergências no longo prazo para os diversos comportamentos implementados, considerando os parâmetros físicos do maciço de acordo com Piepi (1995) com $E = 2000$ MPa . . . . .	165
Figura 7.21 – Campo de deslocamentos no longo prazo para o caso elastoplástico-viscoplástico com $E = 1500$ MPa e $V_p = 0,1$ m/dia . . . . .	165
Figura 7.22 – Campo de deformações plásticas e viscosas no longo prazo para o caso elastoplástico-viscoplástico com $E = 1500$ MPa e $V_p = 0,1$ m/dia . . . . .	166
Figura 7.23 – Verificação com a solução de Piepi (1995) do modelo viscoplástico com revestimento . . . . .	167
Figura 7.24 – Verificação com a solução de Piepi (1995) do modelo elastoplástico-viscoplástico com revestimento . . . . .	167
Figura 7.25 – Curva tensão <i>versus</i> deformação obtido pelo modelo com amolecimento .	168
Figura 7.26 – Efeito do amolecimento no perfil de convergências para o caso elastoplástico	169
Figura 7.27 – Efeito do amolecimento no perfil de convergências para o caso elastoplástico-viscoplástico . . . . .	169
Figura 7.28 – Convergência no final da construção <i>versus</i> módulo de elasticidade do revestimento para uma distância não revestida $d_0 = 0$ . . . . .	171
Figura 7.29 – Convergência no longo prazo <i>versus</i> módulo de elasticidade do revestimento para uma distância não revestida $d_0 = 0$ . . . . .	171
Figura 7.30 – Convergência no final da construção <i>versus</i> módulo de elasticidade do revestimento para uma distância não revestida $d_0 = 4L_p$ . . . . .	172
Figura 7.31 – Convergência no longo prazo <i>versus</i> módulo de elasticidade do revestimento para uma distância não revestida $d_0 = 4L_p$ . . . . .	172
Figura 7.32 – Convergências na direção $x$ <i>versus</i> razão de aspecto da seção sem revestimento	173
Figura 7.33 – Convergências na direção $x$ <i>versus</i> razão de aspecto da seção com revestimento	174
Figura 7.34 – Convergências na direção $y$ <i>versus</i> razão de aspecto da seção sem revestimento	175

Figura 7.35 – Convergências na direção  $y$  versus razão de aspecto da seção com revestimento 175

Figura 7.36 – Campo de deformações equivalentes para o modelo (VP) e (EPVP), sem revestimento, com razão de aspecto 2 e no longo prazo . . . . . 176

## **LISTA DE TABELAS**

Tabela 6.1 – Parâmetros para a construção da malha em estado plano de deformações da Figura 6.12 . . . . .	139
Tabela 6.2 – Parâmetros adicionais a malha EPD para a malha em estado tridimensional de deformações da Figura 6.13 . . . . .	141
Tabela 6.3 – Parâmetros para a malha em estado axissimétrico Figura 6.14 . . . . .	143
Tabela 6.4 – Tamanho do sistema para cada modelo . . . . .	144
Tabela 6.5 – Parâmetros para o modelo constitutivo elastoplástico-viscoplástico . . . . .	145
Tabela 7.1 – Razão entre as convergências ao equilíbrio do modelo (EPVP) com (VP) .	177
Tabela 7.2 – Razão entre as convergências no equilíbrio de longo prazo pelo curto prazo do modelo (VP) e (EPVP) . . . . .	177

## LISTA DE ABREVIATURAS E SIGLAS

3D	Estado tridimensional de deformações
AECL	<i>Atomic Energy of Canada Limited</i>
ANSYS	<i>Analysis System Software</i>
APDL	<i>ANSYS Parametric Desing Lenguage</i>
AXI	Estado axissimétrico de deformações
CF	Confinamento
CP	Curto Prazo
CPPM	<i>Closest Point Projection Method</i>
CV	Convergência
CV-CF	Método Convergência-Confinamento
DP	Drucker-Prager
EL	Comportamento elástico
EP	Comportamento elastoplástico
EPVP	Comportamento elastoplástico-viscoplástico
EPD	Estado plano de deformações
FLAC	<i>Fast Lagrangian Analysis of Continua Software</i>
FORTRAN	<i>Formula Translation</i>
GEOMECH91	<i>Geomechanic Software</i>
HADES	<i>High Activity Disposal Experimental Site</i>
HPC	<i>High Performance Computing</i>
HPP	Hipótese das Pequenas Perturbações
HTI	Hipótese das Transformações Infinitesimais
HSE	<i>Health and Safety Executive</i>
ICCG	<i>Incomplete Cholesky Conjugate Gradient</i>

JCG	<i>Jacobi Conjugate Gradient</i>
LP	Longo Prazo
MC	Mohr-Coulomb
MPI	<i>Message Passing Interface</i>
NATM	<i>New Austrian Tunneling Method</i>
NIM	<i>New Implicit Method</i>
NR	Newton-Raphson
PCG	<i>Preconditioned Conjugate Gradient</i>
SHELVIP	<i>Stress Hardening Elastic Viscous Plastic</i>
SMP	<i>Shared-Memory Parallel</i>
SPARSE	<i>Sparse Direct Solver</i>
TBM	<i>Tunnel Boring Machine</i>
TR	Tresca
VM	von-Mises
VP	Comportamento elastoviscoplástico

## LISTA DE SÍMBOLOS

**Latino minúsculo:**

$c$	Coesão;
$c_1, c_2, c_3$	Constantes para determinar o vetor de fluxo;
$c_{TR}$	Coesão considerando superfície de escoamento de Tresca;
$c_{VM}$	Coesão considerando superfície de escoamento de von-Mises;
$c_0$	Coesão residual no modelo elastoplástico;
$c_1$	Coesão para o modelo viscoplástico;
$d_0$	Distância não revestida que acompanha a frente de escavação;
$d_0^*$	Distância não revestida adimensional que acompanha a frente de escavação;
$e_{rev}$	Espessura do revestimento;
$\underline{e}$	Tensor de deformações de Green-Lagrange;
$\underline{\underline{e}}_1, \underline{\underline{e}}_2, \underline{\underline{e}}_3$	Vetores ortonormais da base que define o espaço $\mathbb{R}^3$ ;
$f$	Função de escoamento;
$f^p$	Função de escoamento plástica;
$f^{vp}$	Função de escoamento viscoplástica;
$\underline{f}_\sigma$	Vetor de derivadas da função de escoamento com relação as tensões (notação de Voigt);
$\underline{f}_q$	Vetor de derivadas da função de escoamento com relação as forças associadas (notação de Voigt);
$f_0$	Parâmetro de tensão no modelo viscoplástico;
$\underline{f}$	Campo de acelerações referente às forças de corpo;
$g$	Função potencial;
$g^p$	Função potencial plástica;
$g^{vp}$	Função potencial viscoplástica;
$\underline{\underline{g}}_1, \underline{\underline{g}}_2, \underline{\underline{g}}_3$	Gradientes para determinar o vetor de fluxo;

$\underline{g}_1, \underline{g}_2, \underline{g}_3$	Gradientes para determinar o vetor de fluxo (notação de Voigt);
$\underline{\underline{g}_\sigma}$	Vetor de fluxo;
$\underline{g}_\sigma$	Vetor de fluxo (notação de Voigt);
$\underline{h}_q$	Vetor que contém o conjunto dos módulos de endurecimento para as forças associadas;
$h_s$	Profundidade do fenômeno de <i>Spalling</i> no perímetro do túnel;
$i$	Contador de iterações de equilíbrio;
$i_p$	Ponto de integração;
$i_p$	Contador do passo de escavação;
$k$	Parâmetro da superfície de Drucker-Prager;
$k_{cut}$	Indica que é necessário dividir o subpasso pela metade;
$l_0$	Dimensão característica para hipótese das pequenas perturbações;
$l_a, l_b, l_c$	Dimensão do modelo de ensaio triaxial;
$mL_1$	Razão entre o primeiro e último elemento além da região de refinamento próximo ao túnel;
$mL_{x_1}$	Razão entre o primeiro e último elemento na largura do domínio além da região de refinamento próxima ao túnel;
$mL_{y_2}$	Razão entre o primeiro e último elemento na altura do domínio além da região de refinamento próxima ao túnel;
$mL_{z_2}$	Razão entre o primeiro e último elemento no trecho não escavado do modelo 3D;
$mR_1$	Razão entre o primeiro e último elemento na região de refinamento próximo ao túnel;
$n$	Parâmetro adimensional que dá a forma potencial na lei viscoplastica;
$n$	Contador de subpassos;
$n_e$	Número de elementos;
$nL_1$	Número de elementos além da região de refinamento próximo ao túnel do domínio 3D;

$nL_{x_1}$	Número de elementos na largura do domínio além da região de refinamento próxima ao túnel;
$nL_{y_2}$	Número de elementos na altura do domínio além da região de refinamento próxima ao túnel;
$nL_{z_2}$	Número de elementos no trecho não escavado do domínio 3D;
$n_p$	Número de pontos de integração;
$n_p$	Número de passos de escavação;
$n_{p_1}$	Número de passos na primeira escavação;
$nR_i$	Número de elementos na direção ortoradial ao longo de $R_i$ ;
$n_{rev}$	Número de elementos na espessura do revestimento;
$nr_{max}$	Límite de iterações de Newton-Raphson locais no algoritmo elastoplástico;
$nR_1$	Número de elementos na região de refinamento próximo ao túnel;
$nR_v$	Número de elementos na altura da seção escavada;
$nR_h$	Número de elementos na largura da seção escavada;
$n_{eqit}$	Límite de iterações de equilíbrio por subpasso;
$p$	Pressão hidrostática;
$p_{eq}$	Pressão de equilíbrio de um túnel revestido;
$p_i$	Pressão interna no interior da seção do túnel;
$p_{lim}$	Pressão limite de plastificação do maciço;
$p_v$	Pressão vertical no domínio;
$p_h$	Pressão horizontal no domínio;
$p_\infty$	Pressão geostática-hidrostática;
$p_\infty^*$	Pressão geostática-hidrostática adimensional;
$q$	Tensão equivalente de von-Mises;
$\underline{q}$	conjunto de forças termodinâmicas (escalares ou tensoriais) associadas às variáveis internas;
$q_0$	Resistência à compressão uniaxial do maciço;

$r$	Coordenada radial no plano da seção transversal do túnel;
$\underline{s}$	Tensor de tensões desviadoras;
$t$	Tempo;
$\Delta t_{min}$	incremento de tempo limite para precisão do algoritmo viscoplástico;
$t_p$	Tempo do passo;
$\underline{u}$	Deslocamento da partícula material;
$\underline{u}$	Vetor deslocamentos nodais;
$\underline{u}_e$	Vetor de deslocamentos nodais do elemento;
$u(r)$	Deslocamento radial em uma coordenada radial $r$ ;
$u_x$	Deslocamento na direção $x$ ;
$u_y$	Deslocamento na direção $y$ ;
$u_z$	Deslocamento na direção $z$ ;
$u_{z_{max}}$	Deslocamento máximo na direção $z$ ;
$u_\varepsilon$	Deslocamento uniforme da seção de um túnel raso;
$u_\delta$	Distorção da seção de um túnel raso;
$\Delta u_y$	Translação vertical uniforme da seção de um túnel raso;
$w$	Energia interna específica;
$\underline{x}$	Vetor posição da partícula material;
$x$	Eixo $x$ ;
$y$	Eixo $y$ ;
$y_f$	Cota no eixo $y$ da face de escavação no domínio AXI;
$y_r$	Cota no eixo $y$ da face do revestimento no domínio AXI;
$z$	Eixo $z$ ;
$z_f$	Cota no eixo $z$ da face de escavação no domínio 3D;
$z_r$	Cota no eixo $z$ da face do revestimento no domínio 3D;

**Latino maiúsculo:**

$\underline{\underline{A}}$	Matriz algorítmica do esquema de integração;
$\underline{\underline{B}}$	Matriz que relaciona os deslocamentos nodais com as deformações no interior do elemento;
$D$	Diâmetro equivalente da seção do túnel;
$\underline{\underline{D}}$	Tensor constitutivo elástico de quarta ordem simétrico;
$\underline{\underline{D}}^{ep}$	Tensor constitutivo elastoplástico contínuo;
$\underline{\underline{D}}^{vp}$	Tensor constitutivo viscoplástico contínuo;
$\underline{D}$	Tensor constitutivo (notação de Voigt);
$\underline{\underline{D}}^{alg}$	Tensor constitutivo consistente com o esquema de integração (notação de Voigt);
$\underline{D}^e$	Tensor constitutivo elástico (notação de Voigt);
$\underline{\underline{D}}^{ep}$	Tensor constitutivo elastoplástico contínuo (notação de Voigt);
$\underline{\underline{D}}^{vp}$	Tensor constitutivo viscoplástico contínuo (notação de Voigt);
$E$	Módulo de Young;
$E^*$	Módulo de Young adimensional;
$E_h$	Módulo de deformação médio horizontal na parte superior da crosta terrestre;
$E_{rev}$	Módulo de Young do revestimento;
$\underline{F}$	Gradiente da transformação geométrica;
$\underline{F}_{int}$	Vetor de forças internas globais;
$\underline{F}_{inte}$	Vetor de forças internas do elemento;
$\underline{F}_{ext}$	Vetor de forças externas globais;
$\underline{F}_{ext_e}$	Vetor de forças externas do elemento;
$\underline{F}_{\epsilon_e}$	Vetor de forças internas do elemento devido às deformações iniciais;
$\underline{F}_{\sigma_e}$	Vetor de forças internas do elemento devido às tensões iniciais;
$\underline{F}_{V_e}$	Vetor de forças de volume do elemento;
$\underline{F}_{S_e}$	Vetor de forças de superfície no contorno livre do elemento;

$\underline{F}_{C_e}$	Vetor de forças de contato entre elementos vizinhos;
$\underline{F}_{N_e}$	Vetor de forças nodais do elemento;
$\underline{F}_{\varepsilon_0}$	Vetor de força interna global devido às deformações iniciais;
$\underline{F}_{\sigma_0}$	Vetor de força interna global devido às tensões iniciais;
$\underline{F}_V$	Vetor de força de volume global;
$\underline{F}_S$	Vetor de força de superfície no contorno livre global;
$\underline{F}_N$	Vetor de força nodal global;
$\underline{F}_p$	Vetor de forças do passo;
$H$	Profundidade do túnel;
$I_1, I_2, I_3$	Invariante do tensor de deformações ou do tensor de tensões;
$J_2, J_3$	Invariante do tensor de tensões desviadoras;
$J$	Jacobiano da transformação;
$\underline{\underline{J}}$	Jacobiano da transformação;
$J_{i_p}$	Determinante do Jacobiano da transformação no ponto de integração $i_p$ ;
$K$	Coeficiente de empuxo do maciço;
$K_{rev}$	Rigidez equivalente do revestimento;
$K_{rev}^*$	Rigidez equivalente adimensional do revestimento;
$\underline{\underline{K}}_e$	Matriz de rigidez do elemento;
$\underline{\underline{K}}$	Matriz de rigidez global;
$L_p$	Tamanho do passo de escavação;
$L_{p_e}$	Tamanho do elemento finito no trecho escavado;
$L_s$	Comprimento de <i>Spalling</i> no perímetro de uma seção;
$L_x$	Largura transversal do domínio EPD e 3D ou raio total do modelo AXI;
$L_{x_1}$	Largura do domínio além da região de refinamento próxima ao túnel;
$L_y$	Altura do domínio EPD e comprimento longitudinal do domínio AXI;

$L_{y_1}$	Altura do modelo EPD e 3D além da região de refinamento próxima ao túnel ou comprimento do trecho escavado no domínio AXI;
$L_{y_2}$	Comprimento longitudinal do trecho não escavado no domínio AXI;
$L_z$	Comprimento longitudinal do domínio 3D;
$L_{z_1}$	Comprimento longitudinal do trecho escavado no domínio 3D;
$L_{z_2}$	Comprimento longitudinal do trecho não escavado no domínio 3D;
$\underline{L}$	Matriz triangular inferior da fatorização de Cholesky;
$\underline{\underline{M}}$	Pré-condicionador do Método dos Gradientes Conjugados Pré-Condicionado;
$\underline{\underline{N}}$	Matriz contendo as funções de interpolação;
$P$	Pressão de confinamento em um ensaio triaxial;
$P_0$	Tensão média no interior do maciço;
$Q$	Pressão axial em um ensaio triaxial;
$R$	Raio da seção transversal do túnel;
$R_1$	Raio da região de refinamento próxima ao túnel;
$R_i$	Raio da interface entre o túnel e o maciço;
$R_{h_i}$	Raio horizontal na interface entre o túnel e o maciço;
$R_{v_i}$	Raio vertical na interface entre o túnel e o maciço;
$R^p$	Raio da zona plástica ao redor da seção do túnel;
$\underline{R}_i$	Vetor resíduo global do método de Newton-Raphson;
$S$	Superfície que atua o vetor tensão;
$S_0$	Tensão desviadora no entorno do maciço;
$S_T$	Região da superfície do domínio com condição de contorno imposta;
$\underline{T}$	Vetor tensão;
$\underline{T}^d$	Vetor tensão imposto na fronteira $S_T$ ;
$TOL$	Tolerância de convergência do algoritmo de Newton-Raphson local;
$U$	Convergência da seção do túnel;

$U_i$	Convergência em $r = R_i$ ;
$U_0$	Convergência da seção do túnel na cota não revestida a partir da face de escavação;
$U_{eq}$	Convergência de equilíbrio de um túnel revestido;
$U_{int}$	Energia potencial interna de deformação;
$U_{max}$	Convergência máxima da seção do túnel;
$W_{ext}$	Trabalho das forças externas;
$W_{i_p}$	Peso referente ao ponto de integração $i_p$ ;
$V$	Velocidade de avanço do túnel;
$V^*$	Velocidade adimensional de avanço do túnel;
$V_a$	Volume de uma amostra em um ensaio triaxial;
$V_{bacia}$	Volume recalcado da bacia de assentamento de um túnel raso;
$V_p$	Velocidade do passo de escavação;
$V(\Delta u)$	Potencial do Método dos Gradientes Conjugados;

**Grego minúsculo:**

$\underline{\alpha}$	Conjunto de variáveis internas;
$\beta_1, \beta_2, \beta_3$	Parâmetro da superfície de Drucker-Prager;
$\underline{\gamma}$	Campo de acelerações referente às forças inerciais;
$\gamma_m$	Peso específico do maciço;
$\underline{\delta\varepsilon}$	Campo de deformações virtuais;
$\underline{\delta\varepsilon}$	Campo de deformações virtuais (notação de Voigt);
$\underline{\delta u}$	Campo de deslocamentos virtuais;
$\varepsilon_1, \varepsilon_2, \varepsilon_3$	Deformações principais;
$\underline{\varepsilon}$	Tensor de deformações;
$\underline{\varepsilon}_I$	Tensor de deformações iniciais;
$\underline{\varepsilon}^e$	Deformação elástica;

$\underline{\underline{\varepsilon}}^p$	Deformação plástica;
$\underline{\underline{\varepsilon}}^{vp}$	Deformação viscoplástica;
$\underline{\varepsilon}$	Tensor de deformações (notação de Voigt);
$\underline{\varepsilon}_I$	Tensor de deformações iniciais (notação de Voigt);
$\underline{\varepsilon}^e$	Deformação elástica (notação de Voigt);
$\underline{\varepsilon}^p$	Deformação plástica (notação de Voigt);
$\underline{\varepsilon}^{vp}$	Deformação viscoplástica (notação de Voigt);
$\bar{\varepsilon}^{vp}$	Magnitude da deformação viscoplástica acumulada;
$\varepsilon_I$	Deformação a partir da qual tem-se a coesão residual $c_0$ ;
$\varepsilon_a$	Deformação axial em um ensaio triaxial;
$\varepsilon_R$	Tolerância para o resíduo;
$\varepsilon_u$	Tolerância para o incremento de deslocamentos;
$\eta$	Constante de viscosidade dinâmica;
$\eta_1, \eta_2, \eta_3$	Direções principais;
$\theta$	Ângulo de Lode;
$\lambda$	Magnitude da deformação plástica ou viscoplástica;
$\lambda^e$	Coeficiente de Lamè;
$\mu^e$	Coeficiente de Lamè;
$\nu$	Coeficiente de Poisson;
$\xi_H$	Coordenada do espaço de Haigh-Westergaard;
$\underline{\xi}$	Coordenada naturais do elemento;
$\underline{\xi}_{i_p}$	Coordenada natural do ponto de integração $i_p$ ;
$\phi$	Ângulo de atrito do maciço;
$\rho$	Densidade do domínio;
$\rho_H$	Coordenada do espaço de Haigh-Westergaard;
$\sigma_{oct}$	Tensão normal octaédrica;

$\sigma_v$	Tensão vertical no interior do maciço;
$\sigma_{\theta\theta}$	Tensão no maciço na direção ortorradial;
$\sigma_{zz}$	Tensão no maciço ortogonal ao plano da seção do túnel;
$\sigma_{rr}$	Tensão no maciço na direção radial;
$\underline{\underline{\sigma}}$	Tensor de tensões;
$\underline{\underline{\sigma}}_I$	Tensor de tensões inical;
$\underline{\underline{\sigma}}$	Tensor de tensões (notação de Voigt);
$\underline{\underline{\sigma}}_I$	Tensor de tensões iniciais (notação de Voigt);
$\underline{\underline{\sigma}}^{trial}$	Preditor elástico (notação de Voigt);
$\tau_{oct}$	Tensão cisalhante octaédrica;
$\psi$	energia livre específica ou ângulo de dilatância;

**Grego maiúsculo:**

$\Gamma$	Conjunto de tensões plasticamente admissíveis;
$\Theta$	Parâmetro que controla um esquema de integração totalmente explícito ou semi-implicito no modelo viscoplástico;
$\Sigma$	Superfície de descontinuidade no interior do domínio;
$\Phi$	Função de sobretensão;
$\Omega$	Domínio contínuo;
$\Omega'$	Subdomínio contínuo;
$\Omega_e$	Domínio de um elemento;
$\Omega_\xi$	Domínio natural de um elemento;

**Numéricos, operadores e funções matemáticas:**

$\pi$	Constante $\pi \approx 3.141592653589793$ ;
$\underline{\underline{1}}$	Tensor de segunda ordem unitário;
$\underline{\underline{\underline{1}}}$	Tensor de quarta ordem unitário (notação de Voigt);
$\underline{\underline{\underline{\underline{1}}}}$	Tensor de segunda ordem unitário (notação de Voigt);

$\frac{1}{\equiv}$	Tensor unitário de quarta ordem;
$\det(*)$	Função Determinante;
$\text{tr}(*)$	Função Traço;
$(*)^T$	Operador de Transposição;
$\underline{\nabla} \cdot$	Operador Divergente;
$\nabla$	Operador Gradiente;
$\  * \ $	Operador Módulo;
$\sum *$	Operador Somatório;

# SUMÁRIO

<b>1</b>	<b>INTRODUÇÃO . . . . .</b>	<b>36</b>
<b>2</b>	<b>DIRETRIZES DA PESQUISA . . . . .</b>	<b>40</b>
2.1	TEMA . . . . .	40
2.2	METODOLOGIA . . . . .	40
2.3	OBJETIVOS . . . . .	40
2.4	DELIMITAÇÕES . . . . .	41
2.5	DELINEAMENTO . . . . .	42
<b>3</b>	<b>TECNOLOGIA DE EXECUÇÃO DE TÚNEIS . . . . .</b>	<b>44</b>
3.1	MÉTODOS DE ESCAVAÇÃO . . . . .	44
3.1.1	Vala recoberta . . . . .	45
3.1.2	Escavação simples . . . . .	46
3.1.3	Desmonte de rocha . . . . .	46
3.1.4	Tuneladora . . . . .	47
3.1.5	Cravação de tubos . . . . .	48
3.2	PRÉ-SUPORTES E MELHORAMENTO DO MACIÇO . . . . .	49
3.3	REVESTIMENTO DE TÚNEIS . . . . .	51
<b>4</b>	<b>COMPORTAMENTO MECÂNICO DE TÚNEIS . . . . .</b>	<b>54</b>
4.1	PRINCIPAIS ASPECTOS CONSIDERADOS EM ESTUDOS NUMÉRICOS RECENTES DE TÚNEIS . . . . .	54
4.2	INFLUÊNCIA DA ESCAVAÇÃO E O CONCEITO DE CONVERGÊNCIA DA SEÇÃO . . . . .	56
4.3	MECANISMOS DE RUPTURA EM TÚNEIS PROFUNDOS . . . . .	60

4.4	INFLUÊNCIA DA REOLOGIA DO MACIÇO . . . . .	65
4.4.1	Comportamento instantâneo . . . . .	65
4.4.2	Comportamento diferido no tempo . . . . .	68
4.4.3	Alguns estudos considerando leis elastoplásticas e viscoplásticas . . . . .	73
4.5	INFLUÊNCIA DA FORMA DA SEÇÃO . . . . .	75
4.6	INFLUÊNCIA DA PROFUNDIDADE DO TÚNEL . . . . .	76
4.7	INFLUÊNCIA DA PROXIMIDADE DA SUPERFÍCIE . . . . .	81
4.8	INFLUÊNCIA DO REVESTIMENTO E PARÂMETROS ADIMENSIONAIS . . . . .	83
4.9	MÉTODO CONVERGÊNCIA-CONFINAMENTO . . . . .	87
<b>5</b>	<b>MODELO MECÂNICO . . . . .</b>	<b>90</b>
5.1	EQUAÇÕES DE EQUILÍBRIO LOCAL E A HIPÓTESE DA EVOLUÇÃO QUASE ESTÁTICA . . . . .	90
5.2	ADMISSIBILIDADE ESTÁTICA, NATUREZA EULERIANA DO CAMPO DE TENSÕES, TRANSFORMAÇÃO GEOMÉTRICA E MEDIDA DE DEFORMAÇÃO . . . . .	91
5.3	HIPÓTESE DAS PEQUENAS PERTURBAÇÕES E A DESCRIÇÃO LAGRANGEANA . . . . .	93
5.4	MODELO CONSTITUTIVO ELÁSTICO . . . . .	93
5.5	MODELO CONSTITUTIVO ELASTOPLÁSTICO . . . . .	94
5.5.1	Decomposição do tensor de deformação total . . . . .	95
5.5.2	Superfície de escoamento . . . . .	96
5.5.3	Regra de fluxo plástico . . . . .	99
5.5.4	Lei de endurecimento/amolecimento . . . . .	101
5.5.5	Condições de carregamento e descarregamento . . . . .	104
5.5.6	Multiplicador plástico e módulo elastoplástico contínuo .	104

5.6	MODELO CONSTITUTIVO VISCOPLÁSTICO . . . . .	105
5.6.1	Decomposição do tensor de deformação total . . . . .	105
5.6.2	Superfície de escoamento . . . . .	105
5.6.3	Regra de fluxo viscoplástico . . . . .	106
5.6.4	Lei de endurecimento/amolecimento . . . . .	106
5.6.5	Multiplicador viscoplástico . . . . .	106
5.7	MODELO CONSTITUTIVO ELASTOPLÁSTICO VISCOPLÁSTICO . . . . .	107
<b>6</b>	<b>SOLUÇÃO DO MODELO MECÂNICO . . . . .</b>	<b>111</b>
6.1	FORMA FRACA DAS EQUAÇÕES DE CAMPO . . . . .	111
6.2	NOTAÇÃO DE VOIGT . . . . .	111
6.3	DISCRETIZAÇÃO ESPACIAL EM ELEMENTOS FINITOS . .	113
6.4	SOLUÇÃO DO SISTEMA NÃO LINEAR . . . . .	118
6.5	ALGORITMO DE ATUALIZAÇÃO DAS TENSÕES E VARIÁVEIS INTERNAS . . . . .	125
6.5.1	Integração das equações constitutivas elastoplásticas . .	125
6.5.2	Integração das equações constitutivas viscoplásticas . .	130
6.5.3	Integração das equações constitutivas acopladas elastoplástica-viscoplásticas . . . . .	133
6.6	PARTICULARIZANDO PARA ESTADO PLANO DE DEFORMAÇÕES E AXISSIMETRIA . . . . .	135
6.7	DOMÍNIOS, DISCRETIZAÇÃO ESPACIAL E TEMPORAL, CONDIÇÕES DE CONTORNO, CICLO CONSTRUTIVO E SEUS PARÂMETROS . . . . .	136
6.8	PROPRIEDADES E PARÂMETROS DO MODELO CONSTITUTIVO . . . . .	144
<b>7</b>	<b>VERIFICAÇÕES, VALIDAÇÕES E ANÁLISES . . . . .</b>	<b>147</b>

7.1	VALIDAÇÃO REFERENTE AO ENDURECIMENTO E AMOLECIMENTO DA PARTE ELASTOPLÁSTICA ATRAVÉS DE UM ENSAIO . . . . .	147
7.2	VERIFICAÇÃO DA SOLUÇÃO NUMÉRICA COM UMA SOLUÇÃO ANALÍTICA CONSIDERANDO O ENDURECIMENTO	149
7.3	VERIFICAÇÃO DO MODELO ACOPLADO COM CADA COMPORTAMENTO EM SEPARADO . . . . .	150
7.3.1	Verificações em elasticidade . . . . .	151
7.3.2	Verificações em elastoplasticidade . . . . .	155
7.3.3	Verificações em viscoplasticidade . . . . .	158
7.4	VERIFICAÇÃO DO MODELO ELASTOPLÁSTICO-VISCOPLÁSTICO COM UMA SOLUÇÃO ANALÍTICA . . . . .	162
7.5	VERIFICAÇÃO DO MODELO ELASTOPLÁSTICO-VISCOPLÁSTICO COM UMA SOLUÇÃO NUMÉRICA . . . . .	166
7.6	ANÁLISE CONSIDERANDO AMOLECIMENTO . . . . .	168
7.7	ANÁLISE PARAMÉTRICA DA INFLUÊNCIA DO REVESTIMENTO . . . . .	170
7.8	ANÁLISE PARAMÉTRICA CONSIDERANDO UMA SEÇÃO ELÍPTICA . . . . .	173
<b>8</b>	<b>CONCLUSÕES . . . . .</b>	<b>178</b>
 <b>REFERÊNCIAS . . . . .</b>		<b>181</b>
 <b>APÊNDICES . . . . .</b>		<b>199</b>

## 1 INTRODUÇÃO

Os túneis são grandes obras de engenharia que, além de causar grande admiração, atendem a diversas finalidades, sendo a mais conhecida aquela de transpor barreiras geológicas como, por exemplo, montanhas e canais marítimos, trazendo maior eficiência no transporte de recursos e pessoas. Também devido à crescente preocupação com o meio ambiente e com a preservação da superfície, essas estruturas têm sido cada vez mais empregadas em grandes cidades, melhorando assim a mobilidade urbana como, por exemplo, em metrôs e servindo de suporte para serviços públicos, tais como redes de água, esgoto, gás e eletricidade. São também empregados em hidroelétricas, laboratórios subterrâneos, instalações profundas para armazenamento de material radioativo e mineração.

Há, no entanto, um risco intrínseco associado a essas grandes obras, uma vez que o subsolo é em grande parte desconhecido e possui um comportamento complexo. Apesar de muitas dessas construções serem finalizadas com sucesso, ocorrem incidentes que levam a atrasos, custos excessivos e, em alguns casos, consequências mais significativas, tais como, danos em patrimônios de terceiros e perdas de vidas. Esses imprevistos estão relacionados a uma série de fatores que vão desde incertezas geológicas, cálculos inadequados, processo construtivo inapropriado e insuficiente monitoramento das deformações *in loco*. Não obstante, uma parte destes acidentes está relacionada com a dificuldade em prever e modelar o comportamento mecânico dessas grandes obras.

Um dos comportamentos de difícil modelagem e ainda estudado é justamente a interação entre o comportamento instantâneo e o diferido dessas estruturas. Este comportamento pode ter um impacto significativo nas deformações e estabilidade da cavidade. A plastificação no entorno do maciço, o fechamento gradual da seção do túnel, a extrusão da face de escavação e a sobrecarga sobre o revestimento, podem se desenvolver durante o tempo construtivo, no curto prazo, ou ainda, meses e anos após a construção do túnel no médio e longo prazo. Esse comportamento pode causar deformações excessivas (Figura 1.1), danos ao revestimento (Figura 1.2) e, em alguns casos, pela magnitude dos efeitos, acarretar o colapso da região no entorno do túnel.



Figura 1.1 – Redução da seção transversal do Túnel de Base Lyon Turin na fronteira entre França e Itália (fonte: Barla, Bonini e Debernardi (2010, p. 41))



Figura 1.2 – Ruptura do suporte (perfil de aço) em uma mina de carvão na China (fonte: Manchao et al. (2015, p. 192))

Além da estabilidade da cavidade, a escolha da tecnologia para a escavação é altamente influenciada pela magnitude dessa condição diferida no tempo. Por exemplo, em escavações com tuneladoras (TBM - *Tunnel Boring Machines*), as pressões que se desenvolvem sobre a blindagem podem causar uma série de dificuldades como o aprisionamento da máquina (tal como

visto em Ramoni e Anagnostou (2010a, 2010b). É sabido também que suportes flexíveis ou que apresentam um comportamento diferido no tempo (perfis metálicos deslizantes ou concreto projetado) são mais adequados do que suportes rígidos, uma vez que permitem um certo grau de acomodação dessas deformações diferidas.

Muitos estudos consideram leis constitutivas empírico-experimentais, viscoelásticas ou ainda viscoplásticas em suas análises diferidas no tempo, contudo, todos esses modelos partem de um comportamento instantâneo elástico o que pode não corresponder com a realidade, uma vez que o maciço pode possuir um comportamento instantâneo elastoplástico induzido pelo processo construtivo.

Em vista da importância do tema para a comunidade geotécnica de túneis, a presente tese desenvolve uma relação constitutiva para lidar com o comportamento diferido no tempo, considerando um modelo viscoplástico, conjuntamente com o comportamento instantâneo dado por um modelo elastoplástico. Portanto, um modelo constitutivo acoplado.

Além dessa introdução, esse trabalho está dividido em mais 7 capítulos.

**O capítulo 2** tem a finalidade de esclarecer o mais objetivamente possível o que se pretende desenvolver nessa tese, explicitando o tema, os objetivos a alcançar, as delimitações adotadas e o delineamento de como se deu o trabalho.

**O capítulo 3** foi introduzido com o intuito de apresentar brevemente alguns aspectos do estado da arte de túneis. Portanto, esse capítulo resume brevemente os métodos de escavação, os elementos e técnicas de pré-suporte, os revestimentos e principais aspectos considerados em estudos numéricos recentes. Portanto, esse capítulo é opcional aos leitores mais experientes e pode ser ignorado sem prejuízo ao entendimento do trabalho restante.

**O capítulo 4** tem por finalidade instruir o leitor no comportamento mecânico de túneis e seus conceitos fundamentais. Esse capítulo está dividido de acordo com os principais fatores que influenciam o campo de tensões e deformações no entorno dessas estruturas, tais como, o processo de escavação, o comportamento reológico do maciço, a forma da seção, a profundidade do túnel, a proximidade da superfície e a interação com o revestimento. Nesse capítulo é dada uma maior ênfase na reologia do maciço, caracterizando o comportamento instantâneo e diferido, que são justamente os comportamentos almejados no modelo proposto dessa tese. Ao final, também são apresentados alguns estudos que consideraram leis elastoplástica-viscoplástica no comportamento do maciço.

**O capítulo 5** descreve o modelo teórico implementado esclarecendo as principais hipóteses e explicando cada uma das leis constitutivas adotadas (elástica, elastoplástica e viscoplástica)

de forma genérica e separada. No final desse capítulo é descrito então o modelo constitutivo acoplado elastoplástico-viscoplástico desenvolvido nessa tese.

O **capítulo 6** se refere à solução numérica do modelo teórico implementado. Portanto, descreve a discretização espacial em elementos finitos, incluindo os tipos de elementos que são utilizados, o método de solução do sistema não linear e o algoritmo de integração das leis constitutivas. Esse último é um dos principais focos do trabalho, uma vez que nele é feita a junção entre o modelo elastoplástico (instantâneo) e o viscoplástico (diferido). Também nesse capítulo são apresentadas as malhas propostas para as análises de túneis profundos (estado plano de deformação, tridimensional e axissimétrico) bem como as condições de contorno utilizadas e a descrição do processo de escavação e colocação do revestimento pelo método da ativação e desativação de elementos. No final é apresentado os principais parâmetros do modelo constitutivo implementado.

O **capítulo 7** mostra algumas validações e verificações do algoritmo implementado com soluções analíticas para túneis profundos e soluções numéricas obtidas pelo *software* de elementos finitos GEOMEc91<sup>1</sup> desenvolvido por Bernaud (1991). A verificação do modelo acoplado é feita através de uma solução analítica e numérica desenvolvida por Piepi (1995). Essa validação é apenas parcial, uma vez que essa solução é menos geral que o modelo constitutivo implementado, pois considera o comportamento elastoplástico-viscoplástico perfeito associado obedecendo apenas ao critério de Tresca. Contudo, é importante para demonstrar que o algoritmo acoplado está funcionando. Também nesse capítulo são feitas algumas análises paramétricas, incluindo, túneis com seção transversal elíptica.

Por fim, o **capítulo 8** faz o fechamento da tese apresentando algumas conclusões e sugestões de trabalhos futuros.

---

<sup>1</sup> O GEOMEc91 é um *software* de elementos finitos para análises de túneis em axissimetria desenvolvido por Bernaud (1991).

## 2 DIRETRIZES DA PESQUISA

### 2.1 TEMA

O tema dessa tese é o estudo das deformações induzidas pelo processo construtivo de túneis profundos em maciços que apresentam comportamento instantâneo e diferido no tempo.

### 2.2 METODOLOGIA

A metodologia consiste em uma **abordagem teórica** derivada da mecânica do contínuo cuja solução é obtida de forma **numérica** através do **método dos elementos finitos**.

### 2.3 OBJETIVOS

O **objetivo principal** desta tese consiste em formular e programar um modelo constitutivo elastoplástico-viscoplástico para analisar as deformações instantâneas e diferidas induzidas pelo processo de escavação em túneis profundos, incorporando a interação tridimensional entre o maciço e o revestimento.

Como **objetivos secundários** têm-se:

- a) formular e desenvolver um modelo constitutivo capaz de lidar conjuntamente com o comportamento diferido e instantâneo do maciço;
- b) generalizar esse modelo constitutivo para análises em estado plano de deformações, axissimetria (uma vez que essas análises são rápidas do ponto de vista computacional e comuns em diversos estudos na literatura) e tridimensional;
- c) implementar o modelo constitutivo acoplado através da customização do *software ANSYS* (versão 2021R1) utilizando a subrotina *Usermat*;
- d) generalizar o modelo constitutivo para reproduzir tanto o comportamento elástico, elastoplástico, viscoplástico e elastoplástico-viscoplástico, com a possibilidade de implementação de diversas leis de comportamento.

- e) verificar o modelo constitutivo com soluções analíticas e numéricas (através do programa GEOMECH91) na problemática de túneis profundos.

## 2.4 DELIMITAÇÕES

Os túneis podem sofrer influência da superfície como, por exemplo, deformações adicionais devido às cargas superficiais, e, inclusive, intervirem nelas e em suas estruturas através de recalques superficiais ocasionados pela execução do túnel. Contudo, apesar da generalidade dos modelos desenvolvidos no presente trabalho, é dado enfoque nos túneis profundos, portanto, **não é considerada a influência de estruturas superficiais ou recalques na superfície induzidos pela escavação.**

Embora o maciço em que um túnel está imerso possa apresentar descontinuidades, em muitos casos, seu comportamento global pode ser simulado efetivamente como um **meio contínuo**. Apesar do comportamento complexo do maciço, que é função também de diversas propriedades que variam espacialmente, nesse trabalho é considerado um **maciço homogêneo e isotrópico**. Em vista disso, o **maciço é considerado monofásico** com seu comportamento instantâneo e diferido **modelado fenomenologicamente através de uma lei reológica elástica, elastoplástica, viscoplástica e elastoplástica-viscoplástica, não considerando, portanto, outras abordagens como, por exemplo, as da poro mecânica, as que tratam da influência do fluxo de água ou da temperatura.**

É também sabido que, em geral, o estado de tensões internas em um maciço é extremamente complexo, devido aos movimentos tectônicos, descontinuidades e heterogeneidades. Contudo, as análises e verificações que são feitas nessa tese considera um **estado geostático-hidrostático de tensões**. De qualquer forma isso não limita a aplicação do modelo constitutivo desenvolvido para os casos em que o estado de tensões é anisotrópico.

A velocidade de escavação e colocação do revestimento é uma variável importante quando se tem fenômenos diferidos no tempo. Essa velocidade depende de diversos fatores relacionados à dificuldade de escavação do maciço e ao cronograma de execução da obra. Contudo, nesse trabalho, apesar da generalidade do modelo, diferentemente da prática usual de execução de túneis, **a velocidade de avanço da face de escavação é considerada constante**.

Apesar de um túnel poder atravessar um perfil litológico heterogêneo, o que pode exigir um revestimento e técnicas de pré-suporte especializados para cada região, no presente estudo, o **revestimento consiste em um modelo único de espessura constante** (sem distinção entre revestimento primário e secundário) ao longo de todo o eixo longitudinal do túnel.

Principalmente em escavações não mecanizadas, é comum a frente de escavação apresentar parcializações de modo a estabilizar ou diminuir as deformações dessa zona. Apesar disso, nesse trabalho a escavação é feita à seção plena, plana e vertical sem considerar nenhuma técnica ou elemento de pré-suporte.

Os modelos incorporados no programa são: **elástico, elastoplástico, viscoplástico e elastoplástico-viscoplástico**. Para o maciço é considerado o modelo clássico elastoplástico de Drucker-Prager e o modelo viscoplástico de Perzyna (1966) com a mesma superfície de escoamento do modelo elastoplástico, contudo, não necessariamente com os mesmos valores dos parâmetros. De qualquer forma o modelo permite a implementação de outras superfícies de escoamento. **Para o revestimento é utilizado o modelo elástico linear.**

A evolução das deformações se dá de forma **quase-estática**, portanto, não são considerados os termos iniciais (densidade e aceleração) ou excitações dinâmicas (como seria, por exemplo, em uma análise considerando terremotos e explosões). Além disso, é considerada a **hipótese das pequenas perturbações**.

## 2.5 DELINEAMENTO

O trabalho foi realizado através das seguintes etapas:

- a) pesquisa bibliográfica sobre túneis e o tema da tese;
- b) pesquisa bibliográfica sobre os modelos constitutivos elastoplásticos e viscoplásticos que são comumente utilizados para modelagem de túneis profundos;
- c) pesquisa bibliográfica sobre a formulação e solução do problema no contexto de elementos finitos;
- d) desenvolvimento do modelo constitutivo e sua solução numérica considerando o comportamento instantâneo elastoplástico acoplado com o comportamento diferido viscoplástico;
- e) generalização do modelo constitutivo para abordar problemas em estado plano de deformações, axissimetria e tridimensional;
- f) implementação do modelo desenvolvido na subrotina responsável pelo modelo constitutivo do *software ANSYS*;
- g) desenvolvimento dos domínios de túneis profundos no *software ANSYS* através da

- linguagem APDL (*ANSYS Parametric Desing Language*);
- h) verificação da solução numérica com soluções analíticas e numéricas (através do GEOMECH91);
  - i) estudo da diferença entre considerar o modelo elastoplástico-viscoplástico em relação a outros modelos mais simples.

O organograma da Figura 2.1 ilustra a relação entre as etapas durante o trabalho.

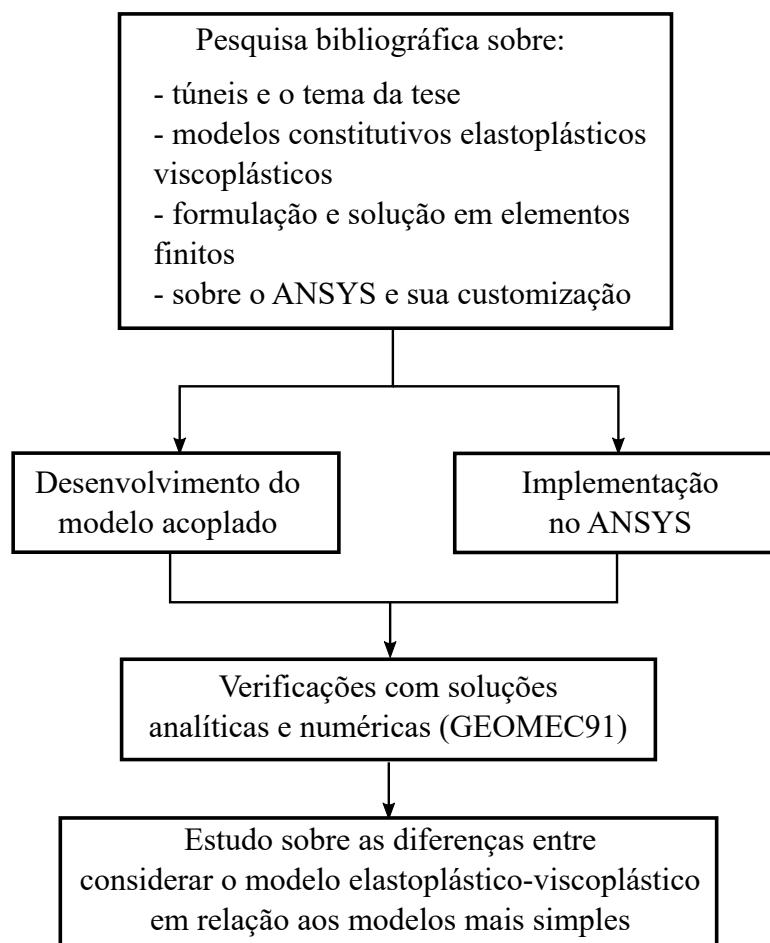


Figura 2.1 – Organograma das etapas da pesquisa

### 3 TECNOLOGIA DE EXECUÇÃO DE TÚNEIS

#### 3.1 MÉTODOS DE ESCAVAÇÃO

Há diversas formas de se executar túneis, tanto profundos quanto superficiais. Durante a escolha do método de escavação, o engenheiro deve levar em conta diversos fatores, tais como: geometria da seção, comprimento do túnel, condições geológicas, nível da água, restrições quanto às vibrações, estabilidade da cavidade, riscos de assentamentos superficiais, hipóteses de projeto, segurança dos operários, viabilidade ambiental e econômica. Em vista dessa complexidade é possível utilizar mais de um método de escavação ao longo do eixo do túnel. A Figura 3.1 resume os principais métodos de escavação.

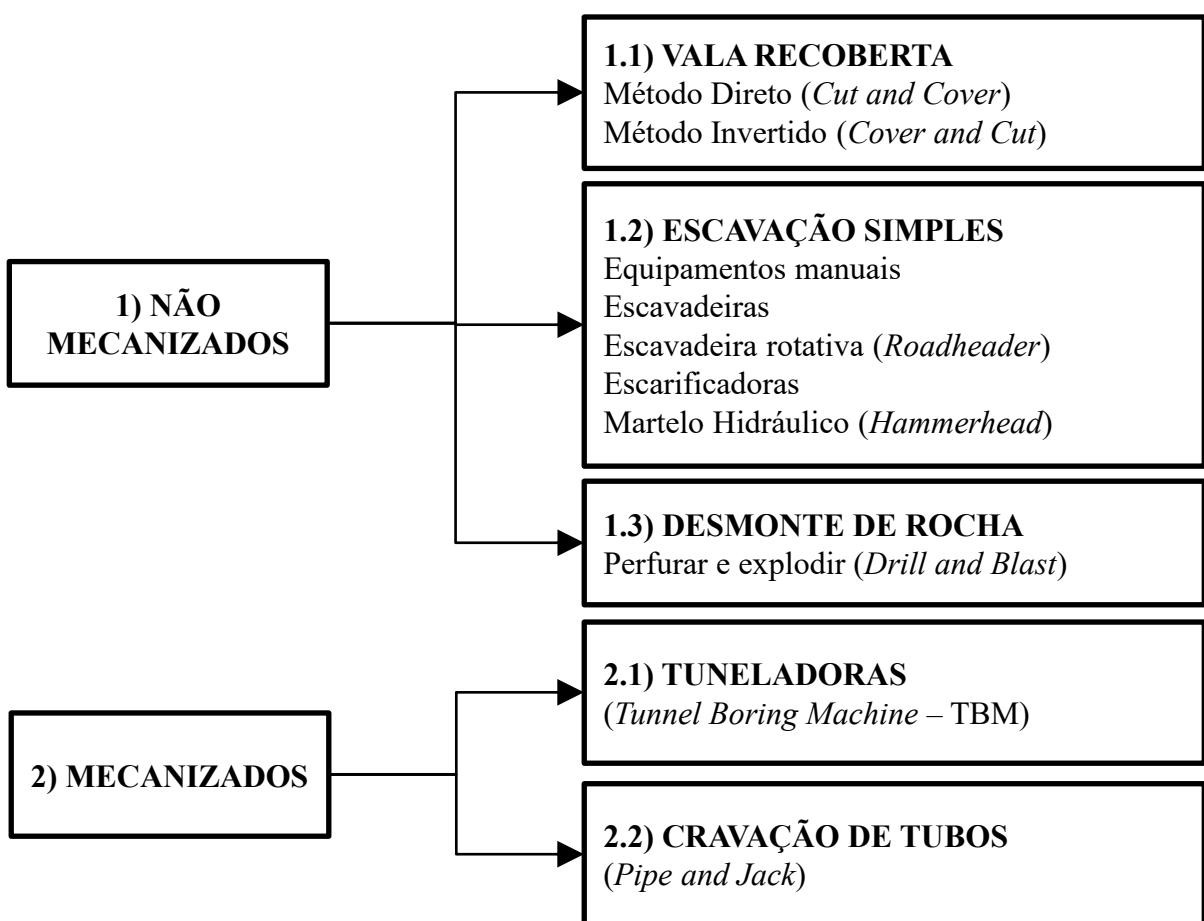


Figura 3.1 – Métodos de escavação de túneis

Os métodos se dividem em dois grandes grupos: 1) não mecanizados (convencionais) e 2) mecanizados. A diferença é que este último é caracterizado pela presença de tuneladoras, que são

máquinas especializadas em adentrar a frente de escavação. Os métodos ditos “não mecanizados” não possuem essas máquinas especializadas e podem ser agrupados em: vala recoberta, escavação simples e desmonte de rocha.

### 3.1.1 Vala recoberta

O método da vala recoberta é utilizado preferencialmente para túneis superficiais. Pode ser executado de duas formas: direta (*Cut and Cover*) ou invertida (*Cover and Cut*). A Figura 3.2 e Figura 3.3 ilustram esse método.

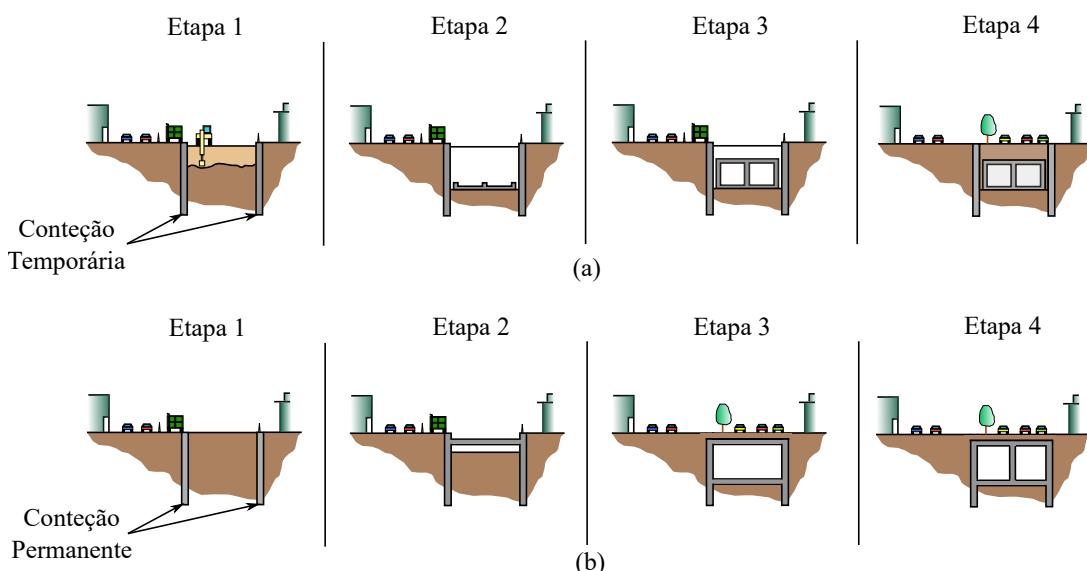


Figura 3.2 – (a) *Cut and Cover* e (b) *Cover and Cut* (adaptado de: FEDERAL HIGHWAY ADMINISTRATION (U.S.) (2009, p. 5-2))



Figura 3.3 – Etapa de execução pelo método de vala recoberta direta no projeto *Nordhavnsvej*, em Compenhague, Dinamarca (fonte: ROADTRAFFIC-TECHNOLOGY (2017, p. 1))

Como o presente trabalho está delimitado aos túneis profundos esse método de escavação estará fora do escopo desta tese. Além disso, o comportamento mecânico desse túnel é diverso daqueles profundos que, tal como será visto no Capítulo 4, mobilizam a resistência do maciço na estabilidade da cavidade.

### 3.1.2 Escavação simples

A escavação simples é o método que permite maior flexibilidade quanto à geometria da seção e é ideal para escavar galerias de formatos complexos como, por exemplo, estações e conexões. Essa escavação pode ser feita com uma combinação de ferramentas manuais e equipamentos mecânicos, como escavadeira simples, escavadeira rotativa (*Roadheader*), escarificador e martelo hidráulico (*Hammerhead*) (Figura 3.4). A produtividade desse método varia, mas dificilmente ultrapassa 10 m/dia de avanço.

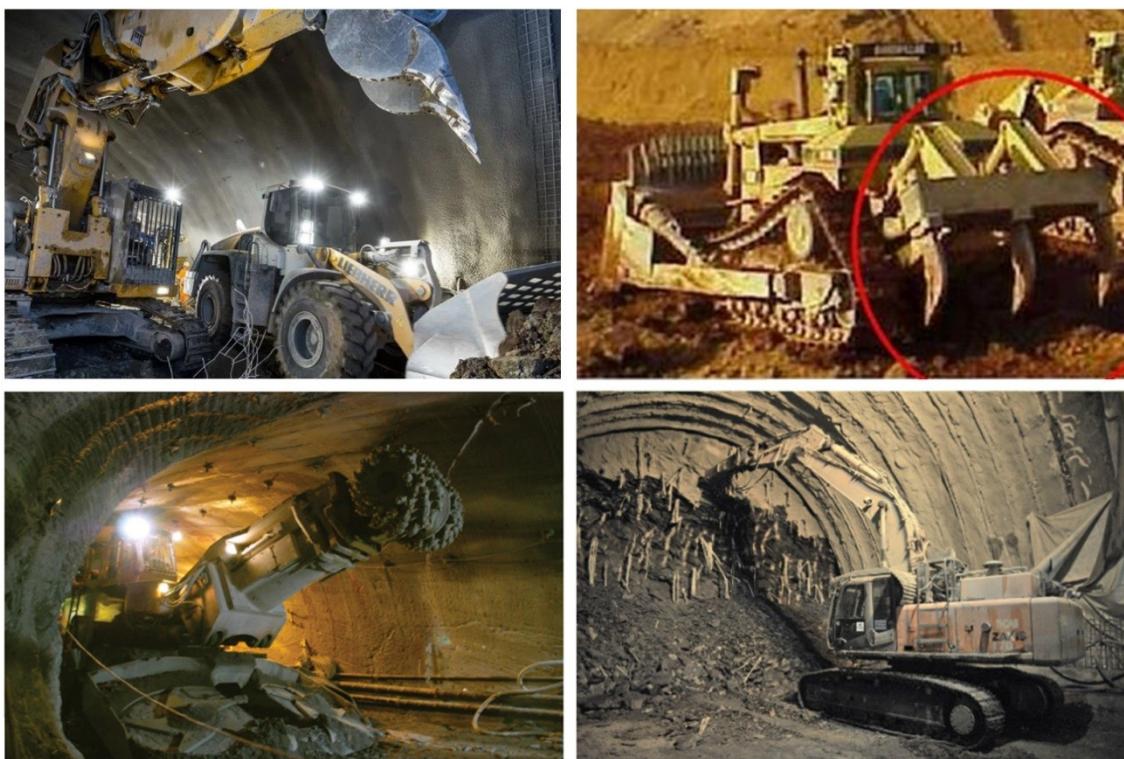


Figura 3.4 – Superior à esquerda: escavadeiras (fonte: Pierrat (2014, p. 1)); superior à direita: escarificador; inferior à esquerda: escavadeira rotativa (fonte: Mitterndorfer (2013, p. 1)) e inferior à direita: martelo hidráulico (fonte: WORD HIGHWAYS (2015, p. 1))

### 3.1.3 Desmonte de rocha

Quando há dificuldade de penetração no maciço, é necessário utilizar o método de perfuração e detonação, que consiste em perfurar, instalar o material explosivo e detonar a frente de escavação.

O ciclo desse método é ilustrado na Figura 3.5 e Figura 3.6.

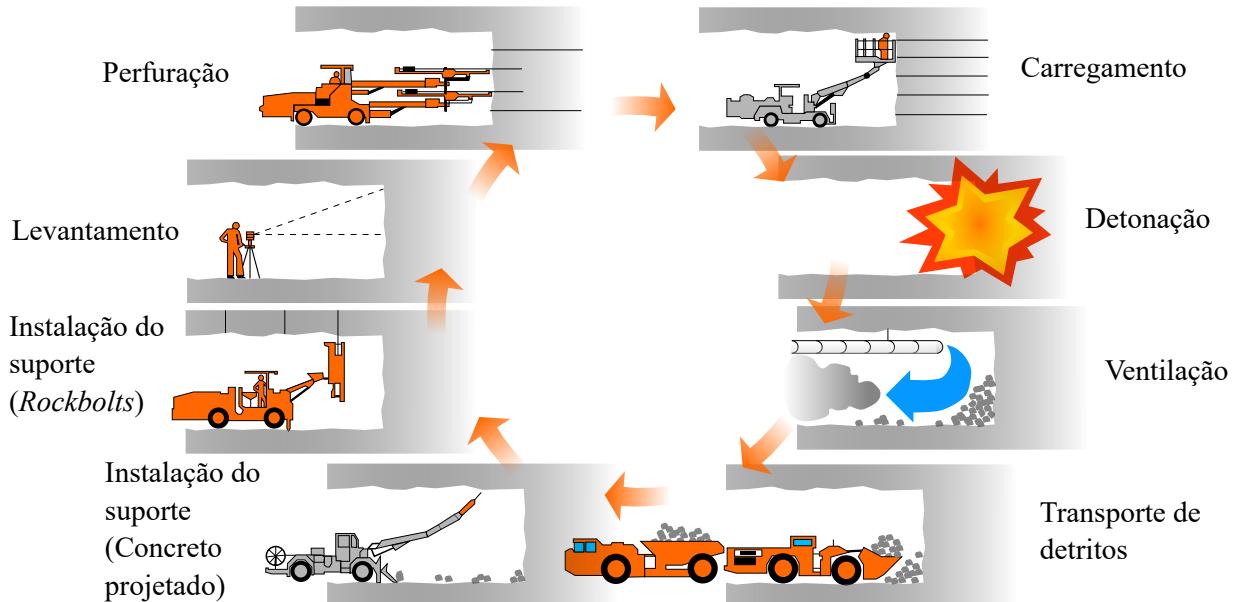


Figura 3.5 – Sequência executiva do método de construção por desmonte de rocha (adaptado de: Heiniö (1999, p. 215))



Figura 3.6 – Superior à esquerda: perfuração; inferior à esquerda: instalação das cargas; à direita: frente de escavação após detonação (fonte: Grad (2013, p. 1))

### 3.1.4 Tuneladora

As tuneladoras, tal como ilustrada na Figura 3.7, nada mais são do que a evolução do método de escavação com plataformas de Marc Brunel desenvolvido em 1843 (durante a construção do túnel subfluvial sob o rio Tâmisa em Londres). Atualmente, esse tipo de escavação é totalmente mecanizada e possui excelente regularidade da superfície escavada. A produtividade depende de

vários fatores (diâmetro da seção do túnel, condições do maciço, potência e tamanho da máquina, tipo de revestimento e experiência das equipes) e pode atingir até 20m/dia (BROX, 2017, p. 98). Geralmente possuem maquinário acoplado para executar o revestimento em concreto projetado ou pré-moldado. Quando o maciço a ser escavado é pouco resistente utiliza-se um escudo (*Shield*) ou lama sob pressão imediatamente anterior à frente de escavação para evitar o colapso da cavidade. As principais desvantagens são os custos e a dificuldade de transporte da máquina.

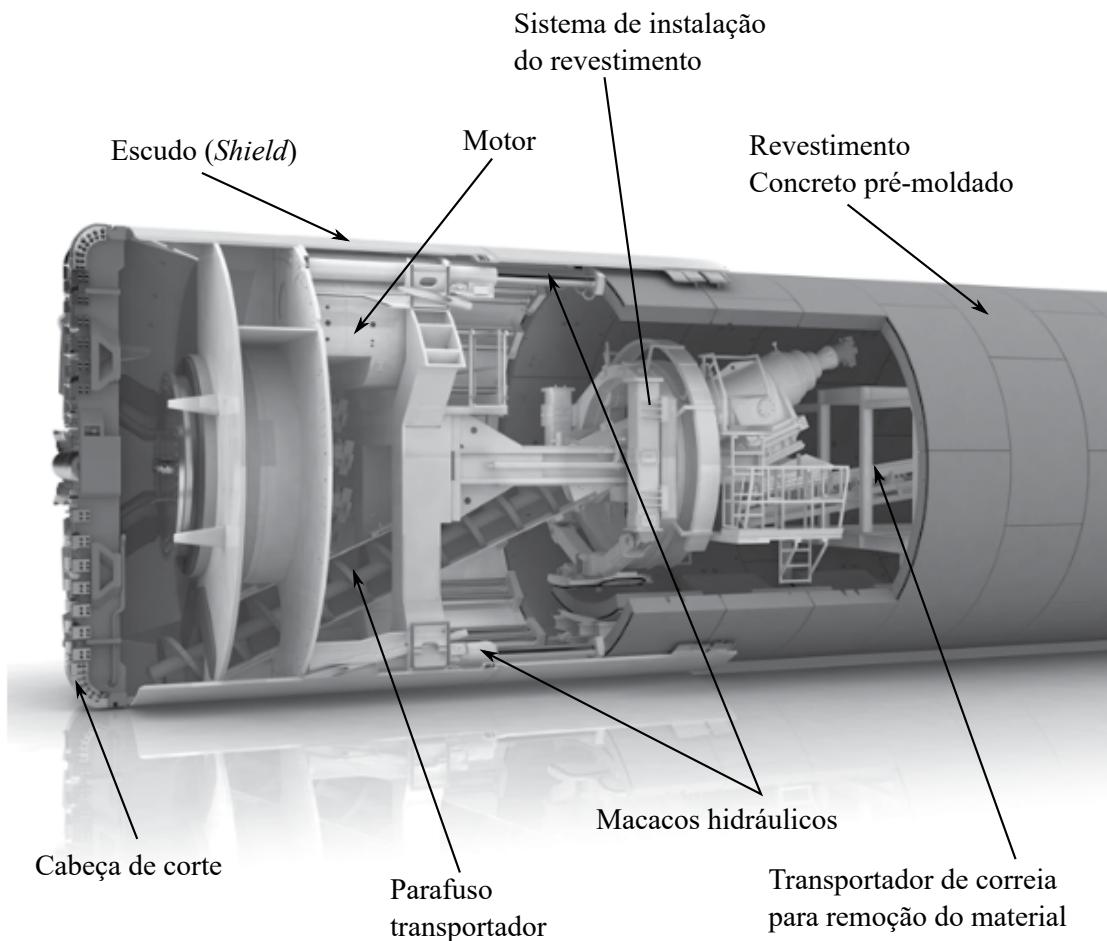


Figura 3.7 – Representação 3D de uma tuneladora (adaptado de: Chapman, Metje e Stark (2018, p. 151))

### 3.1.5 Cravação de tubos

Por fim, o método mecanizado de cravação de tubos consiste em conectar dois poços cravando tubos com auxílio de macacos hidráulicos, uma parede de reação e uma pequena tuneladora (com ou sem escudo). Esse método é comum quando se tem poucas distâncias a vencer, túneis superficiais e solos brandos. São, portanto, preferencialmente utilizados em obras de fornecimento de água, esgoto, eletricidade e gás nos centros urbanos. A Figura 3.8 e Figura 3.9 ilustram esse método de escavação.

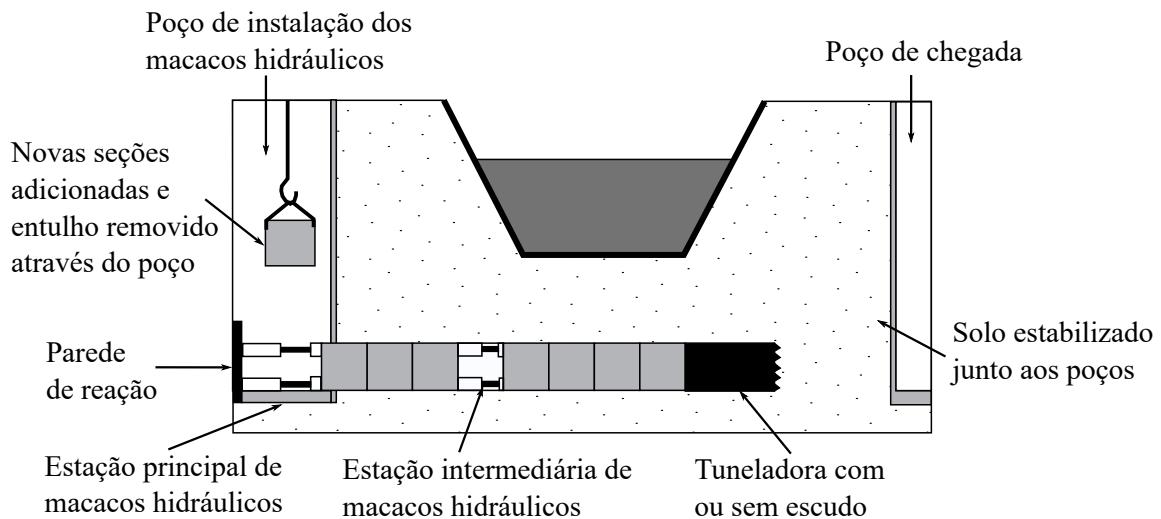


Figura 3.8 – Ilustração do método de cravação de tubos sob um canal  
(adaptado de: Chapman, Metje e Stärk (2018, p. 227))

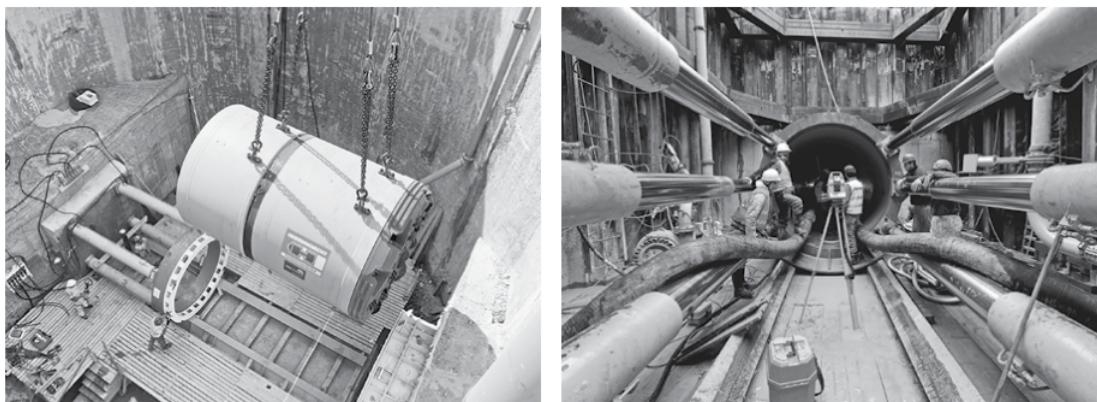


Figura 3.9 – À esquerda: vista de cima de um poço de macacos hidráulicos com a descida da TBM; à direita: vista frontal do túnel  
(fonte: Chapman, Metje e Stärk (2018, p. 227))

Como este trabalho está delimitado aos túneis profundos, esse método de escavação estará fora do escopo dessa tese. Apesar de mobilizar a resistência do maciço possuí condições de contorno bem diversas de túneis profundos.

### 3.2 PRÉ-SUPPORTES E MELHORAMENTO DO MACIÇO

O termo **pré-suporte** não comprehende apenas os elementos físicos, mas também técnicas que são utilizadas visando à estabilidade do maciço antes de iniciar a etapa de escavação da face de avanço do túnel. São comumente empregados em maciços ou regiões do maciço que apresentam riscos de desabamentos iminentes (Figura 3.10).

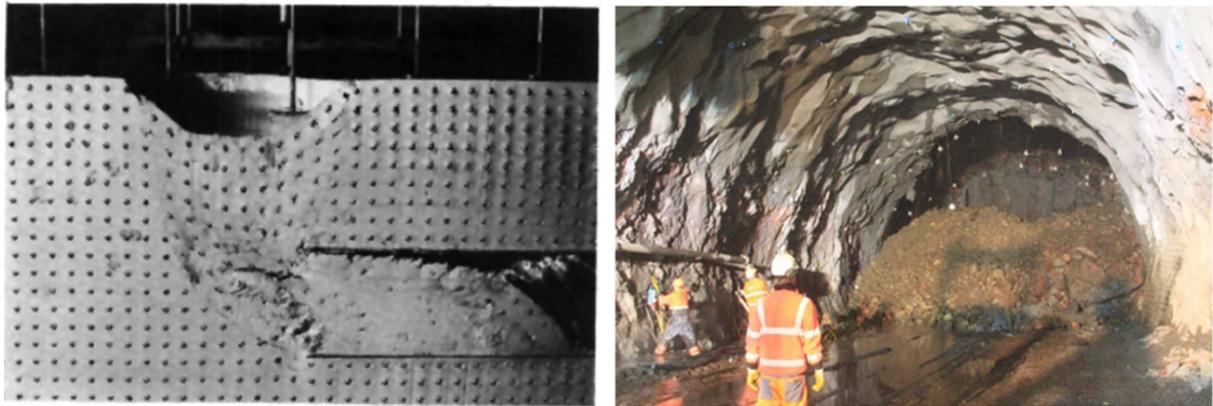


Figura 3.10 – À esquerda, simulação da falha na face de um túnel (fonte: Schofield (1980, p. 245)); à direita, o colapso progressivo da face do túnel rodoviário *Vadlaheidi* na Islândia (fonte: Reynolds (2015, p. 1))

Alguns exemplos de técnicas de pré-suporte são:

- a) **enfilagens**: instalação de barras, placas ou perfis de aço no interior do maciço, logo acima do perímetro da seção de escavação;
- b) **escavação parcializada**: criação de taludes ou nichos de escavação sustentados com concreto projetado;
- c) **tirantes frontais**: consiste na instalação de tirantes de fibra de vidro ou injeções de concreto na face de escavação. Comumente utilizados quando o túnel tem que passar por zonas instáveis como, por exemplo, falhas geológicas;
- d) **pré-confinamento com ar comprimido**: consiste em aplicar ar com uma determinada pressão no interior da galeria de escavação. Essa técnica é comum em solos moles ou saturados com água;
- e) **técnicas de melhoramento**: injeção de nata de cimento sobre pressão (*Jet Grouting*) ou consolidação do solo por meio do congelamento com nitrogênio líquido (ou com salmoura), injeções químicas, ou ainda, rebaixamento do lençol freático.

Mais detalhes sobre essas técnicas podem ser encontradas em FEDERAL HIGHWAY ADMINISTRATION (U.S.) (2009, p. 9-36), Maidl, Thewes e Maidl (2013, p. 21) e em Chapman, Metje e Stärk (2018, p. 77). Como neste trabalho estamos interessados na modelagem da lei constitutiva do maciço não foram consideradas essas técnicas de pré-suporte na modelagem.

### 3.3 REVESTIMENTO DE TÚNEIS

O revestimento de um túnel (também conhecido como suporte) tem como finalidade atender critérios operacionais de manutenção e de estabilidade da cavidade a curto, médio e longo prazo quando o maciço por conta própria não atende esses critérios. O revestimento é composto por um **revestimento primário** e, quando necessário, um **revestimento secundário**. A Figura 3.11 ilustra os elementos de uma seção típica de um túnel rodoviário.

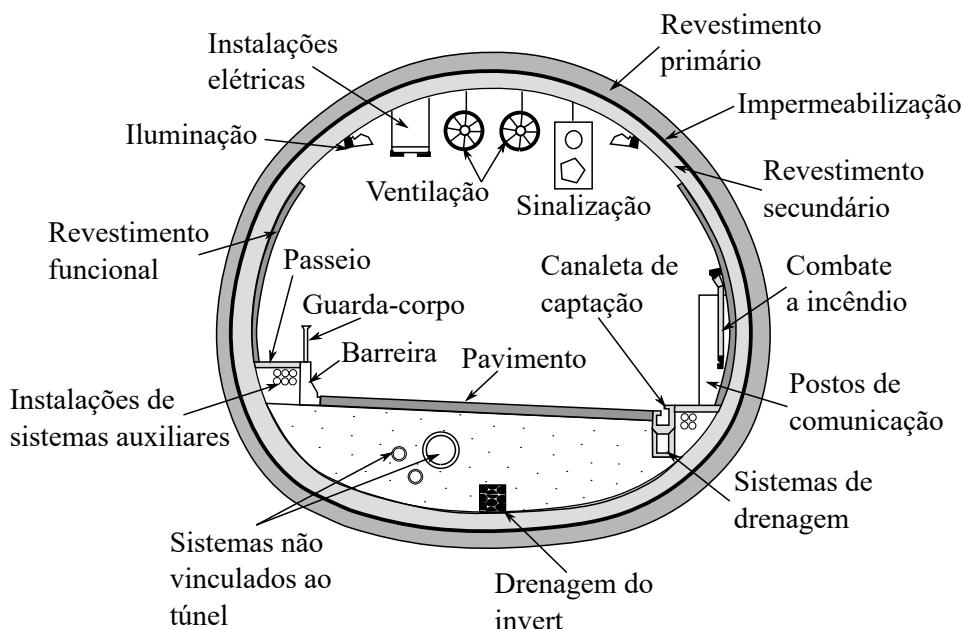


Figura 3.11 – Ilustração do revestimento e elementos internos de um túnel rodoviário (adaptado de: DEPARTAMENTO DE ESTRADAS E RODAGEM (SÃO PAULO) (2005, p. 20))

O **revestimento primário** comprehende os elementos físicos de suporte inicial (aplicados imediatamente após a escavação), com a finalidade de manter a cavidade do túnel estável. Contudo, quando os elementos de suporte inicial não são suficientes para estabilização da cavidade no médio e longo prazo, adicionam-se mais elementos constituindo assim o **revestimento secundário**. Quando se utiliza o revestimento secundário, o revestimento primário é comumente projetado com a finalidade exclusiva de garantir a estabilidade local da cavidade do túnel durante o período construtivo. Contudo, ambos contribuem para a estabilidade de médio e longo prazo.

É comum utilizar um ou mais de um dos seguintes elementos de suporte:

- tirantes radiais:** são cabos (*Cablebolts*) ou chumbadores (*Rockbolts*) ancorados ao longo do perímetro do túnel de forma mecânica (por atrito) e/ou química (com epóxi ou graute). Esses elementos podem estar tensionados (ativos) ou não (passivos) e serem permanentes ou temporários;

- b) **cintas metálicas:** são treliças ou trechos anelares metálicos (unidos entre si de forma rígida por parafusos, por soldagem, ou ainda, com uma união flexível podendo deslizar em suas juntas) instalados com um determinado espaçamento ao longo do comprimento longitudinal do túnel;
- c) **concreto projetado:** consiste em aplicar uma ou várias camadas de concreto (com ou sem fibras) sobre a superfície escavada do túnel. A superfície pode ainda conter telas metálicas ou cintas metálicas que ficarão embutidas nas camadas de concreto;
- d) **concreto pré-moldado:** consiste em instalar trechos anelares pré-fabricados de concreto;
- e) **concreto armado:** consiste em aplicar concreto e uma malha composta por vergalhões de aço no contorno da seção.

A Figura 3.12 ilustra alguns desses elementos.

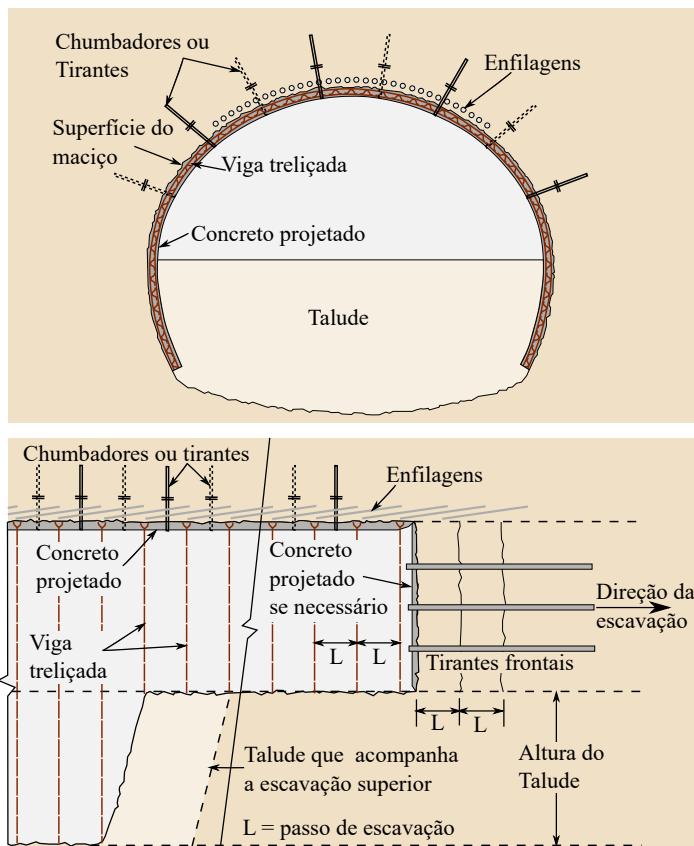


Figura 3.12 – Ilustração de alguns elementos de pré-suporte e revestimento (adaptado de: FEDERAL HIGHWAY ADMINISTRATION (U.S.) (2009, p. 9-14))

Como este trabalho está delimitado às leis constitutivas do maciço, não foi abordada a diferen-

ciação entre o revestimento primário e secundário. Além do mais, nos modelos desenvolvidos, o revestimento consiste de um material homogêneo, isotrópico e de espessura constante. E a escavação é feita a seção plena, plana e vertical.

## 4 COMPORTAMENTO MECÂNICO DE TÚNEIS

### 4.1 PRINCIPAIS ASPECTOS CONSIDERADOS EM ESTUDOS NUMÉRICOS RECENTES DE TÚNEIS

A rigor o estado e evolução do campo de tensões e deformações durante e após a escavação de um túnel irá depender dos seguintes fatores:

- a) **Comportamento dos materiais:** propriedades hidro-mecânicas e reológicas do maciço e do revestimento;
- b) **Condições geológicas:** estado de tensões *in situ*, heterogeneidade e grau de anisotropia do maciço bem como orientação, forma e comportamento das descontinuidades no seu interior, presença e fluxo de água, poro-pressão e movimentos sísmicos;
- c) **Interações com estruturas próximas:** fundações de edifícios, assentamentos superficiais, encontro com galerias, proximidade de outros túneis e sistemas subterrâneos;
- d) **Aspectos construtivos:** forma da seção transversal, velocidade de escavação, técnicas de pré-suporte, instante da instalação do revestimento e a distância não revestida durante o avanço da escavação.

Além desses fatores, como a trajetória das tensões próxima à face de escavação é tridimensional, envolvendo um bulbo de descompressão, túneis são estruturas rigorosamente tridimensionais.

Dentre as abordagens mais gerais que buscam prever o comportamento dos túneis, frente a todos esses fatores, estão as **teóricas-experimentais derivadas da mecânica do contínuo**. Contudo, as **soluções analíticas** dos modelos derivados dessa abordagem, apesar de úteis no entendimento do fenômeno e verificação numérica, são também limitadas a uma série de hipóteses simplificativas, tais como, domínio infinito, maciço isotrópico e homogêneo, seção circular, estado plano de deformações, ausência da interação entre o maciço e o revestimento, bem como leis constitutivas mais simples. Em vista disso, para contornar essas limitações, desde a década de 60, cada vez mais vem se utilizando **soluções numéricas** que agregam mais generalidades. E nas últimas décadas, com a ampliação da capacidade de computação, tem-se aumentado os estudos considerando o aspecto tridimensional dessas estruturas. Pode-se dizer que as soluções numéricas ganharam espaço frente às analíticas justamente devido à capacidade de incorporar todos os fatores listados acima. E, dentre os métodos numéricos, o mais difundido e utilizado é o **método dos elementos**

**finitos.** Os desenvolvimentos numéricos e aplicações recentes geralmente consideraram um ou mais dentre os seguintes aspectos:

- a) **simulação do processo construtivo:** através da ativação e desativação dos elementos finitos, onde a cada ciclo construtivo é feita uma análise desativando-se os elementos que correspondem à região escavada do maciço e ativando-se aqueles referentes ao revestimento. Exemplos recentes podem ser encontrados na grande maioria de estudos que consideram a interação entre o maciço e o revestimento, tais como: Zhong et al. (2016) e Quevedo (2017);
- b) **domínio espacial complexo:** incorporam a influência da frente de escavação, da intersecção com galerias ou da presença de túneis próximos como, por exemplo, Chakeri et al. (2011), Do et al. (2014) e ainda, quando se trata de túneis superficiais, assentamentos na superfície e interação com estruturas da superfície como, por exemplo, Augarde e Burd (2001), Burd et al. (2000), Mroueh e Shahrour (2003), Xin e Zengrong (2009) e Ferrão, Jensen e Bernaud (2020);
- c) **comportamento dos materiais,** ou seja, implementam e estudam a influência de diversas leis constitutivas, tanto para o maciço quanto para o revestimento. Nesse item os mais variados aspectos do maciço e do revestimento são frequentemente abordados. Leis constitutivas elásticas, elastoplásticas perfeitas, com amolecimento, como em Purwodihardjo e Cambou (2003); viscoelásticas, tais como encontradas em Quevedo (2017); viscoplásticas, conforme Bernaud (1991), RoateŞi (2014) e Quevedo (2017); ou ainda, viscoplásticas com fator de dano como em Pellet e Roosefid (2007) são apenas alguns poucos exemplos. Pode-se ter ainda leis que consideram acoplamento hidro-mecânico como em Chan e Ou (2008) e Leem e Kemeny (1999) bem como leis empíricas ou parâmetros de danos diretamente sobre as propriedades dos materiais, como em Schweiger, Marcher e Schädlich (2014) para considerar o comportamento diferido;
- d) **influência do pré-suporte e do revestimento primário:** estudos que tentam incorporar os efeitos causados pelos elementos e técnicas que servem para estabilizar a cavidade antes e durante a escavação como, por exemplo, tirantes frontais, enfilagens, congelamento, escavação parcializada e iteração com o escudo da tuneladora. Nesses estudos, os elementos físicos de pré-suporte podem ser incorporados de forma discreta (o que exige malhas bastante refinadas), incorporada no interior do elemento finito ou introduzida na lei constitutiva do maciço de forma homogeneizada. Essa ultima abordagem é utilizada, por exemplo, por Bernaud et al. (2009) e Couto (2011) para considerar tirantes radiais e frontais.

- e) **problemas dinâmicos:** estudos que tem por finalidade implementar e estudar os efeitos das vibrações induzidas por trem, explosões na proximidade ou sismos como, por exemplo, em Chan e Ou (2008).
- f) **métodos numéricos alternativos:** embora o método dos elementos finitos seja o mais difundido, existem outros métodos de solução numérica como o das diferenças finitas e o método dos elementos de contorno. Outras abordagens menos convencionais também são utilizadas como o método das redes neurais, como, por exemplo, Shi, Ortigao e Bai (1998) e métodos discretos, como em Maynar e Rodríguez (2005). Uma revisão mais completa de diversos modelos e métodos numéricos utilizados em mecânica das rochas pode ser encontrada em Jing (2003).

A presente tese estará focada apenas no primeiro e terceiro item acima, sendo o terceiro o de maior interesse, devido à modelagem da lei constitutiva elastoplástica-viscoplástica do maciço.

## 4.2 INFLUÊNCIA DA ESCAVAÇÃO E O CONCEITO DE CONVERGÊNCIA DA SEÇÃO

De uma forma geral, do ponto de vista do maciço, a escavação de um túnel nada mais é do que uma perturbação no seu estado natural de equilíbrio devido à remoção de parte do maciço. Essa perturbação induzirá o maciço a uma nova configuração de equilíbrio que mobilizará tensões tangenciais desviando, dessa forma, a direção das tensões principais no entorno da escavação. Através desse **arqueamento das tensões**, o próprio maciço participa da sustentação da cavidade. Esse arqueamento pode ser decomposto em dois arcos longitudinais (contidos nos planos horizontal e vertical) e um arco transversal (no plano perpendicular ao eixo do túnel), tal como mostrado na Figura 4.1.

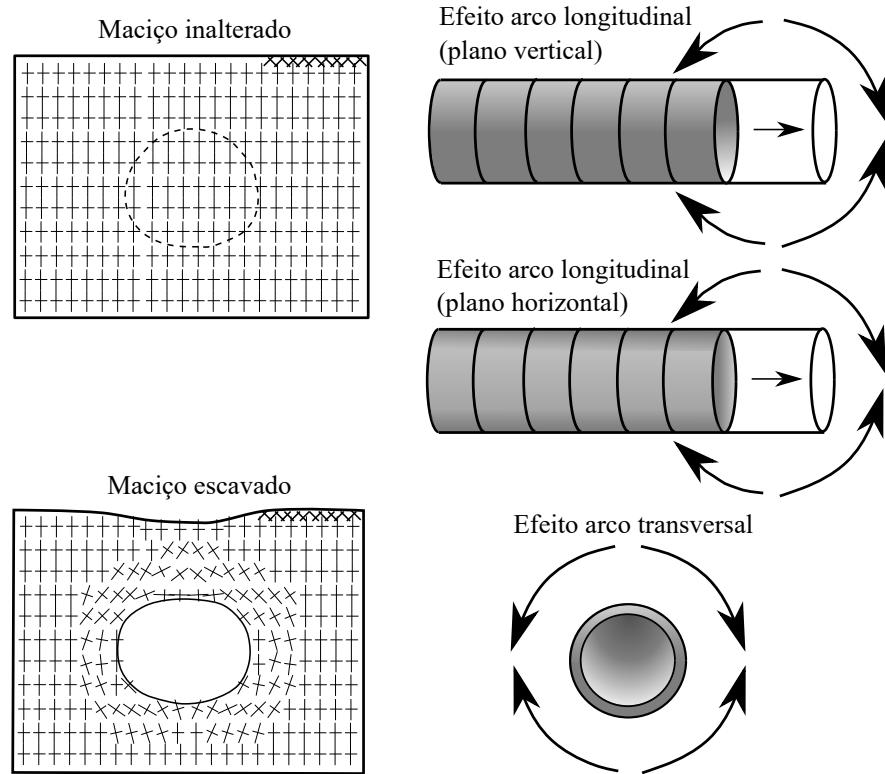


Figura 4.1 – Ilustração do arqueamento das tensões principais (adaptado de: França (2006, p. 10-11))

A presença dos três arcos na zona que acompanha a frente de escavação faz com que essa região tenha um campo de deslocamentos tridimensional convergente em direção à face de escavação. No entanto, conforme essa frente avança e se afasta, apenas o arqueamento transversal se mantém, fazendo com que o campo de deslocamentos seja bidimensional contido no plano transversal ao eixo do túnel. Em vista disso, é conveniente caracterizar três zonas no interior do maciço: uma zona não perturbada pela escavação, uma zona de influência da frente de escavação e uma zona fora dessa influência (Figura 4.2).

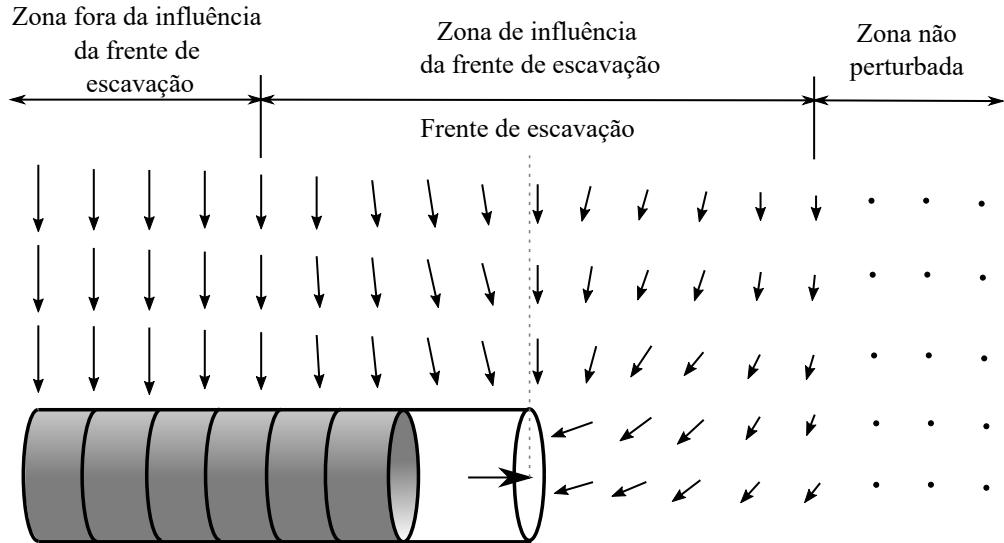


Figura 4.2 – Campo vetorial de deslocamentos no maciço durante a escavação de um túnel (adaptado de: França (2006, p. 12))

O parâmetro geométrico mais simples e representativo do comportamento de um túnel é o fechamento de sua cavidade, também conhecido como **convergência**. Se um túnel circular estiver em um maciço homogêneo, isotrópico, submetido a um estado de tensões inicial geostático-hidrostático, o campo de deslocamentos no entorno de uma seção fora da zona de influência da frente de escavação estará contido no plano transversal e será puramente radial, podendo ser expresso por uma função  $u(r)$ . Nesse caso, a convergência  $U_i$  é definida pela razão entre o deslocamento da cavidade e seu raio inicial  $U_i = -u(r = R_i)/R_i$ . A presença do sinal negativo é opcional e serve para que a convergência fique positiva se a seção diminuir, ou seja,  $u(R_i) < 0$  (Figura 4.3).

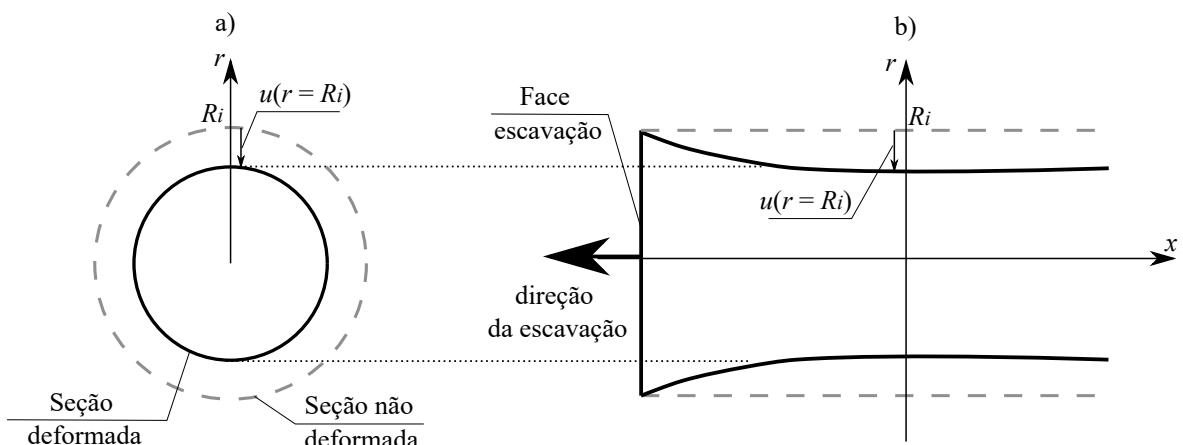


Figura 4.3 – Ilustração das medidas geométricas que compõe a convergência de uma seção circular: a) corte transversal, b) corte longitudinal

Dependendo da anisotropia das tensões *in situ* ou do formato da seção, sua deformada pode não ser radial e, na prática, podem-se usar várias medidas para compor o cálculo da convergência da seção, como exemplificado na Figura 4.4.

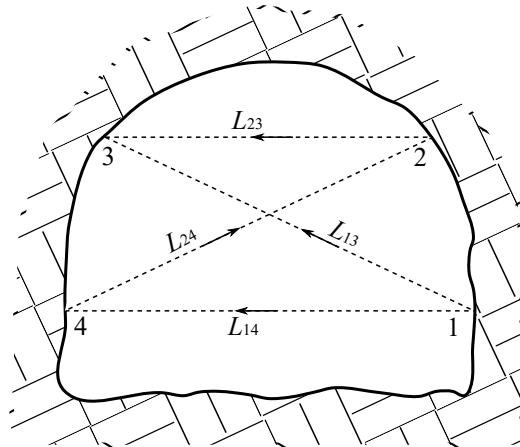


Figura 4.4 – Medidas da convergência em quatro direções de uma seção não circular (adaptado de: Panet (1995, p. 8))

Outro aspecto importante para determinar a influência da escavação e caracterizar o comportamento global do túnel é a representação gráfica das convergências ao longo do seu eixo longitudinal, conhecida como **perfil de convergências**. Por exemplo, com o objetivo de quantificar a extensão da zona de influência da frente da escavação, Hanafy & Emery (1980) graficaram o perfil de convergências do seu modelo de um túnel circular em um maciço homogêneo, isotrópico e elástico linear (Figura 4.5).

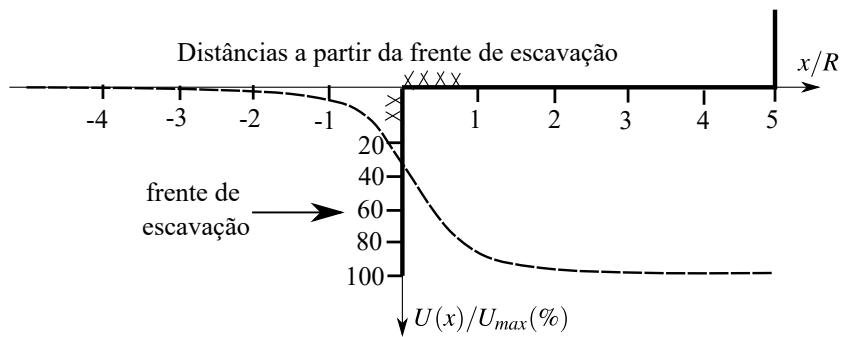


Figura 4.5 – Perfil de convergências próximo à frente de escavação (adaptado de: Hanafy e Emery (1980) *apud* Couto (2011, p. 42))

Como se pode ver na Figura 4.5, dentro das hipóteses dos autores, a partir de cinco raios da face de escavação a convergência atinge seu valor máximo  $U_{max}$ . Já na face, em  $x/R = 0$ , a convergência é superior à 35% do valor máximo, sendo que a um raio de distância a convergência é de aproximadamente 80% da total e quase 100% se tiver ultrapassado dois raios (Hanafy e Emery (1980) *apud* Couto (2011, p. 42)).

### 4.3 MECANISMOS DE RUPTURA EM TÚNEIS PROFUNDOS

A execução de túneis se tornou bastante segura após os preceitos filosóficos e teóricos do método empírico NATM (*New Austrian Tunneling Method*) desenvolvido por Rabcewicz (1964a, 1964b e 1965) e Rabcewicz e Golser (1973). E cada vez mais os estudos numéricos vêm ajudando os projetistas na tomada de decisões seguras durante a fase de projeto e execução. Contudo, apesar dessa abordagem empírica e numérica ter diminuído significativamente o número de incidentes estes ainda existem. Compilados de acidentes podem ser encontrados em estudos da Health and Safety Executive (HSE) (1996) e de pesquisadores como Stallmann (2005), Seidenfuß (2006) e Sousa (2010), tal como reunido por Špačková (2012) na Figura 4.6.

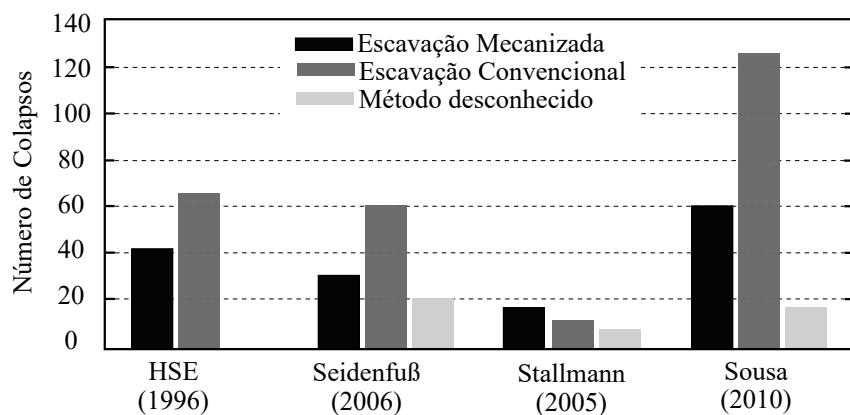


Figura 4.6 – Número de incidentes em quatro banco de dados descritos por autor e método de escavação (adaptado de: Špačková (2012, p. 19))

Sousa (2010), por exemplo, agrupou os incidentes, tanto de túneis profundos como superficiais, em nove tipos, tal como apresentado na Figura 4.7.

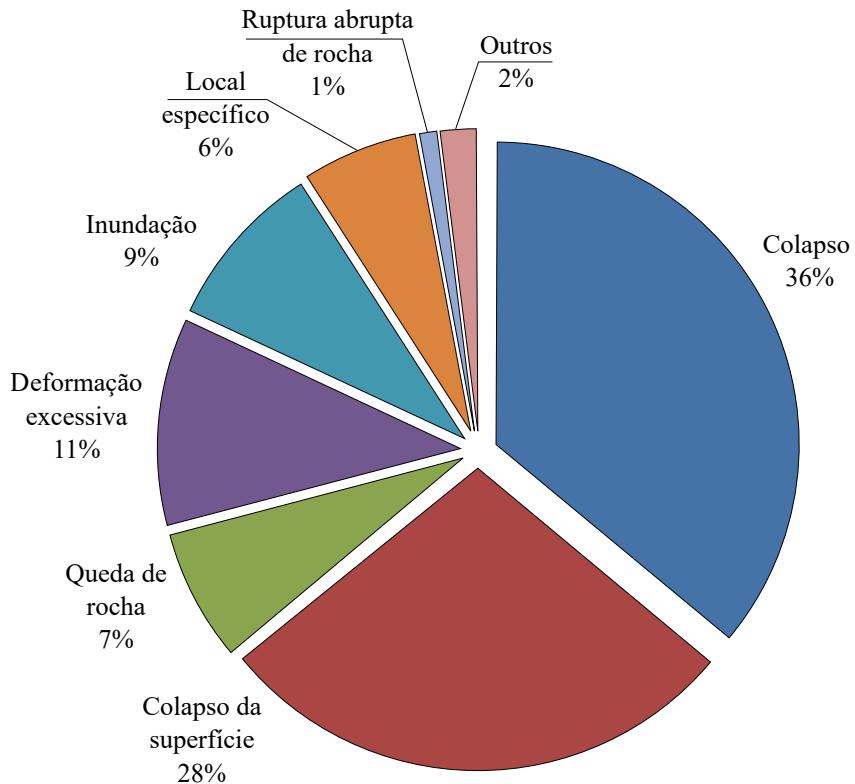


Figura 4.7 – Distribuição de incidentes de acordo com nove tipologias  
(adaptado de: Sousa (2010, p. 82))

Contudo, de forma geral, no comportamento de túneis profundos executados em maciços aparentemente contínuos, ou seja, ausência de grandes descontinuidades ou acidentes geológicos, identifica-se dois mecanismos principais de colapso (ou ruptura): *Spalling* (descamação ou fragmentação) e *Squeezing* (deformações excessivas diferidas no tempo).

O *Spalling* é preponderante em maciço muito resistente, inicialmente pouco fraturado, no qual o nível de energia para iniciar a fissuração e consequente propagação costuma ser alto. Durante a redistribuição das tensões, causada pela escavação, as fissuras vão se desenvolvendo e destacando regiões da rocha no contorno da seção. Essas sofrem então uma descamação, ou ainda, ruptura por flambagem e tem-se, nesse último caso, uma repentina liberação de energia. Uma ruptura abrupta da rocha (*rockburst*). Esse comportamento é refletido na curva tensão-deformação de uma amostra do maciço, por um significativo amolecimento após o pico de resistência, caracterizando, dessa forma, a rocha como frágil (KLEINE, 2007, p. 83). A Figura 4.8 exemplifica esse mecanismo e a Figura 4.9 mostra a seção após tal colapso.

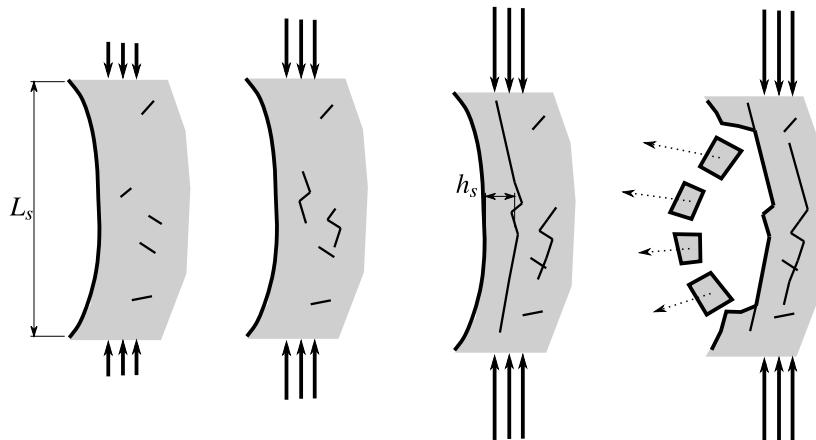


Figura 4.8 – Mecanismo de ruptura por *Spalling* de um comprimento  $L_s$  junto à seção do túnel: detalhamento do crescimento das fissuras e flambagem de uma profundidade  $h_s$  da rocha no contorno da seção (adaptado de: Germanovich e Dyskin (2000, p. 267))

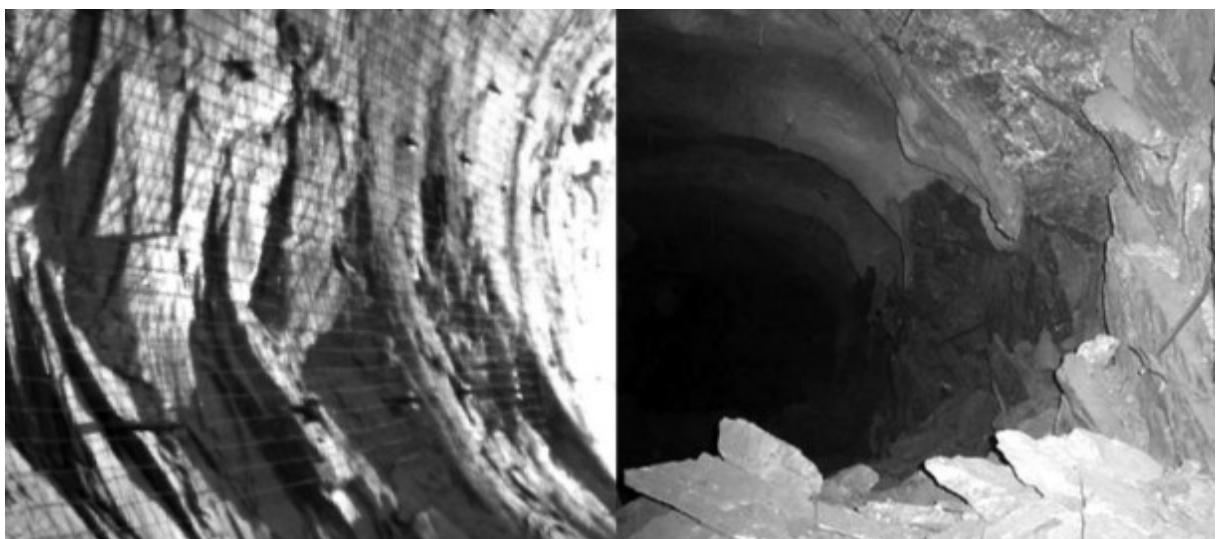


Figura 4.9 – À esquerda uma seção remanescente após moderada fragmentação e quebra em um túnel escavado com TBM e à direita uma seção em que parte do contorno apresentou instabilidade (flambagem) em um túnel escavado de forma não mecanizada (fonte: Diederichs (2007, p. 1084))

Já o *Squeezing* é um modo de falha relacionado ao cisalhamento e encontrado principalmente em túneis profundos em condições de grandes tensões *in situ*. Inicia-se quando a fissuração está suficientemente avançada, causando uma diminuição nas propriedades mecânicas do maciço, sem gerar instabilidade no contorno da seção. Essa diminuição das características mecânicas associada ao desenvolvimento da fissuração é progressiva e controlada, em especial, devido ao confinamento que reina no maciço. Ao contrário do primeiro mecanismo, a energia arma-

zenada pela redistribuição das tensões é dissipada de forma gradual por deformações. Esse comportamento está intimamente relacionado com o fenômeno de fluênciа descrito na próxima seção a qual comprehende um dos comportamentos passíveis de modelar e estudar com a parte viscoplástica da solução proposta nessa tese.

A Figura 4.10 ilustra a evolução da convergência devido a esse fenômeno. Tal comportamento também é visto em galerias para estocagem de rejeitos radioativos em maciços argilosos profundos. Essas argilas possuem baixa condutividade hidráulica, portanto, pouca difusão molecular, sendo ideais para estocar esse material. Porém, apresentam esse comportamento diferido e que pode comprometer o projeto no longo tempo requerido para estabilização desse material radioativo. Estudos como os de Rousset (1988) e Armand et al. (2013) são alguns exemplos de investigações nesse sentido. Laboratórios como o HADES (*High Activity Disposal Experimental Site*) na Bélgica e *Meuse/Haute-Marne* (Figura 4.11) em Paris, são exemplos de túneis para estocagem radioativa que apresentam esse fenômeno.

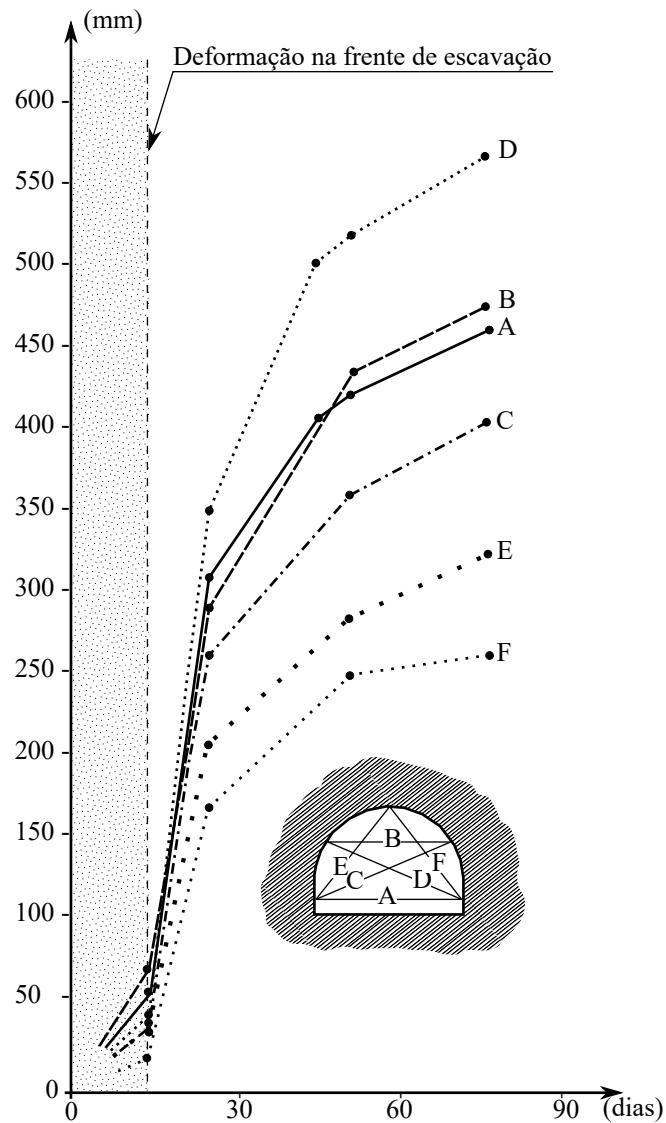


Figura 4.10 – Evolução da convergência do túnel Fréjus (adaptado de: Lunardi (1980, p. 17))

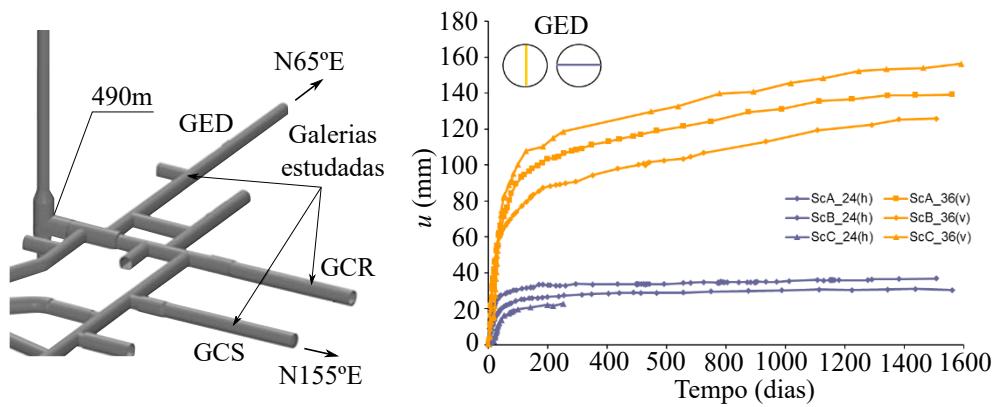


Figura 4.11 – Evolução do fechamento da seção (convergência) na galeria GED do laboratório *Meuse/Haute-Marne* (adaptado de: Guayacán-Carrillo et al. (2016, p. 103))

## 4.4 INFLUÊNCIA DA REOLOGIA DO MACIÇO

### 4.4.1 Comportamento instantâneo

Para caracterizar o comportamento de curto prazo do maciço, o ensaio triaxial associado à medição da variação do volume é comumente utilizado. Esse ensaio clássico na mecânica das rochas permite estudar as diferentes fases do comportamento: elástica, plástica, ruptura e pós-ruptura. As medidas da variação do volume permitem fazer estudos de outros aspectos do comportamento, como o coeficiente de Poisson e a dilatância. Esse ensaio, de forma resumida, consiste em submeter uma amostra cilíndrica do maciço a um estado de tensões triaxial hidrostático e, após atingido esse estado, leva-lá à ruptura através do aumento da carga axial (o desviador). Rousset (1988), por exemplo, caracterizou o comportamento de curto prazo de maciços argilosos profundos em frágil (argila rígida) e dúctil (argila plástica). Um maciço rígido pode ser visto na Figura 4.12.

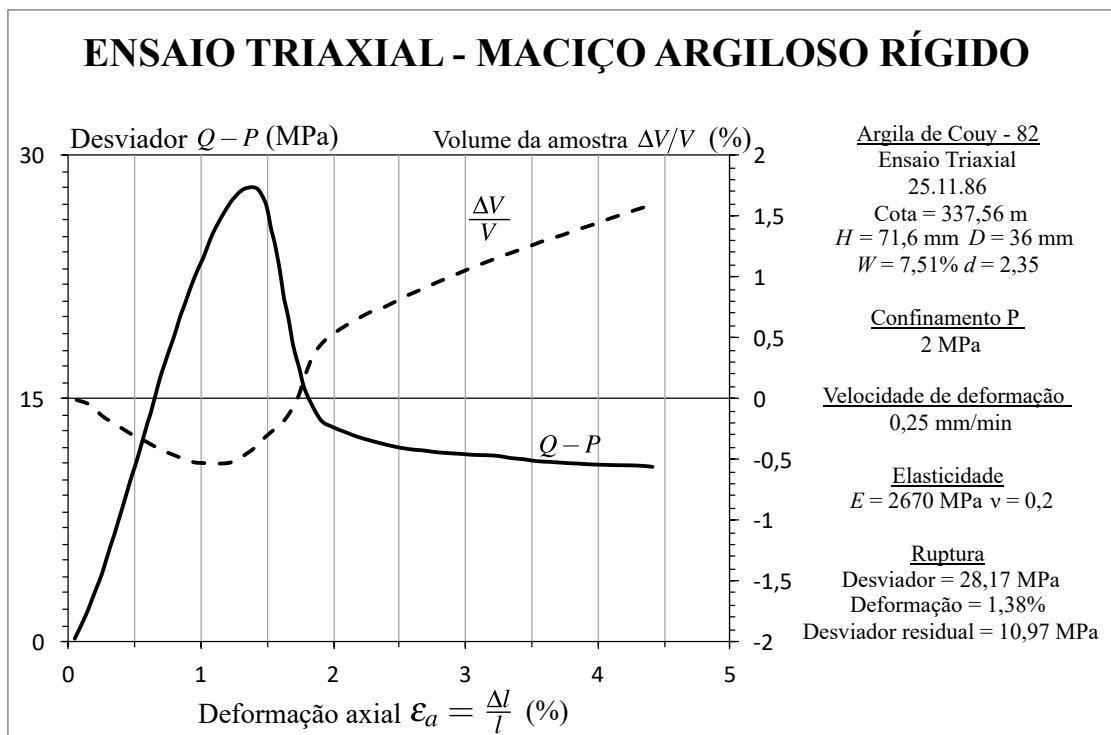


Figura 4.12 – Ensaio triaxial com medição da variação do volume para o caso de um maciço argiloso rígido (adaptado de: Rousset (1988, p. 35))

No comportamento da Figura 4.12 pode-se destacar as seguintes fases (ROUSSET, 1988, p. 34):

- a) **fase elástica** ( $0 < \varepsilon_a \leq 0,8\%$ ): o comportamento do maciço é linear elástico e, ao mesmo tempo, o volume da amostra diminui linearmente, os dois parâmetros

elásticos, módulo de Young e Poisson, são facilmente obtidos;

- b) **fase pré-ruptua** ( $0,8\% \leq \varepsilon_a \leq 1,3\%$ ): o desviador continua aumentando, mas a curva  $Q - P$  não é mais linear, indicando que fenômenos irreversíveis passam a ocorrer. Ao mesmo tempo, a taxa de redução do volume diminui. Nessa fase também pode-se notar que os fenômenos irreversíveis ocorrem primeiro na curva  $\Delta V/V$ , em torno de 0,8% da deformação enquanto o desviador é de 65% do seu valor máximo e sua dependência ainda é linear;
- c) **fase de ruptura** ( $1,3\% \leq \varepsilon_a \leq 1,6\%$ ): o desviador cai acentuadamente, o que reflete a fragilidade do comportamento dessa argila. Enquanto isso, o volume da amostra aumenta drasticamente;
- d) **fase pós-ruptura** ( $1,6\% \leq \varepsilon_a \leq 5\%$ ): o desviador evoluiu pouco e mantém um valor residual de 40% do desvio máximo. Esta resistência residual ocorre pelo atrito ao deslizamento na superfície de ruptura que apareceu durante o carregamento. Nessa fase, o volume aumenta muito, o que reflete o comportamento altamente dilatante do material (2% superior ao volume original na deformação de 5%).

No caso de um maciço argiloso dúctil, o comportamento é diferente, tal como mostrado na Figura 4.13.

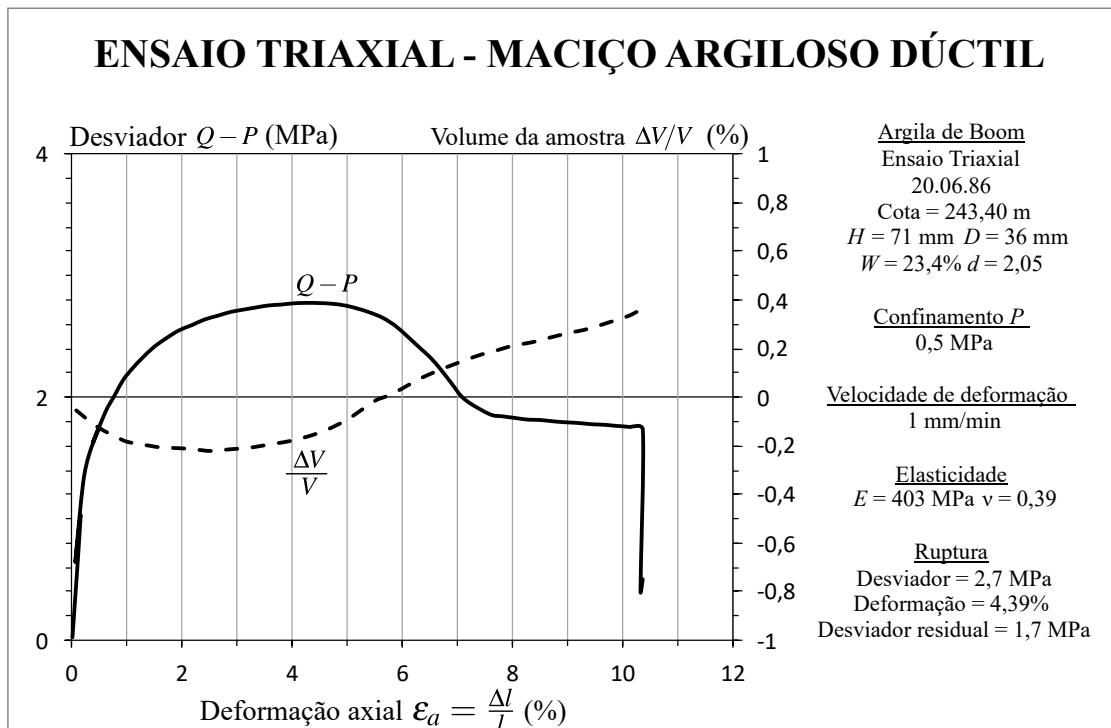


Figura 4.13 – Ensaio triaxial com medição da variação do volume para o caso de um maciço argiloso dúctil (adaptado de: Rousset (1988, p. 35))

No comportamento da Figura 4.13 podem-se destacar as seguintes fases (ROUSSET, 1988, p. 35):

- a) **fase elástica** ( $0 < \epsilon_a \leq 0,3\%$ ): pode-se ver que para esse caso, onde ambas as curvas são lineares, é uma fase muito pequena;
- b) **fase plástica com endurecimento** ( $0,3\% \leq \epsilon_a \leq 2\%$ ): durante essa fase o desviador continua a aumentar, mas a uma taxa decrescente. Da mesma forma, a redução do volume também teve sua taxa diminuída, mas o comportamento segue ainda de contração;
- c) **fase plástica perfeita** ( $2\% \leq \epsilon_a \leq 5\%$ ): o desviador agora segue quase constante e o volume da amostra acompanha o comportamento. Essa fase conduz a uma deformação significativa, superior a 5%;
- d) **fase plástica com amolecimento** ( $5\% \leq \epsilon_a \leq 8\%$ ): a resistência da amostra diminui gradualmente até um platô residual e o volume começa a aumentar;
- e) **fase plástica residual** ( $8\% \leq \epsilon_a \leq 10\%$ ): o desviador é agora novamente constante, cerca de 60% do valor máximo. O volume da amostra aumenta sensivelmente tendo uma dilatância moderada.

Para um maciço homogêneo, isotrópico e elástico linear a solução analítica para o campo de deslocamentos e tensões no entorno de uma seção circular afastada da zona de influência da face de escavação é conhecida desde Lamé (1852) e Kirsch (1898), sendo que este último generalizou a solução para um estado de tensões *in situ* anisotrópico. Contudo, como visto na Figura 4.12 e Figura 4.13, a massa rochosa não é um material perfeitamente elástico e dependendo da magnitude das tensões *in situ* e do desvio das tensões causado pela escavação, o túnel pode apresentar uma zona plastificada ao redor da cavidade. Quando a seção do túnel é circular, o maciço homogêneo, isotrópico, elastoplástico, com tensões iniciais geostáticas-hidrostáticas, essa zona plástica é circular e caracterizada por um raio plástico  $R^p$ . Figura 4.14 ilustra a solução analítica de um maciço elástico e um elastoplástico. Apesar de a solução depender da forma da lei constitutiva elastoplástica, em geral, para túneis não revestidos, há uma diminuição nas tensões ao redor da cavidade e um aumento na convergência.

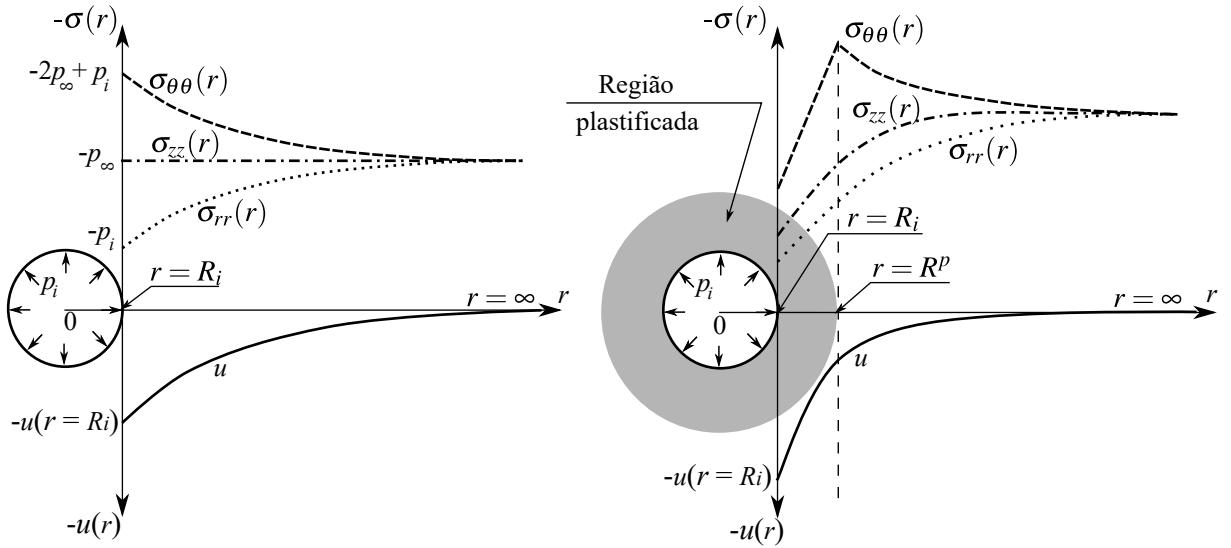


Figura 4.14 – Deslocamentos e tensões no entorno de um maciço submetido à pressão geostática-hidrostática  $p_\infty$  e pressão interna  $p_i$  no interior da seção do túnel. À esquerda, maciço elástico e à direita, elastoplástico.

Algumas soluções analíticas considerando leis elastoplásticas específicas para túneis não revestidos podem ser encontradas, por exemplo, em Salençon (1969), Hoek e Brown (1980), Brown et al. (1983), Detournay e Fairhurst (1987), Corbetta (1990), Carranza-Torres e Fairhurst (1999), Carranza-Torres (2004), Sharan (2003, 2005) e Alejano et al. (2009).

Um dos objetivos nessa tese é justamente formular e implementar um modelo constitutivo capaz de considerar esse comportamento instantâneo elastoplástico conjuntamente com o fenômeno diferido no tempo.

#### 4.4.2 Comportamento diferido no tempo

O comportamento viscoso do maciço, caracterizado pela deformação contínua no tempo, mesmo sobre tensão e temperatura constantes, é denominado **fluênciça** (*Creep*). E ocorre devido aos deslizamentos, quebras e acomodações no interior do maciço e, também, em conjunto com transporte e difusão de massa fluída. Em solos argilosos com condições drenadas, parte da fluênciça é dada conjuntamente com a dissipação de poro-pressão. Em maciços rochosos, com pouca umidade, essa condição está bastante relacionada com o avanço de trincas e fissuras sobre grande confinamento. Esse comportamento é geralmente caracterizado através de um ensaio triaxial de fluênciça com uma amostra do maciço. Nesse teste, sobre condições de temperatura e umidade controladas, registram-se as deformações axiais da amostra temporalmente, mantendo-se uma pressão hidrostática e um dado desviador constante. Dessa forma, tem-se a curva típica apresentada na Figura 4.15.

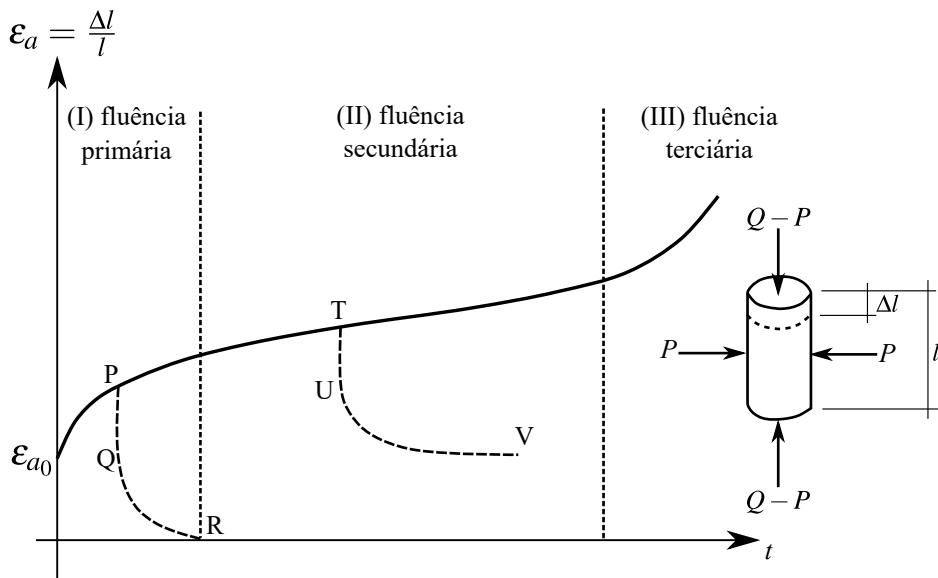


Figura 4.15 – Curva característica em um ensaio de fluência com os três estágios de comportamento (adaptado de: Costa (1984, p. 107))

Conforme pode-se ver na Figura 4.15, no instante de aplicação da carga axial o corpo de prova sofre uma deformação instantânea inicial  $\epsilon_{a0}$  elástica ou, dependendo do nível das tensões, elastoplástica. Conforme o tempo avança as deformações continuam aumentando, porém, a uma taxa decrescente. Esse estágio é chamado de **fluência primária** (ou transitória), pois em seguida a taxa de deformação diminui até ficar constante iniciando dessa forma o segundo estágio chamado de **fluência secundária** (permanente ou estacionária). Após essa fase, que pode consumir a maior parte do tempo, as deformações podem evoluir para o terceiro estágio chamado de **fluência terciária** (instável), onde a taxa de deformação passa a aumentar até que o material atinge a ruptura (COSTA, 1984). Contudo, dependendo do nível das tensões, nem sempre a amostra apresenta os três estágios, podendo, inclusive, haver uma estabilização das deformações no tempo.

Além desses estágios de comportamento citados, a recuperação das deformações é outro fenômeno característico de materiais em regime de fluência. Se durante a fluência primária for retirada a carga desviadora o corpo recuperará a sua configuração original seguindo a trajetória  $\overline{PQR}$ , sendo o trecho  $\overline{PQ}$  uma recuperação rápida e instantânea e o trecho  $\overline{QR}$  uma recuperação lenta, assintótica e completa (salvo se houverem deformações plásticas durante o carregamento). Nesse caso, em que a recuperação é completa, o maciço está em regime viscoelástico. Contudo, se a descarga for feita no segundo estágio, haverá o mesmo comportamento instantâneo (trecho  $\overline{TU}$ ) e assintótico (trecho  $\overline{UV}$ ), mas a recuperação pode não ser mais completa. Nesse caso, evidencia-se o material comportando-se em seu regime viscoplastástico (COSTA, 1984). Um exemplo típico desse ensaio pode ser visto na Figura 4.16.

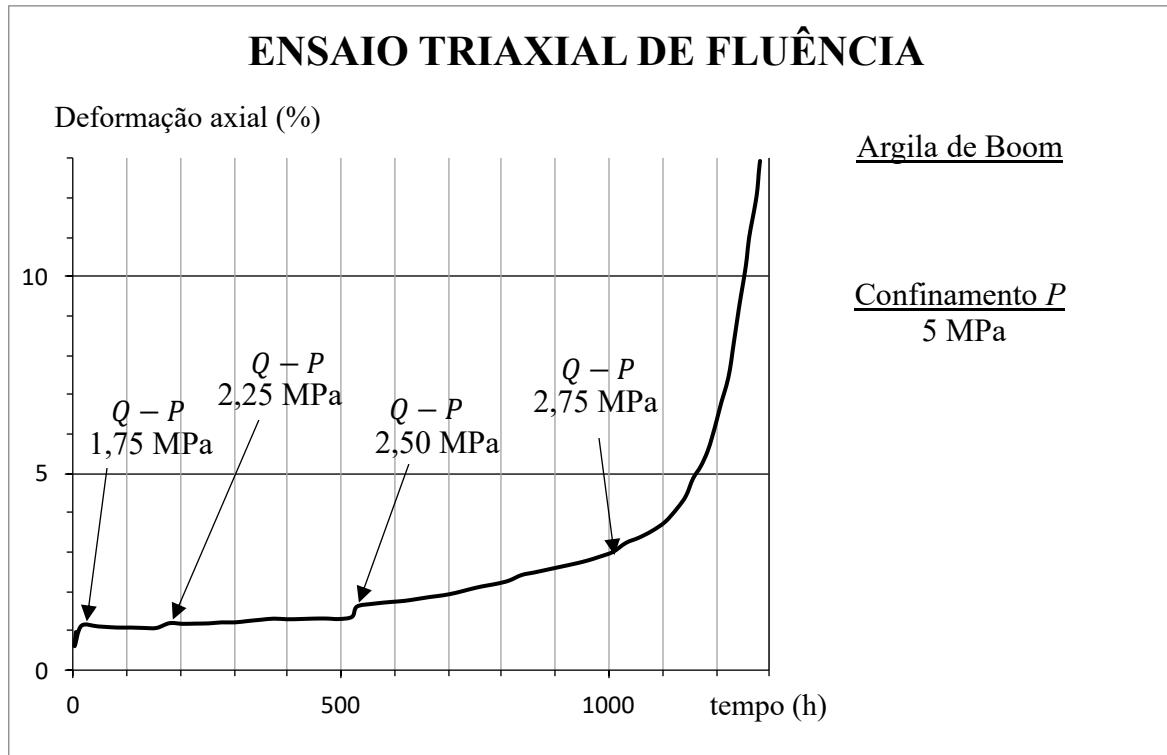


Figura 4.16 – Ensaio triaxial de fluência da Argila de Boom (adaptado de: Rousset (1988, p. 42))

Na Figura 4.16, pode-se destacar as seguintes fases (ROUSSET, 1988, p. 42):

- para um pequeno desviador (1,75 MPa) a deformação aumenta rapidamente no início. Sua evolução, em seguida, diminui e se estabiliza depois de alguns dias. Nessa etapa foi observado apenas a fase primária, transitória;
- para um desviador moderado (2,25 MPa), após uma fase rápida, mas desacelerada (fase primária), observa-se o desenvolvimento de uma fase com taxa de deformação constante ( $\dot{\varepsilon}_a \simeq 7 \cdot 10^{-6} \text{ h}^{-1}$ ). Essa é uma fase de fluência secundária, que leva a deformações relativamente importantes, da ordem de 3,5% após três meses;
- para um desviador forte (2,75 MPa), próximo do limite máximo de resistência do comportamento instantâneo (Figura 4.13), a taxa de deformação da fase secundária é cinco vezes maior do que a anterior. Após duas semanas, leva a um aumento na taxa de deformação (fase terciária) e, finalmente, a ruptura da amostra, logo que a deformação ultrapassa 6%.

Como pode-se ver na Figura 4.16, o ensaio de fluência permite conhecer os diferentes limiares que separam os diferentes comportamentos viscosos: fluência primária, secundária, secundária

com terciária seguida de ruptura. Também é possível estimar a velocidade das deformações por fluência durante a fase secundária, dependendo da magnitude do desviador. Dessa forma, pode-se obter os principais parâmetros de viscosidade para o modelo do material. Cabe salientar que a fluência depende da interação entre fatores intrínsecos do maciço (como a forma, defeitos e composição da micro e macroestrutura) com fatores extrínsecos (como a magnitude da tensão desviadora, temperatura, pressão de confinamento e umidade). Consequentemente, os ensaios procuram simular esses fatores externos de modo a obter parâmetros mais próximos da realidade para uma correta modelagem. Maiores detalhes sobre ensaios de fluência e caracterização desse comportamento podem ser obtidos em Rousset (1988), para o caso de maciços argilosos profundos ou ainda em Feda (1992), Hunsche (1994), Dusseault e Fordham (1993) e Cristescu e Hunsche (1998) para outros diversos casos.

Portanto, no comportamento do túnel, além da deformação instantânea (resultante da redistribuição das tensões e possível plastificação do maciço ao redor da cavidade), deformações diferidas podem ocorrer e, dado a magnitude dos efeitos, pode tender a estabilização ou levar o sistema maciço-revestimento a danos e colapso. De forma ilustrativa, a Figura 4.17 mostra a convergência  $U$  em função do tempo  $t$  e do avanço da escavação  $x$  para uma dada seção.

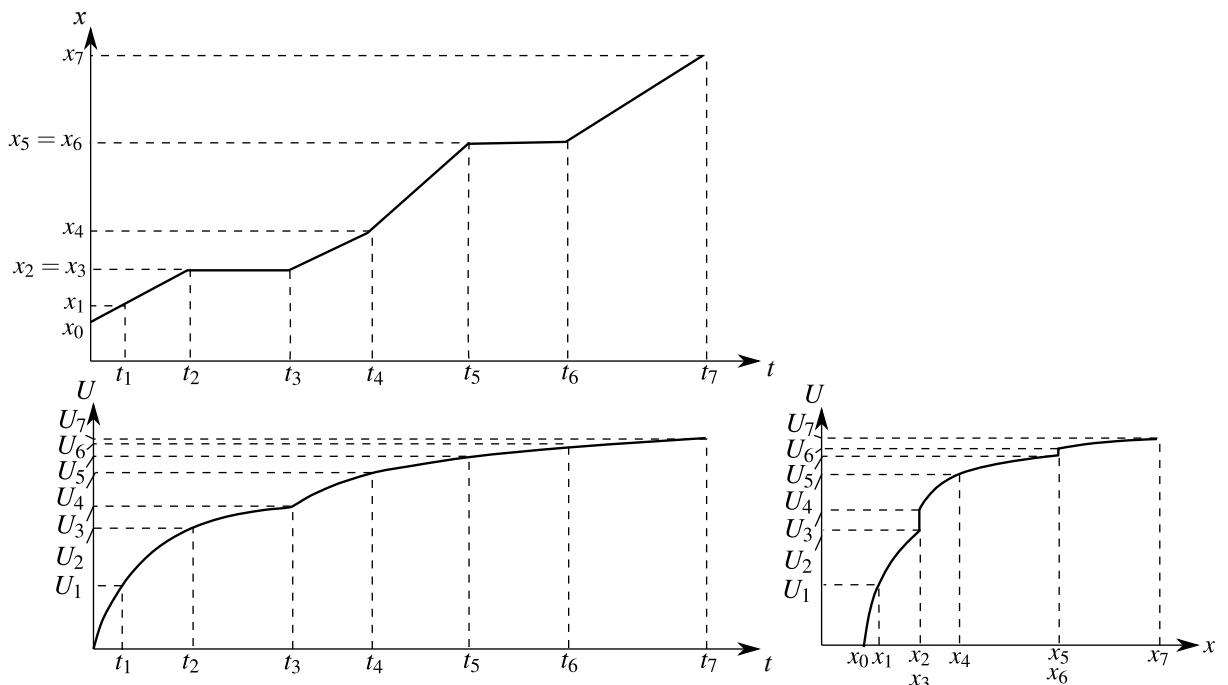


Figura 4.17 – Evolução da convergência  $U$  no tempo  $t$  em função do avanço da escavação  $x$  (adaptado de: Panet (1995, p. 12))

Como pode-se ver na figura acima, mesmo sem escavar nos intervalos  $[t_2, t_3]$  e  $[t_5, t_6]$  a convergência não é constante, tal como seria em um maciço apenas elástico ou elastoplástico. Além disso, nesse caso ilustrativo, a convergência não só evoluiu como também se estabiliza em uma

assintótica com o tempo, indicando que a fluênciá está em um regime primário ou secundário.

Do ponto de vista da modelagem há diversas formas de introduzir esse comportamento nas análises de túneis, sejam em soluções analíticas ou numéricas, diversas leis constitutivas são empregadas. Podem-se classificar essas leis como:

- a) **empírico-experimentais**: geralmente são leis expressas por funções ajustadas empiricamente. Para tal existem funções potenciais, como em Obert (1965), exponeciais em Singh e Mitchell (1968) e hiperbólicas como em Mesri et al. (1981) e Phienwej, Thakur e Cording (2007);
- b) **acoplamento hidro-mecânico**: leis que consideram o maciço como sendo constituído por uma fase sólida e fluída. Exemplos dessa abordagem podem ser encontrados nos trabalhos de Griffiths (1994), Leem e Kemeny (1999), Wong et al. (2008), Dele-ruyelle et al. (2014) e Prassetyo e Gutierrez (2018).
- c) **Viscoelásticas**: leis formuladas através da analogia com sistemas mecânicos derivados da associação de elementos simples (mola e amortecedor). Estudos com essa abordagem podem ser encontrados em Sakurai (1978), Panet (1979), Sulem, Panet e Guenot (1987), Ladanyi e Gill (1988), Goodman (1989), Pan e Dong (1991a, 1991b), Fahimifar et al. (2010), Wang, Utili e Jiang (2014) e Wang et al. (2018);
- d) **Viscoplásticas**: leis formuladas através da teoria da plasticidade dependente do tempo, que, tal como as leis viscoelásticas, também possuem uma analogia com sistemas mecânicos elementares, mas introduzem um elemento de atrito, para representar o estado de tensões a partir do qual o fenômeno passa a ter importância. Leis desse tipo podem ser encontradas nos estudos de Bérest e Nguyen (1983), Fritz (1984), Cristescu (1985, 1988), Ottosen (1986), Bernaud (1991), Gioda e Cividini (1994), Boidy, Bouvard e Pellet (2002), Sekine et al. (2009) e Roateşti (2012,2014).

Um exemplo da magnitude dos efeitos viscosos frente às leis elásticas e elastoplásticas em túneis profundos, pode ser vista no perfil de convergências da Figura 4.18 obtidas de análises em axissimetria. Quando se considera no modelo apenas a lei elastoviscoplástica em regime secundário, tal possui um comportamento intermediário entre as leis elásticas e elastoplásticas. Além disso, quanto mais rápido a escavação, mais a resposta se aproxima da solução em elasticidade e quanto mais lenta mais se aproxima da elastoplasticidade. Isso é uma característica própria dos modelos viscoplásticos, por exemplo.

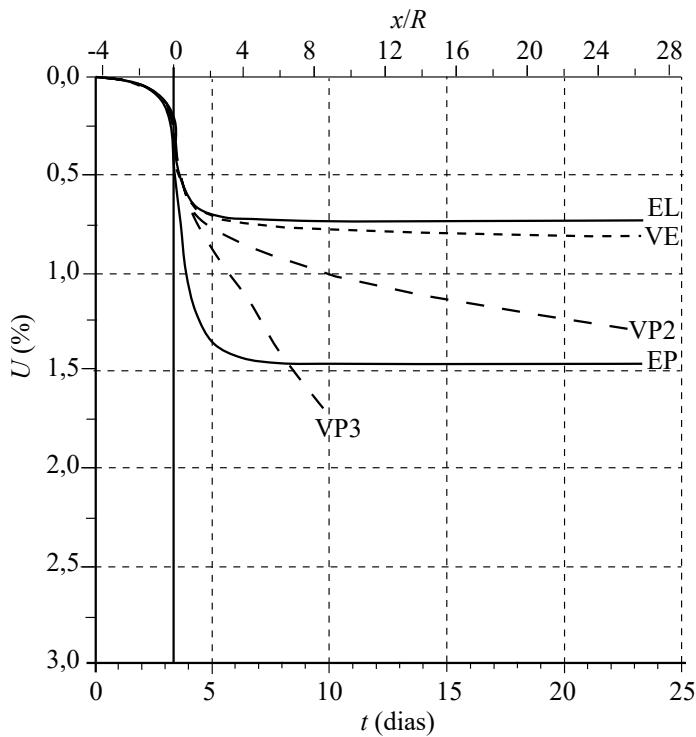


Figura 4.18 – Perfil de convergências, em análises numéricas axissimétricas com maciço elástico (EL), elastoplástico (EP), viscoelástico (VE), viscoplástico com fluência no regime secundário (VP) e em regime terciário (VP3), todos na ausência de revestimento (adaptado de: Sterpi e Gioda (2009, p. 329))

Outra abordagem é a combinação de diversos comportamentos, tanto instantâneos quanto diferidos, e esse é o principal enfoque dessa tese, que compreende o desenvolvimento e implementação de um comportamento elastoplástico-viscoplástico.

#### 4.4.3 Alguns estudos considerando leis elastoplásticas e viscoplásticas

Alguns estudos considerando leis elastoplásticas-viscoplásticas podem ser encontrados em Rousset (1988, 1990), Piepi (1995), Purwodihardjo e Cambou (2005), Kleine (2007), Shafiq, Taha e Chik (2008), Debernardi e Barla (2009), Souley et al. (2011) e Manh et al. (2015). A seguir alguns comentários sobre cada um desses estudos.

**Rousset (1988)**, no intuito de estudar túneis em maciços argilosos profundos (usados para estocagem de rejeitos radioativos) fez um excelente trabalho de caracterização experimental do comportamento desses e classificou-os em rígidos e dúcteis. Propôs um modelo elastoplástico-viscoplástico com critério tanto de Tresca quanto Mohr-Coulomb, perfeito (para as argilas rígidas) e com amolecimento bi-linear (para as dúcteis). O modelo de Perzyna (1966) foi adotado como sendo o mecanismo viscoso com as mesmas superfícies de escoamento da elastoplasticidade. O

seu trabalho comprehende principalmente soluções analíticas.

Segundo os mesmos passos de Rousset (1988), **Piepi (1995)** estudando argilas rígidas, desenvolveu um cálculo semi-analítico para um túnel circular em um maciço elastoplástico-viscoplástico com critério de Tresca sem endurecimento ou amolecimento. Também, no mesmo trabalho implementou essa lei constitutiva (entre outras como von-Mises, Drucker-Prager e Mohr-Coulomb) em elementos finitos, para abordar túneis em axissimetria, calibrou os parâmetros através de ensaios e verificou os resultados com sua solução analítica.

**Purwodihardjo e Cambou (2005)**, apresentam o modelo elastoplástico-viscoplástico composto pelo modelo elastoplástico CJS desenvolvido por Cambou e Jafari (1987), que, além de dividir o mecanismo em uma parcela volumétrica e desviatória, leva em conta a dependência da densidade do maciço através da teoria do estado crítico, como pode-se ver em Maleki, Dubujet e Cambou (2000). A parcela diferida é dada pelo modelo viscoplástico de Perzyna (1966) com o parâmetro de viscosidade em função da distância entre o estado de tensões e a superfície de ruptura, para representar a fase terciária. O critério viscoplástico é inspirado na teoria da superfície delimitadora de Kaliakin e Dafalias (1990). O modelo foi calibrado com os ensaios triaxiais feitos por Piepi (1995). Por fim, seu modelo foi utilizado para analisar um estudo de caso referente ao túnel de *Tartaigneille*, localizado entre *Valence* e *Montélimar* (França), utilizando análises axissimétricas e em estado plano de deformações.

**Kleine (2007)** propõe um novo modelo reológico chamado de L&K (Laigle & Kleine) para prever o comportamento a curto, médio e longo prazo de maciços rochosos. Esse modelo é baseado no modelo CJS com o critério de plasticidade de Hoek-Brown. A parcela diferida também é dada por um modelo viscoplástico de Perzyna (1966) não associado. É aplicado em dois estudos de caso: do laboratório de pesquisas nucleares canadense da AECL (*Atomic Energy of Canada Limited*) localizado no interior do granito *Lac du Bonnet*, e da galeria GMR do laboratório *Meuse/Haute-Marne*.

**Shafiq, Taha e Chik (2008)** incorporaram o modelo elastoplástico-viscoplástico de Kaliakin e Dafalias (1990) e Kaliakin (2005) em um programa de elementos finitos escrito em *Fortran90* para análise bidimensional (estado plano de deformações e axissimetria) do túnel contratado N-2 para o Projeto da estação de tratamento de água no nordeste da península de *San Francisco*. Também modelaram a dissipação da poropressão através de uma versão da equação matricial de Biot (1941) dada por Lewis e Schrefler (1998). Chegaram à conclusão que o modelo elástico subestima os deslocamentos no revestimento quando comparado com aqueles previstos pelo seu modelo elastoplástico-viscoplástico.

**Barla, Bonini e Debernardi (2008, 2010)** compararam os resultados de três modelos: dois modelos numéricos elastoplástico-viscoplástico (CVISC nativo do software FLAC2D, conforme

ITASCA (2006) e SHELVIP desenvolvido por Debernardi (2008)) e um elastoviscoplástico analítico (VIPLA desenvolvido por Lemaitre e Chaboche (1994)). Essa comparação é feita em relação ao acesso de *Saint Martin La Porte* (no túnel de Base *Lyon-Turin*) em análises de deformação plana e axissimétricas. A ênfase desses pesquisadores estava na aplicação do modelo mais recente SHELVIP que comprehende uma superfície de plasticidade sem lei de endurecimento/amolecimento e uma superfície viscoplastica com endurecimento. Mais tarde, Debernardi e Barla (2009), seguiram desenvolvendo esse modelo apresentando soluções analíticas.

**Souley et al. (2011)** apresentam o desenvolvimento de um modelo para prever o comportamento instantâneo e diferido do maciço argiloso *Callovo-Oxfordian* onde se encontra o laboratório subterrâneo para estocagem radioativa *Meuse/Haute-Marne* em Paris. A resposta instantânea é assumida como elastoplástica com superfície de plasticidade de Hoek-Brown e apresenta endurecimento/amolecimento. Já o comportamento diferido é baseado no modelo de Lemaitre modificado proposto por Su (2007). Após calibrar esse modelo com ensaios triaxiais de laboratório, partem para aplicação da galeria GED que possui tensão *in situ* horizontal e vertical diferentes. Contudo, tal como apontado pelos autores do estudo, seu modelo subestimou os valores das convergências verticais e superestimou as horizontais.

**Manh et al. (2015)**, utilizaram o modelo CVISC, cuja formulação pode ser encontrada em Bonini et al. (2009), para simular o comportamento diferido anisotrópico da galeria de acesso *Saint Martin La Port* (no túnel de Base *Lyon-Turin*). Nesse modelo, a componente volumétrica é modelada utilizando um comportamento puramente elastoplástico com função de escoamento de Mohr-Coulomb e, na componente desviadora, o mesmo modelo elastoplástico associado com o modelo reológico de Burger (Kelvin associado com Maxwell). Esses autores também apresentam uma solução analítica em estado plano de deformações para esse modelo considerando uma seção circular, maciço homogêneo, incompressível e tensões geostáticas-hidrostáticas. Mais tarde Mata (2018) aplicou esse mesmo modelo no estudo de caso do túnel rodoviário *Fréjus* e sua galeria de segurança. Comparando o método de escavação com perfuração e detonação com TBM, viu que este ultimo reduz significativamente as deformações no longo prazo.

## 4.5 INFLUÊNCIA DA FORMA DA SEÇÃO

Muitas análises consideram, por simplificação, a seção circular. Esse formato de seção com um estado inicial de tensões geostático-hidrostático em um maciço homogêneo e isotrópico, fora da zona de influência da face de escavação, garante um campo de deslocamentos puramente radial. Essas condições são particularmente comuns nas soluções analíticas que consideram estado plano de deformações. Contudo, seções diferentes das circulares apresentam um campo de tensões e deformações não uniformes, havendo concentração de tensões próximo às quinas.

Isso pode ser visto na Figura 4.19.

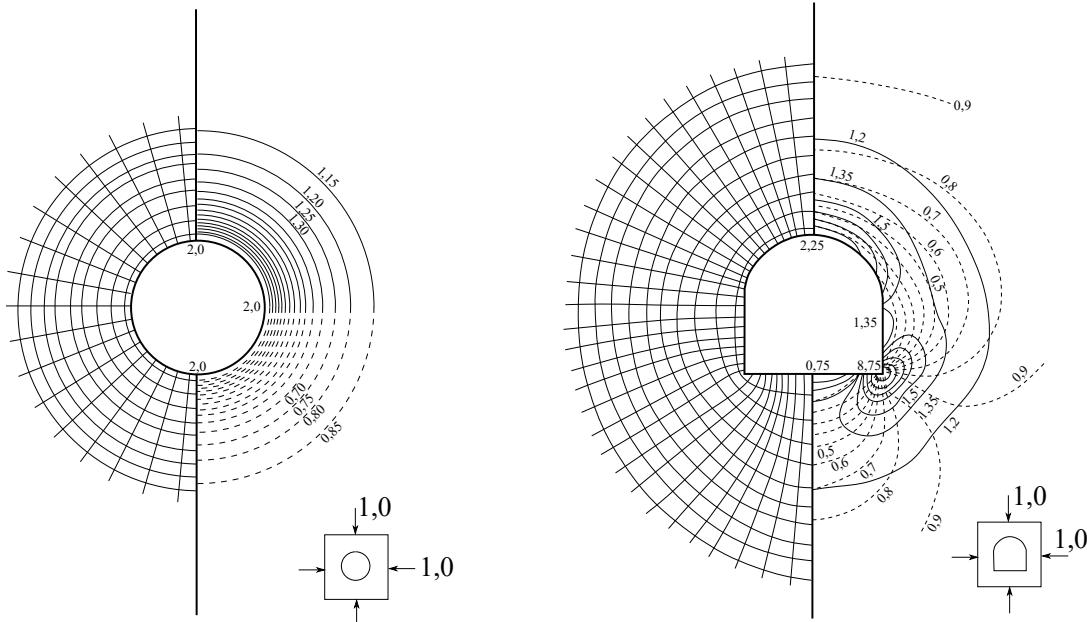


Figura 4.19 – Trajetória das tensões principais e linhas de isotensão, da maior e menor tensão principal, para seção circular (à esquerda) e farradura (à direita) em condições geostáticas hidrostáticas (adaptado de: Hoek e Brown (1980, p. 469, 484))

Ao final dessa tese é feito um estudo paramétrico considerando o modelo elastoplástico-viscoplastico com seção elíptica.

## 4.6 INFLUÊNCIA DA PROFUNDIDADE DO TÚNEL

A profundidade do túnel está diretamente relacionada com o estado de tensões iniciais. Dados empíricos (Figura 4.20a) sugerem que a tensão vertical pode ser estimada através da seguinte expressão (HOEK; BROWN, 1980, p. 96):

$$\sigma_v(z = H) = \gamma_m H, \quad (4.1)$$

em que  $\gamma_m$  é o peso específico do maciço e  $H$  a profundidade do túnel. Hoek e Brown (1980) reunem diversos dados que indicam que  $\gamma_m$  (para maciços rochosos) situa-se na faixa de 20 kN/m<sup>3</sup> à 30 kN/m<sup>3</sup>. Contudo, esses limites podem variar dependendo do banco de dados utilizado como, por exemplo, em Martin, Kaiser e Christiansson (2003, p. 1030).

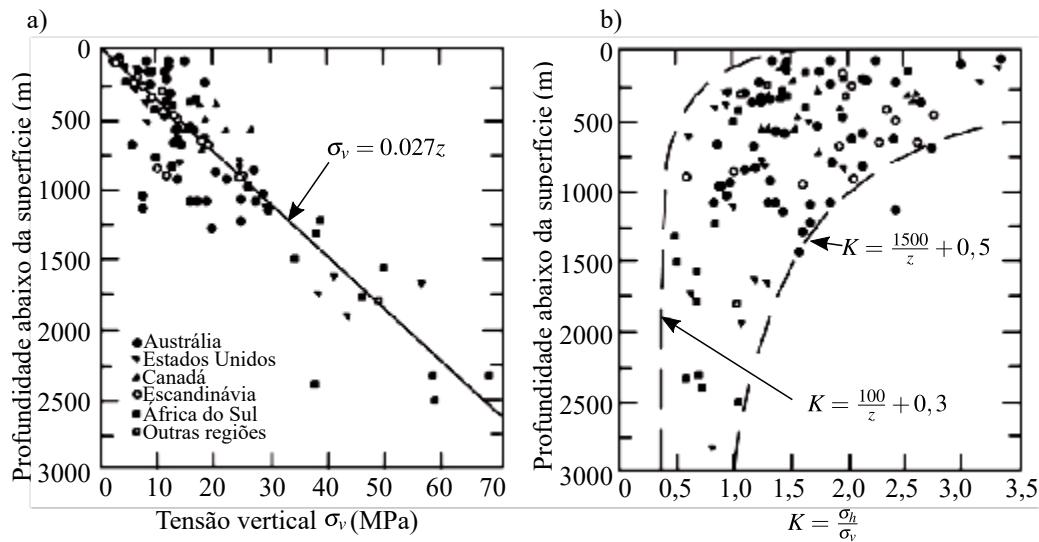


Figura 4.20 – a) tensões verticais e b) razão entre a tensão horizontal e vertical (coeficiente de empuxo  $K$ ) (adaptado de: Hoek e Brown (1980, p. 99-100))

Como pode ser visto na Figura 4.20b, há certa dispersão da tensão horizontal. Esse aspecto ainda hoje é objeto de estudo e uma boa revisão desses trabalhos pode ser obtido em Zhu (2013). Muitos desses trabalhos propõem equações simplificadas para obter o valor do coeficiente de empuxo  $K$ . Por exemplo, Sheorey (1994, p. 32) desenvolveu um modelo térmico elasto-estático para as tensões na crosta da terra e obteve a seguinte equação simplificada que pode ser utilizada para estimar o coeficiente de empuxo  $K$  em maciços rochosos:

$$K = 0,25 + 7E_h(0,001 + 1/H). \quad (4.2)$$

Sendo  $H$  (m) a profundidade e  $E_h$  (GPa) o módulo de deformação médio horizontal na parte superior da crosta terrestre. Contudo, como apontado por Sheorey, seu trabalho não explica a ocorrência de tensões verticais mais altas do que a profundidade indicaria ou o porquê de duas tensões horizontais raramente serem iguais. Segundo Hoek, Kaiser e Bawden (1998, p. 67), essas diferenças provavelmente se devem às características topográficas e geológicas locais, que não podem ser consideradas em um modelo de grande escala. Consequentemente, em maciços onde as tensões *in situ* tendem a ter uma influência significativa no comportamento de aberturas subterrâneas é melhor medi-las *in loco*.

Para túneis profundos, quando  $H/D > 10$ , sendo  $D$  o diâmetro equivalente da seção, é comum durante as análises, desprezar-se a variação da tensão vertical com a profundidade. Uma vez que, em túneis profundos, a variação de tensão ao longo do diâmetro da seção é irrelevante frente à

magnitude da tensão na cota da profundidade, ou seja,

$$|\Delta\sigma_v| = |\sigma_v(H + D/2) - \sigma_v(H - D/2)| = |\sigma_v(D)| \ll |\sigma_v(H)|. \quad (4.3)$$

Esse princípio pode ser melhor entendido através da Figura 4.21.

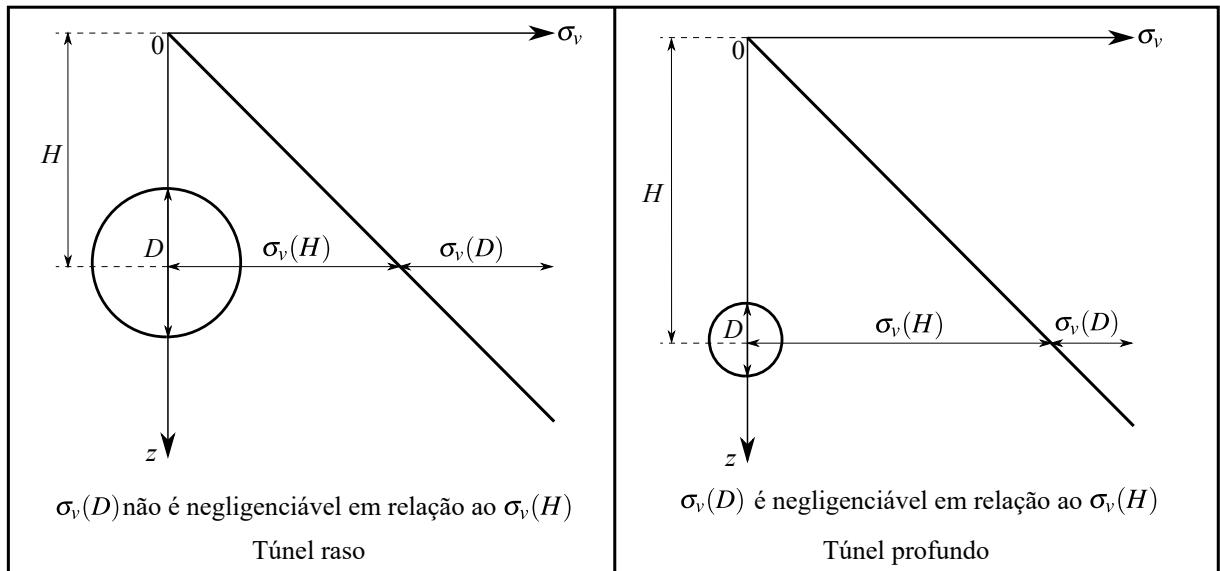


Figura 4.21 – Princípio para se desconsiderar a variação da tensão vertical na região próxima ao túnel (adaptado de: Benamar (1996, p. 8))

De qualquer forma, conforme a Figura 4.20, a consideração das tensões iniciais geostática hidrostática é apenas um caso específico de tensões *in situ*, ou seja, quando  $K = 1$ . A diferença entre as tensões verticais e horizontais afetam fortemente o campo de tensões e deformações após a escavação. Isso pode ser visto em análises elásticas com estado plano de deformações através, por exemplo, da comparação entre a Figura 4.19 e a Figura 4.22 obtidas por Hoek e Brown (1980).

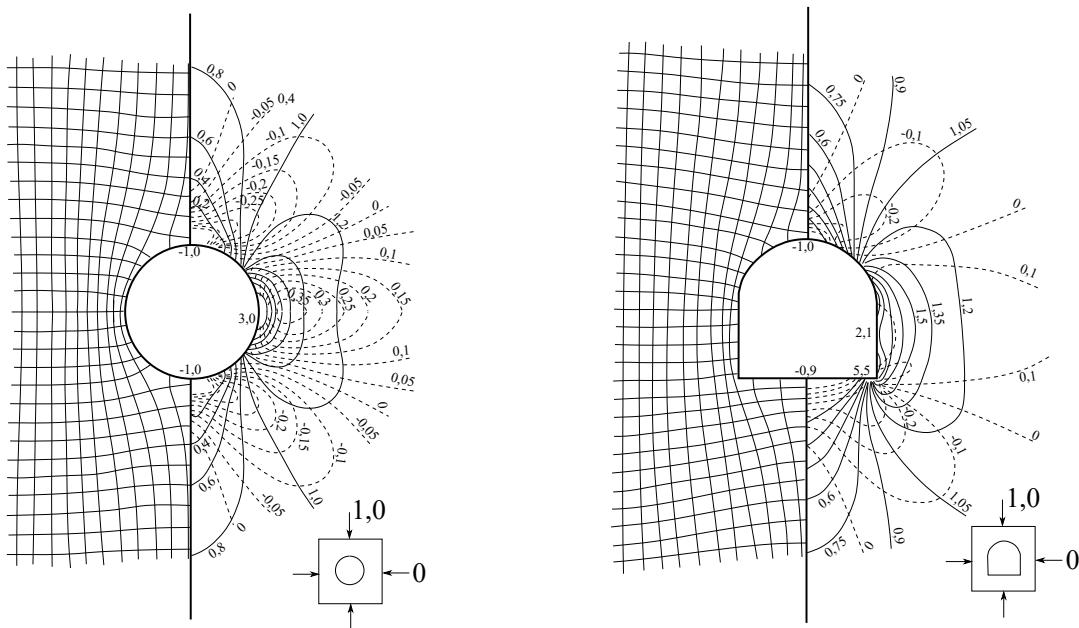


Figura 4.22 – Trajetória das tensões principais e linhas de isotensão da maior e menor tensão principal para seção circular (à esquerda) e ferradura (à direita) considerando  $K = 0$  (adaptado de: Hoek e Brown (1980, p. 468,483))

Além disso, quando o maciço apresenta um comportamento elastoplástico, a anisotropia das tensões *in situ* afeta o formato da zona de plastificação. Isso pode ser visto no estudo de Detournay e St. John (1988). Utilizando soluções analíticas para seções circulares em um maciço elastoplástico com lei do comportamento de Mohr-Coulomb, esses autores apresentam um ábaco identificando os **modos de falha** (formas das zonas de plastificação) de acordo com o grau de anisotropia das tensões iniciais (Figura 4.23).

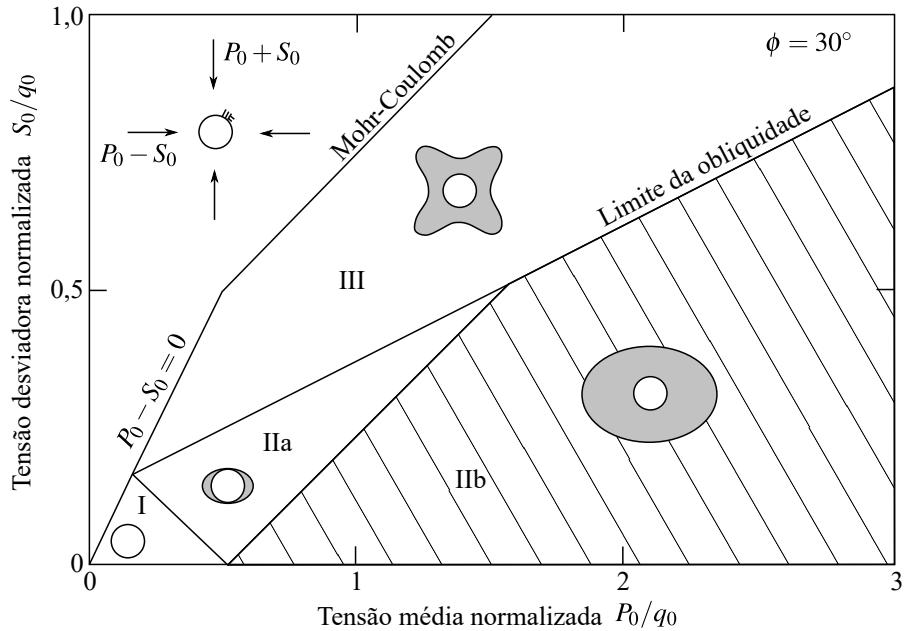


Figura 4.23 – Relação entre o estado de tensões iniciais e os modos de falha, onde  $q_0$  é a resistência à compressão do maciço (adaptado de: Detournay e St. John (1988, p. 121))

Como se pode ver na Figura 4.23, esses autores identificaram quatro zonas:

- região I:** a massa rochosa se comporta como um material elástico linear, ou seja, onde o estado de tensões não excedeu o critério de plasticidade em qualquer ponto;
- região IIa:** a plastificação da rocha ao redor do túnel se estende em uma direção perpendicular a maior tensão principal de compressão, mas ainda não engloba completamente a seção do túnel;
- região IIb:** a seção está completamente rodeada por uma zona de plastificação oval;
- região III:** a zona de plastificação apresenta um formato de borboleta.

Além disso, quando há revestimento a anisotropia das tensões poderá ocasionar tração ou falha por compressão e cisalhamento na coroa ou nas paredes laterais do revestimento (BRADY; BROWN, 2006). Contudo, para uma situação em que  $0 \leq K \leq 1$ , em túneis profundos, a consideração de um estado geostático-hidrostático ( $K = 1$ ) pode ser conservadora, para o dimensionamento do revestimento, como pode ser visto no estudo de Shrestha e Panthi (2015).

Apesar da generalidade do modelo constitutivo desenvolvido nessa tese não será abordado a influência da anisotropia das tensões durante as análises.

## 4.7 INFLUÊNCIA DA PROXIMIDADE DA SUPERFÍCIE

Quando o túnel está muito próximo da superfície, a região do maciço acima da seção não possui condições para formar a parte superior do arco transversal e desviar as tensões ao redor da cavidade. Isso faz com que essa parcela do maciço atue como sobrecarga sobre o revestimento. Dessa forma, o maciço no entorno de uma seção circular, por exemplo, não possui o campo de deslocamentos puramente radial. A rigor essa condição de túnel raso vai depender da capacidade resistente do maciço, contudo há na literatura indicações de que essa condição é atingida quando a altura de maciço sobre a coroa da seção transversal é menor que duas vezes o diâmetro (CHAPMAN; METJE; STÄRK, 2018, p. 67). Como consequência, a deformação da seção passa a apresentar três modos de deformações sobrepostos: uma convergência uniforme, uma distorção e translação vertical (Figura 4.24).

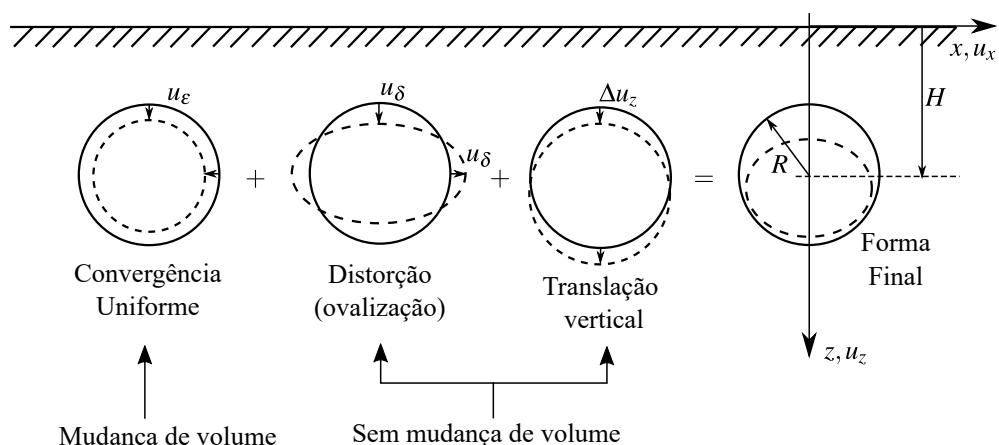


Figura 4.24 – Modos de deformações em túneis superficiais de seção circular (adaptado de: Pinto e Whittle (2014, p. 4))

Quando o túnel apresenta um revestimento de concreto, por exemplo, o modo de deformação de distorção poderá induzir tensões de tração no interior do revestimento. Além disso, tão ou mais importante que a deformada da seção é o recalque induzido na superfície pelo processo de escavação. Conforme o túnel avança ele forma uma bacia de assentamento superficial que pode afetar as estruturas existentes (Figura 4.25).

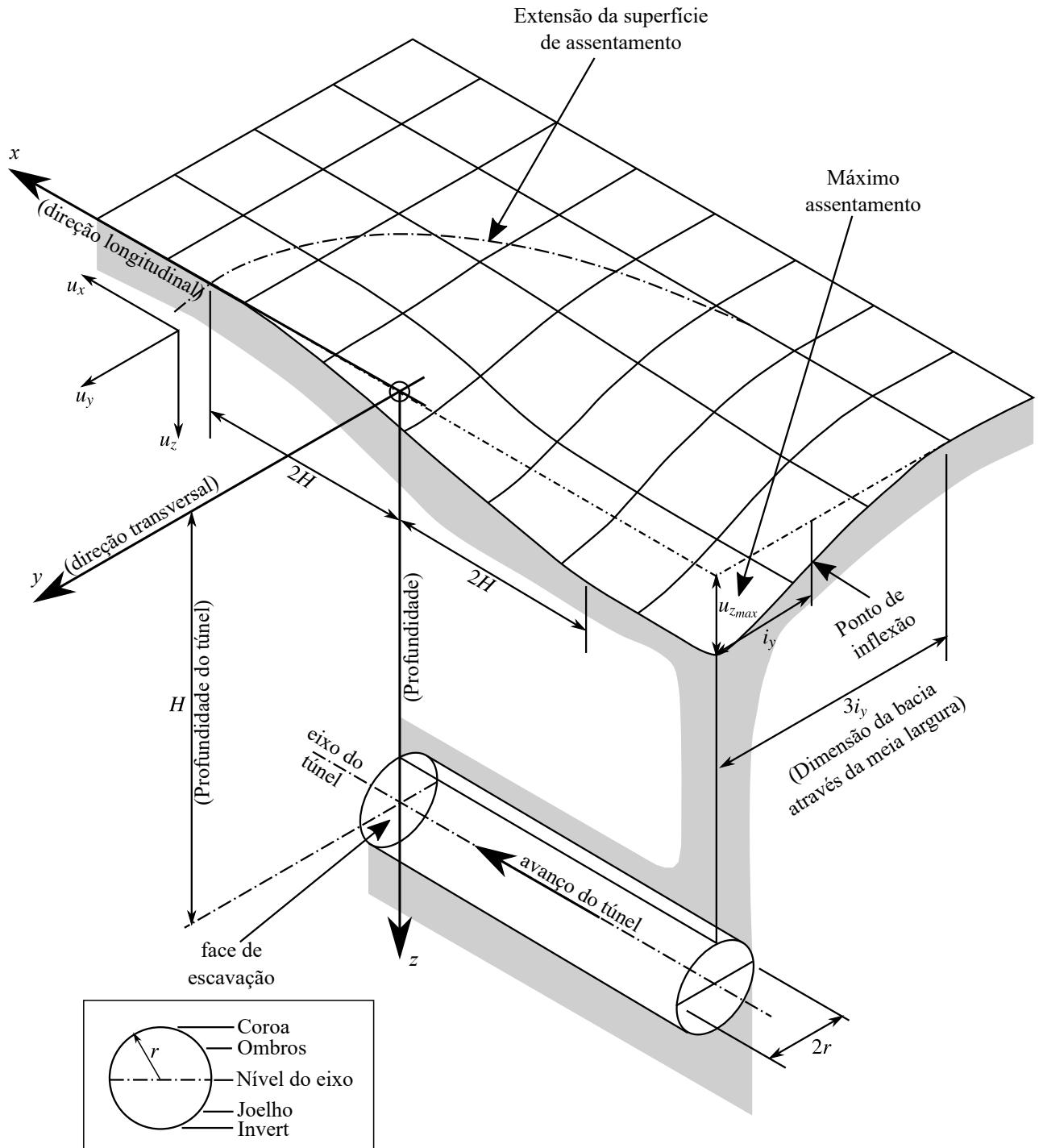


Figura 4.25 – Representação tridimensional da bacia de assentamento superficial durante a construção de um túnel superficial (adaptado de: Yeates e Geddes (1985) *apud* Rankin (1988, p. 80))

Seguindo o trabalho de Martos (1958) sobre assentamentos causados por minas Schmidt (1969) e Peck (1969), e posteriormente muitos outros autores, mostraram que o perfil de assentamento no plano transversal pode muito bem ser descrito e ajustado, de forma empírica, através de uma

curva de distribuição Gaussiana (Figura 4.26).

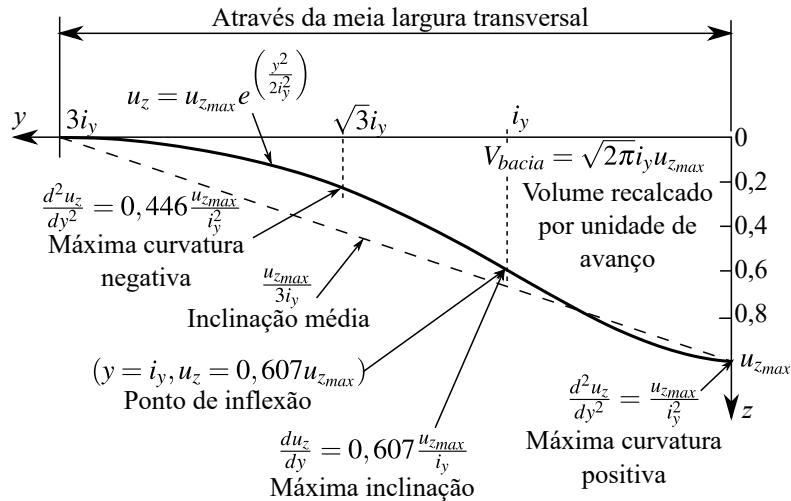


Figura 4.26 – Perfil idealizado de assentamento transversal com distribuição normal (adaptado de: O'Reilly e New (1982) *apud* Rankin (1988, p. 80))

Após Peck (1969) propor sua forma empírica para descrever a bacia de assentamentos, adaptações dela e outros métodos semi-empíricos foram desenvolvidos com base em mais observações. Devido ao comportamento bastante específico relacionado a proximidade da superfície, os estudos sobre túneis se dividem em **túneis superficiais** e **túneis profundos**. Apesar da generalidade do modelo proposto na tese, a influência da superfície não é estudada no presente trabalho, que envolve apenas túneis profundos, contudo, um bom resumo bibliográfico de soluções semi-empíricas pode ser encontrado em Zhou et al. (2018) e soluções numéricas na introdução de Panji et al. (2016).

## 4.8 INFLUÊNCIA DO REVESTIMENTO E PARÂMETROS ADIMENSIONAIS

Dependendo da qualidade da rocha e das dimensões da abertura, muitos maciços conseguem desenvolver o arqueamento das tensões com pouca deformação ou ausência de plastificação. Isso caracteriza um maciço **autoportante** e, nesse caso, é necessário apenas um revestimento estético ou primário para evitar quedas localizadas. Contudo, se a redistribuição das tensões puder levar o maciço à plastificação ou deformações excessivas, nesse caso, é necessária a utilização de um **revestimento com função estrutural**. Dessa forma, a redistribuição das tensões para as zonas vizinhas no interior do maciço vai depender também dos deslocamentos permitidos por esse revestimento. Portanto, o estado de equilíbrio após a escavação não dependerá apenas das características do maciço, tensões iniciais, da geometria da seção e escavação, mas também

do comportamento conjunto do maciço com esse revestimento. Consequentemente, o campo de tensões e deformações dependerão da rigidez relativa entre o maciço e o revestimento, da deformação do maciço no instante de colocação do revestimento, da distância não suportada em relação à frente de escavação e, quando há comportamentos diferidos no tempo, da velocidade de avanço da construção do túnel.

A Figura 4.27 ilustra, em um corte longitudinal, o perfil de convergências e tensões verticais sobre um túnel profundo revestido. À esquerda do ponto A o maciço encontra-se na zona não perturbada pela frente de escavação, mantendo, portanto, sua tensão vertical inicial  $p_\infty$ . Contudo, próximo à frente de escavação há um aumento das tensões verticais (entre os pontos A e B) devido ao arqueamento longitudinal das tensões próximo à face de escavação. No trecho não suportado  $d_0$  as tensões verticais são nulas, uma vez que não há impedimento à deformação da seção. Todavia, a partir da ponta do revestimento (ponto D) há um acréscimo de tensões verticais (até o ponto E), novamente ocasionado pelo arqueamento longitudinal. Conforme a frente de escavação se afasta as tensões diminuem até atingirem um valor constante  $p_{eq}$  (ponto F) e o perfil de convergências atinge um valor máximo e constante  $U_{eq}$ .

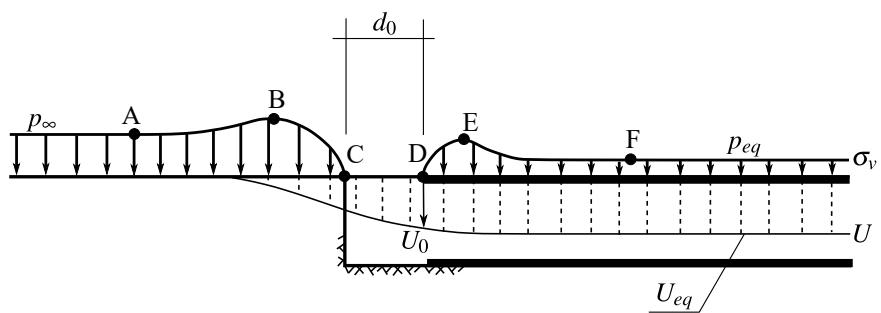


Figura 4.27 – Perfil de tensões verticais e de convergências ao longo de uma linha longitudinal situada no teto do túnel (adaptado de: Eisenstein, Heinz e Negro (1984) *apud* Couto (2011, p. 41))

O revestimento também possui interação com o comportamento diferido do maciço. O tempo entre ciclos de escavação-revestimento permitem que deformações viscosas ocorram durante a fase construtiva, ocasionando picos no perfil de convergência. Isso pode ser visto nas soluções numéricas axisimétricas obtidas por Bernaud (1991) considerando uma lei elastoviscoplástica. A Figura 4.28 mostra o efeito dessa interação no perfil de convergências. Pode-se ver que quanto maior a velocidade de escavação menores são os picos. É possível notar também que a frequência desses picos está relacionada com o passo de escavação, que neste caso é de  $1R_i$ . Se o passo fosse menor, de  $1/3R_i$ , por exemplo, os picos seriam sensivelmente menores.

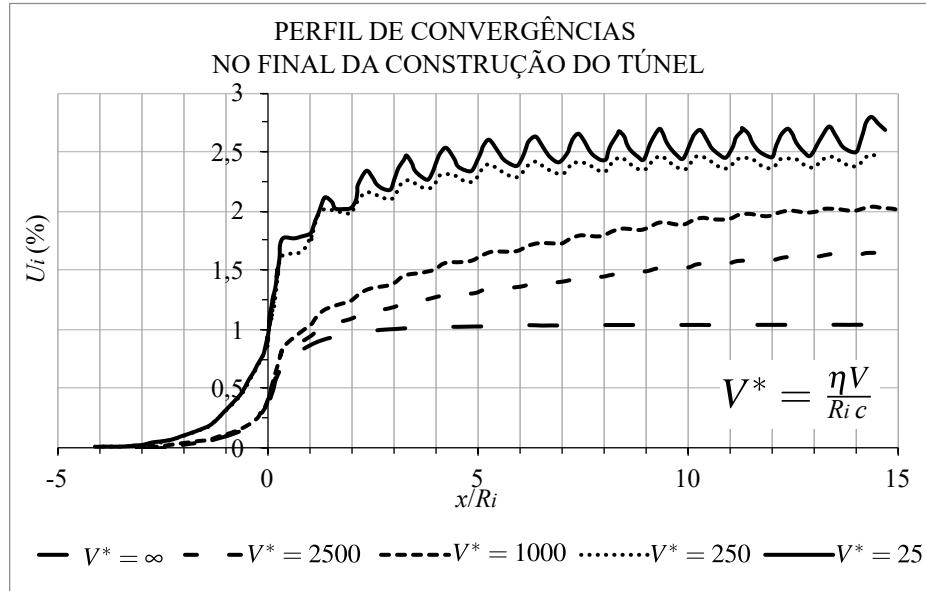


Figura 4.28 – Perfil de convergência em função da velocidade adimensional de avanço no final da construção do túnel (adaptado de: Bernaud (1991, p. 214))

Contudo, os efeitos viscosos continuam mesmo após a construção do túnel. Com o tempo a convergência da seção vai aumentando e a pressão no revestimento diminuindo. Além disso, quanto mais rápido for o ciclo de escavação-revestimento, maior será a diferença entre a convergência no final da construção e após estabilizados os efeitos viscosos no longo prazo. Isso pode ser visto comparando-se a Figura 4.28 com a Figura 4.29.

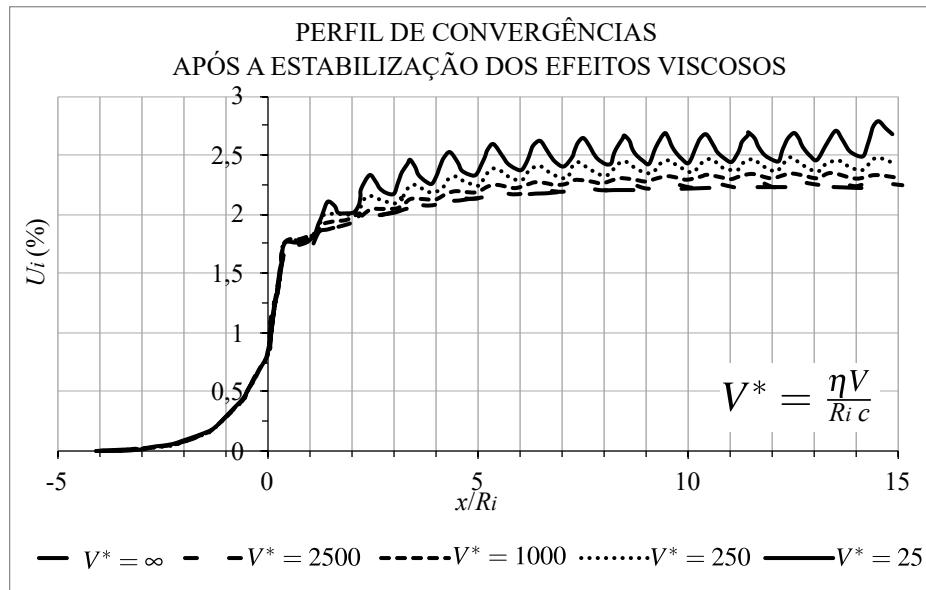


Figura 4.29 – Perfil de convergência em função da velocidade de construção admensurada no final da construção do túnel (adaptado de: Bernaud (1991, p. 214))

Um aspecto importante derivado das soluções analíticas é a identificação de parâmetros adimensionais que governam a problemática de túneis e permitem extrapolar os valores de uma análise para outra adimensionalmente equivalente. Dada essa generalidade são parâmetros muito utilizados para apresentação de resultados, como os que constam na Figura 4.28 e Figura 4.29.

Segundo Bernaud, Benamar e Rousset (1994, p. 5), nas soluções analíticas em estado plano de deformações, considerando tanto o maciço quanto o revestimento com leis constitutivas elásticas, obtém-se os seguintes parâmetros adimensionais:

$$p_{\infty}^* = \frac{p_{\infty}}{E}, \quad K_{rev}^* = \frac{K_{rev}}{E}, \quad d_0^* = \frac{d_0}{R_i} \quad (4.4)$$

em que  $E$  é o módulo de elasticidade do maciço,  $p_{\infty}$  a pressão geostática hidrostática,  $K_{rev}$  a rigidez equivalente do revestimento,  $d_0$  a distância não revestida logo atrás da frente de escavação e  $R_i$  o raio externo da abertura circular do túnel. A rigidez equivalente do maciço pode ser calculada através da seguinte expressão:

$$K_{rev} = \frac{E_{rev}}{(1 + v_{rev})} \frac{R_i^2 - (R_i - e)^2}{[(1 - 2v_{rev})R_i^2 + (R_i - e)^2]} \quad (4.5)$$

em que  $E_{rev}$  é o módulo de elasticidade do revestimento,  $v_{rev}$  o seu coeficiente de Poisson,  $R_i$  o raio do túnel e  $e$  a espessura do revestimento. Quando o maciço possuí lei constitutiva elastoplástica de Tresca ou von-Mises, acrescenta-se mais um parâmetro adimensional:

$$c^* = \frac{c}{E} \quad (4.6)$$

sendo  $c$  a coesão do maciço. Além disso, quando o túnel se encontra imerso em um meio elastoviscoplástico perfeito com modelo de Perzyna, tem-se cinco parâmetros adimensionais, que são (BERNAUD, 1991, p. 198):

$$E^* = \frac{E}{c}, \quad p_{\infty}^* = \frac{p_{\infty}}{c}, \quad K_{rev}^* = \frac{K_{rev}}{c}, \quad d_0^* = \frac{d_0}{R_i}, \quad V^* = \frac{\eta V_p}{R_i c} \quad (4.7)$$

em que  $\eta$  é a constante de viscosidade dinâmica (em unidade de tensão vezes tempo) e  $V_p$  a velocidade do passo de escavação do túnel.

Contudo, a principal dificuldade na determinação do estado de equilíbrio de um túnel revestido está no fato de que o maciço já possui uma convergência  $U_0$  no instante de instalação do

revestimento. E essa convergência é dependente da interação entre o maciço e o revestimento que já foi aplicado. Uma forma de lidar com essa complexidade é através do método Convergência-Confinamento (também conhecido como o método das Curvas Características).

## 4.9 MÉTODO CONVERGÊNCIA-CONFINAMENTO

Muitos autores propuseram contribuições para essa abordagem como Fenner (1938), Pacher (1964), Panet e Guellec (1974) e Bernaud e Rousset (1992). Esse método consiste em desacoplar o problema da interação entre o maciço e o revestimento utilizando os conceitos de curva de convergência do maciço e de curva de confinamento do revestimento.

A **curva de convergência do maciço (CV)** é obtida graficando-se a convergência  $U_i$  em função de uma pressão interna fictícia  $p_i$  atuante no interior da cavidade, partindo essa pressão da tensão inicial geostática-hidrostática  $p_\infty$  até zero. Essa curva de convergência é independente do suporte e carrega consigo o comportamento do maciço frente a uma descompressão simulada pela variação de  $p_i$  (ver curva azul na Figura 4.30). Quando o maciço possui um comportamento elastoplástico, a curva apresenta um trecho linear elástico até que a descompressão atinge um valor limite  $p_{lim}$ , sendo a partir daí um trecho não-linear. Resumo de soluções analíticas para essa curva, considerando estado plano de deformações, seção circular e tensões iniciais geostáticas-hidrostáticas, pode ser encontrado, por exemplo, em Brown et al. (1983) e Corbetta (1990).

A aplicação desse método está no fato de que é possível também construir uma curva análoga referente ao suporte, chamada de **curva de confinamento do revestimento (CF)** (ver curva vermelha na Figura 4.30) cuja intersecção com a curva de convergência do maciço fornecerá o ponto de equilíbrio ( $p_{eq}, U_{eq}$ ) que é a solução do problema da interação entre o maciço e o revestimento. Tal como utilizado por Panet (1995, p. 29) soluções analíticas para tubos espessos ou casca cilíndrica, mesmo em elasticidade, podem corresponder como uma primeira aproximação da curva de confinamento para um dado revestimento.

Apesar do comportamento da curva de confinamento depender exclusivamente da lei constitutiva do revestimento, a convergência  $U_0$  em  $d_0$ , a partir da qual essa curva inicia, vai depender da interação entre o maciço e do revestimento que foi anteriormente instalado, uma vez que a seção do túnel, afastada de  $d_0$  da face de escavação, já possui essa convergência durante o avanço construtivo do túnel.

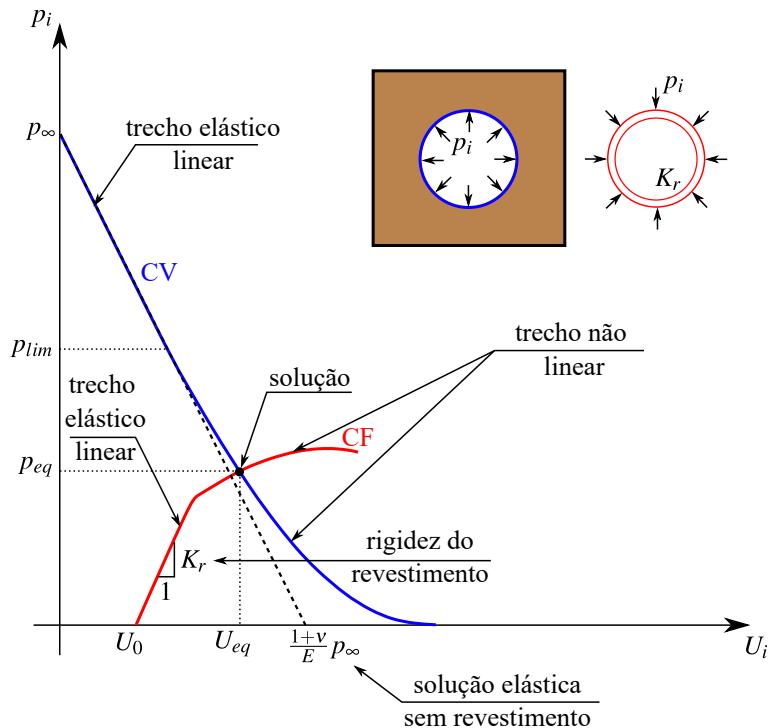


Figura 4.30 – Método da Convergência-Confinamento (adaptado de: Bernaud, Benamar e Rousset (1994, p. 6))

As curvas de convergência (CV) e de confinamento (CF) podem ser obtidas tanto de soluções analíticas como numéricas em estado plano de deformações, sendo que no caso numérico podem considerar leis mais complexas de comportamento. Contudo, a determinação de  $U_0$  só pode ser feita através de um método que considere a completa interação entre o maciço e o revestimento, como análises tridimensionais, axissimétricas ou ainda medidas *in situ*.

Existem métodos simplificados que se diferenciam justamente nas propostas de  $U_0$  através de estudos, por exemplo, em axissimetria. Nesse aspecto, Bernaud e Rousset (1992), mostraram que o método CV-CF proposto até então, estava em desfavor da segurança, pois desconsiderava a rigidez do revestimento na determinação de  $U_0$  (Figura 4.31), o que significa que o método CV-CF não considerava de forma correta a interação entre o maciço e o revestimento.

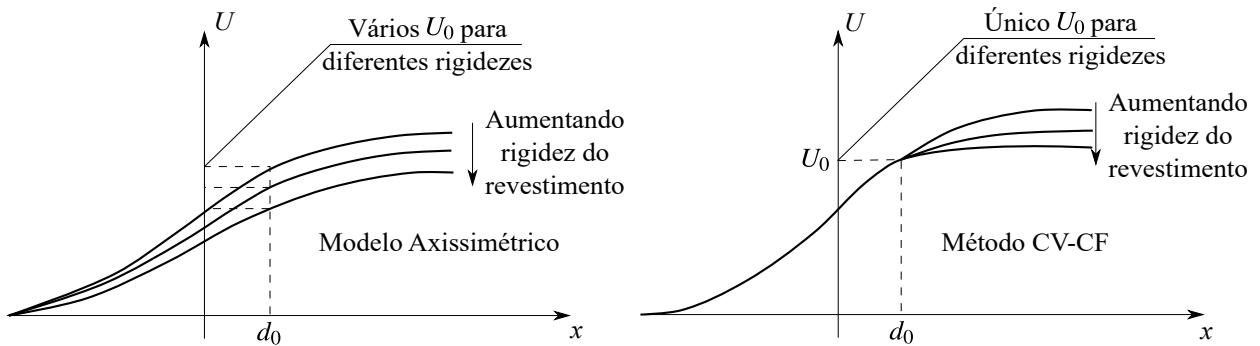


Figura 4.31 – Influência da rigidez do revestimento no perfil de convergências do túnel e no parâmetro  $U_0$  (adaptado de: Bernaud e Rousset (1992, p. 13))

Em vista disso, esses autores propuseram uma correção ao método Convergência-Confinamento criando o *New Implicit Method* (NIM). Um método implícito, pois  $U_0$  depende tanto da rigidez do revestimento quanto da convergência ao equilíbrio (que se quer determinar). Esse método foi desenvolvido para leis de comportamento do maciço em elasticidade, plasticidade e viscoplasticidade, conforme Bernaud e Rousset (1992) e Bernaud, Benamar e Rousset (1994).

A presente tese não lidará com análises que consideram a curva CV-CF que é um método simplificado. As análises em axissimetria e tridimensionais, implementadas na tese, já resolvem esse problema da iteração entre revestimento e o maciço fornecendo os valores das convergências e pressões no equilíbrio. Contudo, para trabalhos futuros pode ser interessante construir curvas de convergências para o modelo elastoplástico-viscoplástico e propor ajustes no método CV-CF.

## 5 MODELO MECÂNICO

Esse capítulo traz uma descrição geral do modelo mecânico que foi utilizado neste trabalho. Portanto, são apresentadas as equações de equilíbrio e constitutivas que foram utilizadas, sem aprofundar, no entanto, nas particularidades que compreendem o domínio de um túnel profundo. Essas serão vistas na seção 6.7, após a descrição da solução desse modelo mecânico.

### 5.1 EQUAÇÕES DE EQUILÍBRIO LOCAL E A HIPÓTESE DA EVOLUÇÃO QUASE ESTÁTICA

Sendo  $\{\underline{e}_1, \underline{e}_2, \underline{e}_3\}$  a base de um espaço  $\mathbb{R}^3$ , a segunda lei fundamental do equilíbrio dinâmico, ou seja, o princípio da conservação do momento linear, aplicada sobre um subdomínio contínuo  $\Omega'$ , exige que para  $\forall \Omega' \subset \Omega$ :

$$\int_{\Omega'} \rho(\underline{\gamma} - \underline{f}) d\Omega' = \int_{\partial\Omega'} \underline{T} dS \quad (5.1)$$

sendo  $\rho$  a densidade do domínio,  $\underline{\gamma}$  o campo de acelerações referente às forças iniciais,  $\underline{f}$  o campo de acelerações referente às forças de corpo (por exemplo, a gravidade) e  $\underline{T}$  o vetor tensão que atua na superfície  $dS$  contida na superfície  $\partial\Omega'$  de  $\Omega'$  (Figura 5.1).

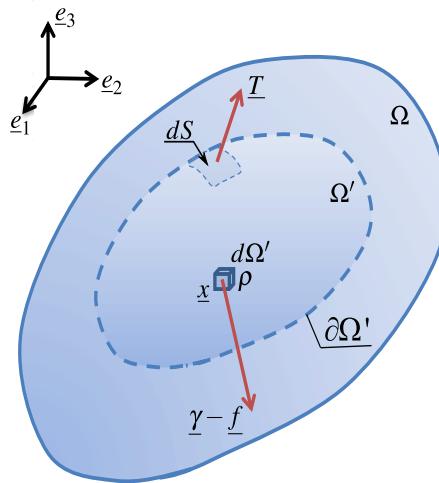


Figura 5.1 – Subsistema material  $\Omega'$  no interior de um sistema material  $\Omega$  submetido a um campo de forças de corpo

Considerando a definição  $\underline{T} = \underline{\sigma} \cdot \underline{n}$ , em que  $\underline{n}$  é o vetor normal à superfície  $dS$  e  $\underline{\sigma}$  o tensor de tensões, aplicando o teorema da divergência no termo à direita da igualdade (5.1) pode-se

escrever que

$$\forall \Omega' \subset \Omega \quad \int_{\Omega'} (\underline{\nabla} \cdot \underline{\underline{\sigma}} + \rho(\underline{\gamma} - \underline{f})) d\Omega' = 0 \quad (5.2)$$

e, portanto,

$$\underline{\nabla} \cdot \underline{\underline{\sigma}} + \rho(\underline{\gamma} - \underline{f}) = 0 \quad (5.3)$$

em que  $\underline{\nabla} \cdot$  é o operador divergente. Aplicando a hipótese de evolução quase estática, ou seja,  $\underline{\gamma} = 0$ , tem-se o seguinte sistema de equações de equilíbrio estático local:

$$\underline{\nabla} \cdot \underline{\underline{\sigma}} + \rho \underline{f} = 0. \quad (5.4)$$

Salienta-se também que pela conservação do momento angular tem-se que o tensor de tensões é simétrico, ou seja,  $\underline{\underline{\sigma}} = \underline{\underline{\sigma}}^T$  e o sistema (5.4), em três dimensões, possui 3 equações e 6 incógnitas de tensões.

## 5.2 ADMISSIBILIDADE ESTÁTICA, NATUREZA EULERIANA DO CAMPO DE TENSÕES, TRANSFORMAÇÃO GEOMÉTRICA E MEDIDA DE DEFORMAÇÃO

Para que o sistema material  $\Omega$  da Figura 5.2 esteja em equilíbrio, ou seja, **estaticamente admissível (E.A)**, o campo de tensões deve satisfazer as equações de campo de equilíbrio local, conjuntamente com as condições de continuidade interna e de contorno (relativo ao princípio da ação-reação) representadas por (5.5).

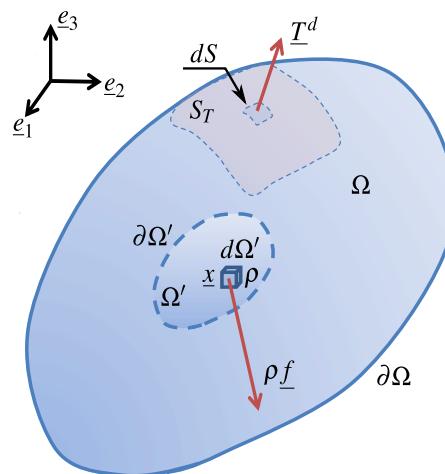


Figura 5.2 – Sistema material  $\Omega'$  com condição de contorno  $\underline{T}^d$  imposta na fronteira  $S_T$

$$\underline{\underline{\sigma}} \text{ é E.A.} \leftrightarrow \begin{cases} \text{eqs. campo: } \begin{cases} \nabla \cdot \underline{\underline{\sigma}} + \rho f = 0 \\ \underline{\underline{\sigma}} \cdot \underline{n} \text{ contínuo ao longo de } \Sigma \end{cases}, \\ \text{cond. contorno: } \underline{\underline{\sigma}} \cdot \underline{n} = \underline{T}^d \text{ em } \forall \underline{x} \in S_T \subset \partial \Omega \end{cases} \quad (5.5)$$

em que  $\Sigma$  representa as superfícies de descontinuidades de  $\underline{\underline{\sigma}}$  no interior do corpo, se houver. A rigor o campo de tensões  $\underline{\underline{\sigma}}$  que satisfaz (5.5) se refere sempre à configuração atual durante a evolução do sistema, ou seja, possui uma natureza Euleriana (conforme Figura 5.3).

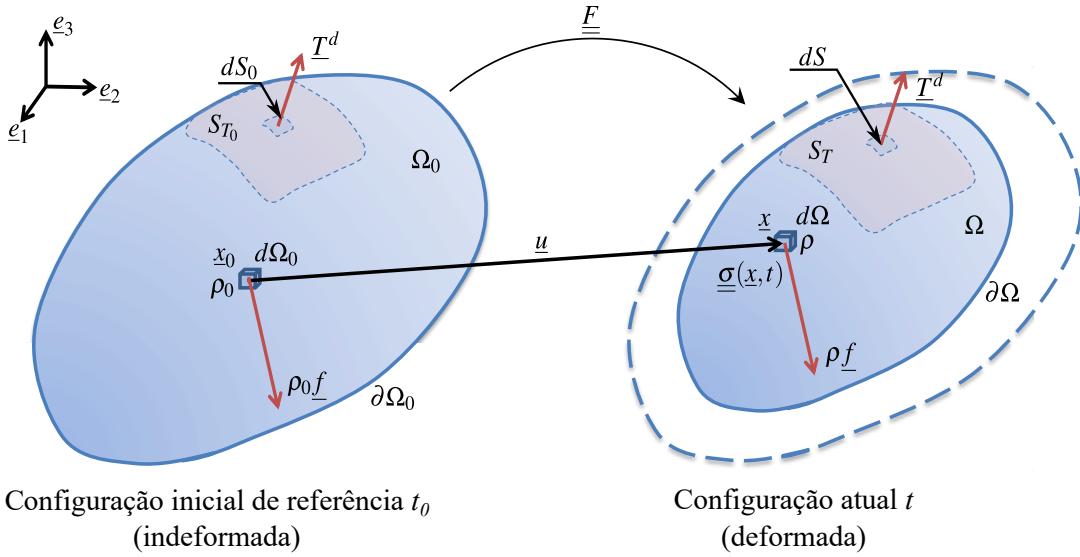


Figura 5.3 – Natureza Euleriana do campo de tensões

O vetor  $\underline{u} = \underline{x} - \underline{x}_0$  é o deslocamento da partícula durante a evolução do sistema e  $\underline{\underline{F}}$  é o gradiente da transformação geométrica que associa a posição de cada partícula  $\underline{x}_0$  a sua posição  $\underline{x}$  na configuração atual, definido por:

$$\underline{\underline{F}} = \nabla \underline{x} = \nabla (\underline{x}_0 + \underline{u}) = \underline{\underline{1}} + \nabla \underline{u} \quad (5.6)$$

em que  $\nabla$  é o operador gradiente e  $\underline{\underline{1}}$  o tensor de segunda ordem unitário. Nesse contexto geral, a medida de deformação mais comum é dada pelo desvio da transformação em relação à isometria  $\underline{\underline{F}}^T \cdot \underline{\underline{F}} = \underline{\underline{1}}$  e é descrita através do tensor de deformações de Green-Lagrange:

$$\underline{\underline{e}} = \frac{1}{2} (\underline{\underline{F}}^T \cdot \underline{\underline{F}} - \underline{\underline{1}}) = \frac{1}{2} (\nabla \underline{u} + \nabla \underline{u}^T + \nabla \underline{u}^T \cdot \nabla \underline{u}). \quad (5.7)$$

Em problemas quase-estáticos isotérmicos, quando os deslocamentos, as deformações e as rotações são pequenas, a determinação dos campos de tensões e deformações durante a evolução do sistema pode ser simplificada descrevendo os elementos da admissibilidade estática (5.5) em termos da configuração de referência em vez da atual. Para tanto, é necessário verificar-se a hipótese das pequenas perturbações.

### 5.3 HIPÓTESE DAS PEQUENAS PERTURBAÇÕES E A DESCRIÇÃO LANGEANA

A **hipótese das transformações infinitesimais (HTI)** supõe que o gradiente da transformação é aproximadamente a identidade, ou seja,  $\underline{F} \approx \underline{\underline{1}}$ . Isso implica, por (5.6), que  $|\nabla \underline{u}| \ll 1$  e, como consequência, pode-se desprezar os termos de derivada mais alta no tensor de deformações de Green-Lagrange, de modo que:

$$\underline{\underline{e}} = \frac{1}{2} (\underline{\underline{F}}^T \cdot \underline{\underline{F}} - \underline{\underline{1}}) = \frac{1}{2} (\nabla \underline{u} + \nabla \underline{u}^T + \nabla \underline{u}^T \cdot \nabla \underline{u}) \approx \frac{1}{2} (\nabla \underline{u} + \nabla \underline{u}^T) = \nabla^s \underline{u} = \underline{\underline{\varepsilon}} \quad (5.8)$$

em que  $\underline{\underline{\varepsilon}}$  é um tensor simétrico conhecido como tensor de deformações de Green-Lagrange linearizado, ou simplesmente, como tensor de deformações. Dessa hipótese segue-se também uma simplificação no **Jacobiano da transformação** (que dá a relação entre o volume infinitesimal da configuração atual e de referência):

$$J = \frac{d\Omega}{d\Omega_0} = \det(\underline{\underline{1}} + \nabla \underline{u}) \approx 1 + \text{tr}(\underline{\underline{\varepsilon}}) \quad (5.9)$$

sendo  $\det(*)$  e  $\text{tr}(*)$  as funções determinante e traço, respectivamente. Como  $|\nabla \underline{u}| \ll 1$  tem-se também que  $|\nabla \underline{\underline{\varepsilon}}| \ll 1$ , ou seja, **pequenas deformações**, o que implica  $\text{tr}(\underline{\underline{\varepsilon}}) \ll 1$  e, portanto, mudanças infinitesimais no volume e na densidade durante a evolução do sistema, fazendo com que  $\Omega \approx \Omega_0$  e  $\rho \approx \rho_0$ , respectivamente. Supondo que também ocorram **pequenos deslocamentos**  $|\underline{u}/l_0| \ll 1$ , em que  $l_0$  é uma dimensão característica do problema tal que os efeitos sobre os esforços internos devido à mudança de geometria sejam desprezíveis, tem-se a **hipótese das pequenas perturbações (HPP)**. Com as consequências dessa hipótese, pode-se adotar a configuração inicial (de referência) ao invés da atual para expressar os termos da admissibilidade estática (5.5).

Quando os túneis sofrem convergências pequenas, essa hipótese permite em muito simplificar as análises, e será adotada no presente trabalho. Contudo, para casos em que se tem convergências grandes é necessário reformular o problema considerando grandes deformações e/ou deslocamentos e rotações.

### 5.4 MODELO CONSTITUTIVO ELÁSTICO

De uma forma geral, a energia interna específica  $w$  necessária para deformar um material elástico não depende do trajeto e nem da velocidade de deformação durante a evolução do sistema, dependendo apenas do estado atual das deformações. Com isso a energia interna específica pode ser caracterizada apenas pelas deformações e direções principais do tensor de deformações, de modo que:

$$w(\underline{\underline{\varepsilon}}) = w(\varepsilon_1, \varepsilon_2, \varepsilon_3, \eta_1, \eta_2, \eta_3). \quad (5.10)$$

Contudo, na **elasticidade isótropa** a energia de deformação é independente das direções principais e pode ser descrita em função apenas da magnitude das deformações principais, ou dos invariantes do tensor de deformação, de modo que

$$w(\underline{\underline{\varepsilon}}) = w(\varepsilon_1, \varepsilon_2, \varepsilon_3) = w(I_1, I_2, I_3), \quad (5.11)$$

sendo que os invariantes do tensor de deformações são dados por:

$$I_1 = \text{tr}(\underline{\underline{\varepsilon}}) = \varepsilon_{ii}, \quad (5.12)$$

$$I_2 = \text{tr}(\underline{\underline{\varepsilon}}^2) = \frac{1}{2}\varepsilon_{ij}\varepsilon_{ji}, \quad (5.13)$$

$$I_3 = \text{tr}(\underline{\underline{\varepsilon}}^3) = \frac{1}{3}\varepsilon_{ij}\varepsilon_{jk}\varepsilon_{ki}. \quad (5.14)$$

A lei do comportamento elástico se obtém de  $\underline{\underline{\sigma}} = \partial w / \partial \underline{\underline{\varepsilon}}$ . Aplicando a regra da cadeia em relação aos invariantes e fazendo uma aproximação de primeira ordem em torno de  $\underline{\underline{\sigma}}_0$  tem-se a seguinte lei constitutiva da **elasticidade linear isótropa**

$$\underline{\underline{\sigma}} - \underline{\underline{\sigma}}_0 = \underline{\underline{D}} : \underline{\underline{\varepsilon}}, \quad (5.15)$$

em que  $\underline{\underline{D}}$  é o tensor constitutivo elástico de quarta ordem simétrico dado por

$$\underline{\underline{D}} = \lambda^e \underline{\underline{1}} \otimes \underline{\underline{1}} + 2\mu^e \underline{\underline{\underline{\underline{1}}}} \quad (5.16)$$

sendo  $\underline{\underline{1}} \otimes \underline{\underline{1}}$  o tensor de quarta ordem dado pelo produto tensorial ( $\otimes$ ) entre dois tensores unitários de segunda ordem e  $\underline{\underline{\underline{\underline{1}}}}$  o tensor unitário de quarta ordem. As constantes  $\lambda^e$  e  $\mu^e$  são conhecidos como os coeficientes de Lamé, que possuem as seguintes relações com o módulo de Young  $E$  e o coeficiente de Poisson  $\nu$ :

$$\lambda^e = \frac{E\nu}{(1+\nu)(1-2\nu)}, \quad (5.17)$$

$$\mu^e = \frac{E}{2(1+\nu)}. \quad (5.18)$$

## 5.5 MODELO CONSTITUTIVO ELASTOPLÁSTICO

Para problemas com evolução isotérmica, quase-estáticos em transformações infinitesimais, o modelo constitutivo elastoplástico pode ser completamente descrito através de:

- a) decomposição do tensor de deformação total;

- b) superfície de escoamento;
- c) regra de fluxo plástico;
- d) lei de endurecimento/amolecimento;
- e) condições de carregamento/descarregamento.

### 5.5.1 Decomposição do tensor de deformação total

Considerando a hipótese das pequenas transformações, que inclui a hipótese das pequenas deformações, logo é válida a decomposição do tensor de deformação total em uma componente elástica e outra plástica, de modo que:

$$\underline{\dot{\epsilon}} = \underline{\dot{\epsilon}}^e + \underline{\dot{\epsilon}}^p \quad (5.19)$$

sendo  $\underline{\dot{\epsilon}}^e$  e  $\underline{\dot{\epsilon}}^p$  as taxas de deformação elástica e plástica, respectivamente. A taxa de deformação plástica também é conhecida por fluxo plástico. Diferentemente do modelo elástico, o modelo elastoplástico é dependente do trajeto das tensões e por isso (5.19) é descrito em forma de taxas. No entanto, na elastoplasticidade, o tempo físico não entra nas leis constitutivas, tratando-se de um fenômeno instantâneo. A marcação do tempo serve apenas para acompanhar o histórico de tensões, se tratando, portanto, de um pseudo-tempo.

Dentro do contexto de processos termodinâmicos determinísticos, a energia livre específica  $\psi$  de um material elastoplástico do qual se deriva as relações constitutivas, para o caso de uma evolução isotérmica em pequenas deformações, pode ser escrita e decomposta da seguinte maneira (de SOUZA NETO; PERI; OWEN, 2008, p. 149):

$$\psi(\underline{\epsilon}, \underline{\epsilon}^p, \underline{\alpha}) = \psi^e(\underline{\epsilon} - \underline{\epsilon}^p) + \psi^p(\underline{\alpha}) = \psi^e(\underline{\epsilon}^e) + \psi^p(\underline{\alpha}) \quad (5.20)$$

em que  $\underline{\alpha}$  é o conjunto de variáveis internas (coesão, ângulo de atrito e etc) cuja evolução está relacionada com o fenômeno de endurecimento/amolecimento. Dessa expressão e da aplicação da segunda lei da termodinâmica, que leva à inequação de Clausius-Duhem, deriva-se as seguintes relações constitutivas:

$$\left\{ \begin{array}{l} \underline{\sigma} = \frac{\partial \psi^e}{\partial \underline{\epsilon}^e} \\ \underline{q} = \frac{\partial \psi^p}{\partial \underline{\alpha}} \end{array} \right. \quad (5.21)$$

em que  $\underline{q}$  é o conjunto das forças termodinâmicas (escalares ou tensoriais) associadas às variáveis internas. De (5.19) e (5.21)<sub>1</sub> obtem-se a seguinte relação constitutiva:

$$\underline{\dot{\sigma}} = \underline{\underline{D}}^{ep} : \underline{\dot{\epsilon}} = \underline{\underline{D}} : \underline{\dot{\epsilon}}^e = \underline{\underline{D}} : (\underline{\dot{\epsilon}} - \underline{\dot{\epsilon}}^p) \quad (5.22)$$

em que  $\underline{\underline{D}}^{ep}$  é um tensor de quarta ordem que representa o módulo elastoplástico contínuo.

### 5.5.2 Superfície de escoamento

Uma característica fenomenológica dos materiais elastoplásticos é a existência de um limite dentro do qual o material se comporta em elasticidade. Em problemas tridimensionais isotrópicos esse domínio é delimitado por uma hiper superfície no espaço das tensões principais, chamada de **superfície de escoamento**, pois, assim que o estado de tensões atinge essa superfície tem inicio a evolução das deformações plásticas. Essa superfície é definida como (de SOUZA NETO; PERI; OWEN, 2008, p. 150):

$$\partial\Gamma = \left\{ \underline{\sigma} | f(\underline{\sigma}, \underline{q}) = 0 \right\} \quad (5.23)$$

em que  $f$  é a **função de escoamento**. Essa superfície delimita o conjunto de tensões que estão dentro do domínio elástico, ou seja, **elasticamente admissíveis (E. A.)**:

$$\Gamma^* = \left\{ \underline{\sigma} | f(\underline{\sigma}, \underline{q}) < 0 \right\}, \quad (5.24)$$

e o conjunto de tensões **plasticamente admissíveis (P. A.)**:

$$\Gamma = \left\{ \underline{\sigma} | f(\underline{\sigma}, \underline{q}) \leq 0 \right\}. \quad (5.25)$$

A Figura 5.4 ilustra de uma forma genérica esse domínio plasticamente admissível no espaço das tensões principais.

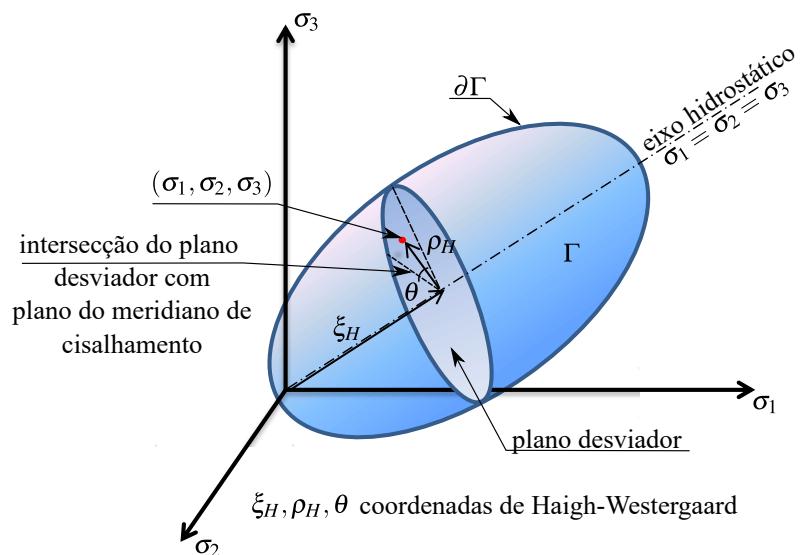


Figura 5.4 – Domínio genérico plasticamente admissível  $\Gamma$  no espaço das tensões principais

Em elastoplasticidade isotrópica, a função de escoamento pode ser descrita apenas em função dos invariantes do tensor de tensões e das forças associadas às variáveis internas. São, portanto, comuns as seguintes representações equivalentes (adaptado de CHEN; HAN, 1988, p. 53-72):

$$f(\underline{\sigma}, \underline{q}) = f(I_1, J_2, J_3, \underline{q}) = f(\xi_H, \rho_H, \theta, \underline{q}) = f(p, q, \theta, \underline{q}) = f(\sigma_{oct}, \tau_{oct}, \theta, \underline{q}) \quad (5.26)$$

em que:

$$\begin{aligned}
 I_1 &= \text{tr}(\underline{\underline{\sigma}}) = \sigma_{11} + \sigma_{22} + \sigma_{33} \\
 J_2 &= \frac{1}{2} \text{tr}(\underline{\underline{s}}^2) = \frac{1}{6} [(\sigma_{11} - \sigma_{22})^2 + (\sigma_{22} - \sigma_{33})^2 + (\sigma_{33} - \sigma_{11})^2] + \sigma_{12}^2 + \sigma_{23}^2 + \sigma_{13}^2, \\
 J_3 &= \frac{1}{3} \text{tr}(\underline{\underline{s}}^3) = \det(\underline{\underline{s}}) = s_{11}s_{22}s_{33} - s_{11}\sigma_{23}^2 - s_{22}\sigma_{13}^2 - s_{33}\sigma_{12}^2 + 2\sigma_{12}\sigma_{23}\sigma_{13}, \\
 \xi_H &= p = \sigma_{oct} = \frac{1}{3}I_1, \quad \rho_H = \sqrt{\underline{\underline{s}} : \underline{\underline{s}}} = \sqrt{2J_2}, \quad \theta = \frac{1}{3} \arcsin \left( \frac{-3\sqrt{3}}{2} \frac{J_3}{J_2^{3/2}} \right), \\
 -\frac{\pi}{6} &\leq \theta \leq \frac{\pi}{6}, \quad q = \sqrt{\frac{3}{2} \underline{\underline{s}} : \underline{\underline{s}}} = \sqrt{3J_2}, \quad \tau_{oct} = \sqrt{\frac{3}{2} J_2},
 \end{aligned} \tag{5.27}$$

sendo  $(\xi_H, \rho_H, \theta)$  as coordenadas de Haigh-Westergaard (em que  $\theta$  também é conhecido como ângulo de Lode),  $p$  a pressão hidrostática,  $q$  a tensão equivalente de von-Mises,  $(\sigma_{oct}, \tau_{oct})$  a tensão normal e cisalhante octaédrica, respectivamente, e  $s_{ij}$  são as componentes do tensor de tensões desviadoras  $\underline{\underline{s}}$ , dado por:

$$\underline{\underline{s}} = \underline{\underline{\sigma}} : \left[ \underline{\underline{1}} - \frac{1}{3} \underline{\underline{1}} \otimes \underline{\underline{1}} \right] = \underline{\underline{\sigma}} - p \underline{\underline{1}}. \tag{5.28}$$

Quando a função de escoamento não depende de  $I_1$  diz-se que a plasticidade é independente da pressão hidrostática, sendo determinada apenas pelo estado de tensões ao longo do plano desviador. Diversas funções de escoamentos podem ser obtidas na literatura, tal como as apresentadas no resumo de Viladkar, Noorzaei e Godbole (1995) que reúne tanto as funções de escoamentos clássicas (von-Mises, Tresca, Drucker-Prager, Mohr-Coulomb) quanto mais sofisticadas (*Cap Models, Critical State Model, Desai's Generalized Model*). O presente trabalho utilizará a função de escoamento de Drucker-Prager (DP) que compreende uma generalização da função de von-Mises (VM) para abranger a dependência da pressão hidrostática. Essa superfície tem vantagens numéricas pelo fato de não ter vértices e poder aproximar outras superfícies comuns utilizadas para geomateriais (como, por exemplo, Mohr-Coulomb (MC)). (Figura 5.5).

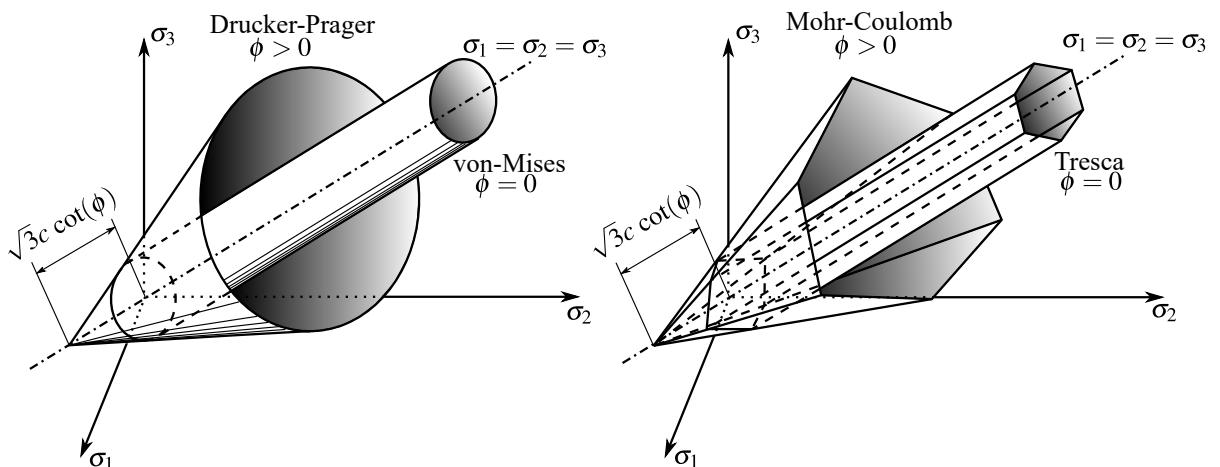


Figura 5.5 – Funções de escoamento de a) Drucker-Prager e b) Mohr-Coulomb (adaptado de: Zienkiewicz e Cormeau (1974, p. 824))

A expressão da função de escoamento de Drucker-Prager é dada por (adaptado de BERNAUD, 1991, p. 88-89):

$$f(\underline{\sigma}, q) = f(I_1, J_2, \beta_i) = \beta_1 I_1 + \beta_2 \sqrt{J_2} - \beta_3 \quad (5.29)$$

em que os parâmetros  $\beta_i$  são relacionados com a coesão  $c$  e o ângulo de atrito  $\phi$  do modelo de Mohr-Coulomb. Para o caso em que a superfície de Drucker-Prager coincide com a superfície de Mohr-Coulomb pelas bordas mais externas (DP-I), tem-se (adaptado de BERNAUD, 1991, p. 88-89):

$$\beta_1 = \frac{(k-1)}{3}, \quad \beta_2 = \frac{(k+2)}{\sqrt{3}}, \quad \beta_3 = 2\sqrt{k} c \quad (5.30)$$

em que  $k = (1 + \sin\phi)/(1 - \sin\phi)$  é o coeficiente de empuxo. Para o caso em que a superfície de Drucker-Prager está inscrita na superfície de Mohr-Coulomb (DP-II), tem-se (adaptado de BERNAUD, 1991, p. 88-89):

$$\beta_1 = \frac{(k-1)}{3}, \quad \beta_2 = \frac{(2k+1)}{\sqrt{3}}, \quad \beta_3 = 2\sqrt{k} c \quad (5.31)$$

Encontra-se ainda um terceiro caso em que a superfície de Drucker-Prager coincide com as bordas mais internas da superfície de Mohr-Coulomb (DP-III) (de SOUZA NETO; PERI; OWEN, 2008, p. 167):

$$\beta_1 = \frac{2 \sin \phi}{\sqrt{3}(3 + \sin(\phi))}, \quad \beta_2 = 1, \quad \beta_3 = \frac{6 \cos \phi}{\sqrt{3}(3 + \sin(\phi))} c. \quad (5.32)$$

Essas aproximações podem ser vistas no plano desviador conforme a Figura 5.6.

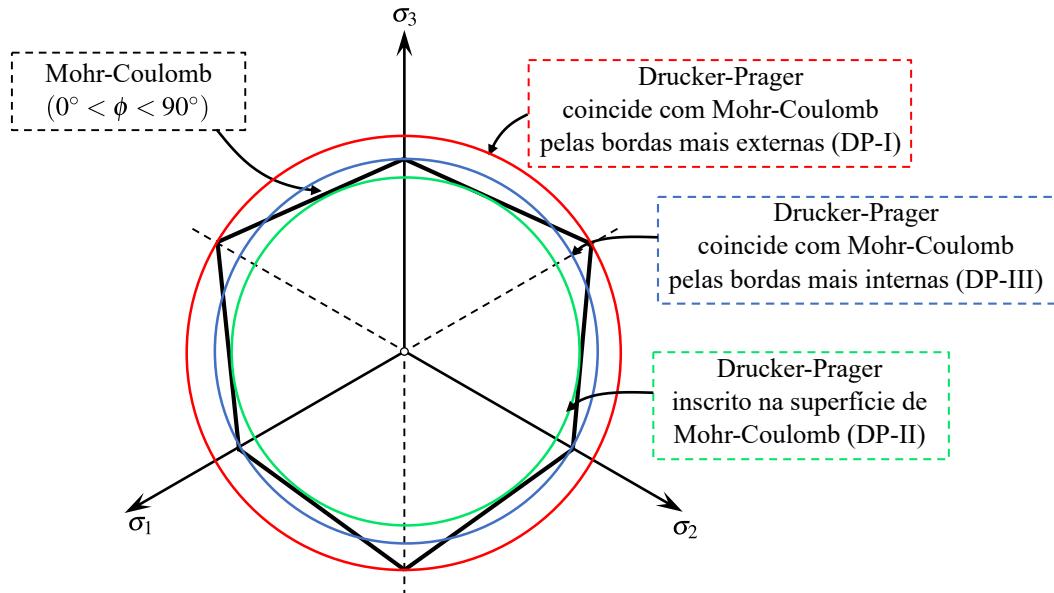


Figura 5.6 – Representação no plano desviador da aproximação da superfície de Mohr-Coulomb pela superfície de Drucker-Prager (adaptado de: de SOUZA NETO; PERI; OWEN, 2008, p. 169 e BERNAUD, 1991, p. 89)

Quando  $\phi = 0$  a superfície de Mohr-Coulomb e a de Drucker-Prager se tornam independentes da pressão hidrostática e se particularizam, respectivamente, para a superfície de Tresca e von-Mises (adaptado de: de SOUZA NETO; PERI; OWEN, 2008, p. 160, 162-163):

$$f(\underline{\sigma}, \underline{q}) = f(J_2, \theta, c) = 2\sqrt{J_2} \cos \theta - 2c, \quad (5.33)$$

$$f(\underline{\sigma}, \underline{q}) = f(J_2, \theta, c) = \sqrt{3}\sqrt{J_2} - 2c. \quad (5.34)$$

Igualando-se as expressões (5.34) e (5.33) à zero e isolando  $\sqrt{J_2}$  é possível relacionar ambas as superfícies através da coesão (Figura 5.7):

$$c_{\text{TR}} = \frac{2}{\sqrt{3}} \cos(\theta) c_{\text{VMS}} = \begin{cases} \frac{2}{\sqrt{3}} c_{\text{VMS}}, & \text{se } \theta = 0^\circ \text{ (VM) inscrito em (TR)} \\ c_{\text{VMS}}, & \text{se } \theta = \pm 30^\circ \text{ (VM) circunscreve (TR)} \end{cases}. \quad (5.35)$$

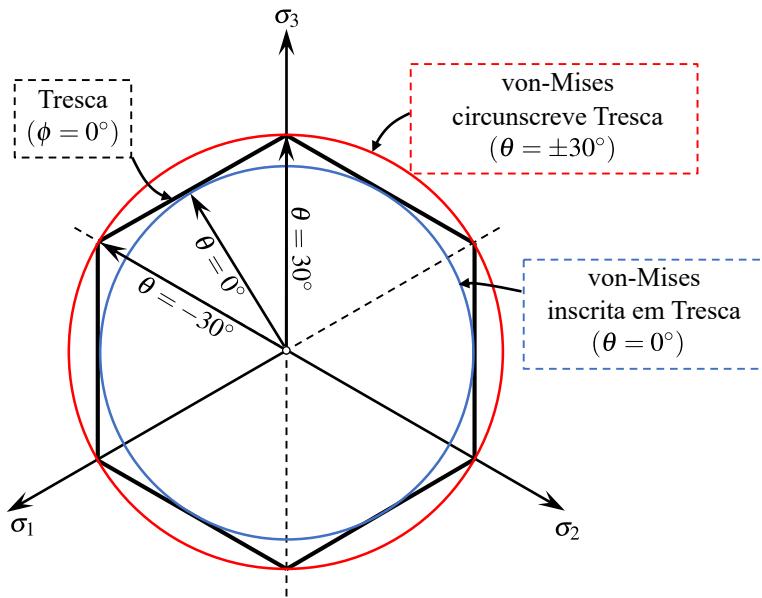


Figura 5.7 – Representação no plano desviador da aproximação da superfície de Tresca pela superfície de von-Mises (adaptado de: de SOUZA NETO; PERI; OWEN, 2008, p. 159, 164)

### 5.5.3 Regra de fluxo plástico

A regra de fluxo plástico descreve a lei de evolução das deformações plásticas com relação às tensões. Essa regra é postulada da seguinte forma:

$$\dot{\underline{\epsilon}}^p = \dot{\lambda} \underline{\underline{g}_\sigma} \quad (5.36)$$

em que  $\dot{\lambda}$  é a taxa da magnitude de deformação plástica  $\lambda$  (chamado também de multiplicador plástico) e  $\underline{\underline{g}_\sigma}$  o tensor que dá a direção do fluxo plástico (conhecido também como vetor de

fluxo ou gradiente do potencial plástico), sendo definido como:

$$\underline{\underline{g}} = \frac{\partial g}{\partial \underline{\underline{\sigma}}} \quad (5.37)$$

em que  $g$  é uma função análoga a  $f$  chamada de potencial plástico. No caso em que  $g = f$  tem-se a **plasticidade associada** (ou seja, a direção do fluxo plástico é perpendicular à superfície de plastificação) (Figura 5.8).

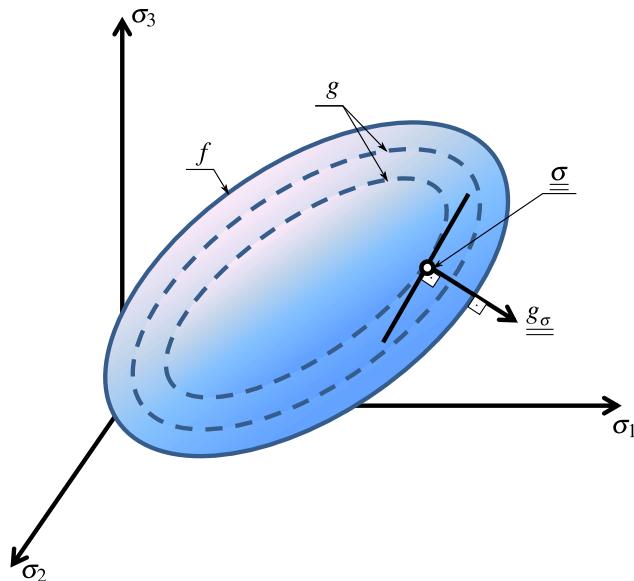


Figura 5.8 – Representação geométrica do vetor de fluxo em plasticidade associada (adaptado de: Chen e Han (1988, p. 182))

Tal como a função de escoamento, o potencial plástico geralmente é descrito através dos invariantes do tensor de tensões e seu gradiente pode ser determinado aplicando a regra da cadeia em (5.37). Por exemplo, se  $g(I_1, \sqrt{J_2}, J_3, q)$ , tem-se (adaptado de Owen e Hinton (1980, p. 231)):

$$\begin{aligned} \underline{\underline{g}} &= C_1 \underline{\underline{g}}_1 + C_2 \underline{\underline{g}}_2 + C_3 \underline{\underline{g}}_3, \\ \underline{\underline{g}}_1 &= \frac{\partial I_1}{\partial \underline{\underline{\sigma}}} = \underline{\underline{1}}, \quad \underline{\underline{g}}_2 = \frac{\partial \sqrt{J_2}}{\partial \underline{\underline{\sigma}}} = \frac{1}{2\sqrt{J_2}} \underline{\underline{s}}, \quad \underline{\underline{g}}_3 = \frac{\partial J_3}{\partial \underline{\underline{\sigma}}}, \\ C_1 &= \frac{\partial g}{\partial I_1}, \quad C_2 = \frac{\partial g}{\partial \sqrt{J_2}} - \frac{\tan(3\theta)}{\sqrt{J_2}} \frac{\partial g}{\partial \theta}, \quad C_3 = -\frac{\sqrt{3}}{2\cos(3\theta)} \frac{1}{J_2^{3/2}} \frac{\partial g}{\partial \theta}, \end{aligned} \quad (5.38)$$

sendo que nessa descrição, apenas as constantes  $C_1$ ,  $C_2$  e  $C_3$  são particularidades das diferentes superfícies potenciais como pode ser visto em Viladkar, Noorzaei e Godbole (1995). No caso da superfície de Drucker-Prager utilizada na tese tem-se  $C_1 = \beta_1$ ,  $C_2 = \beta_2$ ,  $C_3 = 0$ .

Nas superfícies que apresentam vértices, como Mohr-Coulomb e Tresca em  $\theta = \pm\pi/6$ , ocorre singularidade no cálculo do vetor de fluxo, pois a derivada não é definida nesses vértices. Utilizando a superfície de Drucker-Prager esse problema não aparece. Contudo, há formas de se

resolver esse problema, como, por exemplo, pode ser visto em Owen e Hinton (1980, p. 234) em que se utiliza  $C_1, C_2$  e  $C_3$  de Drucker-Prager ou von-Mises quando  $\theta = \pm\pi/6$  nessas superfícies.

Um aspecto comum na geomecânica é a variação do volume do material durante a evolução das deformações plásticas. Esse efeito é comumente introduzido através da plasticidade não associada, adotando, em vez do ângulo de atrito, um ângulo de dilatância  $0 < \psi < \phi$  na função potencial  $g$ .

#### 5.5.4 Lei de endurecimento/amolecimento

A lei de endurecimento/amolecimento fornece a regra de evolução da superfície de escoamento ao longo das deformações plásticas (*strain-hardening/softening*) ou do trabalho plástico (*work-hardening/softening*). Para a presente tese, é adotado o primeiro caso e a lei é então postulada da seguinte forma (BELYTSCHKO; LIU; MORAN, 2000, p. 249):

$$\dot{\underline{q}} = \dot{\lambda} \underline{h}_q = -\dot{\lambda} \frac{\partial h}{\partial \underline{q}} \quad (5.39)$$

em que  $\underline{h}_q = -\partial h / \partial \underline{q}$  é um vetor que contém os gradientes de uma função potencial  $h$  com relação às forças termodinâmicas associadas. Como a função de escoamento  $f$  é dependente de  $\underline{q}$ , a mudança dessas ao longo da deformação plástica irá alterar a posição e/ou a forma da superfície de escoamento. Quando a superfície de escoamento é estática, ou seja,  $\dot{\underline{q}} = 0$ , tem-se a plasticidade perfeita, quando esta aumenta tem-se o endurecimento isotrópico e quando se desloca tem-se o endurecimento cinemático, sendo mista, quando composta das duas últimas (Figura 5.9).

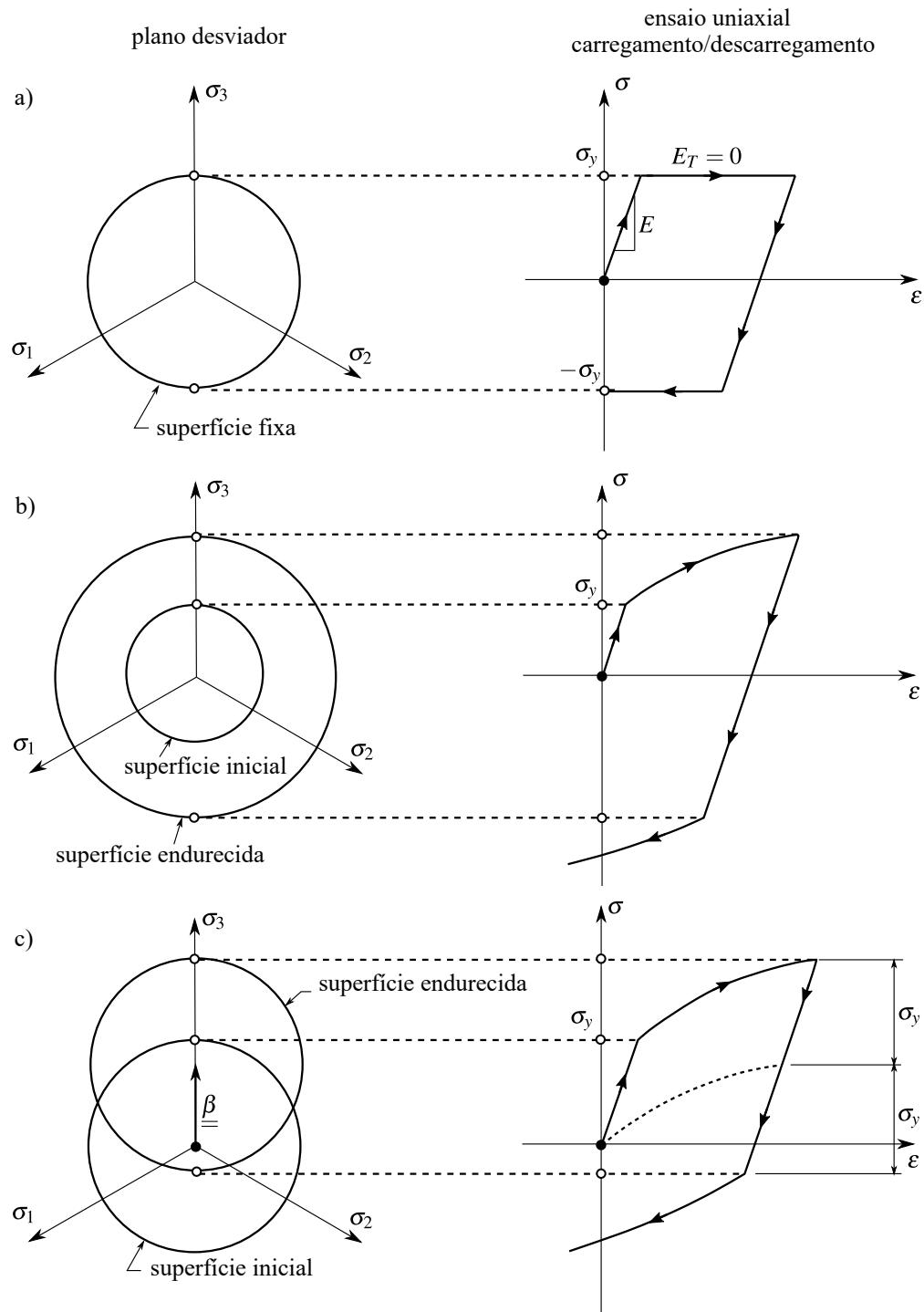


Figura 5.9 – Representação dos tipos de endurecimento no plano desviador e na curva tensão-deformação: a) elastoplasticidade perfeita, b) endurecimento isotrópico e c) endurecimento cinemático (adaptado de: de SOUZA NETO; PERI; OWEN, 2008, p. 178, 179, 186)

Em um primeiro momento, no presente trabalho, não é considerado a influência da lei de endurecimento e as forças termodinâmicas não variam com o histórico de deformações, ou

seja,  $\dot{q} = 0$ . Nesse caso, tem-se a elastoplasticidade perfeita. Em um segundo momento é considerado a lei de endurecimento/amolecimento associada ( $h = f$ ) e isotrópica. Dessa forma, a força termodinâmica associada é dada exclusivamente pela parcela que não depende da parte hidrostática ( $I_1$ ) e nem desviadora ( $J_2$ ) nas superfícies de escoamento. Essa força foi controlada pelo parâmetro coesivo, de modo que  $q = \chi c(\bar{\varepsilon}^p)$  em que:

$$\chi = \begin{cases} 2\sqrt{k}, & \text{para DP-I e DP-II} \\ \frac{6\cos\phi}{\sqrt{3}(3 + \sin(\phi))}, & \text{para DP-III} \end{cases} \quad (5.40)$$

sendo a deformação plástica equivalente  $\bar{\varepsilon}^p$  a variável de estado. Para a coesão, é considerado uma função linear definida por partes, conforme Figura 5.10, de modo a representar o endurecimento/amolecimento característico do maciço, tal como vistos na subseção 4.4.1.

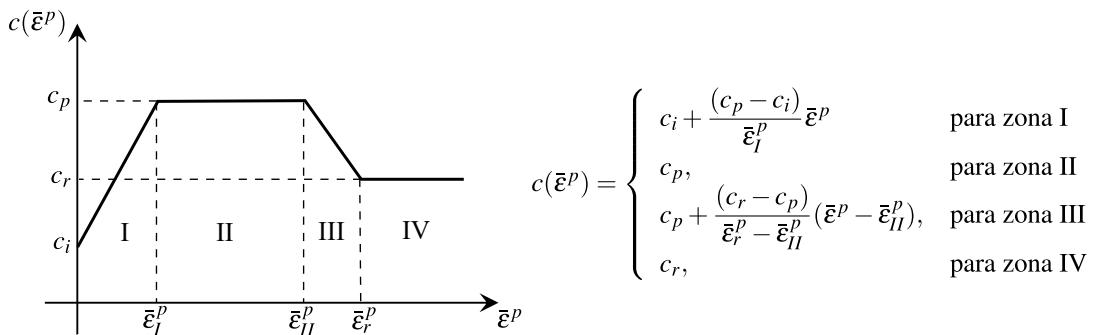


Figura 5.10 – Função linear definida por partes para representar o endurecimento/amolecimento através do parâmetro coesivo  
(adaptado de: Potts e Zdravkovic (1999, p. 158)

Portanto, usando a regra da cadeia, escreve-se (5.39) da seguinte forma:

$$\dot{q} = -\dot{\lambda} \frac{\partial h}{\partial q} = -\dot{\lambda} \frac{\partial f}{\partial q} = \dot{\lambda} \left( -\frac{\partial f}{\partial q} \frac{\partial q}{\partial c} \frac{\partial c}{\partial \bar{\varepsilon}^p} \right) \quad (5.41)$$

sendo, seus termos, conforme, (5.29) e Figura 5.10, dados por:

$$\frac{\partial f}{\partial q} = -1, \quad \frac{\partial q}{\partial c} = \chi, \quad (5.42)$$

e

$$\frac{\partial c}{\partial \bar{\varepsilon}^p} = \begin{cases} \frac{(c_p - c_i)}{\bar{\varepsilon}_I^p} & \text{para zona I} \\ 0, & \text{para zona II} \\ \frac{(c_r - c_p)}{\bar{\varepsilon}_r^p - \bar{\varepsilon}_{II}^p}, & \text{para zona III} \\ 0, & \text{para zona IV} \end{cases}. \quad (5.43)$$

O valor da deformação plástica equivalente é calculada a partir da seguinte expressão:

$$\dot{\underline{\epsilon}}^p = C \|\dot{\underline{\epsilon}}^p\| \quad (5.44)$$

em que

$$\|\dot{\underline{\epsilon}}^p\| = \sqrt{(\dot{\epsilon}_{11}^p)^2 + (\dot{\epsilon}_{22}^p)^2 + (\dot{\epsilon}_{33}^p)^2 + 2(\dot{\epsilon}_{12}^p)^2 + 2(\dot{\epsilon}_{23}^p)^2 + 2(\dot{\epsilon}_{13}^p)^2} \quad (5.45)$$

e  $C$  a rigor depende da superfície de plasticidade, do gradiente do potencial plástico e do estado de tensões ao qual está submetido a amostra no ensaio. Sua dedução é feita através do trabalho plástico por unidade de volume. Para o presente trabalho, foi utilizada a seguinte expressão deduzida para Drucker-Prager, que considera plasticidade associada e estados de tensões gerais (adaptado de CHEN; HAN, 1988, p. 257-259):

$$C = \frac{\beta_1 + 1/\sqrt{3}}{\sqrt{3\beta_1^2 + 1/2}}. \quad (5.46)$$

Quando  $\phi = 0$  o material é independente da pressão hidrostática, ou seja,  $\beta = 0$  e tem-se  $C = \sqrt{2/3}$ .

### 5.5.5 Condições de carregamento e descarregamento

A evolução das equações (5.36) e (5.39) estão sujeitas à três condições (condições de Kuhn-Tucker), que são (de SOUZA NETO; PERI; OWEN, 2008, p. 170):

$$f \leq 0, \quad \dot{\lambda} \geq 0, \quad \dot{\lambda} f = 0. \quad (5.47)$$

Essas condições estabelecem que apenas ocorre fluxo plástico quando o estado de tensões está sobre a superfície de escoamento e, neste caso, não há variação da função de escoamento, ou seja:

$$\dot{f} = \frac{\partial f}{\partial \underline{\sigma}} : \dot{\underline{\sigma}} + \frac{\partial f}{\partial \underline{q}} \cdot \dot{\underline{q}} = \underline{f}_\sigma : \dot{\underline{\sigma}} + \underline{f}_q \cdot \dot{\underline{q}} = 0. \quad (5.48)$$

A equação (5.48) é conhecida como **condição de consistência**.

### 5.5.6 Multiplicador plástico e módulo elastoplástico contínuo

Introduzindo na condição de consistência (5.48) a relação constitutiva (5.22), o fluxo plástico (5.36), a lei de endurecimento/amolecimento (5.39) e isolando o multiplicador plástico tem-se:

$$\dot{\lambda} = \frac{\underline{f}_\sigma : \underline{D} : \dot{\underline{\epsilon}}}{\underline{f}_\sigma : \underline{D} : \underline{g}_\sigma - \underline{f}_q \cdot \underline{h}_q} \quad (5.49)$$

que introduzindo na relação constitutiva (5.22) leva à:

$$\underline{\underline{D}}^{ep} = \underline{\underline{D}} - \frac{\left( \underline{\underline{D}} : \underline{\underline{g}}_{\sigma} \right) \otimes \left( \underline{\underline{f}}_{\sigma} : \underline{\underline{D}} \right)}{\underline{\underline{f}}_{\sigma} : \underline{\underline{D}} : \underline{\underline{g}}_{\sigma} - \underline{f}_q \cdot \underline{h}_q} \quad (5.50)$$

em que  $\otimes$  é o produto tensorial. Através de (5.50) pode-se notar que se a plasticidade for associada o tensor constitutivo elastoplástico é simétrico. Também, pelo sinal do segundo termo, pode-se ver que a plasticidade representa uma redução no módulo de elasticidade do material.

## 5.6 MODELO CONSTITUTIVO VISCOPLÁSTICO

### 5.6.1 Decomposição do tensor de deformação total

Considerando a hipótese das pequenas transformações é válida a decomposição do tensor de deformação total em uma componente elástica e outra viscoplastica, de modo que:

$$\dot{\underline{\underline{\varepsilon}}} = \dot{\underline{\underline{\varepsilon}}}^e + \dot{\underline{\underline{\varepsilon}}}^{vp} \quad (5.51)$$

em que  $\dot{\underline{\underline{\varepsilon}}}^{vp}$  é conhecido como fluxo viscoplastico. No caso da viscoplasticidade, a lei constitutiva depende tanto do trajeto das tensões quanto do tempo (e por isso também conhecida como *rate-dependent plasticity*), representando-se então as quantidades como taxas em um tempo real. Seguindo o mesmo raciocínio da elastoplasticidade, a relação constitutiva elastoviscoplástica linearizada pode ser escrita conforme:

$$\dot{\underline{\sigma}} = \underline{\underline{D}}^{vp} : \dot{\underline{\underline{\varepsilon}}} = \underline{\underline{D}} : \dot{\underline{\underline{\varepsilon}}}^e = \underline{\underline{D}} : \left( \dot{\underline{\underline{\varepsilon}}} - \dot{\underline{\underline{\varepsilon}}}^{vp} \right) \quad (5.52)$$

em que  $\underline{\underline{D}}^{vp}$  é o tensor de quarta ordem que representa o módulo elastoviscoplástico contínuo.

### 5.6.2 Superfície de escoamento

Em viscoplasticidade nem sempre se tem um regime elástico, por exemplo, a altas temperaturas certos materiais podem fluir sempre sobre tensão, ou seja, a função de escoamento é zero (de SOUZA NETO; PERI; OWEN, 2008, p. 448). Para esses casos, existem modelos como o de Norton (1929), Lemaitre e Chaboche (1994), e também funções provenientes de ajustes empíricos que descrevem o fluxo viscoplastico através da tensão, tempo e temperatura, como por exemplo, as resumidas por Skrzypek (1993). Porém, em geral, o comportamento viscoso do maciço em túneis evidencia-se após um determinado nível de tensões, conforme visto na Figura 4.16. Para esses casos são adotadas superfícies de escoamento análogas as da elastoplasticidade. No presente trabalho foram utilizadas as mesmas superfícies da subseção 5.5.2. Porém, ao contrário da elastoplasticidade, essa superfície não delimita um domínio plasticamente admissível podendo  $f(\underline{\sigma}, q) > 0$ .

### 5.6.3 Regra de fluxo viscoplástico

Tal como na elastoplasticidade, a regra de fluxo viscoplástico é postulada da seguinte forma:

$$\underline{\dot{\varepsilon}}^{vp} = \dot{\lambda} \underline{\underline{g}_\sigma} \quad (5.53)$$

em que  $\underline{\dot{\varepsilon}}^{vp}$  é o fluxo viscoplástico (ou taxa de deformação viscoplástica),  $\dot{\lambda}$  a magnitude da deformação viscoplástica e  $\underline{\underline{g}_\sigma}$  o vetor de fluxo viscoplástico, definido de forma igual ao da elastoplasticidade, ou seja, através do gradiente de uma função potencial  $g$ , porém viscoplástica.

### 5.6.4 Lei de endurecimento/amolecimento

Na viscoplasticidade o endurecimento pode ser incorporado fazendo com que as variáveis internas sejam função da magnitude da deformação viscoplástica acumulada:

$$\underline{q} = h_q(\bar{\varepsilon}^{vp}) \quad (5.54)$$

em que

$$\bar{\varepsilon}^{vp} = \int_0^t |\dot{\lambda}| dt. \quad (5.55)$$

Contudo, no presente trabalho, apesar da generalidade dos algoritmos descritos na seção posterior, não foi incorporado o endurecimento/amolecimento, se tratando, portanto, de uma viscoplasticidade perfeita.

### 5.6.5 Multiplicador viscoplástico

Como as deformações viscoplásticas ocorrem quando  $f > 0$  não há a imposição da condição de consistência. Dessa forma, tem-se que a taxa do multiplicador viscoplástico  $\dot{\lambda}$  não pode ser obtida de uma condição do tipo  $\dot{f} = 0$ . Para contornar esse aspecto, existem modelos que fornecem uma expressão explícita para  $\dot{\lambda}$ , e no presente trabalho foi adotado o modelo de Perzyna (ZIENKIEWICZ; CORMEAU, 1974, p. 823):

$$\dot{\lambda} = \frac{\Phi(f/f_0)}{\eta} \quad (5.56)$$

$$\Phi = \left\langle \frac{f(\underline{\sigma}, \underline{q})}{f_0} \right\rangle^n \quad (5.57)$$

em que  $\eta$  é a constante de viscosidade dinâmica (unidade de tempo),  $\Phi$  é a função de sobretensão, nesse caso, uma função potencial com expoente  $n$ ,  $f_0$  parâmetro de tensão convenientemente adotado a partir do qual se inicia o fenômeno viscoso e  $\langle \cdot \rangle$  é a função de McCauley, que é nulo quando  $\cdot < 0$ , ou seja, apenas ocorrerá fluxo viscoplástico quando o critério  $f/f_0$  for positivo. O valor de  $f_0$  a rigor depende da superfície viscoplástica adotada, que no caso da superfície

adotada seu valor fica sendo  $f_0 = \beta_3$ . Contudo, o valor de  $f_0$  também pode depender de ajuste juntamente com  $n$  o que o torna um dado de entrada para o modelo.

Muitas vezes o parâmetro  $f_0$  não consta na expressão como, por exemplo, em Rousset (1988, p. 222). Nesse caso, seu valor está implícito na constante  $\eta$  cuja unidade de medida é tempo vezes tensão elevada na potência  $n$ , ao invés de apenas a unidade de tempo, como em Zienkiewicz e Cormeau (1974). Isso não constitui um problema, pois, é mantida a consistência dimensional da expressão. Contudo, essa sutileza é importante no momento de adimensionalizar resultados com a expressão (4.7) da velocidade. Nessa expressão, Bernaud (1991) utiliza a constante de viscosidade dinâmica conforme Rousset (1988).

## 5.7 MODELO CONSTITUTIVO ELASTOPLÁSTICO VISCOPLÁSTICO

O modelo elastoplástico-viscoplastico proposto nessa tese, dentro das hipóteses de pequenas transformações, comprehende justamente a associação em série dos modelos constitutivos acima, portanto:

$$\dot{\underline{\epsilon}} = \dot{\underline{\epsilon}}^e + \dot{\underline{\epsilon}}^p + \dot{\underline{\epsilon}}^{vp}. \quad (5.58)$$

Essa associação pode ser vista na representação reológica da Figura 5.11.

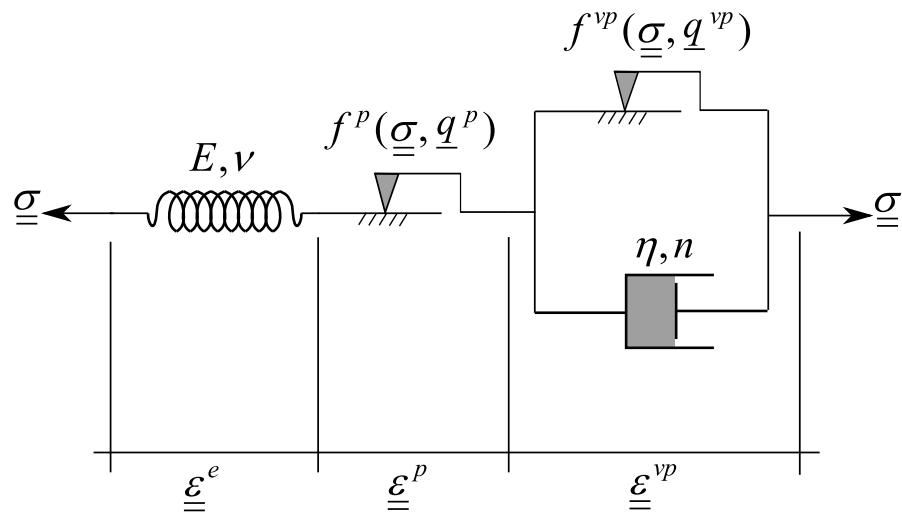


Figura 5.11 – Representação reológica do modelo elastoplástico-viscoplastico (adaptado de: Rousset (1988, p. 220))

Dessa forma, dentro das mesmas hipóteses dos modelos anteriores, a relação constitutiva linearizada fica sendo:

$$\dot{\underline{\sigma}} = \underline{\underline{D}}^{epvp} : \dot{\underline{\epsilon}} = \underline{\underline{D}} : \dot{\underline{\epsilon}}^e = \underline{\underline{D}} : \left( \dot{\underline{\epsilon}} - \dot{\underline{\epsilon}}^p - \dot{\underline{\epsilon}}^{vp} \right). \quad (5.59)$$

Uma observação importante é que as superfícies de escoamentos e as variáveis internas que definem a parcela elastoplástica e viscoplástica desse modelo podem ser diferentes entre si, incluindo a associação das suas respectivas funções potenciais com suas superfícies de escoamento. Apesar dessa abordagem genérica, na presente tese foi adotada inicialmente a proposta seguida pelas soluções analíticas de Rousset (1988) em que a força termodinâmica associada às variáveis internas que governam a lei de endurecimento/amolecimento instantânea  $q^p$  é uma função definida por partes através do parâmetro coesivo em função da deformação plástica equivalente. Por outro lado, a força termodinâmica associada com a lei viscoplástica é constante. Por exemplo para ilustrar esse comportamento, de forma unidimensional, segue-se as seguintes expressões (ROUSSET, 1988, p. 220):

$$c(\varepsilon^p) = \begin{cases} 2c - \frac{2(c - c_0)}{\varepsilon_0} \varepsilon^p & \\ 2c_0 & \text{se } \varepsilon^p > \varepsilon_0 \end{cases} \quad (5.60)$$

que podem ser vistas graficamente na Figura 5.12.

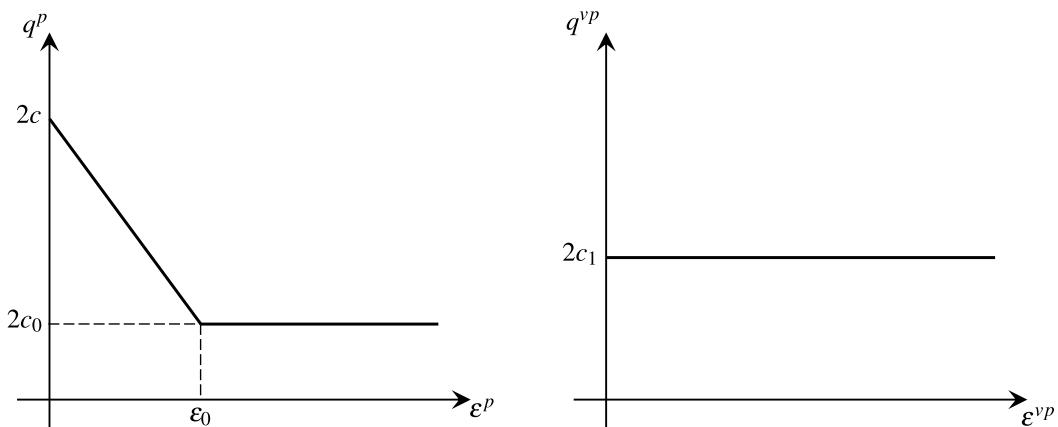


Figura 5.12 – Leis de endurecimento e amolecimento para a parcela elastoplástica (à esquerda) e viscoplástica (à direita) (adaptado de: Rousset (1988, p. 220))

Nesse modelo, pode-se notar que a elastoplasticidade possui um amolecimento bilinear e a viscoplasticidade é perfeita. Os valores das coesões possuem a seguinte relação entre si:  $c_0 < c_1 < c$ . Essa relação não é arbitrária e pretende representar o inicio do comportamento diferido frente ao comportamento instantâneo. Essa desigualdade implica que as deformações viscoplásticas tenham inicio antes mesmo do maciço atingir sua resistência máxima de curto prazo e se mantém mesmo após o maciço ter atingido sua coesão residual. Generalizando para o caso tridimensional, para um determinado ponto no interior do maciço, tem-se, para seu estado de tensões, os domínios apresentados na Figura 5.13.

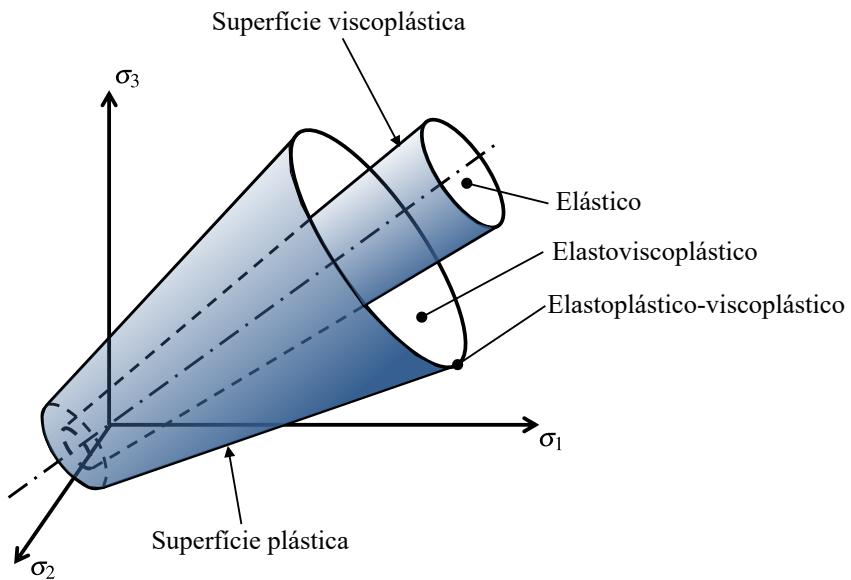


Figura 5.13 – Domínios e superfícies do modelo elastoplástico-viscoplastico (adaptado de: Debernardi e Barla (2009, p. 263))

O comportamento desse modelo reológico pode ainda ser melhor entendido através da resposta das tensões frente a uma taxa de deformação constante. Esse comportamento é ilustrado na Figura 5.14, sendo  $\dot{\varepsilon}_1 = \infty > \dot{\varepsilon}_2 > \dot{\varepsilon}_3 > \dot{\varepsilon}_4 = 0$ .

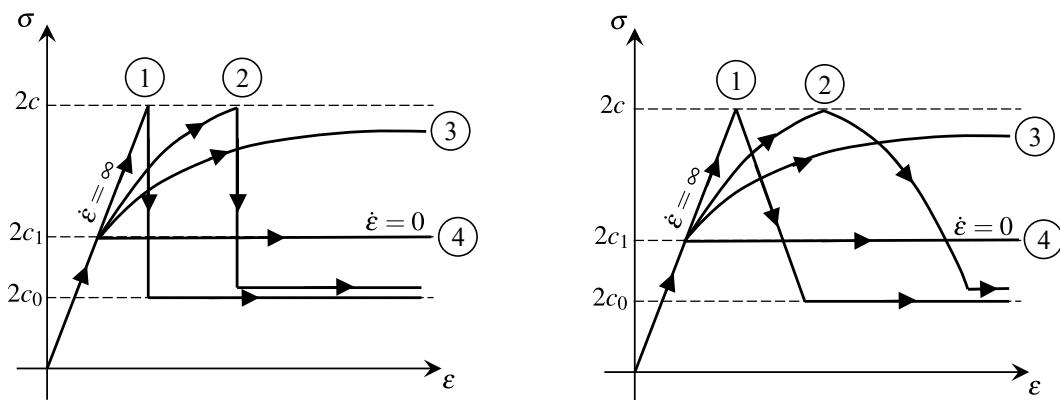


Figura 5.14 – Resposta do sistema a uma solicitação  $\dot{\varepsilon} = \text{const.}$  Ruptura frágil (à esquerda) e ruptura dúctil (à direita) (adaptado de: Rousset (1988, p. 221))

Para altas taxas de deformação (caso 1 e 2), a tensão aumenta rapidamente até atingir o valor limite de  $2c$  e em seguida diminui abruptamente (ruptura frágil) ou gradualmente (ruptura dúctil) de encontro a uma tensão residual de  $2c_0$ . Pode-se notar, pela Figura 5.14a, que no caso 1, que possui a taxa de deformação muito alta os efeitos viscosos praticamente não ocorrem, ocorrendo apenas o comportamento elastoplástico, ao contrário do caso 2, no qual os efeitos viscosos

ocorrem. Contudo, para taxas menores de deformação (caso 3) o limiar de ruptura não é atingido e a tensão evolui assintoticamente para um valor intermediário entre  $2c$  e  $2c_1$ . Pode-se notar que no caso 4, quando a taxa de deformação é muito lenta, o modelo possui uma resposta elastoplástica perfeita com o limiar em  $2c_1$ . Quando se tem um maciço dúctil (Figura 5.14b) o mesmo fenômeno é observado.

## 6 SOLUÇÃO DO MODELO MECÂNICO

A solução do modelo mecânico foi feita através do *software ANSYS*, na sua versão 2021R1, e a primeira parte desse capítulo descreve a solução numérica pelo método dos elementos finitos (de forma mais genérica possível) comentando as funcionalidades do ANSYS, quando pertinente. Posteriormente, é dada ênfase na solução numérica do modelo constitutivo do material (que é o foco principal do trabalho) que foi implementado no recurso programável *Usermat*. No final desse capítulo é apresentado o domínio, a discretização da malha e do tempo, as condições de contorno e os parâmetros utilizados nas análises.

### 6.1 FORMA FRACA DAS EQUAÇÕES DE CAMPO

No contexto da evolução quase estática e da hipótese das pequenas perturbações podem-se escrever as equações de campo na sua forma fraca através do princípio dos trabalhos virtuais. Sendo assim, aplicando um campo de deslocamento virtual  $\underline{\delta u}$ , cinematicamente admissível, em (5.4), porém ao longo de todo o volume  $\Omega$  tem-se que:

$$\int_{\Omega} \left( \nabla \cdot \underline{\underline{\sigma}} + \rho \underline{f} \right) d\Omega \cdot \underline{\delta u} = 0, \quad (6.1)$$

$$\int_{\Omega} \nabla \cdot \underline{\underline{\sigma}} d\Omega \cdot \underline{\delta u} + \int_{\Omega} \rho \underline{f} d\Omega \cdot \underline{\delta u} = 0. \quad (6.2)$$

Aplicando o Teorema da Divergência no termo mais à esquerda da igualdade (6.2) obtém-se:

$$\int_{\Omega} \underline{\underline{\sigma}} : \underline{\underline{\delta \epsilon}} d\Omega - \left( \int_{\Omega} \rho \underline{f} \cdot \underline{\delta u} d\Omega + \int_{\partial\Omega} \underline{T}^d \cdot \underline{\delta u} dS \right) = U_{int} - W_{ext} = 0 \quad (6.3)$$

A expressão (6.1) é uma equação integral em que, no equilíbrio, o trabalho das forças externas  $W_{ext}$  sobre o sistema é totalmente convertido em energia potencial interna  $U_{int}$  de deformação.

### 6.2 NOTAÇÃO DE VOIGT

Os tensores simétricos de segunda e quarta ordem são comumente representados, respectivamente, por arranjos (*arrays*) vetoriais e matriciais convenientes à álgebra computacional. Dessa forma é utilizada a seguinte notação (ZIENKIEWICZ; TAYLOR; ZHU, 2005, p. 682):

$$\underline{\underline{\sigma}} \rightarrow \underline{\sigma} = \{\sigma_{11} \ \sigma_{22} \ \sigma_{33} \ \sigma_{12} \ \sigma_{23} \ \sigma_{13}\}^T \quad (6.4)$$

$$\underline{\underline{\varepsilon}} \rightarrow \underline{\varepsilon} = \{\varepsilon_{11} \ \ \varepsilon_{22} \ \ \varepsilon_{33} \ \ 2\varepsilon_{12} \ \ 2\varepsilon_{23} \ \ 2\varepsilon_{13}\}^T \quad (6.5)$$

$$\underline{\underline{D}} \rightarrow \underline{\underline{D}} = \begin{bmatrix} D_{1111} & D_{1122} & D_{1133} & D_{1112} & D_{1123} & D_{1113} \\ D_{2211} & D_{2222} & D_{2233} & D_{2212} & D_{2223} & D_{2213} \\ D_{3311} & D_{3322} & D_{3333} & D_{3312} & D_{3323} & D_{3313} \\ D_{1211} & D_{1222} & D_{1233} & D_{1212} & D_{1223} & D_{1213} \\ D_{2311} & D_{2322} & D_{2333} & D_{2312} & D_{2323} & D_{2313} \\ D_{1311} & D_{1322} & D_{1333} & D_{1312} & D_{1323} & D_{1313} \end{bmatrix} \quad (6.6)$$

$$\underline{\underline{g}_\sigma} \rightarrow \underline{g}_\sigma = \left\{ \frac{\partial g}{\partial \sigma_{11}} \ \ \frac{\partial g}{\partial \sigma_{22}} \ \ \frac{\partial g}{\partial \sigma_{33}} \ \ \frac{\partial g}{\partial \sigma_{12}} \ \ \frac{\partial g}{\partial \sigma_{23}} \ \ \frac{\partial g}{\partial \sigma_{13}} \right\}^T \quad (6.7)$$

$$\underline{\underline{1}} \rightarrow \underline{1} = \{1 \ \ 1 \ \ 1 \ \ 0 \ \ 0 \ \ 0\}^T \quad (6.8)$$

$$\underline{\underline{1}} \rightarrow \underline{1} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1/2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1/2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1/2 \end{bmatrix} \quad (6.9)$$

$$\underline{\underline{1}} \otimes \underline{\underline{1}} \rightarrow \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \quad (6.10)$$

sendo o subscrito  $T$  a operação de transposição. Como se pode ver é utilizada a mesma simbologia de tensores de primeira ordem e de segunda ordem representando vetores (arranjos unidimensionais) e matrizes (arranjos bidimensionais), respectivamente. Nessa notação, as operações também são transformadas, de tal forma que:

$$\begin{aligned} \underline{a} \cdot \underline{b} &\rightarrow \underline{b}^T \underline{a}, \\ \underline{\underline{a}} : \underline{\underline{b}} &\rightarrow \underline{\underline{a}}^T \underline{\underline{b}}, \\ \underline{\underline{a}} \otimes \underline{\underline{b}} &\rightarrow \underline{\underline{a}} \underline{\underline{b}}^T, \\ \underline{\underline{C}} : \underline{\underline{b}} &\rightarrow \underline{\underline{C}} \underline{b}, \\ \underline{\underline{b}} : \underline{\underline{C}} : \underline{\underline{b}} &\rightarrow \underline{\underline{b}}^T \underline{\underline{C}} \underline{b}, \\ \left( \underline{\underline{C}} : \underline{\underline{a}} \right) \otimes \left( \underline{\underline{b}} : \underline{\underline{C}} \right) &\rightarrow \underline{\underline{C}} \underline{\underline{a}} \underline{\underline{b}}^T \underline{\underline{C}}. \end{aligned} \quad (6.11)$$

Essa é a notação adotada para o restante do trabalho. Logo, o teorema dos trabalhos virtuais (6.12) pode ser reescrito da seguinte forma:

$$\int_{\Omega} \underline{\delta \varepsilon}^T \underline{\sigma} d\Omega - \left( \int_{\Omega} \rho \underline{\delta u}^T \underline{f} d\Omega + \int_{\partial\Omega} \underline{\delta u}^T \underline{T}^d dS \right) = U_{int} - W_{ext} = 0 \quad (6.12)$$

### 6.3 DISCRETIZAÇÃO ESPACIAL EM ELEMENTOS FINITOS

A solução por elementos finitos consiste em discretizar o domínio  $\Omega$  em um conjunto de elementos contíguos  $\Omega_e$ , estabelecendo o que se chama de malha de elementos finitos (Figura 6.2). Cada elemento da malha tem um formato simples: de linha, de triângulo ou quadrilátero, de tetraedro ou hexaedro, dependendo da dimensão (1D, 2D ou 3D) do domínio a ser discretizado. Cada elemento está conectado a outros elementos compartilhando "nós" sendo que a principal incógnita do problema são os deslocamentos nodais.

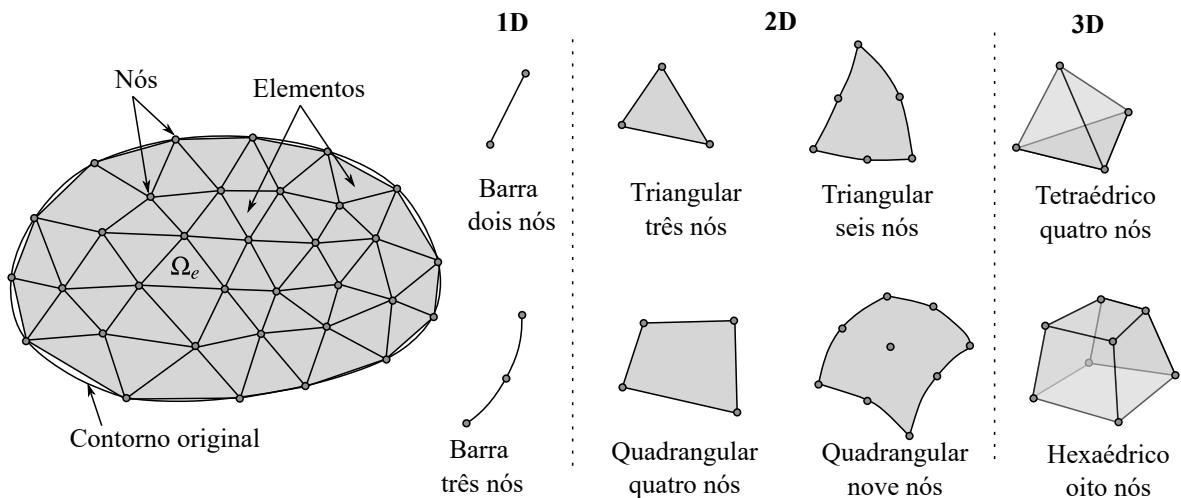


Figura 6.1 – Discretização de um domínio genérico em elementos finitos  
(adaptado de: de Souza (2003, p. 1-2))

Nesse método, o campo de deslocamentos no interior dos elementos é relacionado com os deslocamentos nodais através de funções de interpolação, por exemplo, lineares ou quadráticas, cujos coeficientes são postos em função dos deslocamentos nodais. Dessa forma, o campo de deslocamentos no interior do elemento pode ser descrito como:

$$\underline{u}(\underline{x}) = \underline{u}(x_1, x_2, x_3) = \underline{\underline{N}}(\underline{x}) \underline{u}_e. \quad (6.13)$$

sendo  $\underline{u}(\underline{x})$  o campo de deslocamentos no interior do elemento,  $\underline{u}_e$  os deslocamentos nodais e  $\underline{\underline{N}}$  a matriz contendo as funções de interpolação (também conhecidas como funções de forma). A

matriz  $\underline{\underline{N}}$  tem a seguinte estrutura:

$$\underline{\underline{N}} = \begin{bmatrix} N_1 & 0 & 0 & N_2 & 0 & 0 & \dots & N_{n_e} & 0 & 0 \\ 0 & N_1 & 0 & 0 & N_2 & 0 & \dots & 0 & N_{n_e} & 0 \\ 0 & 0 & N_1 & 0 & 0 & N_2 & \dots & 0 & 0 & N_{n_e} \end{bmatrix}_{n_d \times (n_e \cdot n_d)} \quad (6.14)$$

em que  $N_i$  são as funções de interpolação de cada nó  $i$ ,  $n_e$  número de nós do elemento e  $n_d$  o número de dimensões. Introduzindo (6.13) nas equações de compatibilidade (5.8) tem-se:

$$\underline{\varepsilon}(\underline{x}) = \underline{\varepsilon}(x_1, x_2, x_3) = \nabla^s \underline{u}(\underline{x}) = \nabla^s \underline{\underline{N}} \underline{u}_e = \underline{\underline{B}} \underline{u}_e \quad (6.15)$$

sendo  $\underline{\varepsilon}$  o campo de deformações e  $\underline{\underline{B}} = \nabla^s \underline{\underline{N}}$  a matriz que relaciona os deslocamentos nodais com as deformações no interior do elemento. Para problemas tridimensionais, o operador gradiente simétrico  $\nabla^s$ , na notação de Voigt, é dado por:

$$\nabla^s = \begin{bmatrix} \frac{\partial}{\partial x_1} & 0 & 0 \\ 0 & \frac{\partial}{\partial x_2} & 0 \\ 0 & 0 & \frac{\partial}{\partial x_3} \\ \frac{\partial}{\partial x_2} & \frac{\partial}{\partial x_1} & 0 \\ 0 & \frac{\partial}{\partial x_3} & \frac{\partial}{\partial x_2} \\ \frac{\partial}{\partial x_3} & 0 & \frac{\partial}{\partial x_1} \end{bmatrix}_{n_c \times n_d} \quad (6.16)$$

em que  $n_c$  é o número de componentes de deformações. Introduzindo (6.15) na lei de comportamento do material, é possível determinar as tensões no interior do elemento também em função dos deslocamentos nodais:

$$\underline{\sigma}(\underline{x}) = \underline{\sigma}(x_1, x_2, x_3) = \underline{\underline{D}} \underline{\underline{B}} \underline{u}_e + \underline{\underline{D}} \underline{\varepsilon}_I + \underline{\sigma}_I \quad (6.17)$$

na qual  $\underline{\varepsilon}_I$  e  $\underline{\sigma}_I$  são deformações e tensões iniciais no interior do elemento, respectivamente. Nos problemas de túneis, é através de  $\underline{\sigma}_I$  que é introduzido as tensões *in situ*. Para o caso de tensão geostática hidrostática, em um túnel de profundidade  $H$  em um maciço com peso específico  $\gamma_m$  a seguinte expressão é utilizada:

$$\underline{\sigma}_I = \gamma_m H \underline{1}. \quad (6.18)$$

Introduzindo as expressões (6.13), (6.15) e (6.17) no princípio dos trabalhos virtuais (6.12), considerando o domínio de um elemento  $\Omega_e$ , obtém-se a seguinte equação de equilíbrio em forças:

$$\underline{F}_{int_e} - \underline{F}_{ext_e} = \underline{0} \quad (6.19)$$

em que

$$\underline{F}_{int_e} = \int_{\Omega_e} \underline{\underline{B}}^T \underline{\underline{\sigma}} d\Omega_e = \underline{\underline{K}}_e \underline{u}_e + \underline{F}_{\varepsilon_{l_e}} + \underline{F}_{\sigma_{l_e}}, \quad (6.20)$$

$$\underline{F}_{ext_e} = \underline{F}_{V_e} + \underline{F}_{S_e} + \underline{F}_{C_e} + \underline{F}_{N_e} \quad (6.21)$$

nos quais

$$\underline{\underline{K}}_e = \int_{\Omega_e} \underline{\underline{B}}^T \underline{\underline{\sigma}} d\Omega_e, \quad \underline{F}_{\varepsilon_{l_e}} = \int_{\Omega_e} \underline{\underline{B}}^T \underline{\underline{D}} \underline{\varepsilon}_I d\Omega_e, \quad \underline{F}_{\sigma_{l_e}} = \int_{\Omega_e} \underline{\underline{B}}^T \underline{\underline{\sigma}}_I d\Omega_e, \quad (6.22)$$

$$\underline{F}_{V_e} = \int_{\Omega_e} \rho \underline{\underline{N}}^T \underline{f} d\Omega_e, \quad \underline{F}_{S_e} = \int_{\partial\Omega_e} \underline{\underline{N}}^T \underline{T}^d dS_e, \quad \underline{F}_{C_e} = \int_{\partial\Omega_e} \underline{\underline{N}}^T \underline{T}^c dS_c, \quad (6.23)$$

sendo que  $\underline{F}_{int_e}$  e  $\underline{F}_{ext_e}$  são as forças internas e externas no elemento, respectivamente,  $\underline{\underline{K}}_e$  a matriz de rigidez do elemento,  $\underline{F}_{\varepsilon_{l_e}}$  e  $\underline{F}_{\sigma_{l_e}}$  forças internas no elemento devido às deformações inciais e tensões iniciais, respectivamente,  $\underline{F}_{V_e}$  forças de volume do elemento,  $\underline{F}_{S_e}$  forças de superfície no contorno livre do elemento,  $\underline{F}_{C_e}$  forças de contato entre elementos vizinhos e  $\underline{F}_{N_e}$  forças nodais. A Figura 6.2 ilustra as forças externas de um elemento genérico.

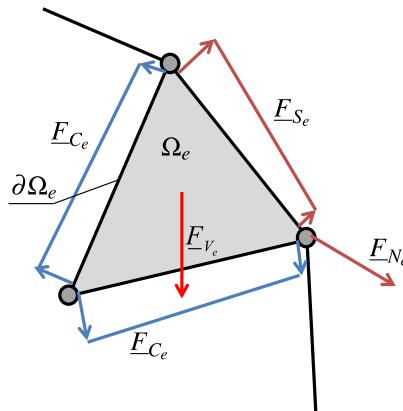


Figura 6.2 – Diagrama de corpo livre de um elemento finito (adaptado de: Lizarza (2011, p. 19))

No método dos elementos finitos, as integrais de volume no domínio  $\Omega_e$ , por eficiência, são geralmente resolvidas em um domínio de referência  $\Omega_\xi$  com geometria normalizada  $-1 \leq \xi_i \leq 1$ . As coordenadas  $\xi$  também são conhecidas como coordenadas naturais do elemento. Portanto, é feita a seguinte troca de variáveis nas integrais de volume (ZIENKIEWICZ; TAYLOR; ZHU, 2005, p. 147):

$$\int_{\Omega_e} d\Omega_e = \iiint dx_1 dx_2 dx_3 = \int_{\Omega_\xi} \det(\underline{\underline{J}}) d\Omega_\xi = \int_{-1}^1 \int_{-1}^1 \int_{-1}^1 \det(\underline{\underline{J}}) d\xi_1 d\xi_2 d\xi_3 \quad (6.24)$$

em que  $\underline{\underline{J}} = \frac{\partial \underline{x}}{\partial \xi}$  é o Jacobiano da transformação entre as coordenada  $\underline{x}$  e  $\xi$ , sendo calculado com as mesmas funções de interpolação usadas para os deslocamentos no interior do elemento,

se tratando, portanto, de um **elemento isoparamétrico**. A integral assim representada é então resolvida pelo método da Quadratura de Gauss-Legendre. Portanto, para uma função  $f(\underline{x})$  qualquer, no domínio  $\Omega_e$ , tem-se:

$$\int_{\Omega_e} f(\underline{x}) d\Omega_e = \int_{-1}^1 \int_{-1}^1 \int_{-1}^1 f(\underline{\xi}) \det(\underline{J}) d\xi_1 d\xi_2 d\xi_3 = \sum_{i_p=1}^{n_p} W_{i_p} J_{i_p} f(\underline{\xi}_{i_p}) \quad (6.25)$$

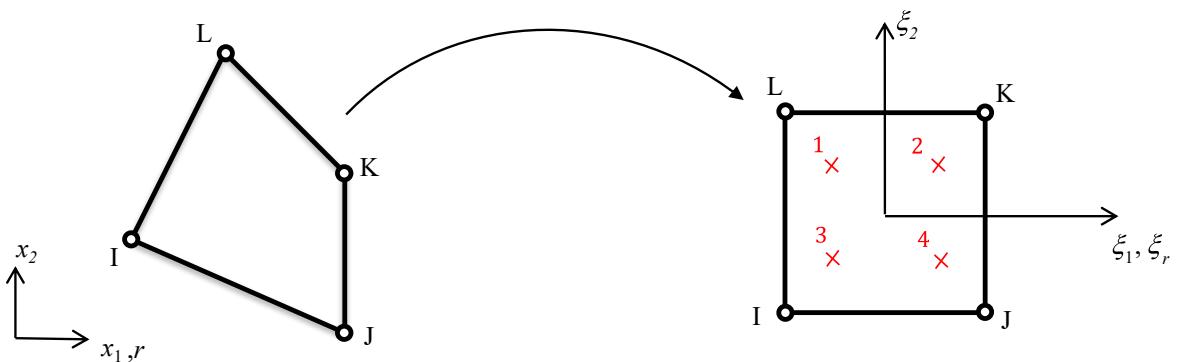
em que  $n_p$  é o número de pontos de integração (ou pontos de Gauss),  $W_{i_p}$  é o peso referente ao ponto de integração,  $f(\underline{\xi}_{i_p})$  é o valor da função nas coordenadas naturais do ponto de integração e  $J_{i_p}$  é o determinante do Jacobiano da transformação (nas coordenadas do ponto de integração) dado por (ZIENKIEWICZ; TAYLOR; ZHU, 2005, p. 206-207):

$$J_{i_p} = \begin{cases} \det(\underline{J})_{i_p} & \text{em 3D e estado plano de deformações} \\ 2\pi \xi_{r_{i_p}} \det(\underline{J})_{i_p} & \text{em axissimetria} \end{cases} \quad . \quad (6.26)$$

sendo  $\xi_{r_{i_p}}$  a coordenada radial natural do ponto de Gauss. A equação (6.25) possuí a integração exata se a função for um polinômio de ordem menor ou igual a  $2n_p - 1$ .

Os elementos finitos que são utilizados nesse trabalho com suas funções de interpolação, pesos e coordenadas dos pontos de integração podem ser vistos na Figura 6.3, para análises em estado plano de deformações e, para análises tridimensionais, que consomem maior tempo de processamento, é utilizado o elemento da Figura 6.4.

PLANE182 - QUADRILÁTERO LINEAR, 4 NÓS, 4 PONTOS DE GAUSS



$$\underline{N} = \frac{1}{4} \begin{Bmatrix} (1-\xi_1)(1-\xi_2) \\ (1-\xi_1)(1+\xi_2) \\ (1+\xi_1)(1+\xi_2) \\ (1+\xi_1)(1-\xi_2) \end{Bmatrix} \quad \underline{W} = \begin{Bmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \\ 1 \end{Bmatrix} \quad \left[ \underline{\xi}_{i_p} \right] = \sqrt{\frac{1}{3}} \begin{Bmatrix} -1 & 1 \\ 1 & -1 \\ -1 & -1 \\ 1 & 1 \end{Bmatrix}$$

Figura 6.3 – Funções de interpolação, pesos e coordenadas dos pontos de Gauss para o elemento quadrilátero linear isoparamétrico PLANE182 (adaptado de: ANSYS Inc (2018b, p. 334, 369-370))

## SOLID185 - HEXAEDRO TRILINEAR, 8 NÓS, 8 PONTOS DE GAUSS

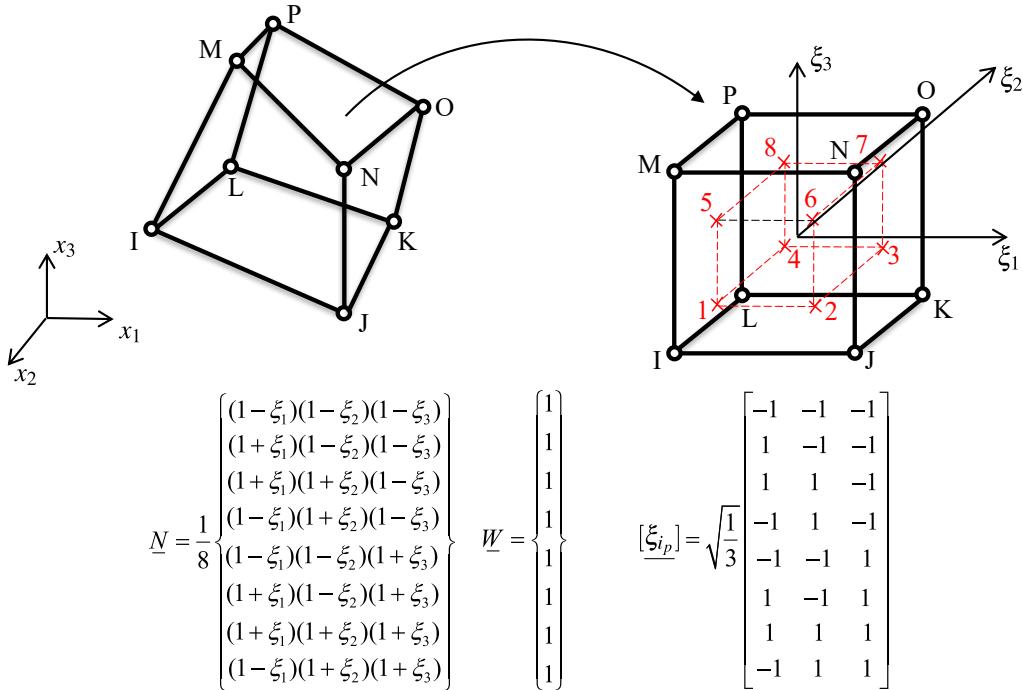


Figura 6.4 – Funções de interpolação, pesos e coordenadas dos pontos de Gauss para o elemento hexaedro trilinear isoparamétrico SOLID185 (adaptado de: ANSYS Inc (2018b, p. 345, 369-370))

No *software* ANSYS, ambos elementos possuem a opção degenerada em que é possível trabalhar de forma colapsada, triangular, por exemplo no caso do elemento PLANE182, e prisma, tetraédrica ou piramidal, no caso do elemento SOLID185. Nas análises apresentadas ao final dessa tese, não foram utilizadas essas formas. Além disso, apesar do *script* APDL ter sido construído com a opção de se trabalhar com os elementos quadráticos (PLANE183 e SOLID186), visando uma melhor eficiência computacional, principalmente para os domínios tridimensionais, optou-se por fazer o estudo de convergência da malha com elementos lineares.

Os elementos PLANE182 e SOLID185 possuem também opções que lidam com problemas de travamento (*Locking*) e modos espúrios (*Hourglass*). O travamento é caracterizado por uma rigidez excessiva do elemento, e ocorre principalmente em elementos de primeira ordem com integração completa que estão sujeitos a flexão. Ou ainda, quando o material é quase incompressível. Também podem ocorrer em elementos de segunda ordem, quando as deformações plásticas são da ordem das deformações elásticas. Esse problema evita-se com refinamento da malha, técnicas de subintegração e funções de formas extras. O ANSYS possui as duas últimas técnicas para o PLANE182 e SOLID185 (*Uniform Reduced Integration with Hourglass Control* e *Enhanced Strain Formulation*). Já os modos espúrios ocorrem quando se utiliza as técnicas de subintegração e é caracterizado por uma distorção no elemento porém com zero deformação.

Esse problema é evitado utilizando integração completa ou refinamento da malha. No presente trabalho utilizou-se a **integração completa** (*Full integration*) e esses problemas foram evitados com o **refinamento da malha**.

## 6.4 SOLUÇÃO DO SISTEMA NÃO LINEAR

Após o processo de discretização do domínio  $\Omega$  é necessário fazer a montagem e a solução do seguinte sistema global de equações:

$$(\underline{\underline{K}} \underline{u} + \underline{F}_{\varepsilon_l} + \underline{F}_{\sigma_l}) - (\underline{F}_V + \underline{F}_S + \underline{F}_N) = \underline{F}_{int} - \underline{F}_{ext} = f(\underline{u}) = \underline{0} \quad (6.27)$$

em que  $\underline{\underline{K}}$  é a matriz de rigidez global resultante da montagem das matrizes de rigidezes  $\underline{\underline{K}}_e$  de cada elemento,  $\underline{u}$  é o vetor incógnito de deslocamentos nodais global proveniente da montagem dos deslocamentos nodais  $\underline{u}_e$  de cada elemento,  $\{\underline{F}_V, \underline{F}_S, \underline{F}_N, \underline{F}_{\varepsilon_l}, \underline{F}_{\sigma_l}\}$  são as forças globais resultantes da montagem das forças em cada elemento, conforme (6.22) e (6.23). Evidentemente não há um vetor de forças de contato global  $\underline{F}_C$ , uma vez que as forças de contato entre elementos vizinhos possuem a mesma magnitude e sentidos contrários e, portanto, se anulam no somatório global.

Quando há uma não linearidade envolvendo as leis constitutivas do material (tal como na plasticidade ou viscoplasticidade, em que o problema é dependente da trajetória das tensões), a matriz de coeficientes  $\underline{\underline{K}}$  passa a depender dos deslocamentos nodais incógnitos  $\underline{u}$ , tornando o sistema (6.27) não linear. O **método de Newton-Raphson** (NR) é o processo iterativo comumente utilizado para resolver esse sistema e é utilizado pelo *software* ANSYS. Dessa forma, aproximando (6.27) por uma série de Taylor truncada na primeira ordem (linearização) tem-se:

$$\underline{f}(\underline{u}) \approx \underline{f}(\underline{u}_i) + \underline{f}'(\underline{u}_i)(\underline{u}_{i+1} - \underline{u}_i). \quad (6.28)$$

Fazendo  $\underline{f}(\underline{u}) = \underline{0}$ , isolando  $\underline{u}_{i+1}$  e substituindo (6.27) em (6.28), considerando que  $\underline{F}_{ext}$  não depende dos deslocamentos (devido à hipótese das pequenas perturbações), tem-se a seguinte expressão iterativa para aproximar  $\underline{u}$ :

$$\underline{u}_{i+1} = \underline{u}_i - \underline{\underline{K}}(\underline{u}_i)^{-1} (\underline{F}_{int}(\underline{u}_i) - \underline{F}_{ext}) = \underline{u}_i - \underline{\underline{K}}_i^{-1} (\underline{F}_{int_i} - \underline{F}_{ext}) = \underline{u}_i + \underline{\underline{K}}_i^{-1} \underline{R}_i = \underline{u}_i + \Delta \underline{u}_i \quad (6.29)$$

em que  $\Delta \underline{u}_i$  é o incremento de deslocamentos nodais da iteração atual  $i$ ,  $\underline{F}_{int_i}$  são as forças internas (ou forças restauradoras) da iteração atual (calculadas com  $\underline{u}_i$ ),  $\underline{R}_i$  é o vetor de carga desbalanceado (também chamado de resíduo) para a iteração atual,  $\underline{\underline{K}}_i$  a matriz de rigidez global tangente na iteração atual,  $\underline{u}_i$  os deslocamentos nodais na iteração atual e  $\underline{u}_{i+1}$  os deslocamentos nodais atualizados para a próxima iteração.

Como  $\Delta\mathbf{u}_i = \underline{\underline{K}}_i^{-1} \underline{\underline{R}}_i$  é um sistema de equações esparso (contém muitos elementos nulos) e geralmente simétrico, há diversas técnicas de solução que buscam explorar essas características para obter eficiência computacional. O *software* ANSYS possui uma técnica de **solução direta**, que busca resolver o sistema através de operações que compreendem a inversão da matriz de rigidez, e três técnicas de **soluções indiretas**, que se aproximam da solução do sistema de forma interativa com uma dada tolerância.

A solução direta (*SPARSE - Sparse Direct Solver*) consiste em aplicar a fatorização de Cholesky modificada  $\underline{\underline{K}} = \underline{\underline{L}} \underline{\underline{D}} \underline{\underline{L}}^T$  (em que  $\underline{\underline{L}}$  é uma matriz triangular inferior e  $\underline{\underline{D}}$  uma matriz diagonal) e, através de substituições progressivas e retroativas, resolver o sistema. Em geral, para problemas com poucos graus de liberdade, é uma solução bastante eficiente e não possui problemas de instabilidade numérica. Algoritmos de solução direta análogas podem ser encontrados em Felippa (1975) e Smith, Griffiths e Margetts (2014).

As soluções indiretas, implementadas no ANSYS, se baseiam na família de Métodos dos Gradientes Conjugados Pré-Condicionados, que consistem em minimizar o potencial  $V(\Delta\mathbf{u}) = \frac{1}{2}\Delta\mathbf{u}^T \underline{\underline{K}} \Delta\mathbf{u} - \Delta\mathbf{u}^T \underline{\underline{R}}$  com aproximações  $\Delta\mathbf{u}^{(j+1)} = \Delta\mathbf{u}^j + a_j \underline{d}^{(j)}$  para  $j = 0, 1, 2, \dots, m$ , sendo  $\underline{d}^{(j)}$  os gradientes conjugados, ou seja,  $\underline{d}^{(i)^T} \underline{\underline{K}} \underline{d}^{(j)} = 0, \forall i \neq j$ . Quando o sistema é bem condicionado, sua solução converge para  $m \leq n_{gdl}$  iterações e o número de operações é proporcional à raiz quadrada do número de condição da matriz  $\underline{\underline{K}}$ , numero este que é a razão entre o maior e menor autovalor da matriz  $\underline{\underline{K}}$ . Em vista disso, há diversas técnicas de transformação do sistema para melhorar o condicionamento dessa matriz através de uma transformação do tipo  $\underline{\underline{M}}^{-1} \underline{\underline{K}} \underline{u} = \underline{\underline{M}}^{-1} \underline{\underline{R}}$ , em que  $\underline{\underline{M}}$  é o pré-condicionador. O ANSYS possuí três métodos implementados (ANSYS Inc, 2018b, p. 647):

- a) JCG (*Jacobi Conjugate Gradient*): o pré-condicionador é tomado como sendo uma matriz diagonal cujos termos são as diagonais da matriz de rigidez;
- b) ICCG (*Incomplete Cholesky Conjugate Gradient*), o pré-condicionador é tomado através de uma fatorização incompleta de Cholesky. O algoritmo é internamente desenvolvido pela ANSYS e não publicado, e é mais robusto que o primeiro para matrizes mal condicionadas;
- c) PCG (*Preconditioned Conjugate Gradient*) é um solucionador da *Computational Applications and System Integration, Inc* que não consta nos manuais do *software*. Contudo, é dito eficiente e confiável para problemas mal condicionados.

Maiores explicações dessas soluções indiretas, podem ser encontrados em Mendonça e Fancello (2019, p. 316). Cabe salientar que, tanto os métodos diretos quanto indiretos, são implementados buscando a eficiência computacional, evitando-se trabalhar com os elementos nulos, diminuindo

o armazenamento e o número de operações. Alguns métodos que compreendem reordenamento e armazenamento eficiente do sistema, utilizados pelo ANSYS, podem ser encontrados em George e Liu (1981). Além disso, uma vantagem do ANSYS é a possibilidade de trabalhar com computação de alto desempenho (HPC - *High Performance Computing*) com opções de aceleração usando placas de vídeo da Nvidia, memória compartilhada (SMP - *Shared-Memory Parallel*) ou computação distribuída (MPI - *Message Passing Interface*). Para o presente trabalho, foi utilizado a opção de SMP com 12 processadores.

A rigor para um problema não linear a escolha do melhor método de solução vai depender de testagem. Por padrão o ANSYS utiliza o SPARSE. Contudo, o manual do *software* recomenda utilizar o método PCG para estruturas sólidas 3D que possuem mais de 200.000 graus de liberdade. Para problemas mal condicionados, seja pela forma dos elementos, grandes diferenças entre as propriedades dos materiais ou ainda por insuficiente condições de contorno, recomenda-se o SPARSE (ANSYS Inc, 2018a, p. 242). Esse foi o método de solução escolhido para o presente trabalho.

Para incorporar a dependência do histórico de cargas/tempo, para um dado passo de carga/tempo  $p$ , a expressão (6.29) é discretizada em  $1 \leq n \leq n_s$  subpassos em que a carga externa e o tempo do passo são incrementados linearmente. Dessa forma, itera-se o sistema (6.29) repetidas vezes para cada subpasso  $n$  tendo-se:

$$\Delta \underline{u}_{n,i} = \underline{\underline{K}}_{n,i}^{-1} (\underline{F}_{ext_n} - \underline{F}_{int_{n,i}}) = \underline{\underline{K}}_{n,i}^{-1} \underline{R}_{n,i}, \quad (6.30)$$

$$\underline{u}_{n,i+1} = \underline{u}_{n,i} + \Delta \underline{u}_{n,i}, \quad (6.31)$$

$$\underline{F}_{ext_n} = \underline{F}_{ext_{n-1}} + \Delta \underline{F}_p, \quad (6.32)$$

$$t_n = t_{n-1} + \Delta t_p, \quad (6.33)$$

em que

$$\underline{F}_{int_{n,i}} = \left( \int_{\Omega} \underline{\underline{B}}^T \underline{\sigma} d\Omega \right)_{n,i} \quad (6.34)$$

sendo  $\underline{u}_{0,0}$ ,  $\underline{F}_{int_{0,0}}$ ,  $\underline{F}_{ext_0}$  e  $t_0$  nulos. Para os próximos subpassos os valores de  $\underline{u}_{n,0}$  e  $\underline{F}_{int_{n,0}}$ , correspondem aos valores da solução convergente no subpasso anterior  $n - 1$ . O número de subpassos  $n_s$  e o incremento de força externa  $\Delta \underline{F}_p$  são dependentes do incremento de tempo utilizado no passo  $\Delta t_p$ , e são dados por:

$$n_s = \frac{t_p}{\Delta t_p}, \quad \Delta \underline{F}_p = \frac{\underline{F}_{ext_p}}{n_s} \quad (6.35)$$

sendo  $t_p$  e  $\underline{F}_{ext_p}$ , nessa ordem, o tempo e a força no final do passo. Em busca da convergência e eficiência computacional, o ANSYS tem a opção de variar automaticamente o  $\Delta t_p$  dentro

de um intervalo  $\Delta t_{p_{min}} \leq \Delta t_p \leq \Delta t_{p_{max}}$  fornecido pelo usuário. É possível que o algoritmo não converja em um dado subpasso durante as iterações e, portanto, é utilizado um limite de  $n_{eqit} = 25$  iterações de equilíbrio por subpasso. Quando a solução não converge dentro desse limite, o ANSYS divide pela metade o incremento de tempo, e consequentemente a carga, e reinicia o cálculo do passo. Esse procedimento é chamado de Método da Bisseção e é executado tantas vezes quanto necessárias até atingir a convergência ou  $\Delta t_p \leq \Delta t_{p_{min}}$  a partir do qual a solução é dada como não convergente e estabelecido o critério de parada (ANSYS Inc, 2018b, p. 637).

A convergência é verificada sobre o vetor resíduo e o incremento de deslocamentos nodais para cada iteração de equilíbrio, através das seguintes expressões (omitindo-se o subíndice  $n$ ) (ANSYS Inc, 2018b, p. 667):

$$\|R_i\| \leq \varepsilon_R R_{ref}, \quad \|\Delta u_i\| \leq \varepsilon_u u_{ref} \quad (6.36)$$

em que  $\varepsilon_R$  e  $\varepsilon_u$  são as tolerâncias para o resíduo (de 0,5%) e deslocamentos (de 5%), respectivamente. Os valores de referência  $R_{ref}$  e  $u_{ref}$  são  $\|F_{ext,p}\|$  e  $\|\underline{u}_{n,i}\|$ , respectivamente. Ou seja, por padrão o critério para o resíduo é de 0,5% do valor das forças externas e o incremento de deslocamentos não podem apresentar um valor maior do que 5% dos deslocamentos do subpasso. No ANSYS, a norma pode ser calculada de três formas: a máxima componente em valor absoluto, a soma absoluta das componentes ou a norma euclidiana das componentes, conforme:

$$\|*\| = \begin{cases} \|*\|_\infty = \max(*_j) \\ \|*\|_1 = \sum_j |*_j| \\ \|*\|_2 = (\sum_j *_j^2)^{1/2} \end{cases} . \quad (6.37)$$

em que  $j$  é o índice da componente do vetor  $* = \underline{R}$  ou  $* = \Delta \underline{u}$ . Para o presente trabalho foi escolhida a norma euclidiana para o resíduo e a norma infinita para o incremento de deslocamento. A Figura 6.5 ilustra o andamento da solução ao longo dos subpassos. Pode-se ver, caso haja a convergência entre os subpassos, que o resíduo e o incremento de deformações vão ficando cada vez menores ao longo das iterações de equilíbrio.

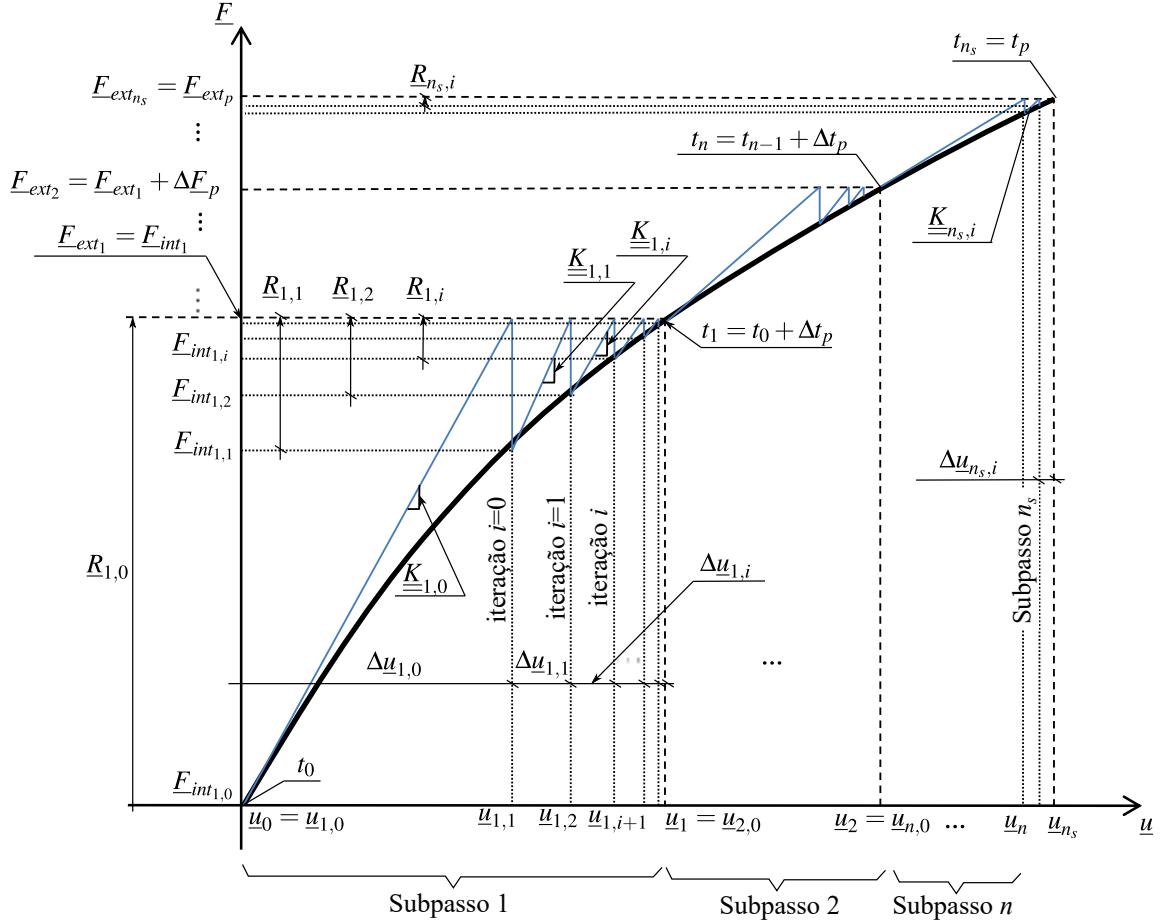


Figura 6.5 – Ilustração das iterações do método de Newton-Raphson  
(adaptado de: Chen e Han (1988, p. 301))

O ANSYS possui ainda quatro variações do método de Newton-Raphson de acordo com a estratégia de atualização da matriz de rigidez  $\underline{\underline{K}}_{n,i}$  (2018b, p. 666):

- Completo (Full)**: quando a matriz de rigidez é atualizada a cada iteração  $i$ , ou seja,  $\underline{\underline{K}}_{n,i} \leftarrow \underline{\underline{K}}_{n,i}$ . Essa opção reduz o número de iterações de equilíbrio (convergência quadrática), porém, exige a montagem, fatorização e inversão da matriz a cada iteração;
- Modificado (Modified)**: quando a matriz de rigidez é atualizada apenas a cada subpasso de carga/tempo  $n$ , ou seja,  $\underline{\underline{K}}_{n,i} \leftarrow \underline{\underline{K}}_{n,0}$ ;
- Inicial (Initial Stiffness)**: quando é utilizada a mesma matriz para todos os subpassos e iterações, ou seja,  $\underline{\underline{K}}_{n,i} \leftarrow \underline{\underline{K}}_{0,0}$ .
- Completo Assimétrico (Full with unsymmetric matrix)**: atualiza a matriz de rigidez a cada iteração, ou seja,  $\underline{\underline{K}}_{n,i} \leftarrow \underline{\underline{K}}_{n,i}$ , porém é utilizada a matriz cheia ao invés de explorar a simetria.

A convergência quadrática da opção de Newton-Raphson Completo só é efetivamente obtida se for utilizado o módulo consistente  $\underline{\underline{D}}^{alg}$  após o algoritmo de integração das tensões, conforme Simo e Taylor (1985). A opção de Newton-Raphson Completo Assimétrico é importante para os casos em que se calcula o módulo consistente e se tem plasticidade não associada. A plasticidade não associada pode levar a módulos constitutivos não simétricos e pode não convergir com o Newton-Raphson Completo, pois este monta a matriz de rigidez considerando-a simétrica. Uma forma de contornar esse problema é não utilizar o módulo consistente, porém serão necessárias mais iterações de equilíbrio para a convergência. Nessa tese, como será visto mais adiante, foi programado o módulo constitutivo consistente, mas o autor optou por manter esse recurso opcional para o usuário.

Apesar de não terem sido utilizadas nessa tese, o ANSYS possui ainda quatro técnicas para melhorar a convergência do método de Newton-Raphson em problemas estáticos, que são (ANSYS Inc, 2018b, p. 668-673):

- a) **Predictor (Predictor)**: extrapola o vetor de deslocamentos iniciais de cada subpasso utilizando os incrementos de deslocamentos acumulados do subpasso anterior multiplicados pela relação entre os incrementos de tempo de ambos subpassos;
- b) **Descida Adaptativa (Adaptative Descent)**: consiste em alternar entre a matriz de rigidez tangente e secante conforme o andamento do resíduo durante as iterações de equilíbrio. Só é utilizada em conjunto com o método de Newton-Raphson Completo;
- c) **Pesquisa de linha (Line Search)**: tenta melhorar a solução multiplicando o incremento de deslocamentos por um escalar determinado pela minimização da energia do sistema;
- d) **Método do comprimento de arco (Arc-Length Method)**: utilizado para solução de equilíbrio estático não-linear de problemas instáveis como flambagem e pós-flambagem.

Na Figura 6.6 tem-se o fluxograma do método de Newton-Raphson, mostrando as três opções de atualização da matriz de rigidez, o método da bisseção e os laços das iterações de equilíbrio e de subpassos.

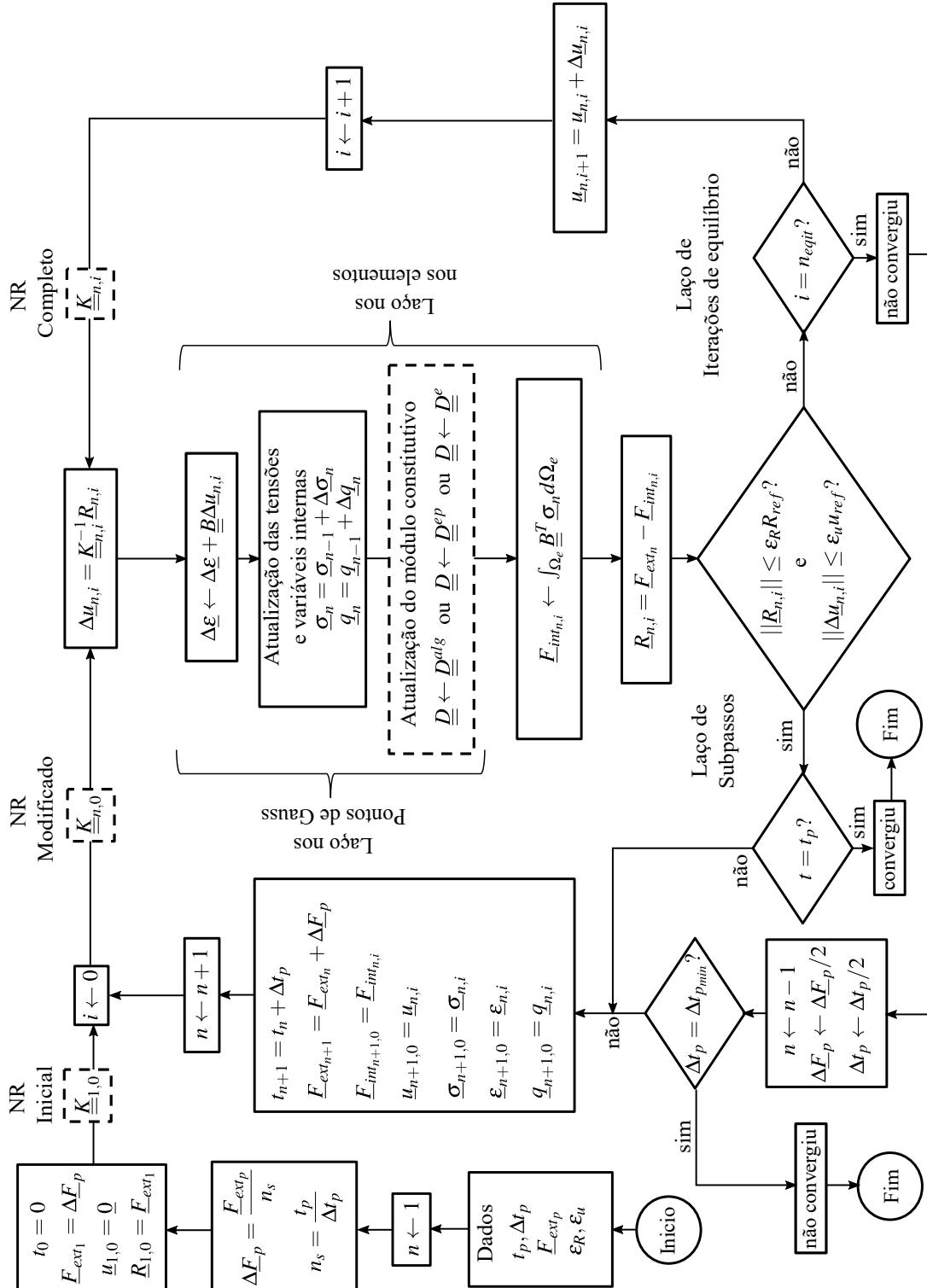


Figura 6.6 – Fluxograma do método de Newton-Raphson para solução do sistema de equações globais não lineares

Ainda na Figura 6.6 está detalhada a parte de atualização das tensões, variáveis internas e do módulo constitutivo, que serão os temas do próximo capítulo. É importante nesse fluxograma o detalhe dos laços nos elementos e pontos de Gauss, pois a customização do modelo do material,

através da subrotina *Usermat*, está justamente aninhada nesse laço mais interno dos pontos de Gauss.

## 6.5 ALGORITMO DE ATUALIZAÇÃO DAS TENSÕES E VARIÁVEIS INTERNAS

Como visto na seção anterior, durante as iterações de equilíbrio é necessário fazer a integração espacial das forças internas no contexto do método dos elementos finitos. Essa integração pode ser escrita da seguinte maneira:

$$F_{int_{n,i}} = \int_{\Omega} \underline{\underline{B}}^T \underline{\sigma}_n d\Omega = \sum_{i_e=1}^{n_e} \sum_{i_p=1}^{n_p} (\underline{\underline{B}}^T \underline{\sigma}_n W J)_{i_p, i_e} \quad (6.38)$$

sendo  $\underline{\sigma}_n$  dado pela relação constitutiva do material. Contudo, as relações constitutivas, por dependerem da trajetória das tensões e/ou do tempo, estão descritas em forma de taxas, conforme visto no Capítulo 5. E, portanto, é necessária a solução desse sistema de equações diferenciais ordinárias por algum método de integração ao longo dos subpassos. Essa etapa de integração, no esquema de elementos finitos, é conhecida como **algoritmo de atualização das tensões e variáveis internas**. Tal como ilustrado na Figura 6.6, esse algoritmo ocorre para cada ponto de Gauss de cada elemento e tem por finalidade obter o incremento de tensão  $\Delta\underline{\sigma}$  e de forças associadas às variáveis internas  $\Delta\underline{q}$  através do incremento de deformação total  $\Delta\underline{\varepsilon}$  do subpasso.

### 6.5.1 Integração das equações constitutivas elastoplásticas

Como visto no Capítulo 5, considerando a hipótese das pequenas transformações, as equações constitutivas da elastoplasticidade, já na notação de Voigt, podem ser escritas como:

$$\begin{cases} \dot{\underline{\sigma}} = \underline{\underline{D}} \dot{\underline{\varepsilon}}^e = \underline{\underline{D}}(\dot{\underline{\varepsilon}} - \dot{\underline{\varepsilon}}^p) \\ \dot{\underline{\varepsilon}}^p = \dot{\lambda} g_{\sigma} \\ \dot{\underline{q}} = \dot{\lambda} h_q \\ \dot{f} = \underline{f}_{\sigma}^T \dot{\underline{\sigma}} + \underline{f}_q^T \dot{\underline{q}} = 0 \\ f \leq 0, \quad \dot{\lambda} \geq 0, \quad \dot{\lambda} f = 0 \end{cases} . \quad (6.39)$$

Em geral, a proposta dos algoritmos de integração consiste em integrar as equações constitutivas através de métodos numéricos, como os de Runge-Kutta, com técnicas explícitas, implícitas ou semi-implícitas. E dessa forma, conhecido o conjunto de  $\{\underline{\varepsilon}_n, \underline{\varepsilon}_n^p, \underline{\sigma}_n, \underline{q}_n\}$  do último subpasso convergido  $n$  e o incremento de deformação total acumulado  $\Delta\underline{\varepsilon}$  obtido pela iteração de Newton-Raphson, busca-se os valores  $\{\underline{\varepsilon}_{n+1}, \underline{\varepsilon}_{n+1}^p, \underline{\sigma}_{n+1}, \underline{q}_{n+1}\}$ , plasticamente admissíveis, do subpasso  $n+1$ . No presente trabalho **foi implementado um esquema semi-implícito de Euler de dois**

**passos para a relação constitutiva elastoplástica**, inicialmente em elastoplasticidade perfeita, e posteriormente com a lei de endurecimento/amolecimento definida por partes para fins de análise na problemática de túneis.

Em geral, em elastoplasticidade, o método de Runge-Kutta de primeira ordem (também conhecido como o método de Euler) é comumente utilizado para fazer a integração das relações constitutivas (6.39), tendo-se o seguinte esquema de integração:

$$\begin{cases} \underline{\varepsilon}_{n+1} = \underline{\varepsilon}_n + \Delta \underline{\varepsilon} \\ \underline{\varepsilon}_{n+1}^p = \underline{\varepsilon}_n^p + [(1 - \Theta)\Delta\lambda_n \underline{g}_\sigma + \Theta\Delta\lambda_{n+1} \underline{g}_{\sigma,n+1}] \\ \underline{q}_{n+1} = \underline{q}_n + [(1 - \Theta)\Delta\lambda_n \underline{h}_q + \Theta\Delta\lambda_{n+1} \underline{h}_{q,n+1}] \\ \underline{\sigma}_{n+1} = \underline{D} \underline{\varepsilon}_{n+1}^e = \underline{D}(\underline{\varepsilon}_{n+1} - \underline{\varepsilon}_{n+1}^p) \\ f_{n+1} = f(\underline{\sigma}_{n+1}, \underline{q}_{n+1}) = 0 \end{cases} \quad (6.40)$$

em que  $\Delta\lambda = \dot{\lambda}\Delta t$  e  $0 \leq \Theta \leq 1$  fornece a regra trapezoidal generalizada para o fluxo plástico e evolução das variáveis internas. Quando  $\Theta = 0$  tem-se a forma completamente explícita (*fully explicit forward Euler*) e  $\Theta = 1$  completamente implícita (*fully implicit backward Euler*). Os algoritmos semi-implícitos adotam  $0 \leq \Theta < 1$  ou ainda uma combinação implícita e explícita de  $\Delta\lambda$ ,  $\underline{g}_\sigma$  e  $\underline{h}_q$ .

Os esquemas explícitos, como os de Nayak e Zienkiewicz (1972), Zienkiewicz, Valliappan e King (1969) e Owen e Hinton (1980) foram largamente usados até que Simo e Taylor (1985) propuseram um método implícito de dois passos conhecido como projeção do ponto mais próximo (*Closest Point Projection Method* ou abreviadamente CPPM). Isso pois, os esquemas completamente explícitos não satisfaziam a condição de consistência  $f_{n+1} = f(\underline{\sigma}_{n+1}, \underline{q}_{n+1}) = 0$  no final do subpasso, uma vez que o multiplicador plástico e os vetores de fluxo são calculados com as tensões do subpasso anterior  $n$ . Segundo Belytschko, Liu e Moran (2000, p. 278) isso faz com que a solução acumule uma certa imprecisão. Esse fato levou a comunidade a desenvolver e utilizar cada vez mais os algoritmos implícitos e semi-implícitos que buscam satisfazer  $f_{n+1} = 0$ . E, portanto, é o método adotado nesse trabalho. Alguns dos principais métodos implícitos e semi-implícitos para elastoplasticidade podem ser encontrados em Simo e Hughes (1998), Belytschko, Liu e Moran (2000), de SOUZA NETO, Peri e Owen (2008) e Huang e Griffiths (2009).

Atualmente esses métodos empregados nos algoritmos de atualização das tensões consistem em um esquema preditor-corretor de dois passos. Primeiro aplica-se a etapa do preditor elástico e, se necessário, a do corretor plástico. Dessa forma, definindo  $\Delta\underline{\varepsilon}_{n+1}^p \equiv \underline{\varepsilon}_{n+1}^p - \underline{\varepsilon}_n^p$ , o preditor elástico pode ser explicitado de (6.40)<sub>4</sub>, conforme:

$$\underline{\sigma}_{n+1} = \underline{D}(\underline{\varepsilon}_{n+1} - \underline{\varepsilon}_{n+1}^p) = \underline{D}(\underline{\varepsilon}_n + \Delta \underline{\varepsilon} - \underline{\varepsilon}_n^p - \Delta \underline{\varepsilon}_{n+1}^p) = \underline{\sigma}_{n+1}^{trial} + \Delta \underline{\sigma}_{n+1} \quad (6.41)$$

em que  $\underline{\sigma}_{n+1}^{trial} = \underline{D}(\underline{\varepsilon}_n + \Delta \underline{\varepsilon} - \underline{\varepsilon}_n^p)$  é o **preditor elástico** (também conhecido como tensão tentativa). Desse modo, no primeiro passo calcula-se a tensão tentativa e testa-se a função de escoamento  $f$ .

Caso  $f < 0$  o estado de tensões está no domínio elástico e não há necessidade de aplicar o corretor plástico. Contudo, se  $f > 0$ , ou seja, o estado de tensões está fora do domínio plasticamente admissível, é necessário aplicar a etapa do corretor plástico.

O **corretor plástico**, nada mais é do que o procedimento de solução do sistema (6.40)<sub>2,3,5</sub> que determinará o valor de  $\Delta\sigma_{n+1}$  e  $\Delta q_{n+1}$ . Quando não é possível obter uma solução analítica para esse sistema, o procedimento de solução comumente utilizado é o de Newton-Raphson que itera  $k$  vezes no espaço das tensões e variáveis internas até que o estado de tensões retorne sobre a superfície de escoamento (plasticamente admissível). Por isso esses esquemas também são conhecidos como algoritmos de retorno mapeado (*Return Mapping Algorithm*). A Figura 6.7 ilustra geometricamente esse procedimento.

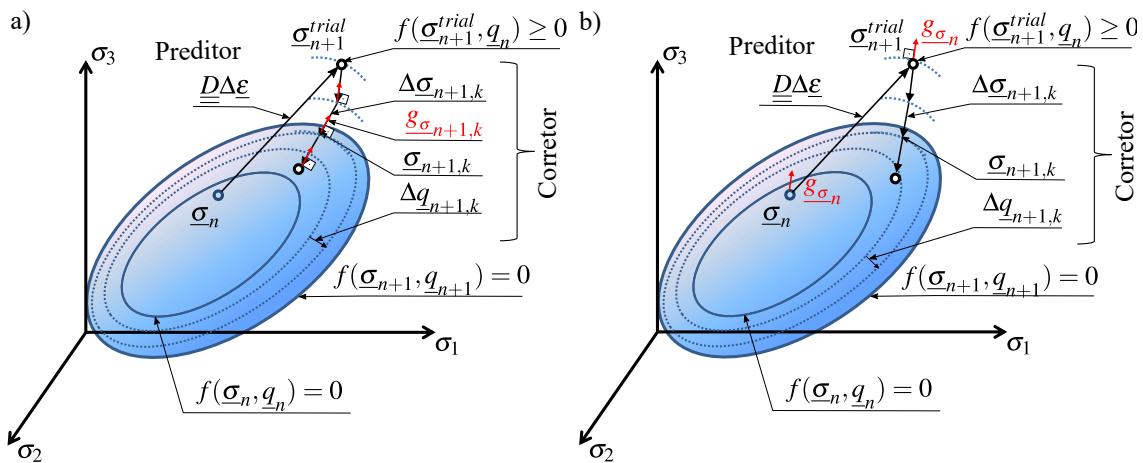


Figura 6.7 – Ilustração do algoritmo de retorno mapeado genérico com  $k$  iterações locais de Newton-Raphson: a) totalmente implícito e b) semi-implícito.

Uma dificuldade do método totalmente implícito é a necessidade da obtenção de gradientes de segunda ordem das funções potenciais, o que levou ao desenvolvimento e utilização de algoritmos semi-implícitos. No presente trabalho foi implementado o algoritmo de Moran, Ortiz e Shih (1990) descrito em Belytschko, Liu e Moran (2000, p. 287) que adotam para o multiplicador plástico um esquema implícito e para o vetor de fluxo e módulo de endurecimento um esquema explícito.

Portanto, para resolver por Newton-Raphson o sistema que dá origem ao corretor plástico, se escrevem as equações (6.40)<sub>2,3,5</sub> da seguinte forma residual (omitindo-se o índice  $n + 1$ ):

$$\begin{cases} \underline{a} = -\underline{\varepsilon}^p + \underline{\varepsilon}_n^p + \Delta\lambda \underline{g}_{\sigma_n} = 0 \\ \underline{b} = -\underline{q} + \underline{q}_n + \Delta\lambda \underline{h}_{q_n} = 0 \\ f = f(\underline{\sigma}, \underline{q}) = 0 \end{cases} . \quad (6.42)$$

Linearizando essas equações em relação à  $\Delta\lambda$ , sendo que  $\Delta\underline{\varepsilon}^p = -\underline{\underline{D}}^{-1}\Delta\underline{\sigma}$ , tem-se:

$$\begin{cases} \underline{a}_k + \underline{\underline{D}}^{-1}\Delta\underline{\sigma}_k + \delta\lambda_k \underline{g}_{\sigma_n} = 0 \\ \underline{b}_k - \Delta\underline{q}_k + \delta\lambda_k \underline{h}_{q_n} = 0 \\ f_k + \underline{f}_{\sigma_k}^T \Delta\underline{\sigma}_k + \underline{f}_{q_k}^T \Delta\underline{q}_k = 0 \end{cases}. \quad (6.43)$$

Reorganizando (6.43)<sub>1,2</sub> tem-se o seguinte corretor plástico:

$$\begin{Bmatrix} \Delta\underline{\sigma}_k \\ \Delta\underline{q}_k \end{Bmatrix} = -\delta\lambda_k [\underline{\underline{A}}] \begin{Bmatrix} \underline{g}_{\sigma_n} \\ \underline{h}_{q_n} \end{Bmatrix} \quad (6.44)$$

em que

$$[\underline{\underline{A}}] = \begin{bmatrix} \underline{\underline{D}} & 0 \\ 0 & -1 \end{bmatrix}. \quad (6.45)$$

Devido a esse tratamento explícito do vetor de fluxo plástico e do módulo de endurecimento tem-se em (6.45) uma expressão fechada para  $[\underline{\underline{A}}]$  envolvendo apenas a matriz constitutiva elástica. Além disso, como o sistema (6.43) é composto de funções lineares em relação à  $\Delta\lambda$  os resíduos  $\underline{a}_k$  e  $\underline{b}_k$  serão automaticamente nulos, dispensando sua verificação no critério de convergência. Substituindo (6.44) em (6.43)<sub>3</sub> tem-se o termo de atualização do multiplicador plástico durante as iterações:

$$\delta\lambda_k = \frac{f_k}{\left[ \underline{f}_{\sigma_k}^T \quad \underline{f}_{q_k}^T \right] [\underline{\underline{A}}] \begin{Bmatrix} \underline{g}_{\sigma_n} \\ \underline{h}_{q_n} \end{Bmatrix}}. \quad (6.46)$$

O fluxograma desse algoritmo pode ser visto na Figura 6.8.

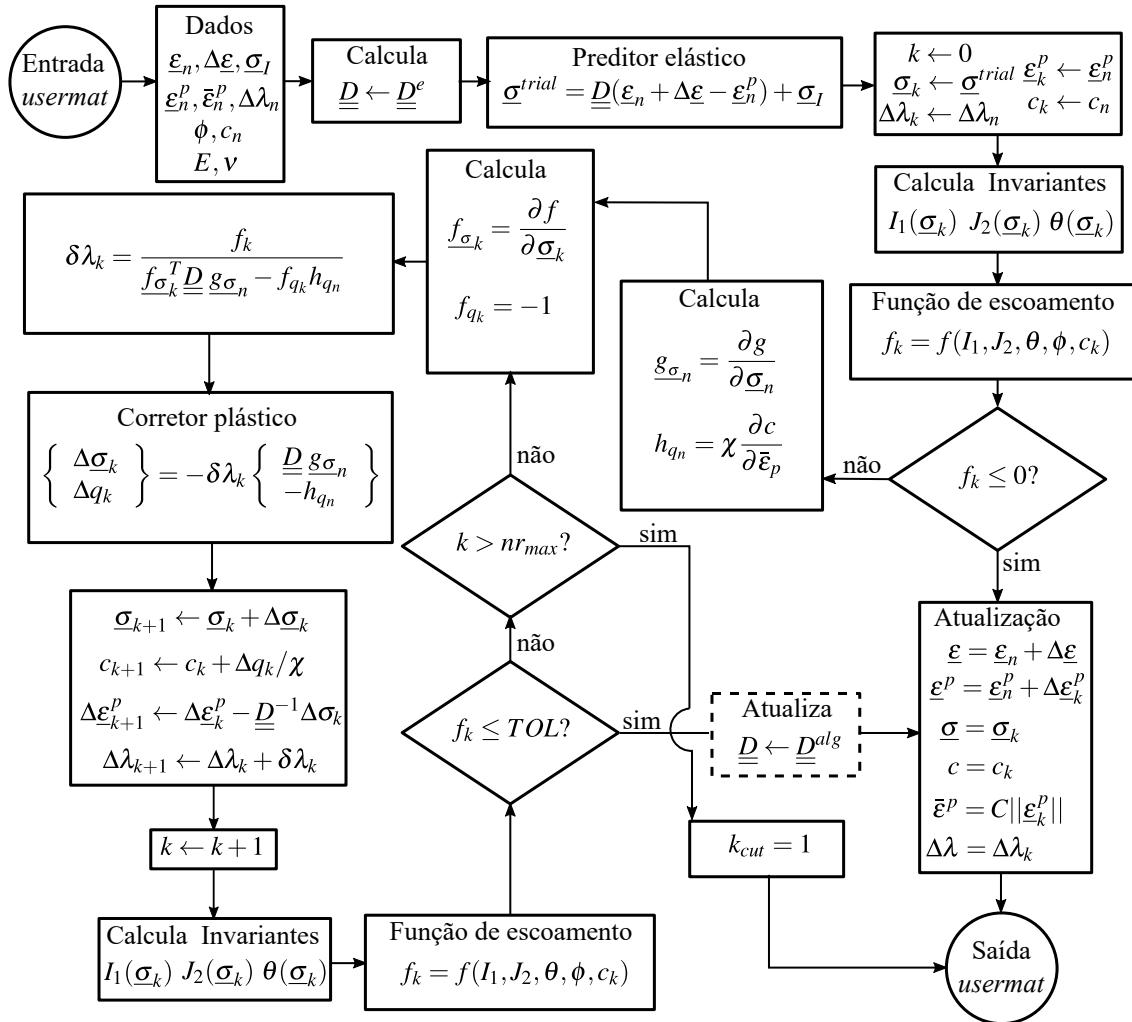


Figura 6.8 – Algoritmo de integração para elastoplasticidade utilizando um esquema de Euler semi-implícito (omitindo o índice  $n+1$ ).

No fluxograma da Figura 6.8 aparecem três parâmetros que exigem uma explicação:  $TOL$ ,  $nr_{max}$  e  $k_{cut}$ . O primeiro diz respeito a tolerância exigida para o  $f$  que indicará que houve a convergência do Newton-Raphson local. Como se trata de um processo iterativo o  $f_k = 0$  não é necessariamente atingido. Dessa forma, foi utilizado uma tolerância  $TOL = 10^{-14}$ . O segundo parâmetro diz respeito ao limite máximo de iterações locais que indicará a não convergência. O valor escolhido foi  $nr_{max} = 10000$ . Por fim, o último parâmetro  $k_{cut}$  é de suma importância, pois seu valor igual a unidade indicará para o ANSYS que é necessário dividir o passo pela metade e repetir o processo de modo a buscar a convergência. Também nesse fluxograma aparece as tensões iniciais  $\sigma_I$  que são adicionadas ao preditor elástico.

Como visto no fluxograma da Figura 6.6, após a atualização das tensões e variáveis internas tem-se a possibilidade de atualizar o módulo constitutivo. É possível utilizar o módulo tangente consistente com a linearização feita durante o algoritmo de integração das leis constitutivas (por

isso também esse módulo é conhecido como módulo algorítmico). Como comentado no seção 6.4 sua utilização aumenta a taxa de convergência das iterações de equilíbrio. Sua expressão geral é definida por:

$$\underline{\underline{D}}^{alg} = \left( \frac{d\underline{\sigma}}{d\underline{\varepsilon}} \right)_{n+1}. \quad (6.47)$$

Para derivar a expressão de  $\underline{\underline{D}}^{alg}$  escreve-se (6.39)<sub>1,2,3,4</sub> na sua forma incremental e resolve-se para  $d\underline{\sigma}/d\underline{\varepsilon}$  (BELYTSCHKO; LIU; MORAN, 2000, p. 285). Com isso, tem-se, para a elastoplásticidade, a seguinte relação (omitindo-se o índice  $n+1$ ):

$$\underline{\underline{D}}^{alg} = \underline{\underline{D}} - \frac{\underline{\underline{D}} \underline{g}_{\sigma_n} \underline{f}_{\sigma}^T \underline{\underline{D}}}{\underline{f}_{\sigma}^T \underline{\underline{D}} \underline{g}_{\sigma_n} - \underline{f}_q \underline{h}_q}. \quad (6.48)$$

Adotar o módulo tangente consistente faz com que a convergência seja atingida com menos iterações de equilíbrio globais, contudo, o procedimento tem um custo para sistemas grandes, uma vez que a cada iteração é exigida a montagem e fatorização da matriz de rigidez global (caso seja utilizado a opção de Newton-Raphson Completo). Portanto, é comum para sistemas grandes utilizar o módulo elástico  $\underline{\underline{D}} \leftarrow \underline{\underline{D}}^e$ . No presente trabalho essa atualização foi implementada, é opcional e controlada por um parâmetro.

### 6.5.2 Integração das equações constitutivas viscoplásticas

Como visto no Capítulo 5, considerando a hipótese das transformações infinitesimais, as equações constitutivas da viscoplasticidade, já na notação de Voigt, podem ser escritas como:

$$\begin{cases} \underline{\sigma} = \underline{\underline{D}} \dot{\underline{\varepsilon}}^e = \underline{\underline{D}}(\dot{\underline{\varepsilon}} - \dot{\underline{\varepsilon}}^{vp}) \\ \dot{\underline{\varepsilon}}^{vp} = \lambda \underline{g}_{\sigma} \\ \dot{\underline{q}} = \dot{\lambda} \underline{h}_q \\ \dot{\underline{f}} = \underline{f}_{\sigma}^T \dot{\underline{\sigma}} + \underline{f}_q^T \dot{\underline{q}} = 0 \\ \dot{\lambda} = \frac{\Phi(\underline{\sigma}, \underline{q})}{\eta} \end{cases}. \quad (6.49)$$

Tal como na elastoplásticidade, aqui também se emprega um algoritmo de integração explícito, implícito ou semi-implícito para apartir de  $\{\underline{\varepsilon}_n, \underline{\varepsilon}_n^{vp}, \underline{\sigma}_n, \underline{q}_n\}$  e do incremento de deformação total acumulado  $\Delta \underline{\varepsilon}_n$  chegar aos valores  $\{\underline{\varepsilon}_{n+1}, \underline{\varepsilon}_{n+1}^{vp}, \underline{\sigma}_{n+1}, \underline{q}_{n+1}\}$  da iteração seguinte  $n+1$ . Contudo, na viscoplasticidade não há mais a imposição da condição de consistência, ou seja, que  $f_{n+1} = 0$ . O que faz com que os algoritmos sejam mais simples, porém, devem obedecer certos limites de discretização para garantir a precisão.

Diferentes algoritmos de integração para viscoplasticidade podem ser encontrados na literatura, tais como em Cormeau (1975), Zienkiewicz e Cormeau (1974), Hughes e Taylor (1978), Marques

e Owen (1983), Peirce, Shih e Needleman (1984), Bernaud (1991), Belytschko, Liu e Moran (2000), de SOUZA NETO, Peri e Owen (2008) e Smith, Griffiths e Margetts (2014).

Para o presente trabalho é utilizado um esquema introduzido por Peirce, Shih e Needleman (1984) conhecido como método da taxa do módulo tangente (*Rate Tangente Modulus Method*), descrito em Belytschko, Liu e Moran (2000, p. 290), que compreende um esquema de Euler explícito para todas as variáveis, exceto  $\Delta\lambda$  que é integrado de acordo com a regra trapezoidal generalizada. Portanto, de (6.49) tem-se:

$$\left\{ \begin{array}{l} \underline{\varepsilon}_{n+1} = \underline{\varepsilon}_n + \Delta\varepsilon \\ \underline{\varepsilon}_{n+1}^{vp} = \underline{\varepsilon}_n^{vp} + \Delta\lambda \underline{g}_{\sigma_n} \\ \underline{q}_{n+1} = \underline{q}_n + \Delta\lambda \underline{h}_{q_n} \\ \underline{\sigma}_{n+1} = \underline{\underline{D}} \underline{\varepsilon}_{n+1}^e = \underline{\underline{D}} (\underline{\varepsilon}_{n+1} - \underline{\varepsilon}_{n+1}^{vp}) \\ \Delta\lambda = \frac{\Delta t}{\eta} [(1 - \Theta)\Phi_n + \Theta\Phi_{n+1}] \end{array} \right. \quad (6.50)$$

em que a função de sobretensão  $\Phi_{n+1}$  é obtida através da seguinte linearização:

$$\Phi_{n+1} = \Phi_n + \underline{\Phi}_{\sigma_n}^T \Delta\underline{\sigma} + \underline{\Phi}_{q_n}^T \Delta\underline{q} \quad (6.51)$$

sendo  $\underline{\Phi}_{\sigma} = \partial\Phi/\partial\underline{\sigma}$  e  $\underline{\Phi}_q = \partial\Phi/\partial\underline{q}$ . Substituindo (6.51) em (6.50)<sub>5</sub> tem-se:

$$\Delta\lambda = \frac{\Delta t}{\eta} \Phi_n + \frac{\theta\Delta t}{\eta} (\underline{\Phi}_{\sigma_n}^T \Delta\underline{\sigma} + \underline{\Phi}_{q_n}^T \Delta\underline{q}). \quad (6.52)$$

Introduzindo (6.50)<sub>2</sub> em (6.50)<sub>4</sub> e reescrevendo (6.50)<sub>3</sub> tem-se, na forma compacta:

$$\left\{ \begin{array}{l} \Delta\underline{\sigma} \\ \Delta\underline{q} \end{array} \right\} = \left\{ \begin{array}{l} \underline{\underline{D}}(\Delta\varepsilon - \Delta\lambda \underline{g}_{\sigma_n}) \\ \Delta\lambda \underline{h}_{q_n} \end{array} \right\}. \quad (6.53)$$

Substituindo (6.53) em (6.52) e isolando  $\Delta\lambda$  tem-se:

$$\Delta\lambda = \frac{\Phi_n + \Theta \underline{\Phi}_{\sigma_n}^T \underline{\underline{D}} \Delta\varepsilon}{\frac{\eta}{\Delta t} + \Theta (\underline{\Phi}_{\sigma_n}^T \underline{\underline{D}} \underline{g}_{\sigma_n} - \underline{\Phi}_{q_n}^T \underline{h}_{q_n})}. \quad (6.54)$$

Quando  $0 < \Theta < 1$  tem-se um algoritmo semi-implícito e quando  $\Theta = 0$  tem-se um algoritmo totalmente explícito, com  $\Delta\lambda = \Delta t \frac{\Phi_n}{\eta}$ . Como pode-se ver nessa dedução, ao contrário da integração da relação constitutiva em elastoplasticidade, não há necessidade de resolver o sistema de forma iterativa. E, além disso, todas as variáveis são obtidas do subpasso anterior  $n$ . Esse fato, como será visto na próxima seção, facilitará o acoplamento entre o algoritmo de viscoplasticidade e elastoplasticidade. Além disso, para viscoplasticidade não é utilizado leis de endurecimento/amolecimento, simplificando a expressão (6.54) para:

$$\Delta\lambda = \frac{\Phi_n + \Theta \underline{\Phi}_{\sigma_n}^T \underline{\underline{D}} \Delta\varepsilon_n}{\frac{\eta}{\Delta t} + \Theta \underline{\Phi}_{\sigma_n}^T \underline{\underline{D}} \underline{g}_{\sigma_n}}. \quad (6.55)$$

Substituindo (6.55) em (6.53)<sub>1</sub> tem-se uma expressão fechada para a atualização das tensões:

$$\Delta\underline{\sigma} = \underline{\underline{D}}^{alg} \Delta\underline{\epsilon} - \underline{p} \quad (6.56)$$

em que,

$$\underline{\underline{D}}^{alg} = \underline{\underline{D}} - \frac{\Theta \underline{\underline{D}} g_{\sigma_n} \Phi_{\sigma_n}^T \underline{\underline{D}}}{\eta/\Delta t + \Theta \underline{\Phi}_{\sigma_n}^T \underline{\underline{D}} g_{\sigma_n}}, \quad \underline{p} = \frac{\Phi_n \underline{\underline{D}} g_{\sigma_n}}{\eta/\Delta t + \Theta \underline{\Phi}_{\sigma_n}^T \underline{\underline{D}} g_{\sigma_n}} \quad (6.57)$$

sendo  $\underline{\underline{D}}^{alg}$  o módulo constitutivo algorítmico e  $\underline{p}$  uma pseudo-tensão que independe do incremento de deformação total.

O esquema de integração representado por (6.50)<sub>5</sub> é incondicionalmente estável para valor de  $\Theta \geq 1/2$ . Contudo, isso não garante a precisão da solução. Dessa forma, tal como para valores  $\Theta < 1/2$  deve-se utilizar um valor limite para o incremento de tempo  $\Delta t \leq \Delta t_{lim}$ . Esse limite de uma forma geral pode ser obtido reduzindo o incremento de tempo até que a solução não varie. A rigor depende dos parâmetros do material, do esquema de integração, da superfície de escoamento e da regra de fluxo e existem algumas soluções analíticas para as superfícies clássicas. Para evitar esse problema de precisão, nesse trabalho, utilizaram-se os limites de Cormeau (1975, p. 829), em que para superfície de Drucker-Prager tem-se:

$$\Delta t_{lim} \leq \begin{cases} \frac{4}{3} \frac{\eta}{\Phi'} \frac{(1+\nu)}{E} \sqrt{3J_2} \\ \frac{\eta f_0}{\Phi'} \frac{(1+\nu)(1-2\nu)}{E} \frac{(3-\sin\phi)^2}{\frac{3}{4}(1-2\nu)(3-\sin\phi)^2 + 6(1+\nu)\sin\phi^2} \end{cases} \quad (6.58)$$

em que  $\phi' = \frac{d\phi}{d(f/f_0)} = n(f/f_0)^{n-1}$ . Quando  $\phi = 0$  tem-se o caso específico para a superfície de von-Mises. Esse limite é deduzido considerando viscoplasticidade associada e com esquema de integração totalmente explícito. O fluxograma para o algoritmo de integração das equações viscoplásticas pode ser visto na Figura 6.9.

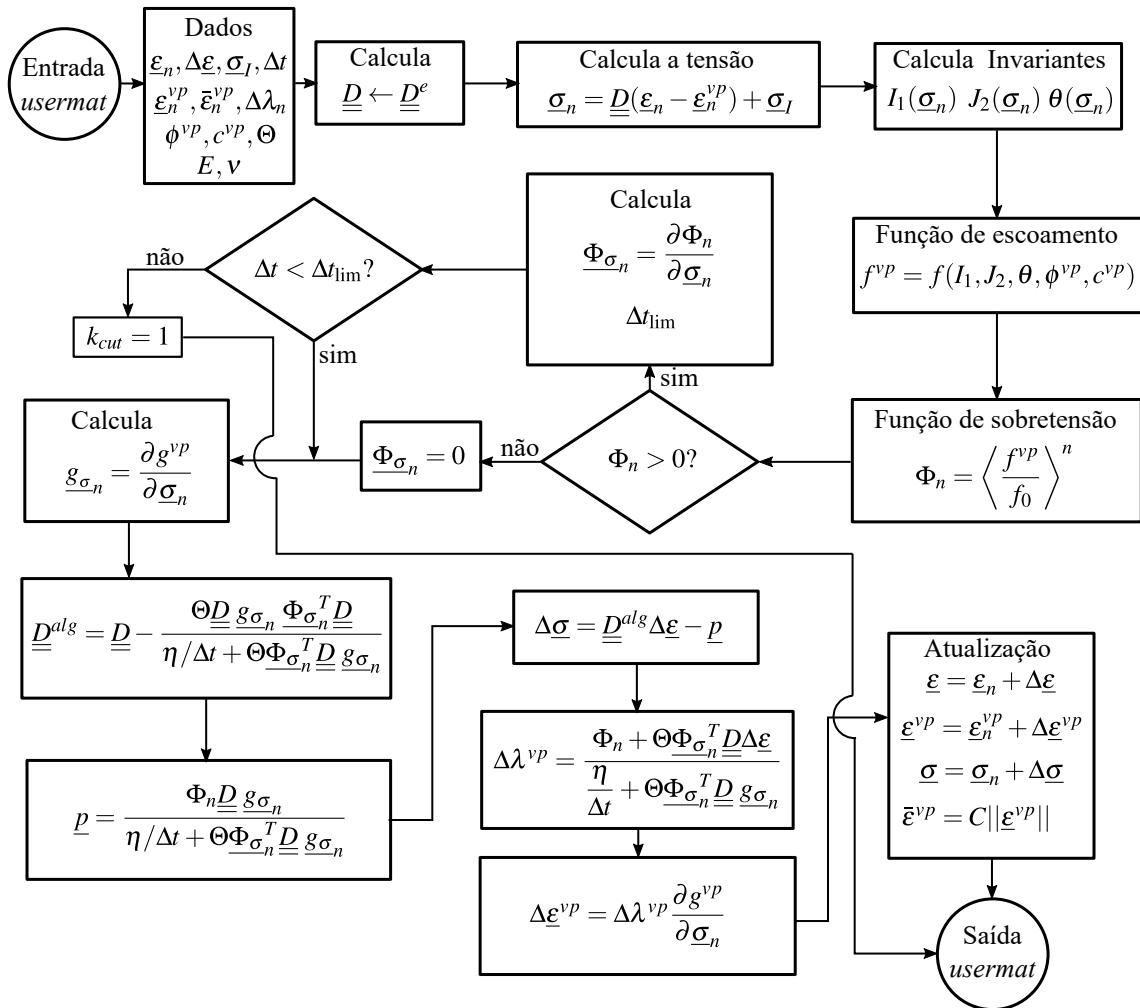


Figura 6.9 – Algoritmo de integração para viscoplasticidade utilizando um esquema de Euler semi-implícito ou totalmente explícito (quando  $\Theta = 0$ ) sem endurecimento/amolecimento (omitiendo o índice  $n + 1$ ).

### 6.5.3 Integração das equações constitutivas acopladas elastoplástica-viscoplásticas

Como visto no Capítulo 5, considerando a hipótese das transformações infinitesimais, as equações constitutivas da elastoplasticidade e viscoplasticidade são acopladas em série de forma a obter a relação constitutiva elastoplástica-viscoplástica linearizada (5.59). Além disso, como a viscoplasticidade é integrada através de uma regra semi-implícita na qual todas as incógnitas são calculadas com as variáveis conhecidas do subpasso anterior  $n$ , o incremento de deformação viscoplástica pode ser descontado diretamente do incremento de deformação total na etapa de predição elástica do algoritmo de elastoplasticidade.

O algoritmo para integração das equações constitutivas elastoplástica-viscoplástica pode ser visto no fluxograma da Figura 6.10. A sua programação em *Fortran* pode ser vista no Apêndice B. O procedimento para incluir essa subrotina no ANSYS pode ser vista em Quevedo (2017).

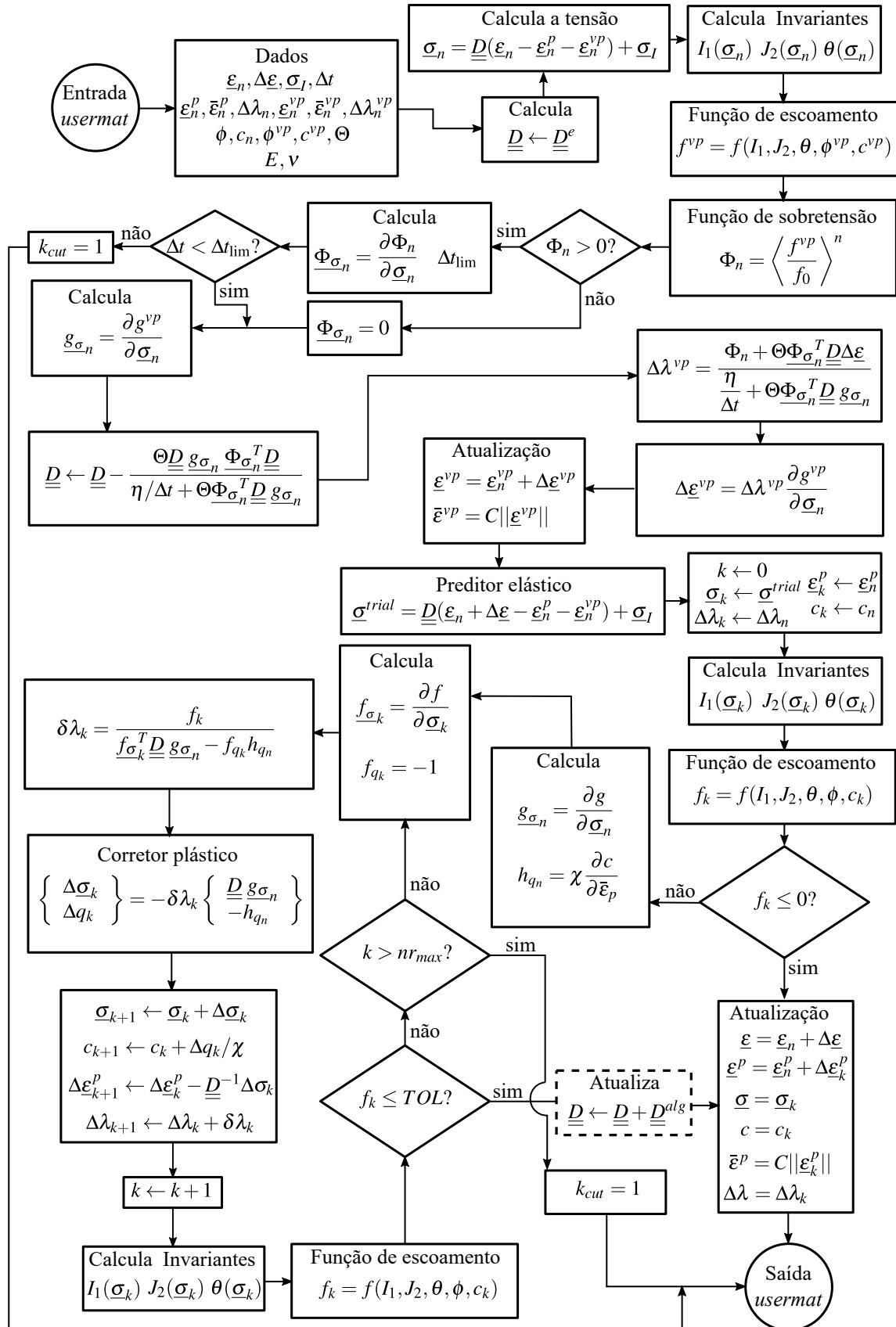


Figura 6.10 – Algoritmo de integração do modelo constitutivo elastoplástico-viscoplástico (omitindo o índice  $n+1$ ).

## 6.6 PARTICULARIZANDO PARA ESTADO PLANO DE DEFORMAÇÕES E AXISSIMETRIA

Em problemas tridimensionais, com materiais isotrópicos, a relação constitutiva elástica linearizada, em termos das seis componentes de tensão e de deformação pode ser escrita, na notação de Voigt, conforme (adaptado de Smith, Griffiths e Margetts (2014, p. 44)):

$$\begin{Bmatrix} \sigma_{11} \\ \sigma_{22} \\ \sigma_{33} \\ \sigma_{21} \\ \sigma_{23} \\ \sigma_{13} \end{Bmatrix} = \underline{\underline{D}} \begin{Bmatrix} \epsilon_{11} \\ \epsilon_{22} \\ \epsilon_{33} \\ \epsilon_{21} \\ \epsilon_{23} \\ \epsilon_{13} \end{Bmatrix}, \quad (6.59)$$

$$\underline{\underline{D}} = \frac{E}{(1+\nu)(1-2\nu)} \begin{bmatrix} (1-\nu) & \nu & \nu & 0 & 0 & 0 \\ \nu & (1-\nu) & \nu & 0 & 0 & 0 \\ \nu & \nu & (1-\nu) & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \frac{(1-2\nu)}{2} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \frac{(1-2\nu)}{2} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \frac{(1-2\nu)}{2} \end{bmatrix}. \quad (6.60)$$

Particularizando essa relação para problemas em estado plano de deformações e axissimetria tem-se (adaptado de Smith, Griffiths e Margetts (2014, p. 42)):

$$\begin{Bmatrix} \sigma_{11} \\ \sigma_{22} \\ \sigma_{33} \\ \sigma_{21} \end{Bmatrix} = \frac{E}{(1+\nu)(1-2\nu)} \begin{bmatrix} (1-\nu) & \nu & \nu & 0 \\ \nu & (1-\nu) & \nu & 0 \\ \nu & \nu & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & (1-2\nu)/2 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \epsilon_{11} \\ \epsilon_{22} \\ \epsilon_{33} \\ \epsilon_{21} \end{Bmatrix} \quad (6.61)$$

sendo que em axissimetria as direções 1, 2 e 3 correspondem respectivamente as direções  $r, \theta$  e  $z$  em coordenadas polares. Além disso, em problemas axissimétricos, a expressão (6.16) particulariza-se para (adaptado de Smith, Griffiths e Margetts (2014, p. 41)):

$$\nabla^s = \begin{bmatrix} \frac{\partial}{\partial r} & 0 \\ 0 & 1/r \\ 0 & \frac{\partial}{\partial z} \\ \frac{\partial}{\partial z} & \frac{\partial}{\partial r} \end{bmatrix} \quad (6.62)$$

Ademais, para o gradiente da função potencial em  $(5.38)_2$ , na notação de Voigt, para o caso 3D, tem-se (adaptado de Owen e Hinton (1980, p. 231)):

$$\underline{g}_1 = \{1, 1, 1, 0, 0, 0\}^T, \quad (6.63)$$

$$\underline{g}_2 = \frac{1}{2\sqrt{J_2}} \{s_{11}, s_{22}, s_{33}, 2\sigma_{12}, 2\sigma_{23}, 2\sigma_{13}\}^T, \quad (6.64)$$

$$\underline{g}_3 = \begin{Bmatrix} s_{22}s_{33} - \sigma_{23}^2 + J_2/3 \\ s_{11}s_{33} - \sigma_{13}^2 + J_2/3 \\ s_{11}s_{22} - \sigma_{12}^2 + J_2/3 \\ 2(\sigma_{23}\sigma_{13} - s_{33}\sigma_{12}) \\ 2(\sigma_{13}\sigma_{12} - s_{11}\sigma_{23}) \\ 2(\sigma_{12}\sigma_{23} - s_{22}\sigma_{13}) \end{Bmatrix} \quad (6.65)$$

e para o estado plano de deformações e axissimetria, tem-se (adaptado de Owen e Hinton (1980, p. 233)):

$$\underline{g}_1 = \{1, 1, 1, 0\}^T, \quad (6.66)$$

$$\underline{g}_2 = \frac{1}{2\sqrt{J_2}} \{s_{11}, s_{22}, s_{33}, 2\sigma_{12}\}^T, \quad (6.67)$$

$$\underline{g}_3 = \begin{Bmatrix} s_{22}s_{33} + J_2/3 \\ s_{11}s_{33} + J_2/3 \\ s_{11}s_{22} - \sigma_{12}^2 + J_2/3 \\ -2s_{33}\sigma_{12} \end{Bmatrix}. \quad (6.68)$$

Essas expressões podem ser vistas programadas no Apêndice B entre as linhas de código 640 e 694.

## 6.7 DOMÍNIOS, DISCRETIZAÇÃO ESPACIAL E TEMPORAL, CONDIÇÕES DE CONTORNO, CICLO CONSTRUTIVO E SEUS PARÂMETROS

Tal como visto na seção 6.3 o domínio  $\Omega$  é discretizado em um conjunto de elementos contíguos  $\Omega_e$  estabelecendo a malha de elementos finitos. No presente estudo, o domínio discretizado é o entorno de um túnel profundo, conforme Figura 6.11.

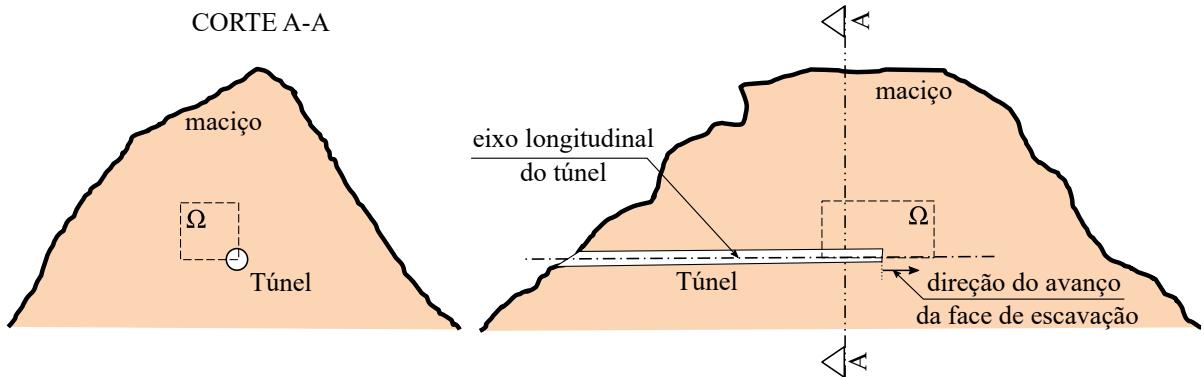


Figura 6.11 – Representação do domínio  $\Omega$  a ser discretizado

As leis constitutivas vistas no Capítulo 5 são implementadas nesse domínio e estudadas em três condições: em estado plano de deformações (EPD), tridimensional (3D) e em axissimetria (AXI).

Com o intuito de obter uma malha de fácil alteração, conveniente aos estudos de convergência de malha e análises paramétricas, o domínio foi discretizado utilizando o pré-processamento do software ANSYS 2021R1 através da linguagem APDL (*Ansys Parametric Design Language*). Com o auxílio dessa linguagem é possível controlar a discretização do domínio em função de parâmetros que podem ser alterados facilmente e, dessa forma, obtido rapidamente uma nova malha para os estudos. As discretizações apresentadas vêm da experiência obtidas em estudos anteriores (QUEVEDO, 2017) considerando isoladamente a elasticidade, elastoplásticidade e viscoplasticidade do maciço. O *script* APDL para a construção do modelo em axissimetria encontra-se no Apêndice A.

A Figura 6.12 apresenta o domínio para análises em estado plano de deformações com seus parâmetros, condições de contorno e malha. Como visto na seção 4.2, esse modelo é útil no estudo de seções fora da zona de influência da frente de escavação na qual se pode admitir a ausência de deslocamento ao longo do eixo longitudinal do túnel. Quando implementado a lei do material, esse modelo também é ideal para obter as curvas de convergência do maciço, tais como as da seção 4.9.

Como pode-se ver na Figura 6.12, é considerada condição de simetria para reduzir o modelo, sendo discretizada apenas uma quarta parte da região no entorno do túnel. Isso é possível em maciços homogêneos, com seção duplamente simétrica, tais como, a elíptica ou a circular ( $R_{hi} = R_{vi}$ ). Também, nesse modelo, tanto a carga horizontal, vertical, bem como as tensões internas não poderão variar ao longo do domínio (condições geostáticas hidrostáticas). Como visto na seção 4.6, é uma condição de estudo comum em túneis profundos. Contudo, essa condição seria facilmente modificada para considerar tensões variáveis com a profundidade e seção simétrica em torno do eixo  $y$  apenas rebatendo a malha em torno do eixo  $x$ .

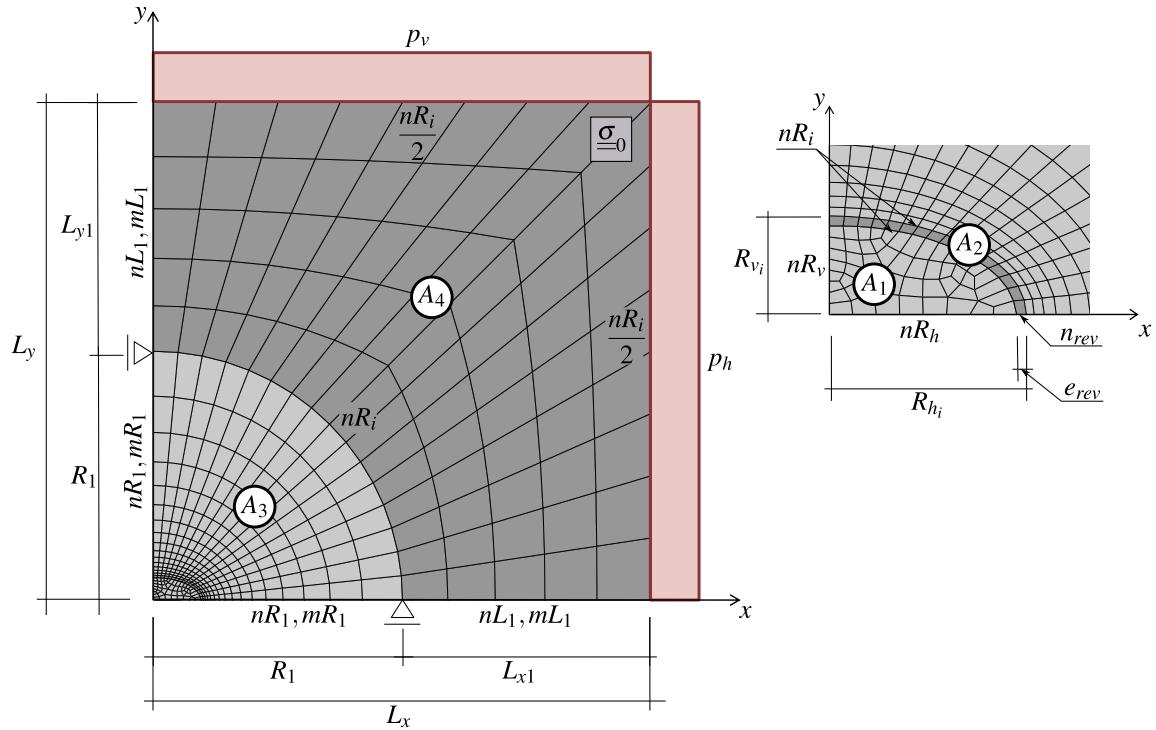


Figura 6.12 – Domínio, parâmetros geométricos, condições de contorno e malha para o modelo em estado plano de deformações

Conforme a Figura 6.12, essa malha possui quatro regiões de refinamento: a região  $A_1$  representando o interior da seção do túnel, cujos elementos são desativados já no início das análises; a região  $A_2$  referente ao revestimento (que estará presente sempre que o parâmetro  $e_{rev} > 0$ ); a região  $A_3$ , circular, no entorno do túnel onde se dará maior esforço de refinamento, pela proximidade da região escavada e, por último, a região  $A_4$  relativa ao restante do domínio, onde os gradientes de tensão e deformação serão pequenos. A Tabela 6.1 apresenta a definição dos parâmetros desse modelo e seus valores.

Tabela 6.1 – Parâmetros para a construção da malha em estado plano de deformações da Figura 6.12

PARÂMETROS	SÍMBOLO	UNIDADE	VALORES
GEOMETRIA			
Raio horizontal na interface entre o túnel e o maciço	$R_{h_i}$	m	2
Raio vertical na interface entre o túnel e o maciço	$R_{v_i}$	m	1
Espessura do revestimento (se houver)	$e_{rev}$	m	0,1
Largura transversal do domínio	$L_x$	m	$20R_{v_i}$
Altura do domínio	$L_y$	m	$20R_{v_i}$
Raio da região A3	$R_1$	m	$10R_{v_i}$
Largura além da região A4	$L_{x_1}$	m	$L_x - R_1$
Altura além da região A4	$L_{y_1}$	m	$L_y - R_1$
DISCRETIZAÇÃO			
Elementos na direção ortoradial	$nR_i$	un	10
Elementos na altura da seção escavada	$nR_v$	un	$nR_i/2$
Elementos na largura da seção escavada	$nR_h$	un	$nR_i/2$
Elementos na espessura do revestimento	$n_{rev}$	un	2
Elementos ao longo do raio da região A3	$nR1$	un	15
Razão entre primeiro e último elemento de A3	$mR1$	adm	15
Elementos ao longo do raio da região A4	$nL1$	un	5
Razão entre primeiro e último elemento de A4	$mL1$	adm	1,2

A discretização do domínio tridimensional faz uso dos mesmos parâmetros do estado plano de deformações, contudo, possui parâmetros adicionais para levar em consideração a dimensão ao longo do eixo longitudinal do túnel e o processo de escavação e colocação do revestimento. Esse domínio, seus parâmetros, suas condições de contorno e sua malha podem ser vistos na Figura 6.13 e Tabela 6.2.

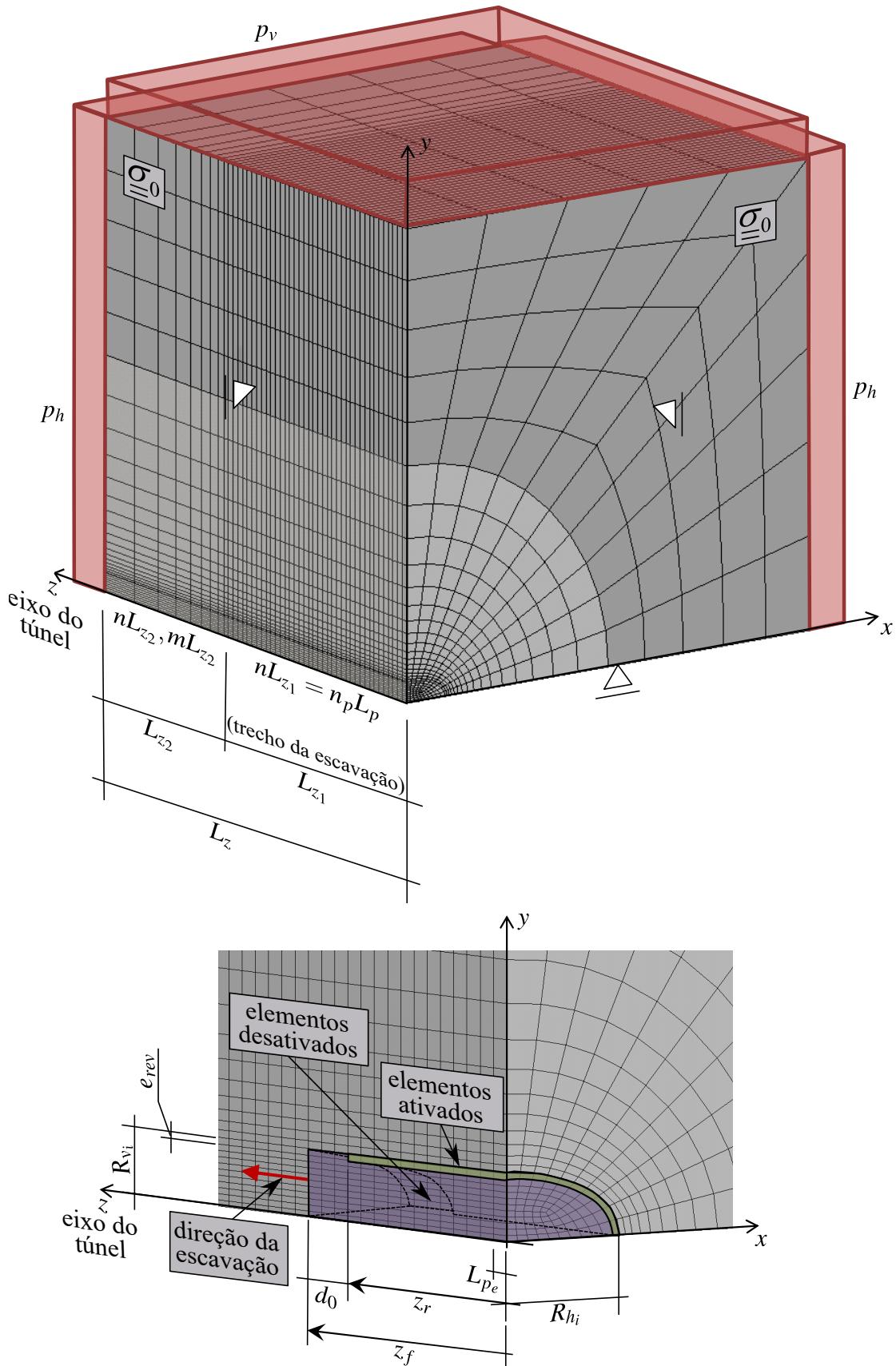


Figura 6.13 – Domínio, parâmetros geométricos, condições de contorno e malha para o modelo tridimensional

Tabela 6.2 – Parâmetros adicionais a malha EPD para a malha em estado tridimensional de deformações da Figura 6.13

PARÂMETROS	SÍMBOLO	UNIDADE	VALORES
ESCAVAÇÃO E COLOCAÇÃO DO REVESTIMENTO			
Número de passos de escavação	$n_p$	un	38
Número de passos na primeira escavação	$n_{p1}$	un	3
Tamanho do passo de escavação	$L_p$	m	$1/3R_v$
Dimensão não suportada	$d_0$	m	0, $2L_p$ , $4L_p$
Cota da face do revestimento	$z_r$	m	$(i_p - 1)L_p + n_{p1}L_p - d_0$
Cota da face de escavação	$z_f$	m	$(i_p - 1)L_p + n_{p1}L_p$
GEOMETRIA			
Comprimento longitudinal do domínio	$L_z$	m	$L_{z1} + L_{z2}$
Comprimento do trecho escavado	$L_{z1}$	m	$n_p L_p$
Comprimento do trecho não escavado	$L_{z2}$	m	$25L_p$
DISCRETIZAÇÃO			
Tamanho do elemento no trecho escavado	$L_{pe}$	m	$L_p$
Número de elementos no trecho não escavado	$nL_{z2}$	un	8
Razão entre o primeiro e último elemento em $L_{z2}$	$mL_{z2}$	adm	5

A cada passo  $1 \leq i_p \leq n_p$  de escavação é desativado os elementos até a cota da face de escavação  $z_f$  e ativado os elementos do revestimento que estão defasados de  $d_0$  dessa face, até a cota  $z_r$ . Tanto nas análises tridimensionais quanto axissimétricas, os efeitos diferidos ao longo do processo construtivo são obtidos considerando o tempo transcorrido  $t_p$  durante cada passo de escavação. Esse tempo é calculado através da seguinte expressão:

$$t_p = \frac{L_p}{V_p} \quad (6.69)$$

em que  $V_p$  é a velocidade do passo em m/dias. A cada passo, conforme o seção 6.4 e a Figura 6.6, esse tempo é dividido em subpassos e feita as iterações de equilíbrio de Newton-Raphson em cada subpasso. Após a convergência, segue-se o próximo passo e assim por diante. Após o término dos passos de escavação e revestimento do túnel, para os modelos dependentes do tempo, a análise roda uma série de passos até que os efeitos viscosos cessem. O incremento de tempo em cada passo é adotado como sendo metade do tempo do passo. Contudo, o método da bissecção, em busca da convergência, pode diminuir o incremento de tempo no passo.

Como pode-se notar, o modelo tridimensional possui a vantagem de considerar tanto o processo construtivo quanto seções diferentes da circular, contudo, tem um custo computacional elevado. Nesse aspecto as análises axissimétricas possuem vantagem, apesar da restrição de simetria axial. Pelo baixo custo computacional, são ideais para estudos paramétricos. O domínio para o modelo axissimétrico, seus parâmetros, condições de contorno e sua malha podem ser vistos na Figura 6.14.

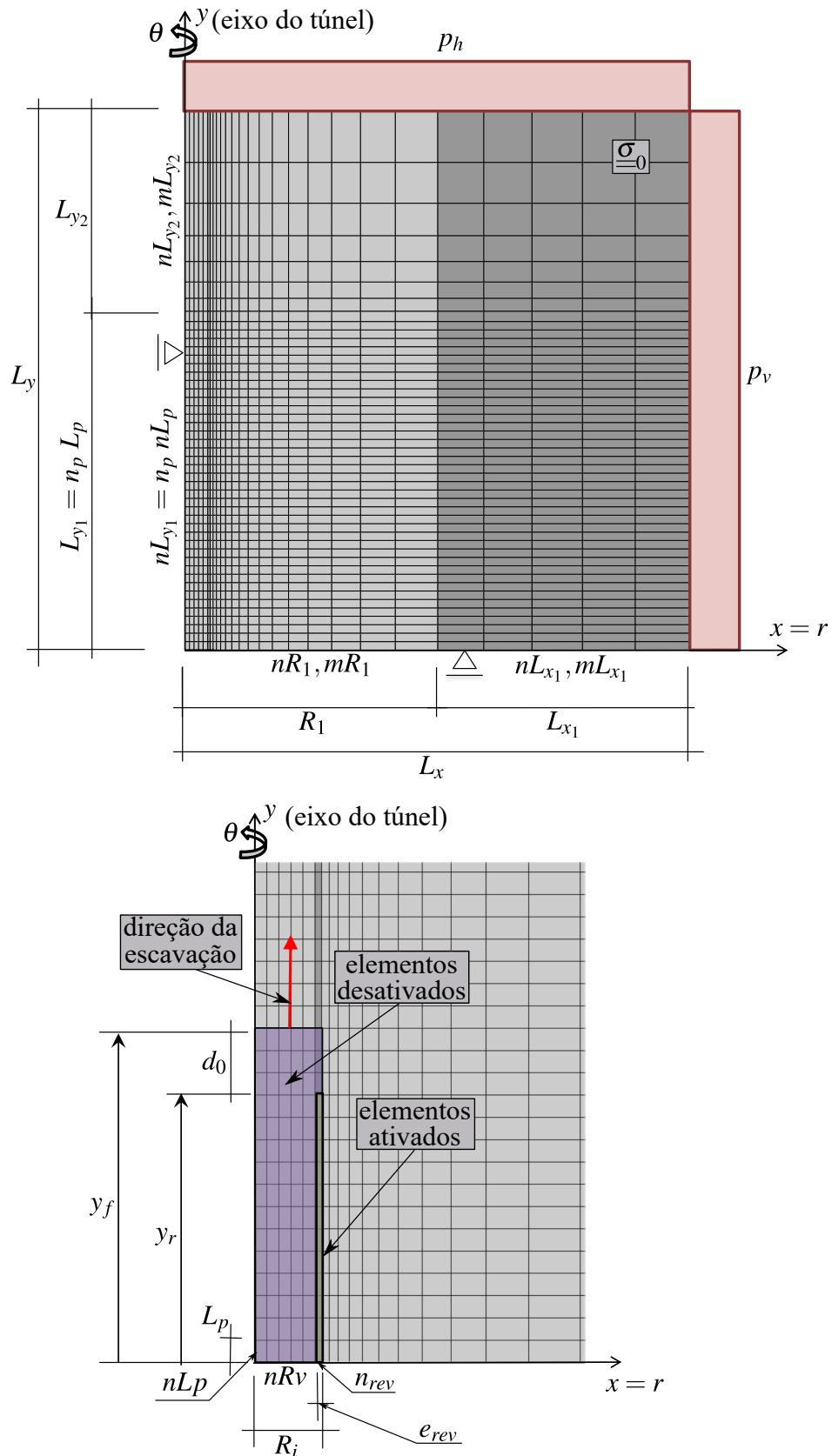


Figura 6.14 – Domínio, parâmetros geométricos, condições de contorno e malha para o modelo axissimétrico

Conforme Figura 6.14, no modelo axissimétrico o eixo longitudinal do túnel (eixo de rotação) está ao longo do eixo  $y$ , enquanto que o eixo  $x$  representa o eixo radial. Os parâmetros para esse modelo podem ser vistos na Tabela 6.3.

Tabela 6.3 – Parâmetros para a malha em estado axissimétrico Figura 6.14

PARÂMETROS	SÍMBOLO	UNIDADE	VALORES
GEOMETRIA			
Raio da interface entre o túnel e o maciço	$R_i$	m	1
Espessura do revestimento (se houver)	$e_{rev}$	m	0,1
Raio total do domínio	$L_x$	m	$20R_i$
Raio da região de refinamento próxima ao túnel	$R_1$	m	$10R_i$
Trecho do raio além da região próxima ao túnel	$L_{x_1}$	m	$L_x - R_1$
Comprimento longitudinal do domínio	$L_y$	m	$L_{y_1} + L_{y_2}$
Comprimento do trecho escavado	$L_{y_1}$	m	$n_p L_p$
Comprimento do trecho não escavado	$L_{y_2}$	m	$25L_p$
ESCAVAÇÃO E COLOCAÇÃO DO REVESTIMENTO			
Número de passos de escavação	$n_p$	un	38
Número de passos na primeira escavação	$n_{p_i}$	un	3
Tamanho do passo de escavação	$L_p$	m	$1/3R_i$
Dimensão não suportada	$d_0$	m	0, $2L_p$ , $4L_p$
Cota da face do revestimento	$y_r$	m	$(i_p - 1)L_p + n_{p_i}L_p - (L_p + d_0)$
Cota da face de escavação	$y_f$	m	$(i_p - 1)L_p + n_{p_i}L_p$
DISCRETIZAÇÃO			
Elementos ao longo de $R_i$	$nR_i$	un	5
Elementos na espessura do revestimento	$n_{rev}$	un	2
Elementos ao longo de $R_1$	$nR_1$	un	15
Razão primeiro e último elemento de $R_1$	$mR_1$	adm	15
Elementos ao longo de $L_{x_1}$	$nL_{x_1}$	un	5
Razão primeiro e último elemento de $L_{x_1}$	$mL_{x_1}$	adm	5
Tamanho do elemento no trecho escavado	$L_{p_e}$	m	$L_p$
Número de elementos ao longo de $L_{y_2}$	$nL_{y_2}$	un	8
Razão entre o primeiro e último elemento em $L_{y_2}$	$mL_{y_2}$	adm	5

O *script* APDL do modelo escolhido para constar no Apêndice A foi justamente o modelo axissimétrico. A entrada dos parâmetros pode ser vista entre as linhas 24 e 153 do *script*.

Para simular o ciclo contrutivo de escavação e revestimento é utilizado o recurso de **ativação/desativação de elementos** em cada passo de solução. A desativação, à rigor, compreende três modificações:

- a) a primeira consiste em substituir o valor do módulo de elasticidade do elemento por um valor pequeno, ou seja, 1E-12, isso fará com que durante as iterações de equilíbrio esses elementos pouco contribuam na matriz de rigidez e no incremento de forças internas, distribuindo então as tensões para os elementos vizinhos ativados;
- b) a segunda alteração consiste igualar a zero as tensões internas nos pontos de Gauss do elemento, que estavam acumuladas dos passos anteriores;
- c) a terceira alteração consiste em igualar a zero as forças externas (se houver forças, na fronteira desses elementos) para que não entrem no cálculo do resíduo no método de Newton-Raphson.

No *software ANSYS* esse recurso é conhecido como *Birth and Death* e seu uso se dá através da seleção dos elementos e um comando APDL (EKILL e EALIVE) que identifica se estarão ativados ou desativados no passo.

O custo computacional desses modelos é refletido diretamente no tempo de processamento de cada subpasso durante a solução do sistema global. Esse tempo é função de diversos fatores. Dentre os mais simples estão a quantidade de operações em ponto flutuante (precisão simples ou dupla) necessários para a fatoração e solução do sistema frente à tecnologia de processamento (velocidade do processador e recursos de paralelização). A ordem de grandeza da quantidade de operações em ponto flutuante pode ser estimada através do tamanho do sistema. Portanto, a Tabela 6.4, resume o tamanho do sistema para as malhas desses três modelos. Porém, para o tempo global, é necessário considerar as estratégias de atualização da matriz de rigidez e a quantidade de passos, sendo que este último aumenta o tempo computacional linearmente.

Tabela 6.4 – Tamanho do sistema para cada modelo

<b>MODELO</b>	<b>No. ELEMENTOS</b>	<b>No. NÓS</b>	<b>SISTEMA nxn</b>
EPD	235	768	1536
3D	13395	15456	46368
AXI	1222	3813	7626

## 6.8 PROPRIEDADES E PARÂMETROS DO MODELO CONSTITUTIVO

Além dos parâmetros referente ao domínio para a construção da malha, condições de contorno e discretização do tempo tem-se os parâmetros para o modelo constitutivo do maciço e do revestimento. Como o revestimento possuí apenas comportamento elástico, ele apresenta apenas dois parâmetros  $E_{rev}$  (módulo de Young) e  $\nu_{rev}$  (Coeficiente de Poisson). A Tabela 6.5 apresenta a definição dos parâmetros referente ao modelo constitutivo elastoplástico-viscoplástico.

Tabela 6.5 – Parâmetros para o modelo constitutivo elastoplástico-viscoplástico

PARÂMETROS	DEFINIÇÃO	UNIDADE
REFERENTE A PARTE ELASTICA		
E	Módulo de Young $E$	MPa
nu	Coeficiente de Poisson $0 \leq v < 0.5$	adm
REFERENTE A PARTE ELASTOPLÁSTICA		
superficef	função de escoamento: 1-DPI, 2-DPII, 3-DPIII	-
superficieg	função potencial: 1-DPI, 2-DPII, 3-DPIII	-
fi	angulo de atrito $\phi$ (0 - VM ou TR)	graus
psi	dilatância $0 < \psi < \phi$ (se $= \phi$ - plasticidade associada)	graus
ci	coesão inicial $c_i$	MPa
cp	coesão pico $c_p$	MPa
cr	coesão residual $c_r$	MPa
epspI	deformação equivalente que delimita a zona I $\bar{\epsilon}_I^P$	adm
epspII	deformação equivalente que delimita a zona II $\bar{\epsilon}_{II}^P$	adm
epspr	deformação equivalente que delimita a zona III $\bar{\epsilon}_r^P$	adm
Dalg	atualização do módulo: 0 - elástico, 1 - consistente	-
REFERENTE A PARTE VISCOPLASTICA		
superficefvp	função de escoamento: 1-DPI, 2-DPII, 3-DPIII	-
superficiegvp	função potencial: 1-DPI, 2-DPII, 3-DPIII	-
fvp	angulo de atrito $\phi^{vp}$ (0 - VM ou TR)	graus
psivp	dilatância $0 < \psi^{vp} < \phi^{vp}$ (se $= \phi^{vp}$ - viscoplasticidade associada)	graus
cvp	coesão $c^{vp}$	MPa
n	expoente do modelo de Perzyna $n$	adm
eta	constante de viscosidade dinâmica $\eta$	dia
f0	parâmetro de tensão a partir do qual inicia o fenômeno viscoso $f_0$	MPa
thetavp	$\Theta$ : $\Theta = 0$ - totalmente explícito, $0 < \Theta < 1$ - semi-implícito	adm

Esse modelo constitutivo e os parâmetros entram no *script* através de três comandos APDL na definição do material: TB,USER (utilizado para definir o material como sendo do usuário e onde é declarado o número total de parâmetros, no caso, 23), TBDATA (que atribui os parâmetros para o *array* de propriedades do material utilizado dentro da *Usermat*) e TB,STATE (que dimensiona o vetor de variáveis de estado). No Apêndice A, nas linhas 238-251, é ilustrado a declaração desse modelo constitutivo. É possível plotar algumas variáveis calculadas desse modelo através do comando APDL PLNSOL,SVAR,[componente]. As componentes são mostradas nas linhas 115-134 no Apêndice B. De maior importância talvez sejam as deformações equivalentes elastoplásticas (componente 1) e viscoplásticas (componente 6). Também, quando se tem amolecimento/endurecimento, pode ser interessante plotar a coesão (componente 3).

Cada comportamento (elástico, elastoplástico e viscoplástico) foi programado em separado. Contudo, o modelo constitutivo elastoplástico-viscoplástico é geral e capaz de reproduzir cada comportamento em separado dependendo do valor de alguns parâmetros. Por exemplo, ao colocar valores de coesão elevados as funções de escoamento (ora da elastoplasticidade ou viscoplasticidade) não são atingidas podendo dessa forma selecionar o comportamento apenas elástico (quando todas coesões são elevadas), elastoplástico (quando a coesão viscoplástica é elevada) ou viscoplástico (quando as coesões elastoplásticas são elevadas). Se as coesões  $c_i, c_p$  e  $c_r$  tiverem o mesmo valor, tem-se na parte elastoplástica um comportamento plástico perfeito.

## 7 VERIFICAÇÕES, VALIDAÇÕES E ANÁLISES

### 7.1 VALIDAÇÃO REFERENTE AO ENDURECIMENTO E AMOLECIMENTO DA PARTE ELASTOPLÁSTICA ATRAVÉS DE UM ENSAIO

Uma vez que se tem um ensaio triaxial, como por exemplo, o da Figura 4.13 uma validação do endurecimento e amolecimento da parte elastoplástica é possível. Os modelos estão apresentados na Figura 7.1 e compreendem a simulação numérica de um ensaio considerando um modelo 3D, estado plano de deformação e axissimétrico. Sendo  $l_a = l_b = l_c = 1$  o próprio deslocamento em  $y$  do nó A será a deformação específica e a força reativa a tensão. Para representar o ensaio da Figura 4.13 foi aplicado um deslocamento imposto  $\delta = 0,1$  em toda a face superior e medido a força reativa.

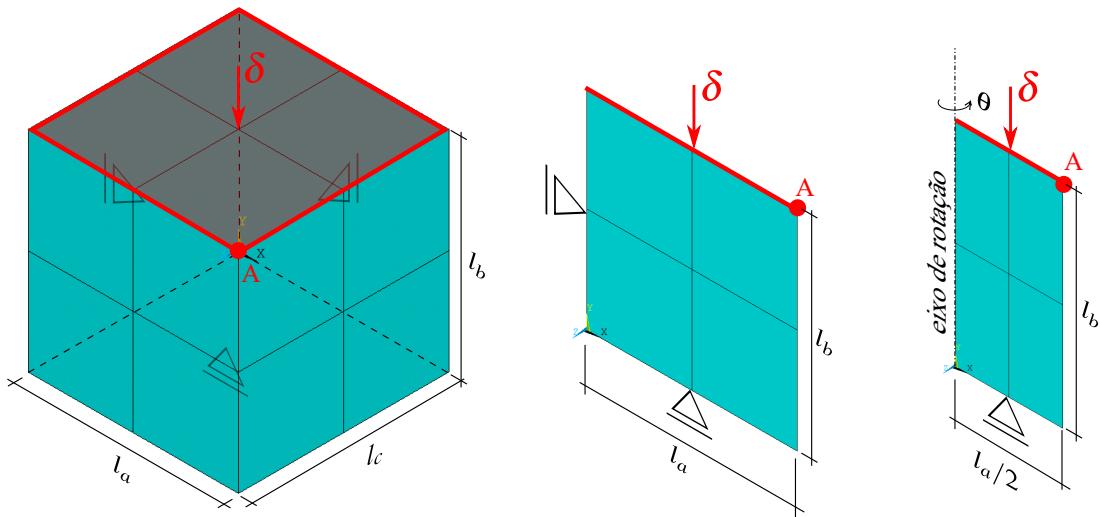


Figura 7.1 – Domínio e discretização de um ensaio triaxial com modelo 3D, EPD e AXI

Os valores dos parâmetros do modelo constitutivo adotado na análise foram  $E = 403$  MPa,  $v = 0,39$ , superficief = 2, superficieg = 2,  $\phi = 0$ ,  $\psi = 0$ ,  $c_i = 0,7$  MPa,  $c_p = 1,3$  MPa,  $c_r = 0,9$  MPa,  $\bar{\varepsilon}_I^P = 0,010$ ,  $\bar{\varepsilon}_{II}^P = 0,050$ ,  $\bar{\varepsilon}_r^P = 0,07$ . Os parâmetros de coesão e de deformação plástica equivalente das zonas de endurecimento e amolecimento são coletados do gráfico do ensaio, tal como apresentado na Figura 7.2. O valor de duas vezes a coesão no eixo das ordenadas está no fato de que não está sendo considerado o ângulo de atrito, fazendo com que a superfície de plasticidade se reduza a de von-Mises. Também está sendo desconsiderado a dilatância, portanto, a variação do volume não considera a dilatância durante à deformação plástica. A parte viscosa

do modelo constitutivo é eliminada utilizando uma coesão alta. O resultado da análise pode ser visto na Figura 7.3.

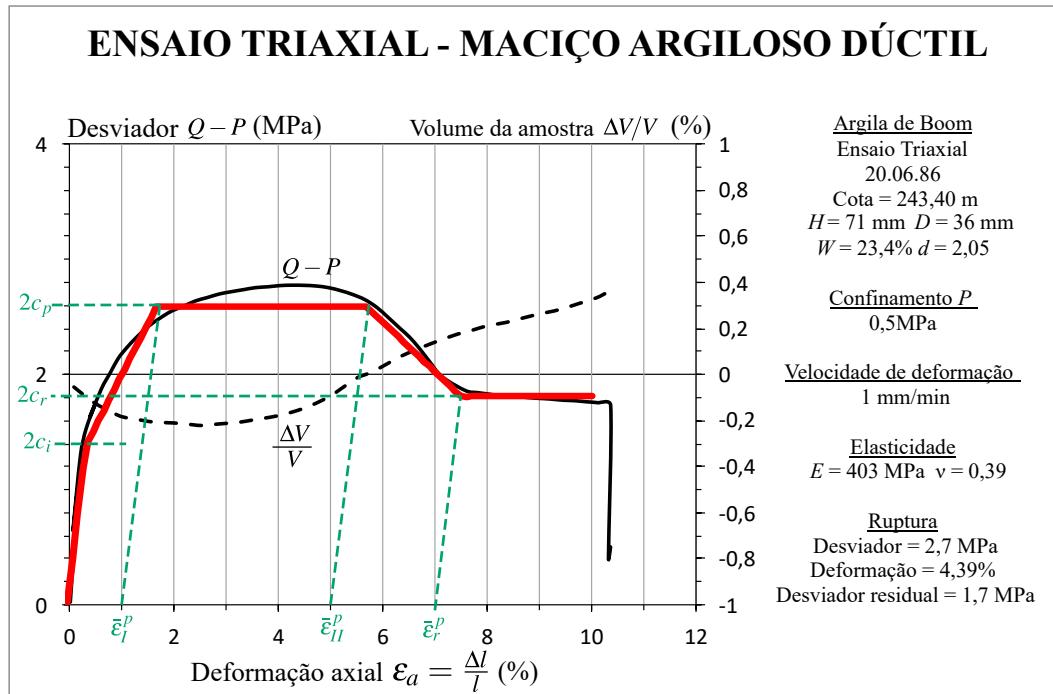


Figura 7.2 – Detalhe da determinação dos valores dos parâmetros para simulação do ensaio



Figura 7.3 – Resultado da análise para o ensaio triaxial

Como pode-se ver os valores deram exatamente iguais considerando 3D, EPD e AXI demonstrando que a implementação conseguiu essa generalidade. Caso o modelo seja de fato utilizado

para estudos de túneis reais é sempre desejável ter ensaios triaxiais para fazer uma validação ou eventuais calibrações nesse aspecto do modelo.

## 7.2 VERIFICAÇÃO DA SOLUÇÃO NUMÉRICA COM UMA SOLUÇÃO ANALÍTICA CONSIDERANDO O ENDURECIMENTO

Essa verificação considerará uma das soluções analíticas deduzidas por Bernaud e Quevedo (2020). A solução analítica escolhida corresponde a um problema de um túnel profundo de seção circular sobre tensão geostática hidrostática com um critério de plasticidade de Tresca considerando endurecimento por deformação plástica, conforme Figura 7.4.

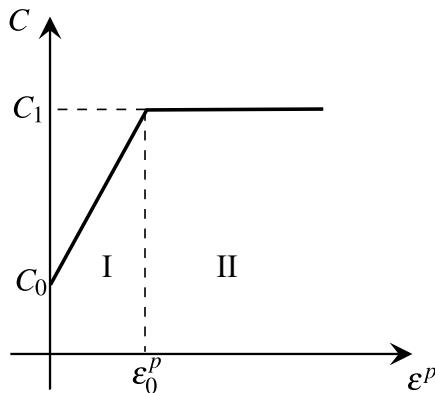


Figura 7.4 – Variação da coesão: I - trecho de endurecimento linear e II - comportamento perfeitamente plástico (Bernaud e Quevedo (2020, p. 4))

A expressão (7.1) apresenta a solução analítica da convergência quando  $r = R_i$ .

$$\frac{u(r)}{r} = \frac{(1-2v)(v+1)}{E} \left\{ \sigma_x + \frac{2C_0}{1+2\frac{C'}{E'}} \left[ \frac{C'}{E'} \left( \frac{1}{r^2} - \frac{1}{x^2} \right) y^2 + \ln \left( \frac{x}{r} \right) - \sigma_\infty \right] \right\} - \frac{2C_0}{E'} \left( \frac{y}{r} \right)^2 \quad (7.1)$$

em que  $E' = E/(1+v)$ ,  $v$ ,  $C' = (C_1 - C_0)/\epsilon_0^p$  são parâmetros do material. Essa solução é dependente também dos raios plásticos  $x$ ,  $y$ , da tensão na fronteira do raio plástico  $\sigma_x$ , das tensões geostáticas hidrostáticas  $\sigma_\infty$  e da tensão no interior da cavidade do túnel  $\sigma_i$ . O restante das expressões para aplicar essa solução são:

$$\sigma_x = 2C_1 \ln \left( \frac{R_i}{x} \right) + \sigma_i, \quad x^2 = \frac{2C_0}{E'\epsilon_0^p + 2C_1} y^2, \quad y^2 = \frac{R_i}{\omega_0} e^{\frac{(\omega_1 + \omega_2 + \omega_3)}{C_1}} \quad (7.2)$$

$$\omega_0 = \frac{2C_0}{E'\epsilon_0^p + 2C_1}, \quad \omega_1 = \sigma_i - \sigma_\infty - C_0, \quad \omega_2 = \frac{C_0}{1+2\frac{C'}{E'}} \ln(\omega_0), \quad \omega_3 = \frac{\frac{C'}{E'} [2(C_0 - C_1) - \epsilon_0^p]}{1+2\frac{C'}{E'}} \quad (7.3)$$

Utilizando  $R_i = 1$  m,  $E = 1430$  MPa,  $\nu = 0,4$ ,  $C_0 = 0,21$  MPa,  $C_1 = 0,56$  MPa,  $\bar{\varepsilon}_0^p = 0,024$ ,  $P_i = -\sigma_i = 2,5$  MPa,  $P_\infty = -\sigma_\infty = 4,5$  MPa tem-se, pela expressão analítica,  $U_i = -u(r = R_i)/R_i = 5,91\%$ . A Figura 7.5 apresenta a concordância do resultado numérico com um erro menor que 1%.

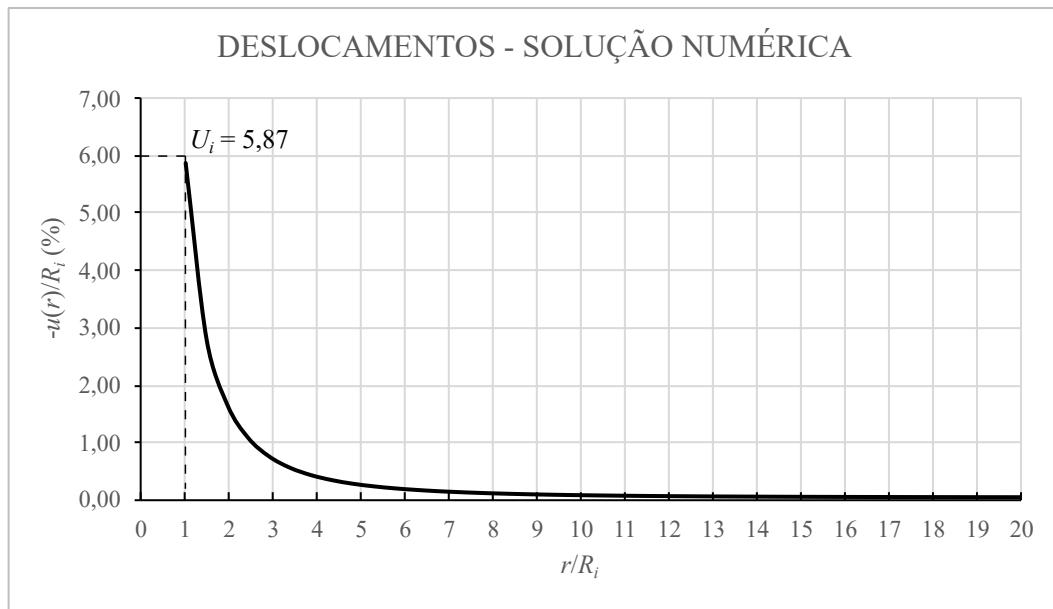


Figura 7.5 – Solução numérica considerando elastoplasticidade com endurecimento

Para essa solução numérica foi utilizado domínio em EPD (Figura 6.12) e a relação (5.35)<sub>1</sub> que considera a superfície de von-Mises inscrita em Tresca e as mesmas considerações para particularizar o modelo elastoplástico-viscoplástico para elastoplástico, ou seja, a parte viscosa do modelo constitutivo é novamente eliminada utilizando uma coesão viscosa alta. Para representar a mesma lei de endurecimento tem-se  $c_i = 0,21\sqrt{3}/2$  MPa,  $c_p = 0,56\sqrt{3}/2$  MPa,  $c_r = 0,56\sqrt{3}/2$  MPa,  $\bar{\varepsilon}_I^p = 0,024$ ,  $\bar{\varepsilon}_{II}^p = 0,024$ ,  $\bar{\varepsilon}_r^p = 0,024$ .

### 7.3 VERIFICAÇÃO DO MODELO ACOPLADO COM CADA COMPORTAMENTO EM SEPARADO

O modelo constitutivo elastoplástico-viscoplástico é bastante geral e capaz de reproduzir cada comportamento em separado. Portanto, são apresentadas algumas verificações da solução numérica considerando cada lei constitutiva separada: I - elasticidade, II - elastoplasticidade e III - viscoplasticidade. Para o caso I e II sem revestimento é utilizado soluções analíticas como comparação. A expressão dessas podem ser encontradas em Corbetta (1990) e Quevedo (2017, p. 50-54) e portanto não serão apresentadas. A solução elastoplástica considera uma plasticidade

perfeita com regra de fluxo associada com superfície de escoamento de Tresca. Portanto é utilizado a relação (5.35)<sub>1</sub>. Para outros casos e quando se tem revestimento a verificação foi feita com outro *software*, o GEOMECH91. O GEOMECH91 é um programa de elementos finitos para geomecânica para análises bidimensionais em axissimetria. Ele foi desenvolvido por Bernaud (1991) e detalhes de sua malha e condições de contorno podem ser vistas em Bernaud (1991, p. 190).

Os resultados apresentados nessa seção são os do modelo axissimétrico da Figura 6.14 com os parâmetros da Tabela 6.3. Apesar de estar limitado às condições de axissimetria, é um dos modelos mais importantes, pois considera o processo de escavação e colocação do revestimento de forma realista e permite fazer estudos paramétricos de forma mais eficiente que os modelos tridimensionais. Contudo, as mesmas verificações foram feitas no modelo tridimensional considerando seção circular e os mesmos resultados foram obtidos, com pequenas diferenças menores que 1%.

### 7.3.1 Verificações em elasticidade

O modelo constitutivo acoplado, por ser geral, tem que ser capaz de reproduzir o resultado em elasticidade colocando coesões elevadas na parte plástica e viscosa. Dessa forma, considerando  $E = 1000 \text{ MPa}$  e  $5000 \text{ MPa}$ ,  $\nu = 0,498$ ,  $p_v = p_h = 5 \text{ MPa}$  tem-se os resultados da Figura 7.6 e Figura 7.7. As curvas cinzas são os perfis de convergência a cada passo de escavação e a vermelha no último passo. A curva verde pontilhada é a solução analítica.

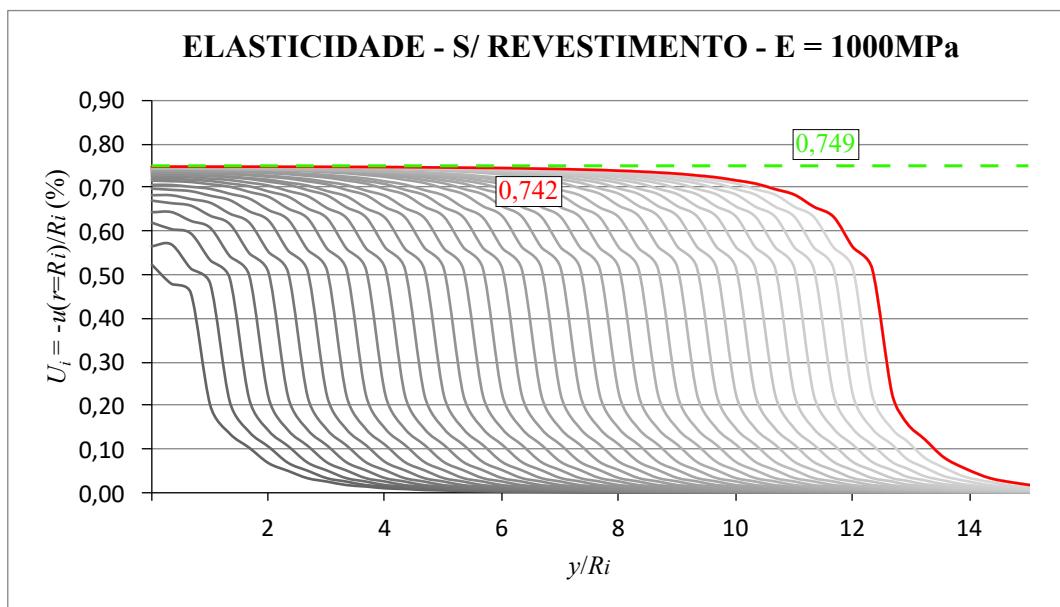


Figura 7.6 – Verificação solução numérica em elasticidade sem revestimento -  $E = 1000 \text{ MPa}$

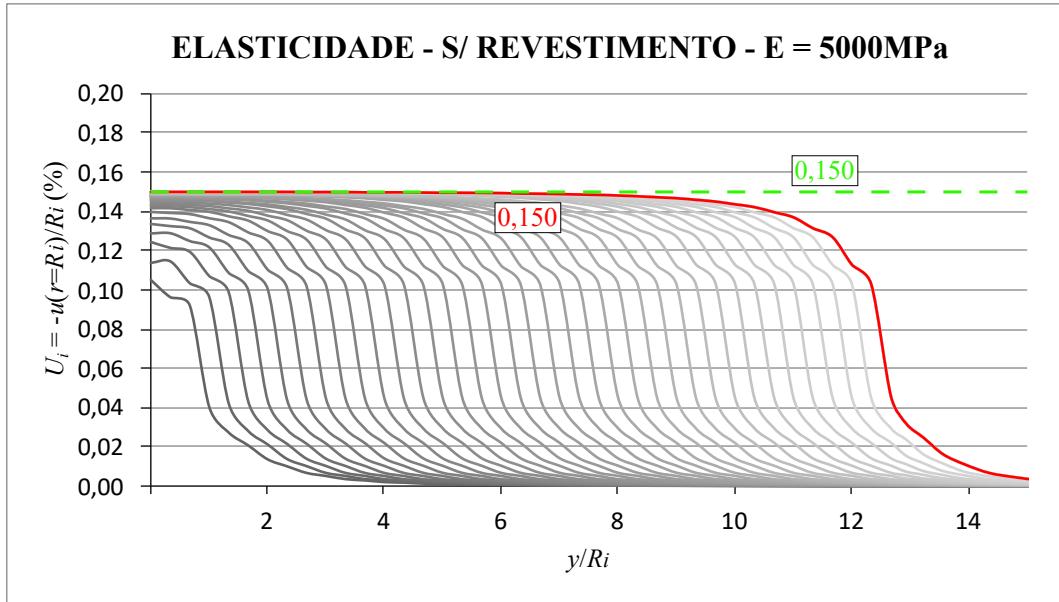


Figura 7.7 – Verificação solução numérica em elasticidade sem revestimento -  $E = 5000$  MPa

Cabe salientar que quando se utiliza o modelo constitutivo elástico linear a mesma solução é obtida escavando todos os passos de uma única vez. Contudo, quando se tem revestimento não há solução analítica, pois ocorre a iteração entre o revestimento e o maciço. Para essa verificação é comparado o resultado do ANSYS com o GEOMECH91. A Figura 7.8 mostra essa comparação considerando  $E = 1000$  MPa com um revestimento de  $E_{rev} = 30000$  MPa e  $\nu_{rev} = 0,3$ . Nesse caso, foi considerado um  $d_0 = 0$ .

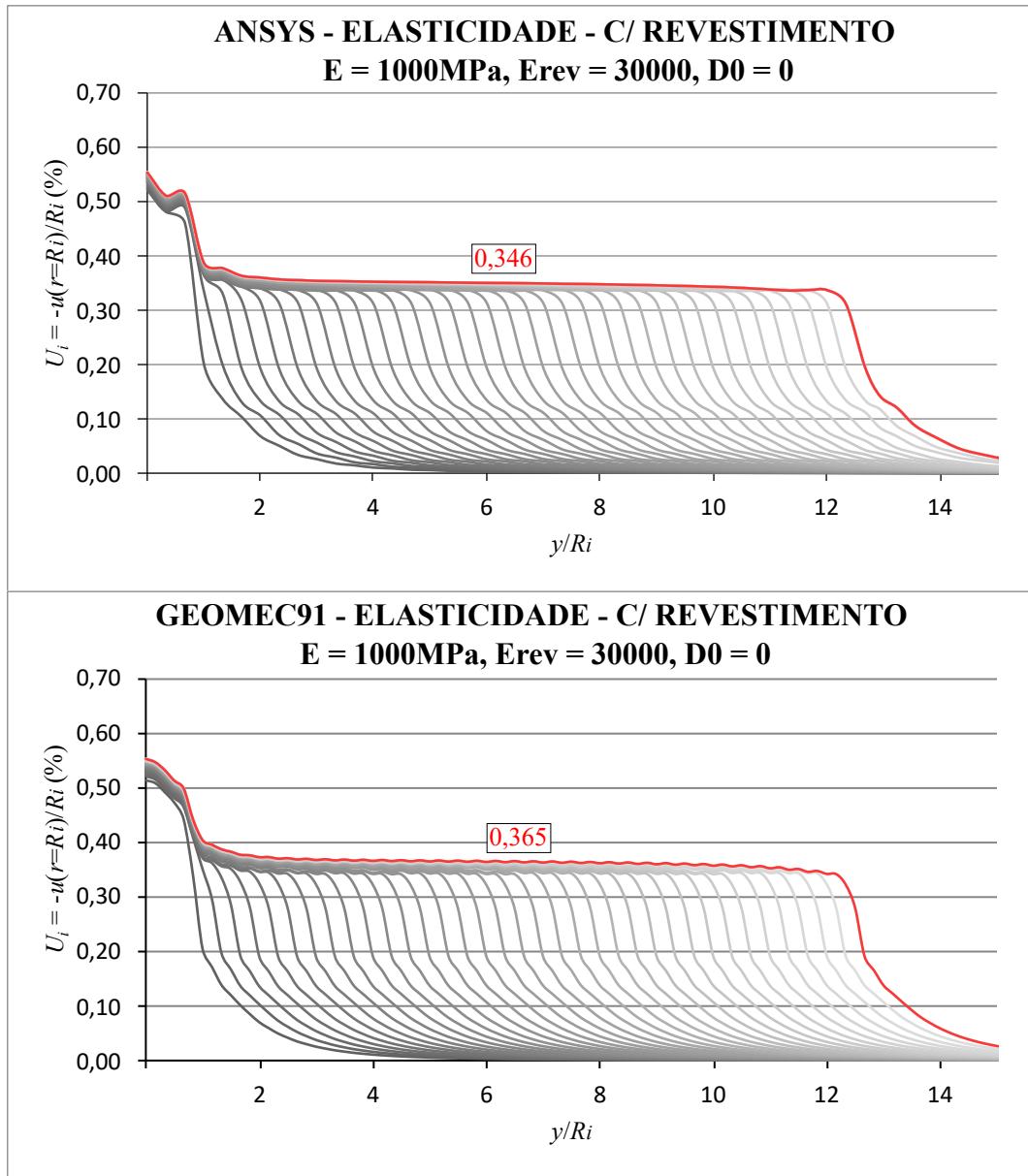


Figura 7.8 – Verificação solução numérica em elasticidade com revestimento -  $E = 1000 \text{ MPa}$ ,  $E_{rev} = 30000 \text{ MPa}$ ,  $d_0 = 0$

O perfil de convergência apresenta um pico nas primeiras escavações, uma vez que na primeira escavação é escavado  $3L_p$ . De qualquer forma, em comparação com a Figura 7.6 consegue-se ver que o revestimento tem um grande efeito sobre as deformações. Nesse caso, a rigidez do revestimento foi muito elevada em relação ao maciço. Contudo, não é só o módulo de elasticidade do revestimento que conta, mas tão importante quanto, o  $d_0$ . Considerando um  $d_0 = 4L_p$  tem-se os resultados da Figura 7.9.

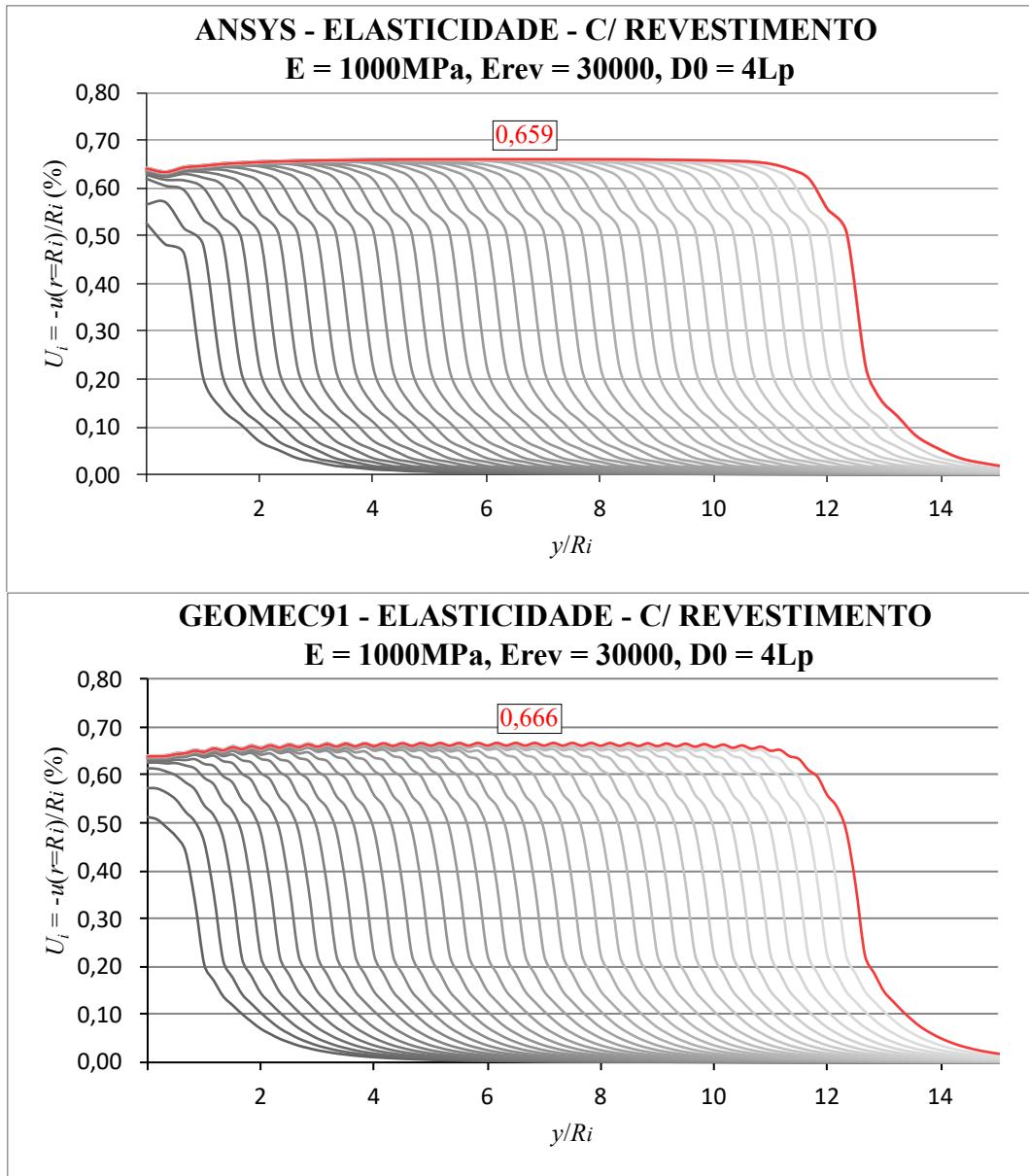


Figura 7.9 – Verificação solução numérica em elasticidade com revestimento -  $E = 1000 \text{ MPa}$ ,  $E_{rev} = 30000 \text{ MPa}$ ,  $d_0 = 4L_p$

Na Figura 7.9 pode-se ver pequenas ondulações no perfil de convergências do GEOMECH91 que não estão presentes no resultado do ANSYS. Essa diferença ocorre devido ao elemento finito utilizado. No GEOMECH91 é utilizado um elemento quadrático *serendipity*, que possuí um nó intermediário em suas bordas.

Como pode-se notar o modelo constitutivo acoplado conseguiu em elasticidade reproduzir outras soluções independentes. Ademais, a verificação do modelo em elasticidade é muito importante para conferir se as escavações e a colocação do revestimento estão sendo feitas corretamente. E são análises importantes para averiguar a correta aplicação das condições de contorno e ter uma ideia inicial da qualidade da malha.

### 7.3.2 Verificações em elastoplasticidade

De forma análoga à elasticidade, o modelo constitutivo acoplado, por ser um modelo de aplicação geral, tem que ser capaz de reproduzir o resultado em elastoplasticidade utilizando uma coesão viscoplástica elevada. Considerando  $E = 1000 \text{ MPa}$ ,  $\nu = 0,498$ ,  $p_v = p_h = 4 \text{ MPa}$ ,  $c_i = c_p = c_r = \sqrt{3}/2 \text{ MPa}$  e  $3\sqrt{3}/2 \text{ MPa}$  tem-se os resultados da Figura 7.10 e Figura 7.11. As curvas cinzas são os perfis de convergência a cada passo de escavação e a vermelha no último passo. A curva verde pontilhada é a solução analítica.

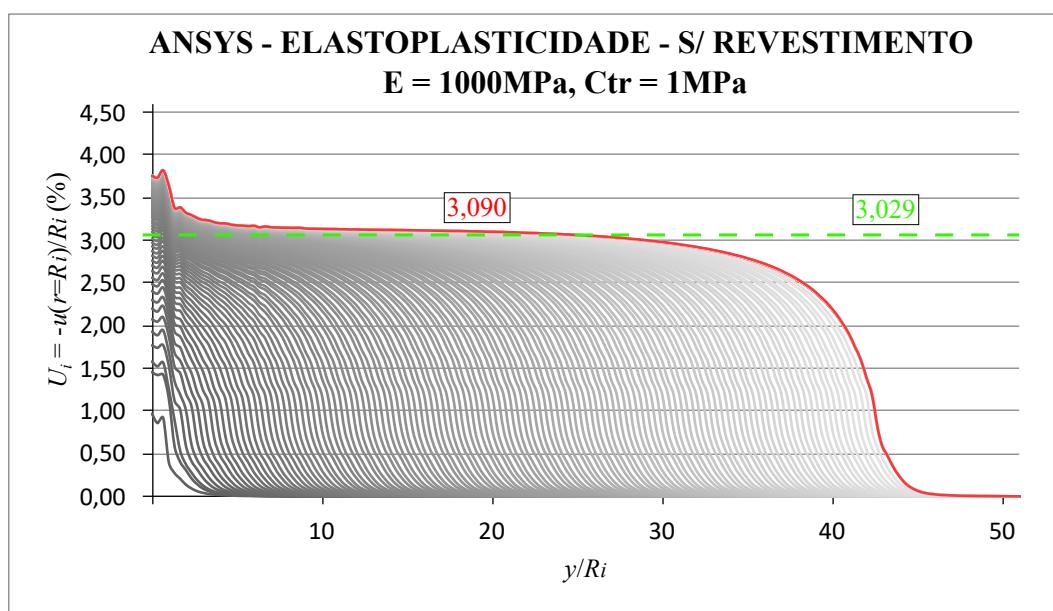


Figura 7.10 – Verificação solução numérica em elastoplasticidade sem revestimento -  $E = 1000 \text{ MPa}$ ,  $c_i = c_p = c_r = \sqrt{3}/2 \text{ MPa}$

No caso em que  $c_i = c_p = c_r = \sqrt{3}/2 \text{ MPa}$ , foi necessário aumentar o número de passos de escavação  $n_p = 128$  para que o patamar no perfil de convergência se desenvolvesse plenamente. A solução analítica é dada para esse patamar sem a influência da face de escavação ou das bordas do modelo. Isso demonstra que dependendo dos valores dos parâmetros constitutivos pode ser necessário aumentar o número de passos  $n_p$ . Se o valor almejado é a convergência no equilíbrio fora das zonas de influência deve-se buscar uma malha suficiente para aparecer o patamar no perfil de convergências. Um outro aspecto em que o domínio deve ser ajustado é quando as deformações plásticas alcançam as fronteiras do domínio, sendo nesse caso necessário aumentar seus limites ( $L_x$ ,  $L_y$  e  $L_z$ ). Para o tamanho do domínio escolhido resultados são obtidos de forma satisfatória sempre que a relação da pressão geostática-hidrostática pela coesão for menor ou igual a 5. Caso contrário, pode ser necessário fazer esse ajuste nas fronteiras do domínio.

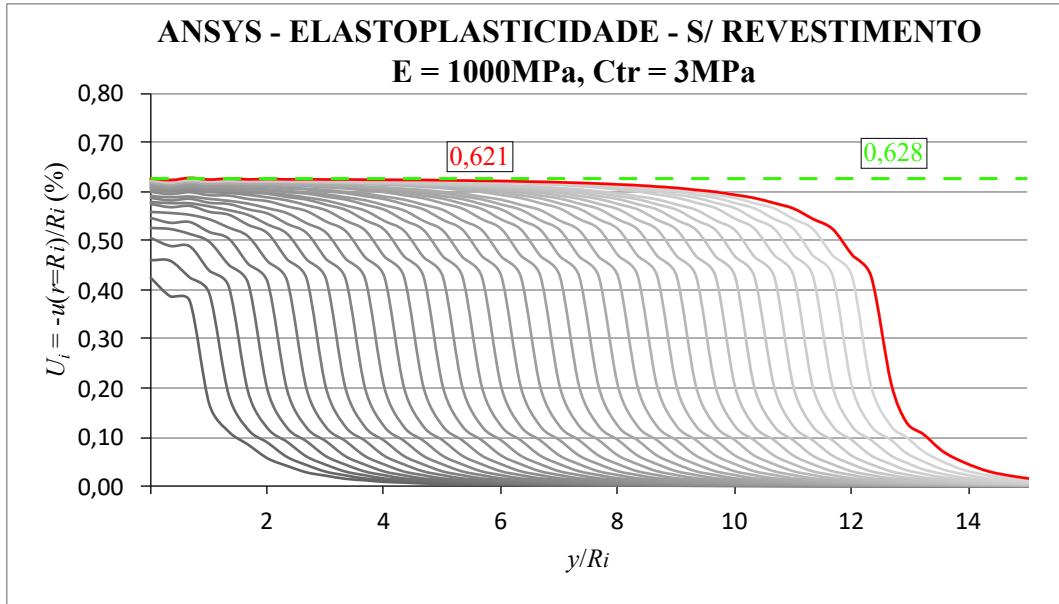


Figura 7.11 – Verificação solução numérica em elastoplasticidade sem revestimento -  $E = 1000\text{MPa}$ ,  $c_i = c_p = c_r = 3\sqrt{3}/2\text{MPa}$

A próxima verificação, compreende a plasticidade dependente da pressão e não associada. Para tanto é utilizado um ângulo de atrito  $\phi=15^\circ$  e um ângulo de dilatância  $\psi=0^\circ$ . O resultado pode ser visto na Figura 7.12. Essa solução apenas não converge quando se utiliza Newton-Raphson Completo com o módulo constitutivo consistente. Se for utilizar o módulo constitutivo consistente é necessário utilizar o Newton-Raphson Completo Assimétrico. A opção em que é utilizado Newton-Raphson Completo mas sem atualizar o módulo constitutivo converge para a solução. Outro aspecto importante, comparando o resultado da Figura 7.12 com a Figura 7.10 é a sensibilidade com que a convergência é afetada pelo ângulo de atrito. Esse resultado é esperado uma vez que quanto maior o ângulo de atrito, para uma dada pressão hidrostática, mais afastada fica a superfície de plastificação do eixo hidrostático.

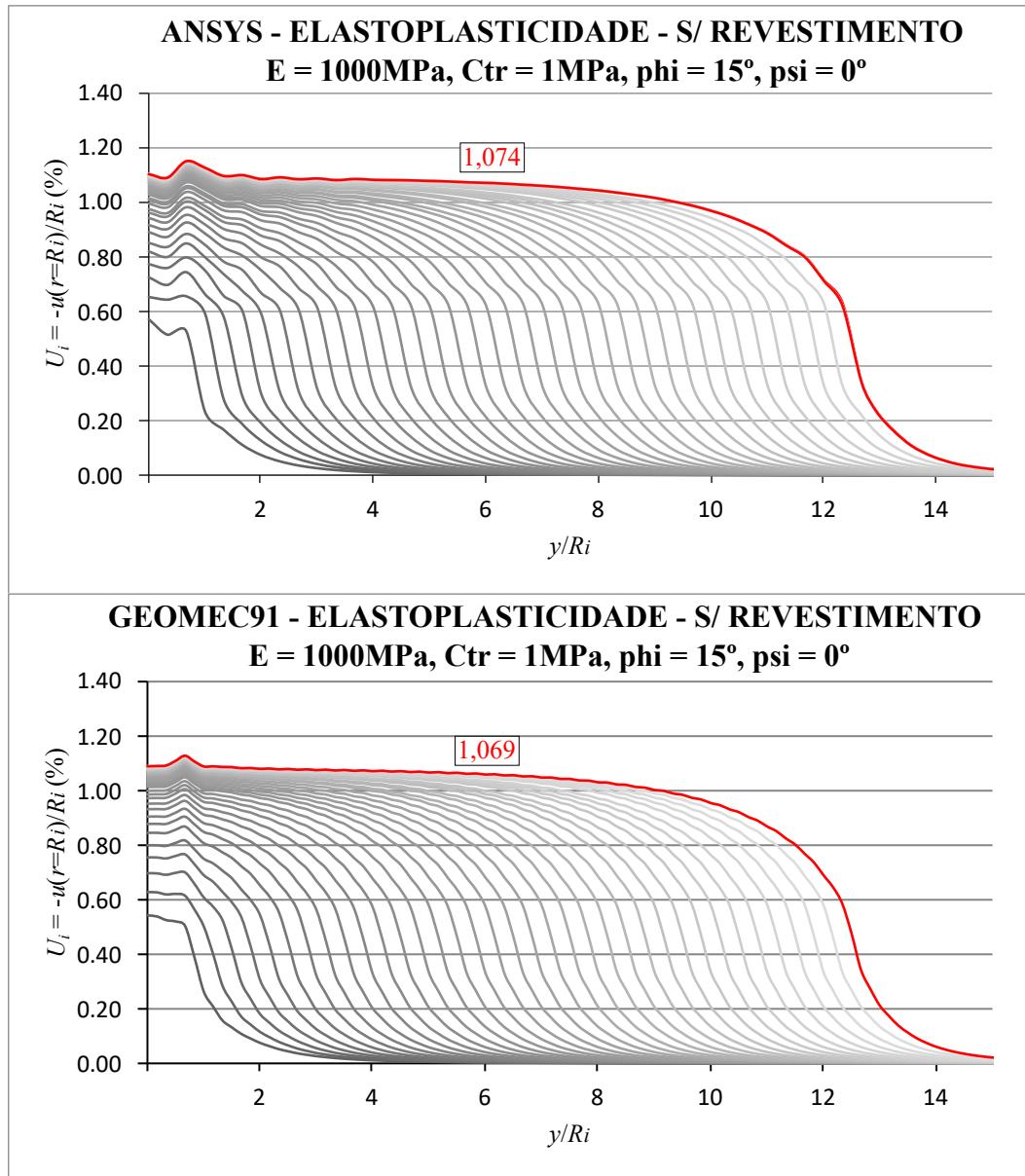


Figura 7.12 – Verificação solução numérica elastoplásticidade sem revestimento  $E = 1000 \text{ MPa}$ ,  $c_i = c_p = c_r = \sqrt{3}/2 \text{ MPa}$ ,  $\phi = 15^\circ$  e  $\psi = 0^\circ$

A verificação da solução considerando a colocação de um revestimento com  $E_{rev} = 30000 \text{ MPa}$ ,  $v_{rev} = 0,3$  e  $d_0 = 0$  pode ser vista na 7.13.

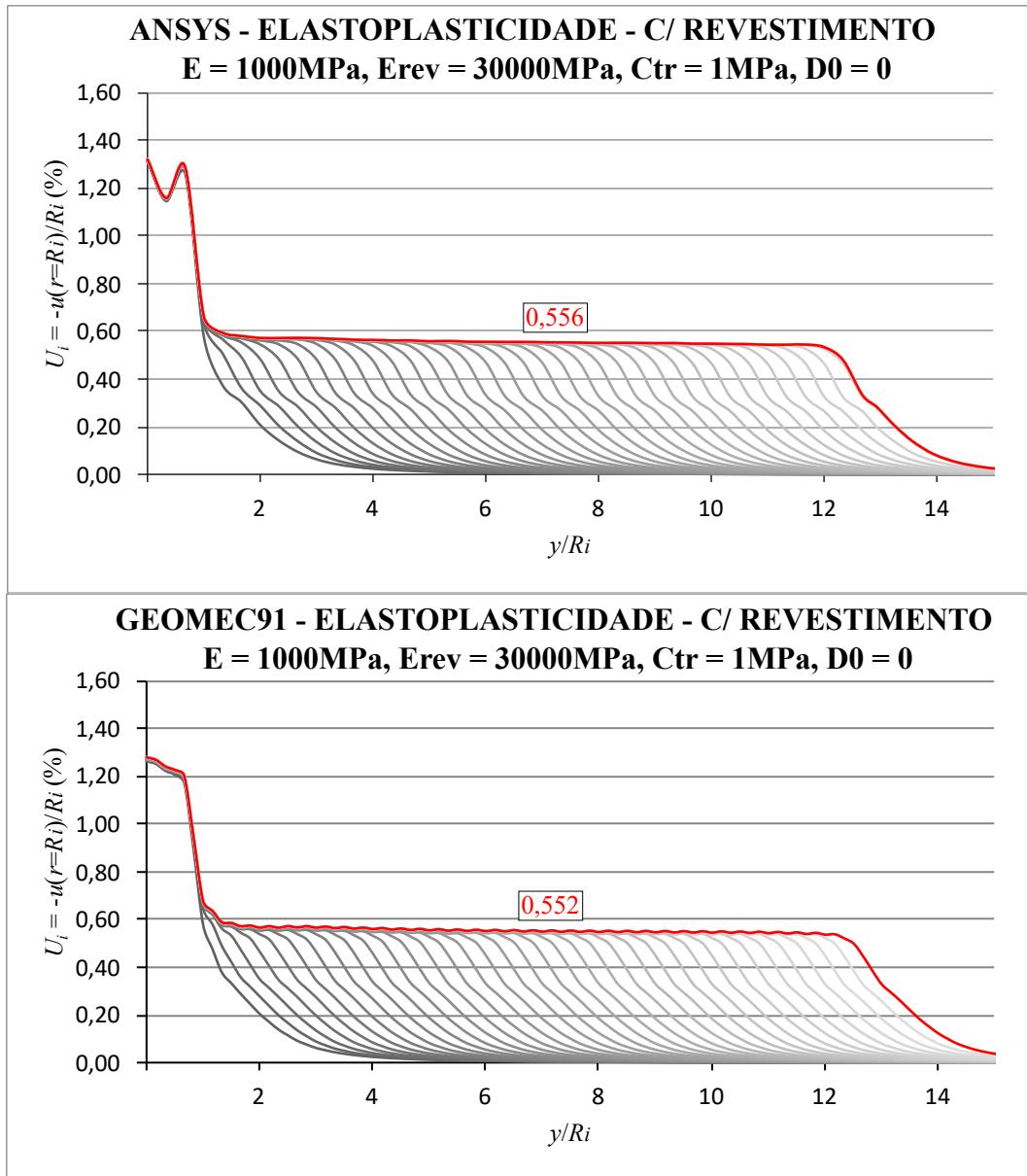


Figura 7.13 – Verificação solução numérica em elastoplasticidade com revestimento -  $E = 1000 \text{ MPa}$ ,  $E_{rev} = 30000 \text{ MPa}$ ,  $d_0 = 0$ ,  $c_i = c_p = c_r = \sqrt{3}/2 \text{ MPa}$

### 7.3.3 Verificações em viscoplasticidade

De forma análoga à elasticidade e à elastoplasticidade, o modelo constitutivo acoplado, por ser geral, tem que ser capaz de reproduzir o resultado viscoplastico colocando coesões elevadas na parte elastoplástica. Considerando  $E = 1000\text{MPa}$ ,  $\nu = 0,498\text{MPa}$ ,  $p_v = p_h = 4\text{MPa}$ ,  $c_i = c_p = c_r = \sqrt{3}/2\text{MPa}$ ,  $V_p = 5\text{m/dia}$  tem-se os resultados da Figura 7.14. As curvas cinzas abaixo da curva vermelha são os perfis de convergência a cada passo de escavação. A curva vermelha o perfil de convergência da última escavação e colocação do revestimento. A curva azul é o perfil de convergência após os efeitos viscosos cessarem. As curvas cinzas entre a curva vermelha e

azul mostram a evolução do perfil de convergências a cada intervalo de tempo, que está indicado no gráfico.

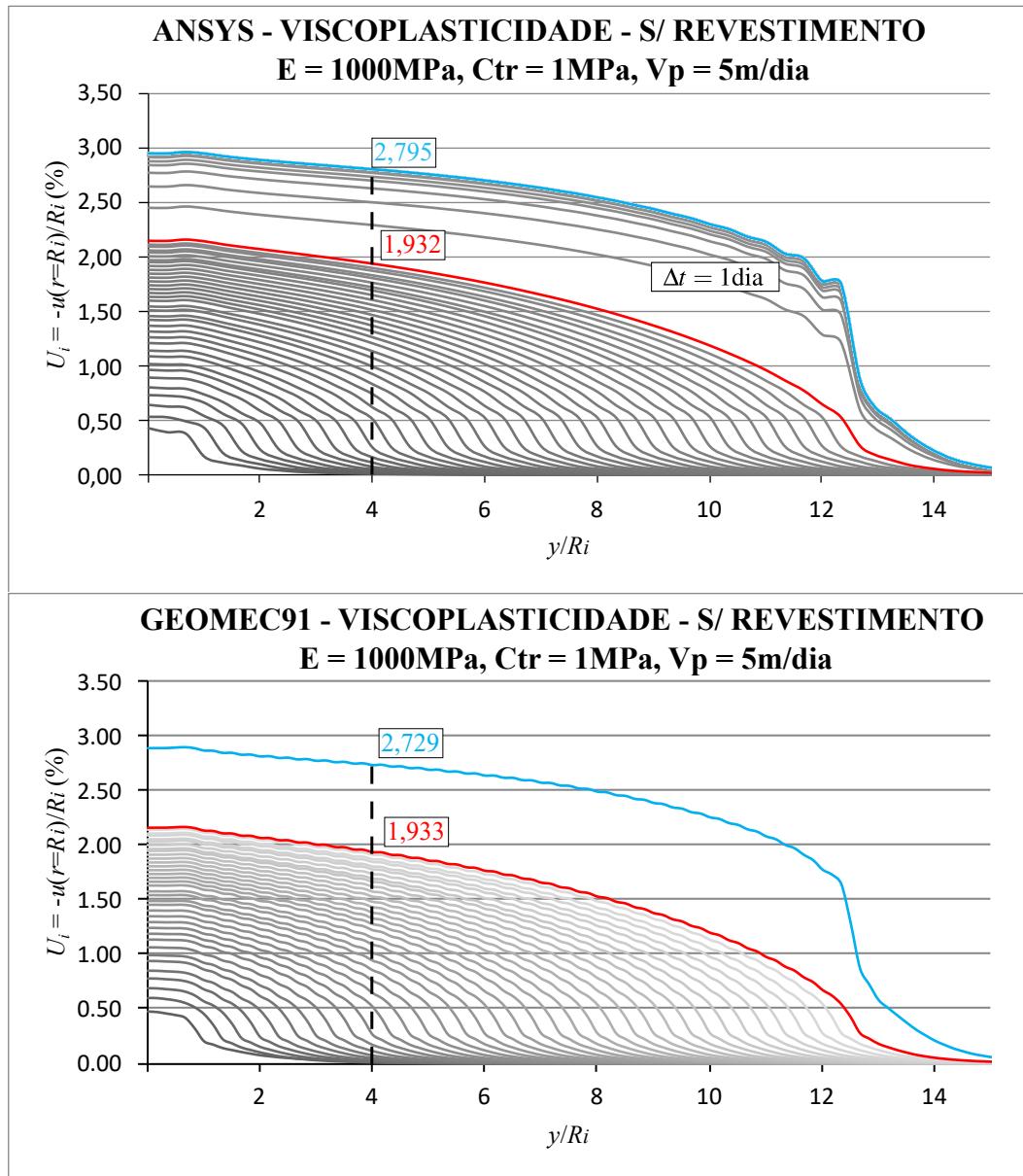


Figura 7.14 – Verificação solução numérica em elastoplásticidade com revestimento -  $E = 1000 \text{ MPa}$ ,  $c_i = c_p = c_r = \sqrt{3}/2 \text{ MPa}$ ,  $V_p = 5 \text{ m/dia}$

Como pode-se ver o resultado do GEOMECH91 não apresenta a evolução do perfil de convergências entre o final da construção do túnel e o final dos efeitos viscosos (longo prazo). Contudo, o longo prazo é quando o perfil de convergências cessa sua evolução. Isso pode ser visto no modelo do ANSYS pela aproximação das curvas cinzas entre a curva vermelha e azul conforme o tempo passa. Outro aspecto é que, para esses parâmetros, a quantidade de escavação  $n_p$  não foi suficiente para aparecer o patamar no perfil de convergências, portanto os valores escolhidos

para comparação estão na cota  $y/R_i = 4$ . Um aspecto importante a ser notado é que quando se tem apenas viscoplasticidade, sem revestimento, o perfil de convergências no longo prazo tende a se aproximar da solução elastoplástica com os parâmetros do modelo viscoso, como pode ser visto comparando a Figura 7.14 e Figura 7.10. Além disso, o perfil de convergências no final da construção do túnel (curto prazo), tende a se aproximar da solução em elasticidade (menores convergências) quando a velocidade de escavação  $V_p$  aumenta. A Figura 7.15 mostra esse aspecto com uma velocidade de 10 m/dia.

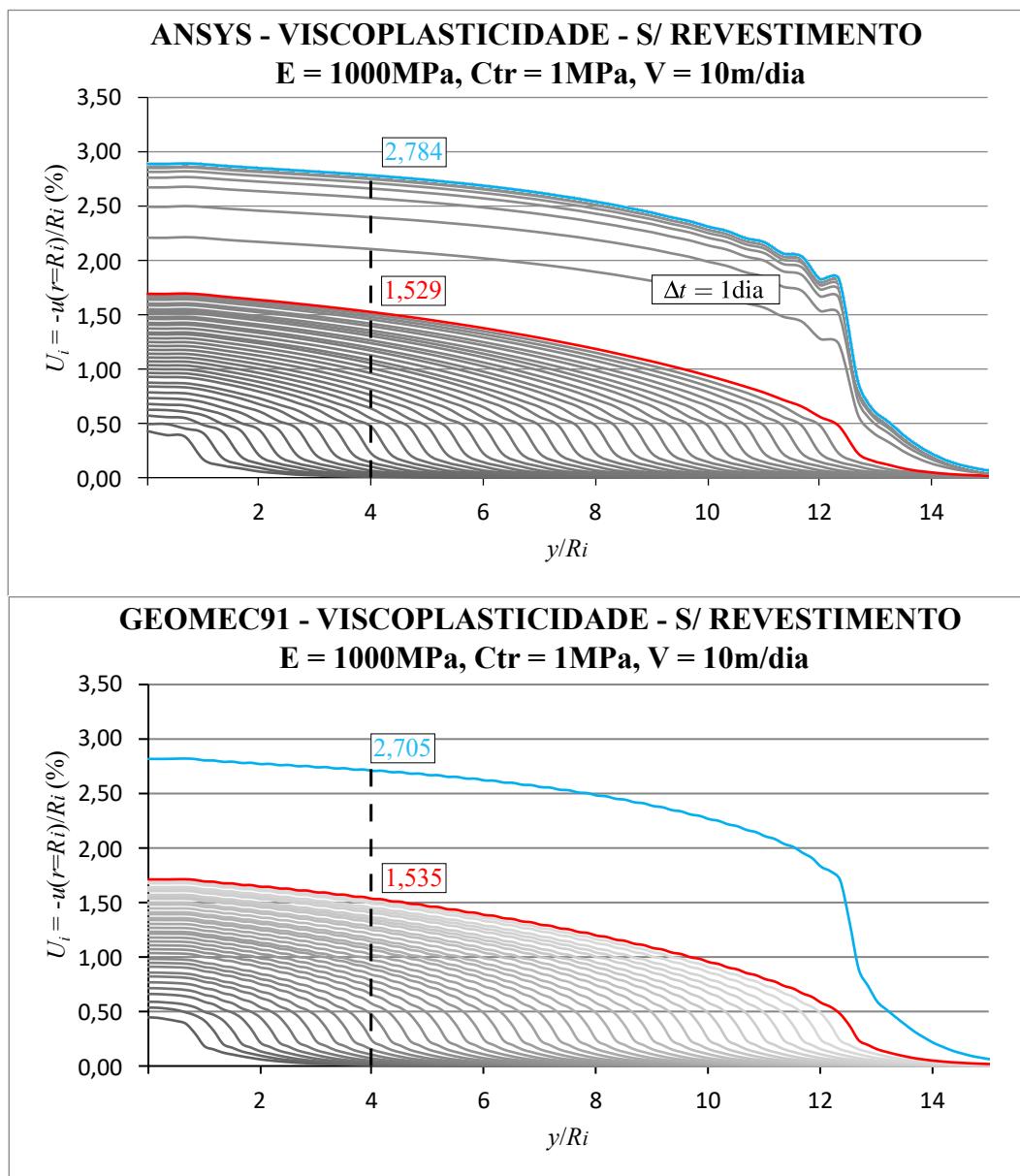


Figura 7.15 – Verificação solução numérica em viscoplasticidade com revestimento -  $E = 1000 \text{ MPa}$ ,  $c_i = c_p = c_r = \sqrt{3}/2 \text{ MPa}$ ,  $V_p = 10 \text{ m/dia}$

Como pode-se ver o perfil de convergências no longo prazo não sofreu alteração e o perfil de curto

prazo diminuiu suas convergências. **O modelo constitutivo acoplado traz diferença justamente nesse aspecto:** a convergência no curto prazo pode ser influenciada por eventuais plastificações e a convergência de longo prazo pode não mais se aproximar da solução elastoplástica com os mesmos valores dos parâmetros viscosos.

Por fim, para verificar a parte do modelo viscoplastático com revestimento a Figura 7.16 apresenta uma comparação considerando um revestimento de  $E_{rev} = 3000 \text{ MPa}$ ,  $\nu_{rev} = 0,3$  colocado com  $d_0 = 2L_p$  afastado da face de escavação.

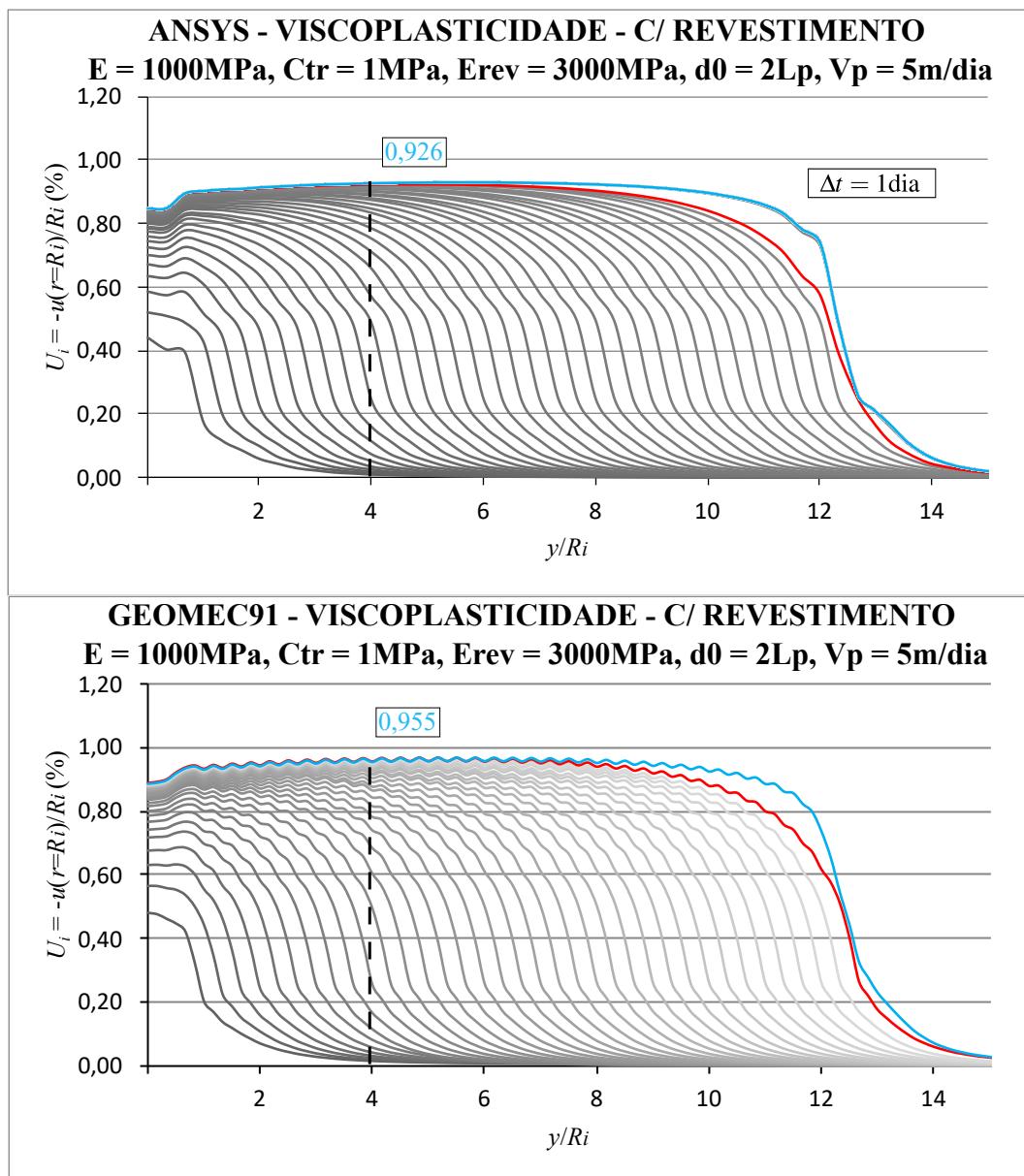


Figura 7.16 – Verificação solução numérica em viscoplasticidade com revestimento -  $E = 1000 \text{ MPa}$ ,  $c_i = c_p = c_r = \sqrt{3}/2 \text{ MPa}$ ,  $E_{rev} = 3000 \text{ MPa}$ ,  $d_0 = 2L_p$ ,  $V_p = 5 \text{ m/dia}$

O revestimento, de uma forma geral, diminui as convergências tanto de curto quanto de longo prazo resistindo às deformações. Contudo, quando se tem um revestimento viscoso, como o concreto que sofre fluência e retração, esse bloqueio não é tão eficiente como pode ser visto em Quevedo (2017). Além disso, a baixa rigidez do revestimento faz com que o perfil de convergências no final da construção do túnel (curto prazo) se aproxime do de longo prazo.

## 7.4 VERIFICAÇÃO DO MODELO ELASTOPLÁSTICO-VISCOPLÁSTICO COM UMA SOLUÇÃO ANALÍTICA

De modo a verificar o algoritmo acoplado implementado é feita a comparação com a solução analítica deduzida por Piepi (1995, p. 61) para um túnel profundo em condições geostáticas-hidrostáticas no interior de um maciço com comportamento elastoplástico-viscoplástico perfeito obedecendo ao critério de Tresca. Essa solução analítica foi escolhida por utilizar o mesmo princípio de associação da Figura 5.12, como pode ser visto em Piepi (1995, p. 35). Contudo, não apresenta a mesma generalidade da solução numérica implementada e possui algumas hipóteses simplificativas, dentre elas, a consideração da mesma superfície de escoamento para plasticidade e viscoplasticidade e vetores de fluxo totalmente associados, ou seja,  $\underline{f}^p = \underline{g}^p = \underline{f}^{vp} = \underline{g}^{vp}$ . Para essa verificação é utilizado o modelo axissimétrico com os seguintes parâmetros:  $E = 1500$  MPa e  $2000$  MPa,  $v = 0,498$ ,  $c^i = c^p = c^r = 4\sqrt{3}/2$  MPa,  $c^{vp} = 3\sqrt{3}/2$  MPa,  $\eta = 4 \cdot 10^4$  dia,  $n = 1$ ,  $f_0 = 1$  MPa e  $p_v = p_h = 9$  MPa. Esses parâmetros são os mesmos utilizados por Piepi (1995, p. 131) que chegou nas convergências de  $U_i = 2,16\%$  para  $E = 1500$  MPa e  $U_i = 1,6\%$  para  $E = 2000$  MPa.

Como a solução analítica está deduzida para superfície de Tresca e aqui é utilizada a de Drucker-Prager (que se particulariza para von-Mises devido à ausência de ângulo de atrito) foi adotado a relação (5.35)<sub>1</sub> considerando von-Mises inscrito em Tresca nos valores das coesões. A solução analítica obtém o perfil de convergência apenas no longo prazo. Contudo, para mostrar as diferenças entre os modelos, além da solução numérica elastoplástica-viscoplástica (EPVP), foi feita também a solução considerando cada comportamento separado, ou seja, elástico (E), elastoplástico (EP) e viscoplástico (VP) tanto no final da escavação quanto no longo prazo. O modelo viscoplástico (VP) é utilizada a mesma coesão de  $4\sqrt{3}/2$  MPa do modelo (EP). Para averiguar a influência da velocidade de escavação será considerado três velocidades  $V_p = 0,1; 0,2$  e  $10$  m/dia.

A Figura 7.17 apresenta os resultados no final da escavação. Pode-se notar que os perfis de convergência para o modelo viscoplástico (VP) são intermediários entre o modelo elástico (E) e elastoplástico (EP), sendo que quanto mais rápida a escavação, mais a resposta desse modelo se aproxima da convergência do maciço em elasticidade. Isso é um resultado esperado, pois quanto

maior a velocidade de escavação menos tempo transcorreu para a evolução das deformações viscosas. O modelo elastoplástico-viscoplástico (EPVP) apresentou a mesma relação com a velocidade (quanto mais rápido menos tempo para as deformações viscosas evoluírem), porém, **iniciou suas deformações próximas do perfil de convergências do modelo elastoplástico (EP)**. Isso ocorre, pois, o maciço atingiu a plastificação durante a escavação. **Esse é um dos principais objetivos e vantagem desse modelo acoplado**, pois geralmente a escavação induz um comportamento elastoplástico no maciço próximo à abertura e esse efeito não é captado pelos modelos que consideram apenas a viscoplasticidade.

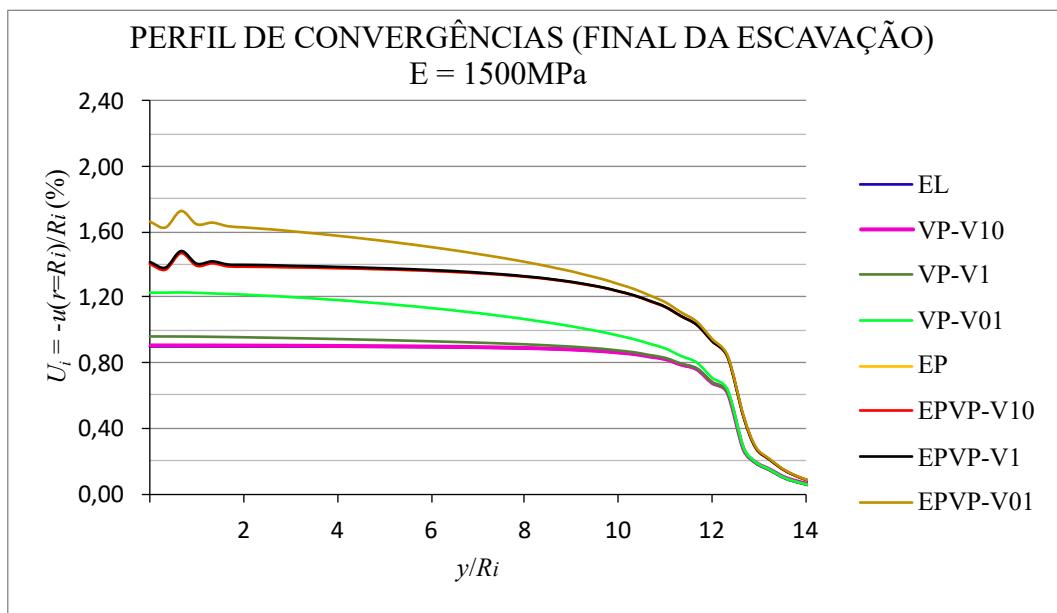


Figura 7.17 – Perfis de convergências no final da escavação para os diversos comportamentos implementados, considerando os parâmetros físicos do maciço de acordo com Piepi (1995) com  $E = 1500$  MPa

Após o final da escavação, os perfis de convergências dos modelos (VP) e (EPVP) continuam evoluindo com uma taxa cada vez menor devido à redistribuição de tensões no interior do maciço, até estabilizarem (no longo prazo). A Figura 7.18 mostra os perfis de convergências no longo prazo (cerca de 500 dias). Pode-se ver que independente da velocidade de escavação, os perfis de convergências viscoplásticos (VP) se estabilizam sobre o perfil da elastoplasticidade (EP). Isso ocorre pois é utilizado a mesma superfície de escoamento com os mesmos parâmetros em ambos os modelos. Contudo, os perfis do modelo elastoplástico-viscoplástico (EPVP) encontram a estabilização bem acima do perfil do modelo elastoplástico (EP), o que mostra, mais uma vez a importância da magnitude desse comportamento acoplado. Pode-se ver também que a solução numérica no longo prazo ficou satisfatória com a solução analítica.

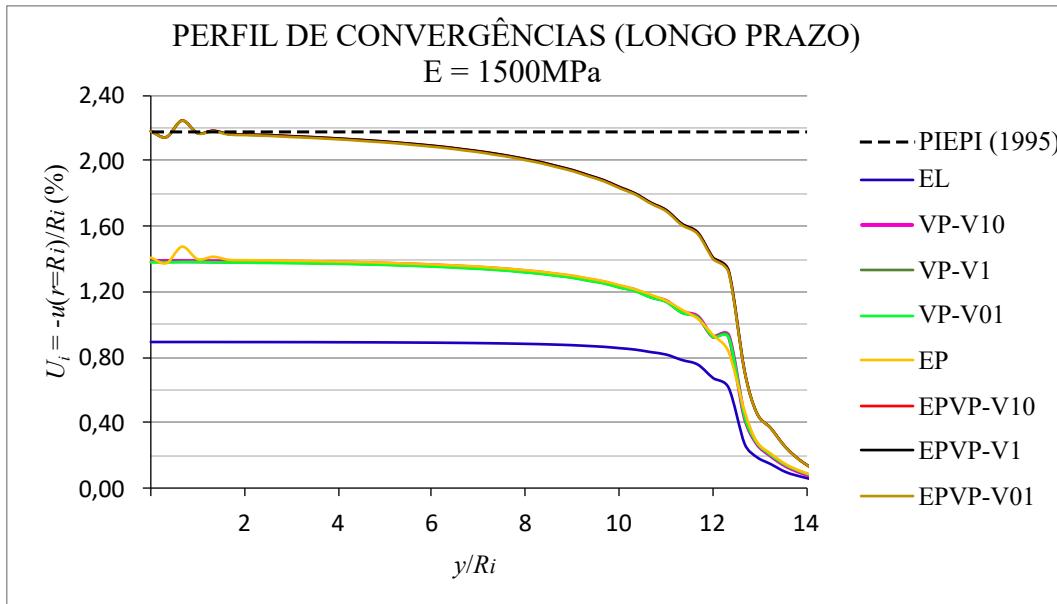


Figura 7.18 – Perfis de convergências no longo prazo para os diversos comportamentos implementados, considerando os parâmetros físicos do maciço de acordo com Piepi (1995) com  $E = 1500 \text{ MPa}$

A Figura 7.19 e Figura 7.20 mostram os resultados para  $E = 2000 \text{ MPa}$ . O mesmo raciocínio se aplica nesse caso, porém, como o maciço tem maior módulo de elasticidade, os perfis possuem menores convergências.

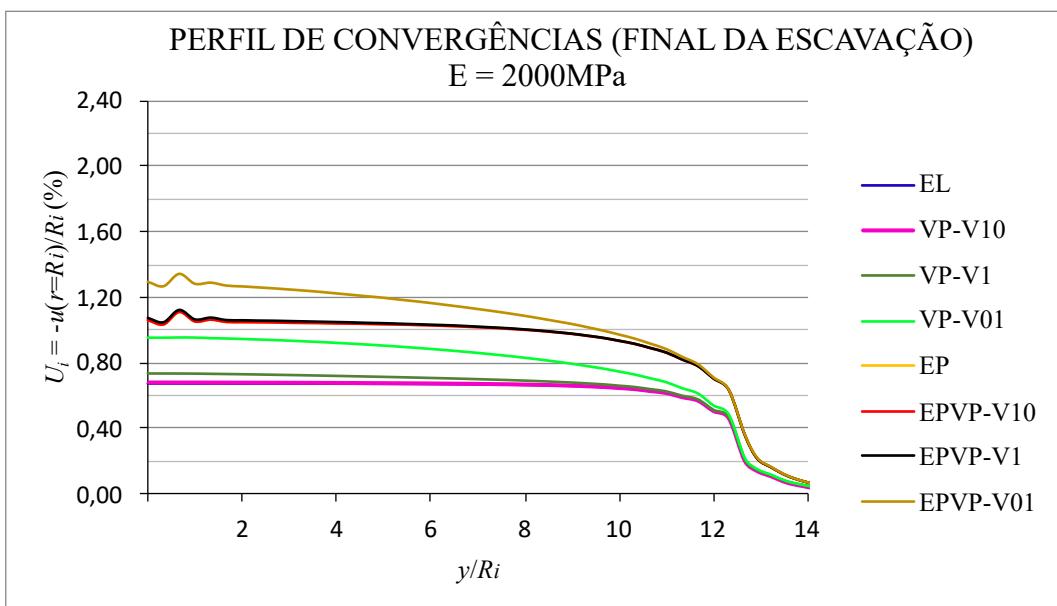


Figura 7.19 – Perfis de convergências no final da escavação para os diversos comportamentos implementados, considerando os parâmetros físicos do maciço de acordo com Piepi (1995) com  $E = 2000 \text{ MPa}$

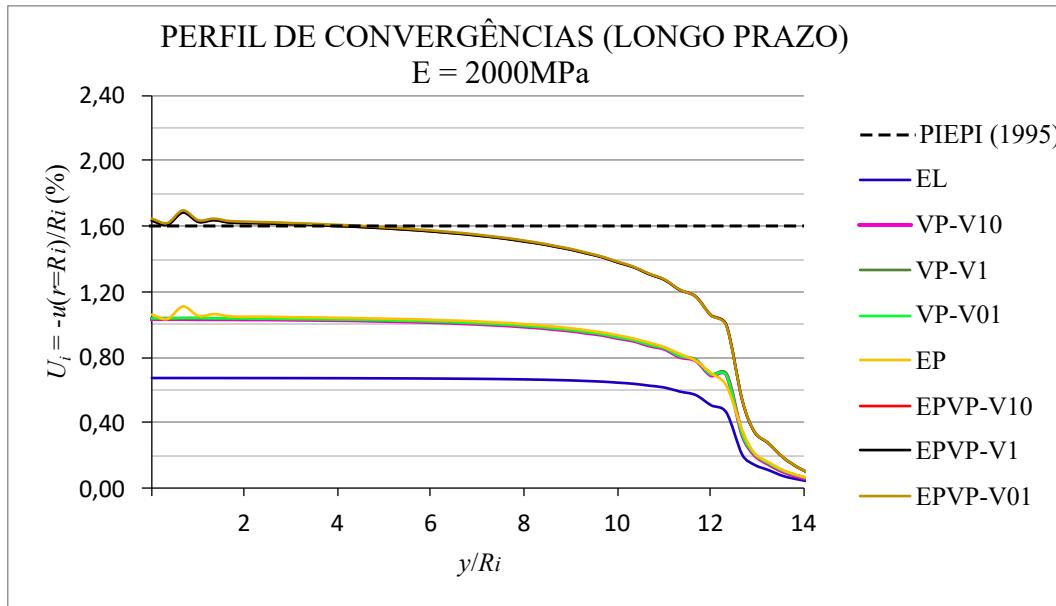


Figura 7.20 – Perfil de convergências no longo prazo para os diversos comportamentos implementados, considerando os parâmetros físicos do maciço de acordo com Piepi (1995) com  $E = 2000$  MPa

Os mesmos resultados foram obtidos utilizando o modelo 3D. A Figura 7.21 mostra o campo de deslocamentos no longo prazo para o caso (EPVP) com velocidade de escavação  $V_p = 0,1$  m/dia e  $E = 1500$  MPa.

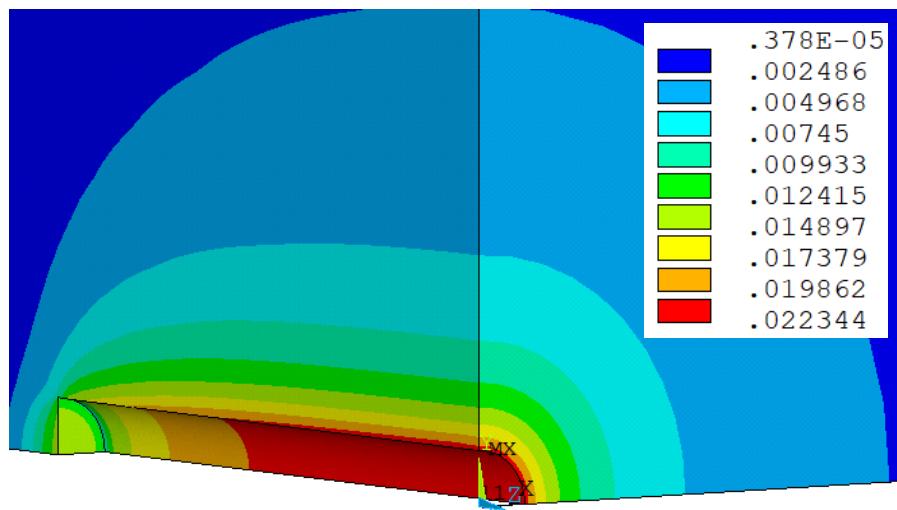


Figura 7.21 – Campo de deslocamentos no longo prazo para o caso elastoplástico-viscoplástico com  $E = 1500$  MPa e  $V_p = 0,1$  m/dia

A Figura 7.22 mostra o campo de deformações plásticas e viscosas equivalentes para o mesmo caso.

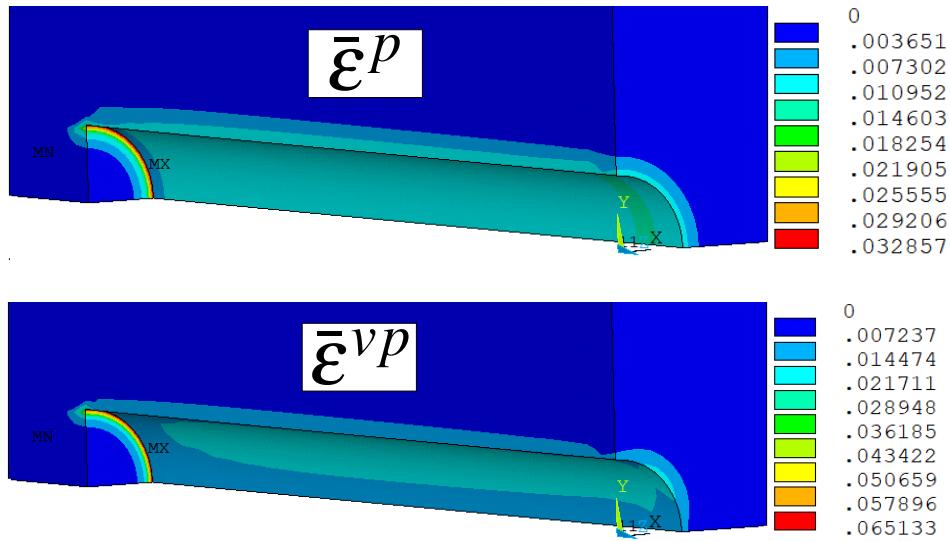


Figura 7.22 – Campo de deformações plásticas e viscosas no longo prazo para o caso elastoplástico-viscoplástico com  $E = 1500$  MPa e  $V_p = 0,1$  m/dia

## 7.5 VERIFICAÇÃO DO MODELO ELASTOPLÁSTICO-VISCOPLÁSTICO COM UMA SOLUÇÃO NUMÉRICA

Piepi (1995) também desenvolveu sua solução numérica em axissimetria para verificar seus resultados analíticos e fazer estudos considerando a colocação do revestimento. Portanto, nesse aspecto, é possível também verificar o modelo desenvolvido com um de seus cálculos numéricos. Dessa forma tendo as propriedades  $E = 1500$  MPa,  $v = 0,498$ ,  $c^i = c^p = c^r = 4\sqrt{3}/2$  MPa,  $c^{vp} = 2\sqrt{3}/2$  MPa,  $\eta = 4 \cdot 10^4$  dia,  $n = 1$ ,  $f_0 = 1$  MPa e  $p_v = p_h = 9$  MPa, considerando um  $E_{rev} = 2968$  MPa,  $d_0 = 2L_p$  e  $V_p = 12,5$  m/dia (PIEPI, 1995, p. 128, 132), tem-se na Figura 7.23 e Figura 7.24 a comparação para o modelo viscoplástico (VP) e elastoplástico-viscoplástico (EPVP), respectivamente.

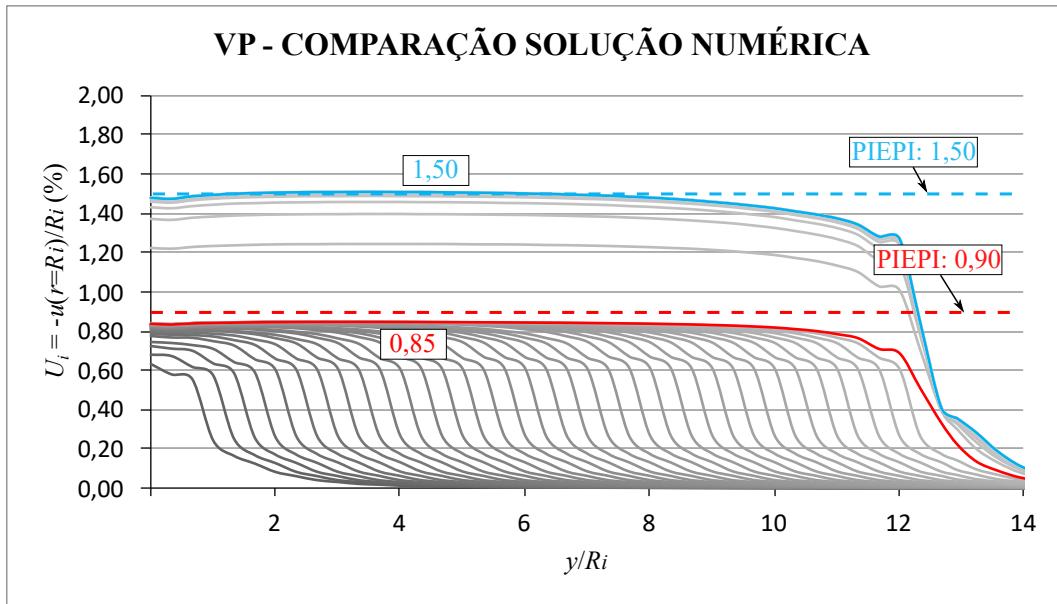


Figura 7.23 – Verificação com a solução de Piepi (1995) do modelo viscoplastico com revestimento

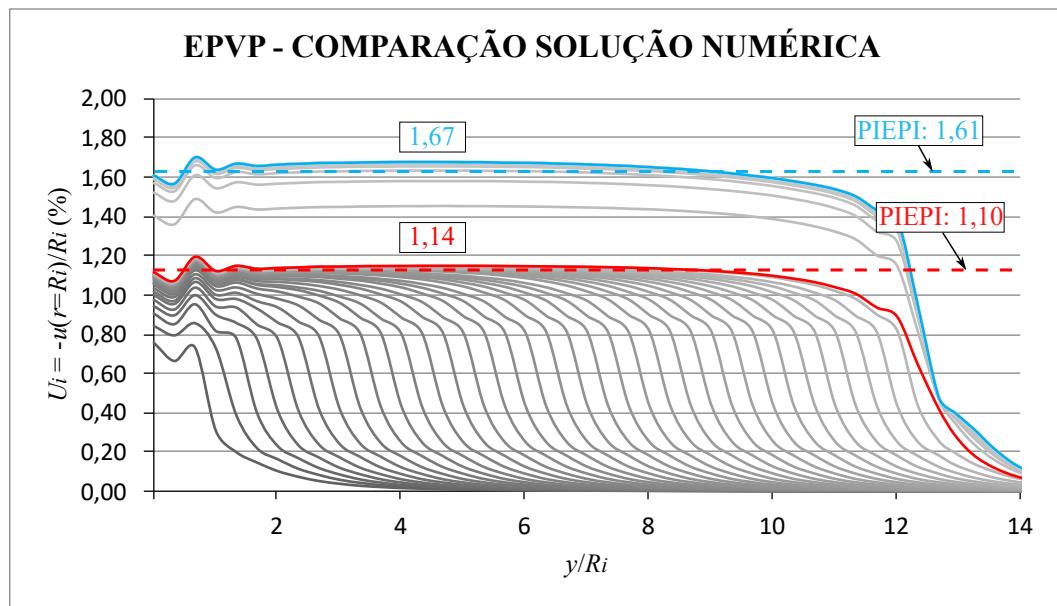


Figura 7.24 – Verificação com a solução de Piepi (1995) do modelo elastoplástico-viscoplástico com revestimento

Pode-se notar que, para essas propriedades, o modelo elastoplástico-viscoplástico possui uma convergência 34% maior, no final da construção do túnel, e 11% maior no longo prazo) em comparação com o modelo viscoplástico.

## 7.6 ANÁLISE CONSIDERANDO AMOLECIMENTO

Como o modelo constitutivo elastoplástico-viscoplástico comporta a característica de endurecimento/amolecimento, nessa seção é apresentada uma pequena análise da influência que se pode ter em considerar esse fenômeno. Para tanto, é utilizado o exemplo anterior em axissimetria com as seguintes propriedades para o maciço:  $E = 1500 \text{ MPa}$ ,  $\nu = 0,498$ ,  $c^{vp} = 3\sqrt{3}/2 \text{ MPa}$ ,  $\eta = 4 \cdot 10^4 \text{ dia}$ ,  $n = 1$ ,  $f_0 = 1 \text{ MPa}$  e  $p_v = p_h = 9 \text{ MPa}$ . Vendo o campo de deformações plásticas equivalentes da Figura 7.22, vamos adotar uma coesão inicial  $c_i = 4\sqrt{3}/2 \text{ MPa}$ , contudo, um amolecimento linear até  $\bar{\varepsilon}_I^p = 0,02$ , para metade da coesão  $c_p = 2\sqrt{3}/2 \text{ MPa}$  (Figura 7.25).



Figura 7.25 – Curva tensão *versus* deformação obtido pelo modelo com amolecimento

A Figura 7.26 mostra a diferença entre os perfis de convergências com amolecimento (C/AMOL) e sem (S/AMOL) para o modelo elastoplástico.

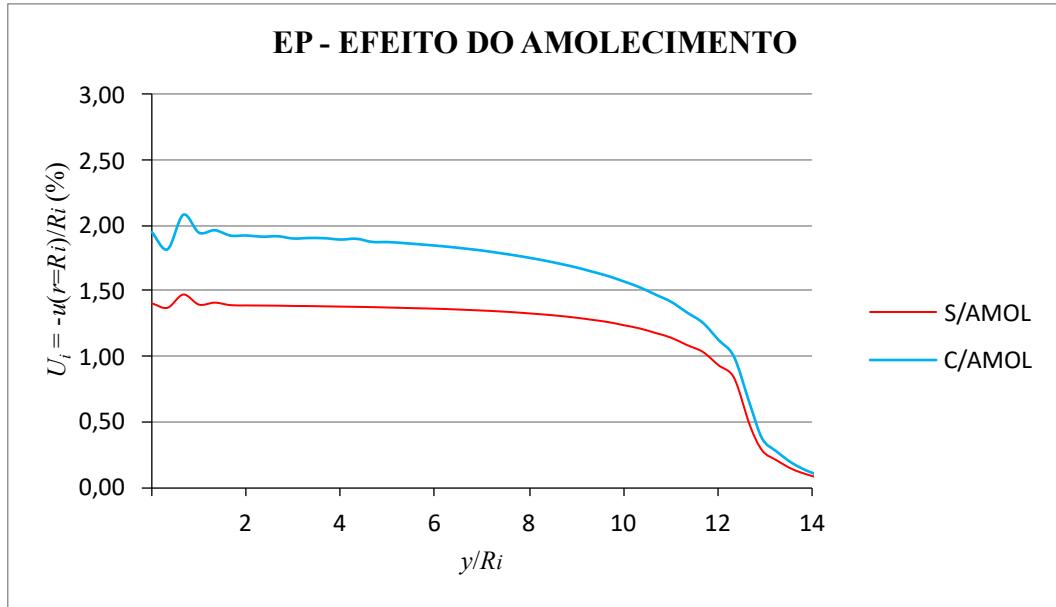


Figura 7.26 – Efeito do amolecimento no perfil de convergências para o caso elastoplástico

A Figura 7.27 mostra a diferença entre os perfis de convergências com e sem amolecimento para o modelo elastoplástico-viscoplástico no final da construção do túnel, ou seja, no curto prazo (CP) e no longo prazo (LP). É adotado uma velocidade  $V_p = 0,1$  m/dia.

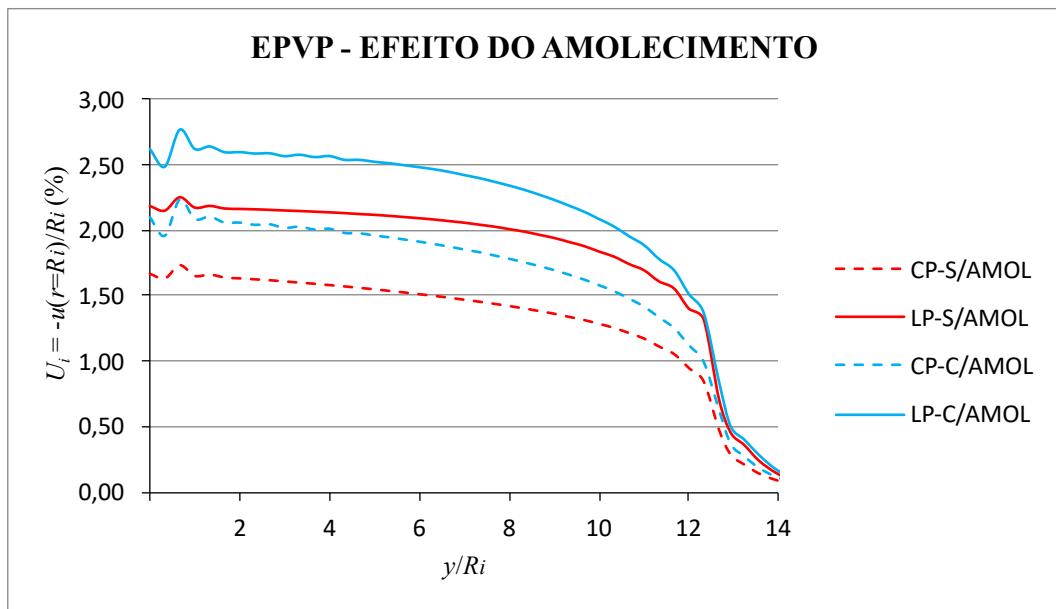


Figura 7.27 – Efeito do amolecimento no perfil de convergências para o caso elastoplástico-viscoplástico

Para o modelo elastoplástico, a redução na coesão pela metade devido ao amolecimento se traduziu em uma convergência 37% maior. Já para o modelo elastoplástico-viscoplástico, no

final da construção do túnel (curto prazo) o amolecimento representou um aumento de 28% e no longo prazo de 24%.

## 7.7 ANÁLISE PARAMÉTRICA DA INFLUÊNCIA DO REVESTIMENTO

Nessa seção é apresentada uma análise paramétrica para averiguar a influência do revestimento sobre o perfil de convergência do modelo elastoplástico-viscoplástico. As propriedades do maciço são as mesmas da análise anterior com  $E = 1500$  MPa. É utilizado o modelo em axissimetria, primeiramente sem revestimento e então com revestimento variando o seu módulo de elasticidade de  $E_{rev} = 3000$  MPa para  $E_{rev} = 30000$  MPa e a distância não suportada de  $d_0 = 0$  e de  $d_0 = 4L_p$ . A Figura 7.28 e Figura 7.29 mostram os resultados considerando  $d_0 = 0$  e a Figura 7.30 e Figura 7.31 considerando  $d_0 = 4L_p$ . A convergência ao equilíbrio é medida em  $y/R_i = 6$ .

Quando a rigidez do revestimento é alta o modelo (VP) se aproxima do (EL). Isso ocorre, pois as deformações viscosas do modelo viscoplástico são resistidas pelo revestimento e impedidas de ocorrer. Já o modelo (EPVP) se aproxima do (EP). Isso, pois durante a escavação e colocação do revestimento, alguma plastificação ocorre, mas as deformações viscosas do modelo (EPVP) são resistidas pelo revestimento.

Comparando o modelo elastoplástico-viscoplástico com o modelo viscoplástico, no final da construção, sem revestimento, o primeiro teve uma convergência 33% maior. Com revestimento aplicado a  $d_0 = 0$  uma convergência entre 17% e 20% e para  $d_0 = 4L_p$  entre 25% a 28% maior. No longo prazo, sem revestimento, o primeiro teve, uma convergência 54% maior. Com revestimento aplicado a  $d_0 = 0$  uma convergência entre 17% e 23% e para  $d_0 = 4L_p$  entre 26% a 30% maior. Isso é uma grande diferença com relação a modelos que procuram estimar a convergência no longo prazo, mas não consideram a plastificação do maciço no comportamento instantâneo.

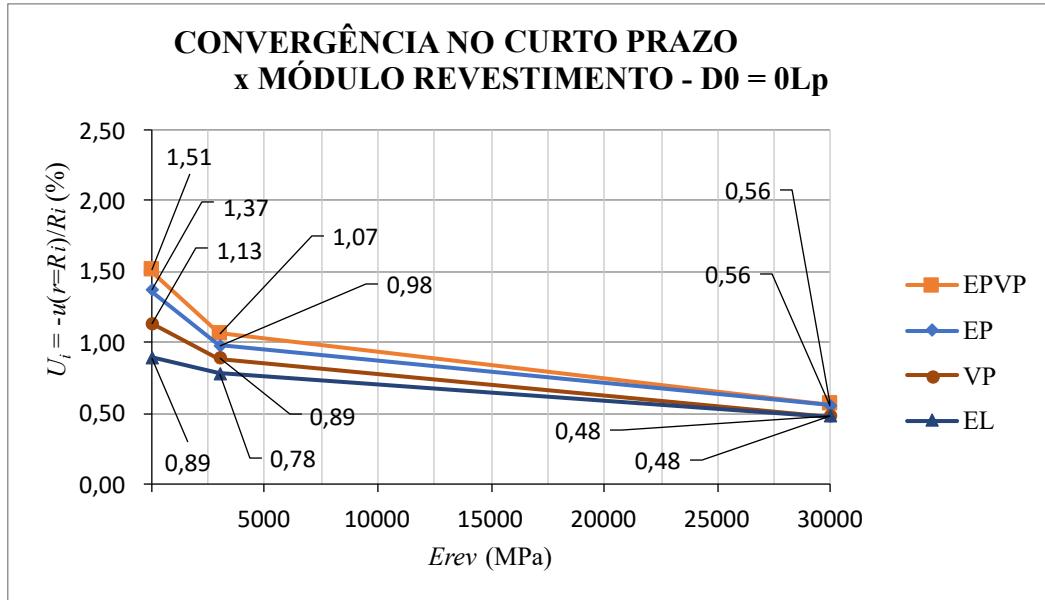


Figura 7.28 – Convergência no final da construção *versus* módulo de elasticidade do revestimento para uma distância não revestida  $d_0 = 0$

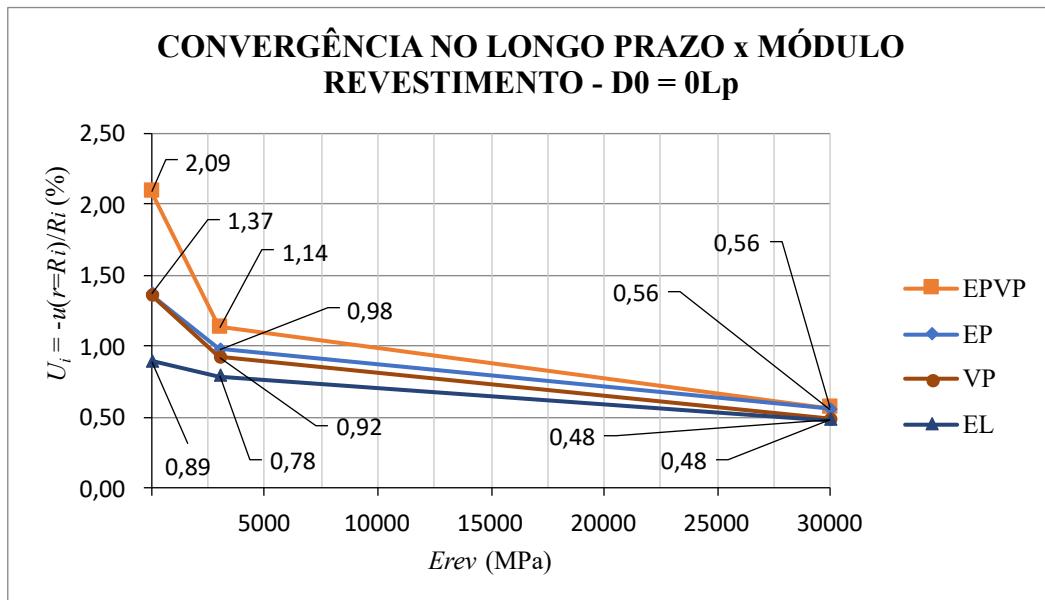


Figura 7.29 – Convergência no longo prazo *versus* módulo de elasticidade do revestimento para uma distância não revestida  $d_0 = 0$

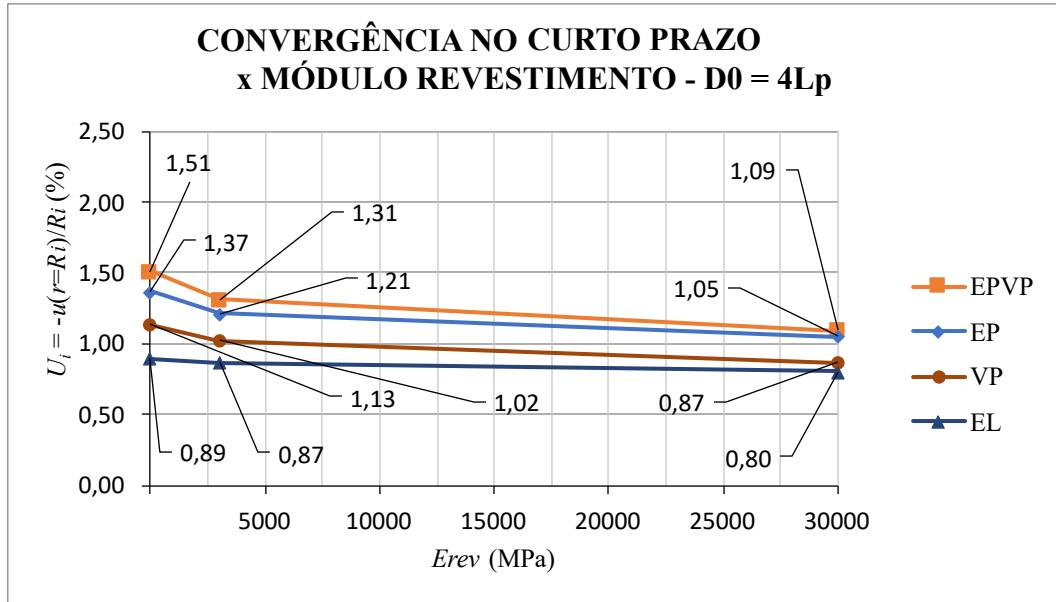


Figura 7.30 – Convergência no final da construção *versus* módulo de elasticidade do revestimento para uma distância não revestida  $d_0 = 4L_p$

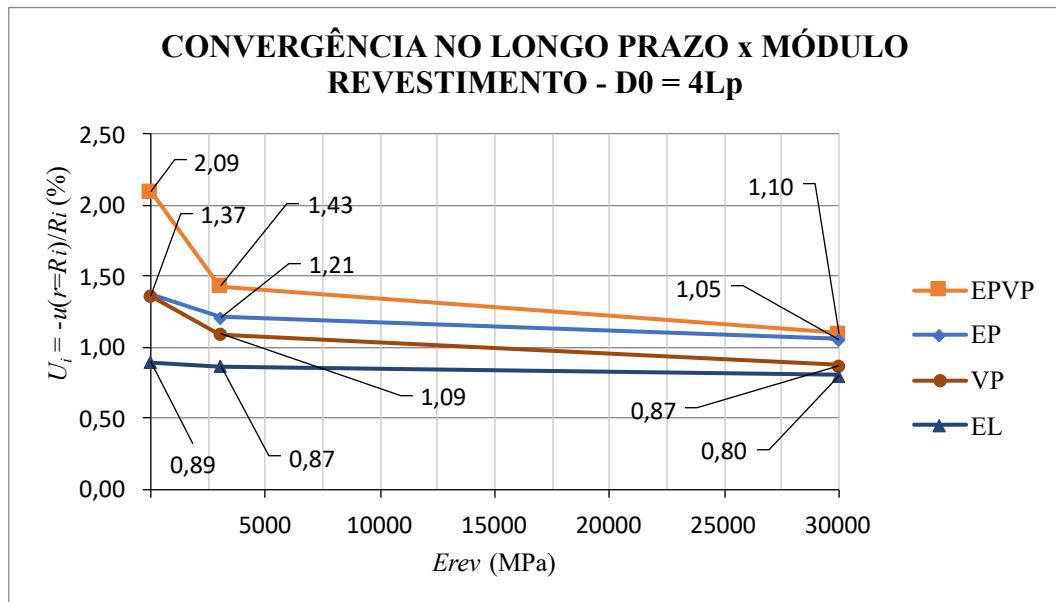


Figura 7.31 – Convergência no longo prazo *versus* módulo de elasticidade do revestimento para uma distância não revestida  $d_0 = 4L_p$

## 7.8 ANÁLISE PARAMÉTRICA CONSIDERANDO UMA SEÇÃO ELÍPTICA

Uma vez que o modelo constitutivo acoplado (EPVP) está generalizado para o caso tridimensional é interessante fazer uma análise paramétrica considerando algum aspecto que não pode ser analisado com o modelo axissimétrico. O aspecto escolhido nessa análise foi a razão entre o raio horizontal e vertical. Dessa forma, foram consideradas duas razões de aspecto  $R_{hi}/R_{vi}$ : 1, ou seja, circular e 2. Além disso, os cálculos foram executados sem revestimento (S/REV) e com revestimento (C/REV) afastado de  $d_0 = 2L_p$  da face de escavação. As propriedades do maciço são:  $E = 1500$  MPa,  $\nu = 0,498$ ,  $c^i = c^p = c^r = 4\sqrt{3}/2$  MPa,  $c^{vp} = 2\sqrt{3}/2$  MPa,  $\eta = 4 \cdot 10^4$  dia,  $n = 1$ ,  $f_0 = 1$  MPa e  $p_v = p_h = 9$  MPa. E do revestimento:  $E_{rev} = 2968$  MPa,  $\nu_{rev} = 0,3$  com uma velocidade de escavação e colocação de  $V_p = 1$  m/dia. Para evidenciar a diferença que o modelo acoplado pode representar os resultados foram comparados com modelo viscoplastástico (VP) com uma coesão de  $2\sqrt{3}/2$  MPa.

Como a seção transversal é elíptica as convergências são medidas ao longo do maior e menor raio da seção, portanto, tem-se  $U_{yi} = -u_y(r = R_{vi})/R_{vi}$  e  $U_{xi} = -u_x(r = R_{hi})/R_{hi}$ . A Figura 7.32 e Figura 7.33 mostram as convergências no equilíbrio na direção  $x$  para ambos os modelos (VP) e (EPVP), no curto prazo (CP), ou seja, no final da construção do túnel e no longo prazo (LP) sem revestimento e com revestimento, respectivamente.

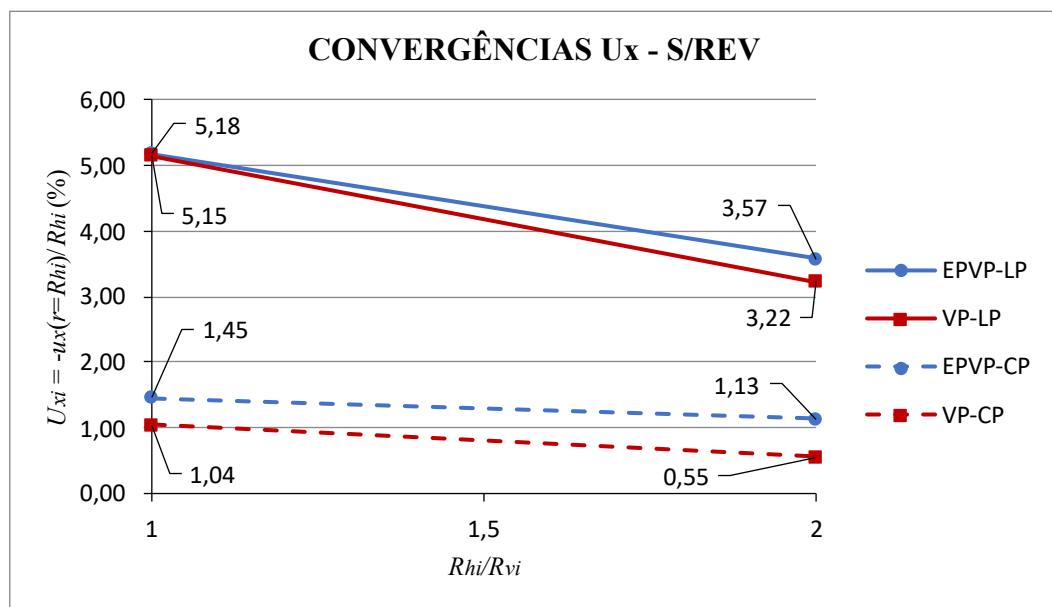


Figura 7.32 – Convergências na direção  $x$  versus razão de aspecto da seção sem revestimento

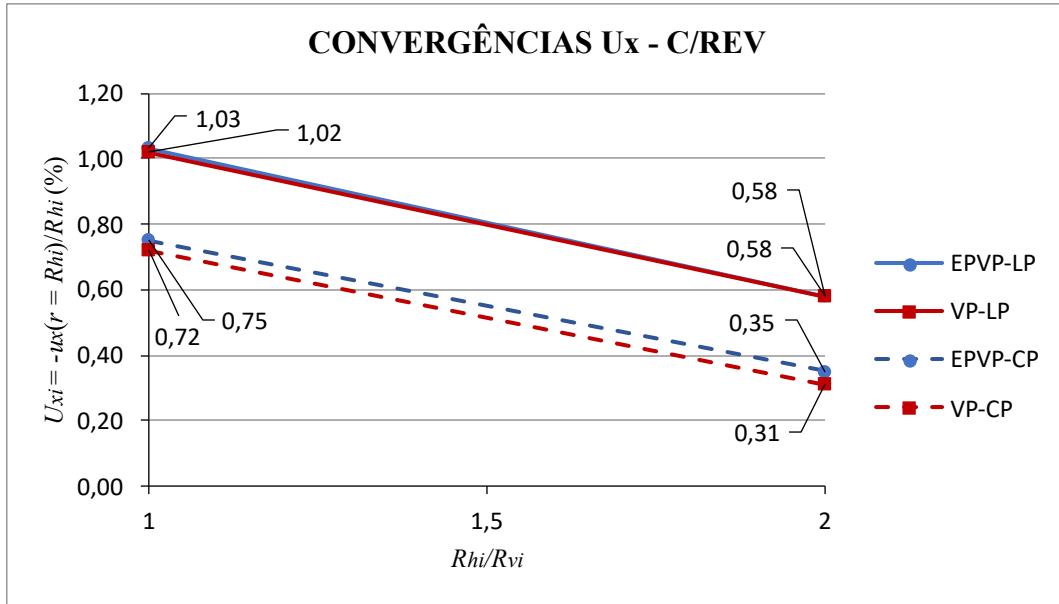


Figura 7.33 – Convergências na direção  $x$  versus razão de aspecto da seção com revestimento

De uma forma geral, quando se aumenta a razão de aspecto os deslocamentos  $u_x$  aumentam. Contudo, a convergência diminui, pois, está sendo dividida pelo raio horizontal do túnel. De qualquer forma, pode-se ver, ao comparar, a Figura 7.32 com a Figura 7.33 a influência significativa do revestimento nas convergências. Sem revestimento uma maior razão de aspecto leva a maiores convergências do modelo (EPVP) e isso é esperado uma vez que nessa borda, contígua ao eixo  $x$ , tem-se as maiores plastificações. O revestimento, contudo, bloqueia a maior parte dessas deformações plásticas, fazendo com que tenha apenas as deformações viscosas e dessa forma, ambas as curvas (VP) e (EPVP) se aproximam no longo prazo.

A Figura 7.34 e Figura 7.35 mostram as convergências ao equilíbrio para a direção  $y$ . Nesse caso, no longo prazo, não há diferença entre os modelos. Isso ocorre, pois, nessa direção, apesar de ter as maiores convergências, não há plastificações tão significativas conforme a razão de aspecto aumenta. Isso faz com que ambas as curvas deem o mesmo resultado no longo prazo, tanto sem quanto com revestimento. Isso pode ser verificado pelo nível de plastificação que ocorre na seção. A Figura 7.36 mostra o campo de deformações inelásticas equivalentes comparando o modelo (VP) e (EPVP), sem revestimento, com razão de aspecto 2 e no longo prazo.

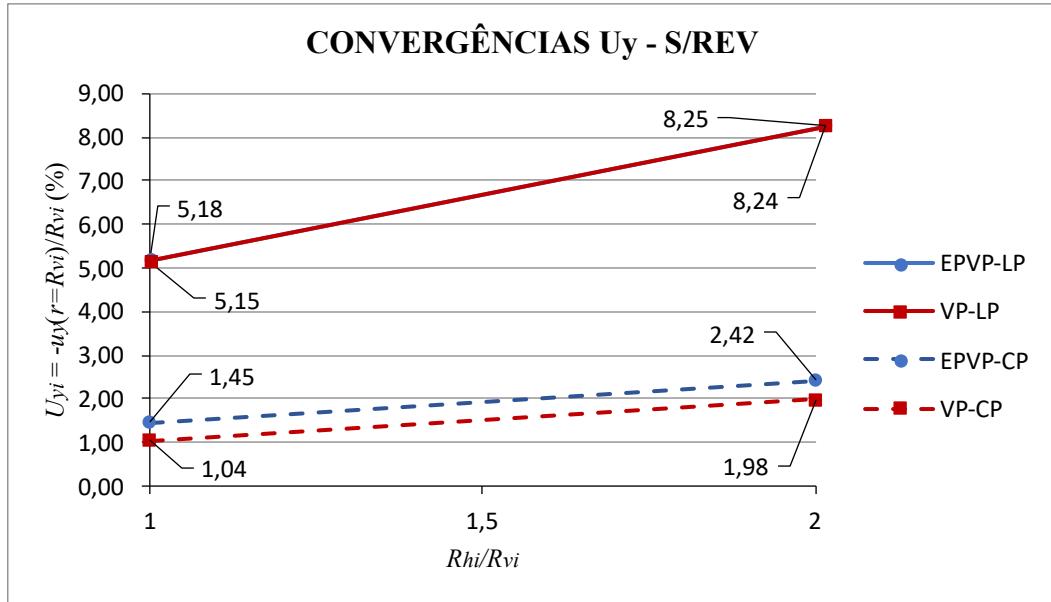


Figura 7.34 – Convergências na direção  $y$  versus razão de aspecto da seção sem revestimento

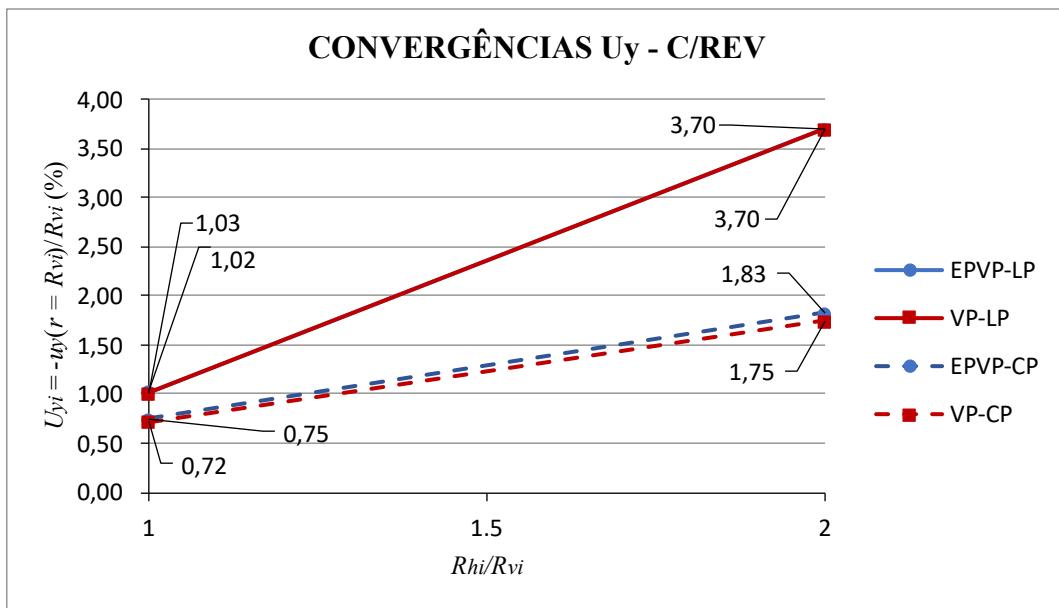


Figura 7.35 – Convergências na direção  $y$  versus razão de aspecto da seção com revestimento

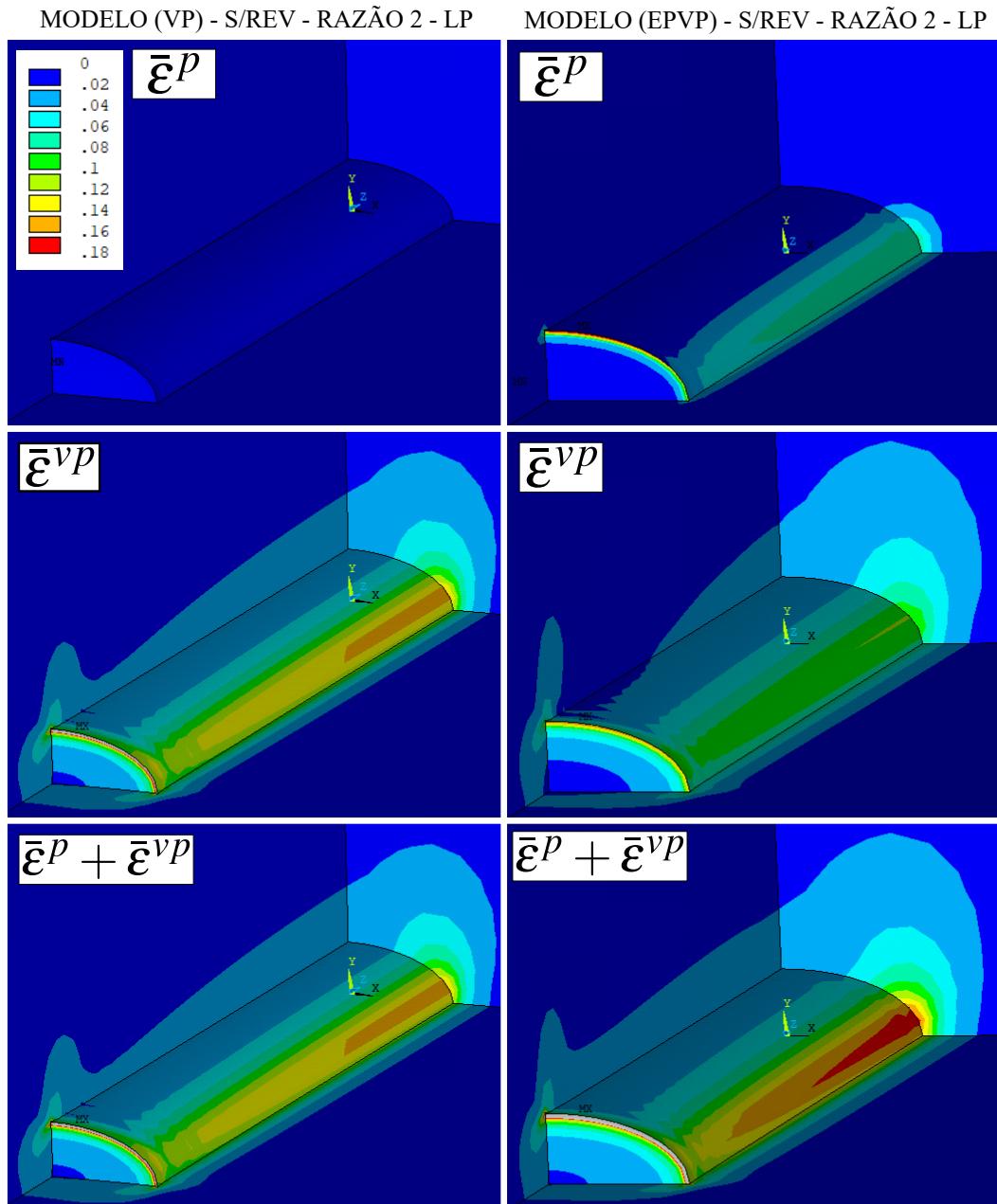


Figura 7.36 – Campo de deformações equivalentes para o modelo (VP) e (EPVP), sem revestimento, com razão de aspecto 2 e no longo prazo

Como pode-se ver a magnitude das deformações inelásticas na direção  $y$  para ambos os modelos são muito próximas. Portanto, a diferença entre esses modelos vai depender muito do nível de plastificação. Quanto maior, maior as diferenças.

A Tabela 7.1 resume a razão entre as convergências elastoplásticas-viscoplástica e viscoplástica.

Tabela 7.1 – Razão entre as convergências ao equilíbrio do modelo (EPVP) com (VP)

	<b>EPVP / VP</b>			
	<b>CURTO PRAZO</b>		<b>LONGO PRAZO</b>	
	<b>Ux</b>	<b>Uy</b>	<b>Ux</b>	<b>Uy</b>
S/REV-R1	1,39	1,39	1,01	1,01
S/REV-R2	2,05	1,22	1,11	1,00
C/REV-R1	1,04	1,04	1,01	1,01
C/REV-R2	1,13	1,05	1,00	1,00

Como pode-se ver as maiores diferenças ocorrem sem a presença do revestimento. Mas isso porque, com a rigidez do revestimento, houve uma contenção das deformações plásticas. Sem revestimento, para razão de aspecto 1, o modelo (EPVP) causa um aumento de 39% na convergência. Sem revestimento, para a razão de aspecto 2, na direção  $x$ , tem-se um aumento de 105% (curto prazo) e 11% (no longo prazo). E na direção  $y$  um aumento no curto prazo de 22%.

A Tabela 7.2 mostra a razão entre as convergências no equilíbrio de longo prazo e curto prazo para ambos os modelos em ambas direções.

Tabela 7.2 – Razão entre as convergências no equilíbrio de longo prazo pelo curto prazo do modelo (VP) e (EPVP)

	<b>LONGO PRAZO / CURTO PRAZO</b>			
	<b>VP</b>		<b>EPVP</b>	
	<b>Ux</b>	<b>Uy</b>	<b>Ux</b>	<b>Uy</b>
S/R-R1	4,95	4,95	3,57	1,00
S/R-R2	5,85	4,17	3,16	2,31
C/R-R1	1,42	1,42	1,37	1,37
C/R-R2	1,87	2,11	1,66	2,02

Pode-se ver que nesse caso, o modelo (EPVP) apresentou menores relações. Isso é esperado, uma vez que, algum nível de plastificação ocorre no curto prazo.

## 8 CONCLUSÕES

O campo de deformações e tensões ao redor da cavidade de um túnel profundo depende de diversos fatores inter-relacionados, tais como, a profundidade, a geometria da seção, a anisotropia das tensões *in situ*, a heterogeneidade do maciço, o processo construtivo e a interação com o revestimento. Somado a essa complexidade um dos maiores desafios é modelar o comportamento reológico do maciço. Os túneis podem apresentar tanto deformações instantâneas quanto diferidas ao longo do tempo. Além disso, o problema da interação entre o maciço e o revestimento é um problema essencialmente tridimensional e fortemente acoplado. Apenas casos em que o túnel profundo admite simetria cilíndrica (por exemplo, túneis de seção circular, meios isotrópicos e estado de tensões homogêneas) o cálculo exato por via numérica em axissimetria fica de um tamanho razoável, rápido e de fácil utilização. Contudo, em outras situações, é necessário ter disponível um modelo tridimensional.

Em vista disso, o objetivo principal desse trabalho foi justamente o desenvolvimento de uma solução para o problema constitutivo elastoplástico-viscoplástico que pudesse abordar problemas de túneis de uma forma geral em estado plano de deformações, em axissimetria e tridimensionais. Portanto, foi formulado e implementado em um *software* de elementos finitos (ANSYS 2021R1) uma relação constitutiva capaz de abordar, dentro dessa generalidade, as deformações instantâneas (sejam elásticas ou elastoplásticas) induzidas pelo processo construtivo com as deformações viscosas que ocorrem ao longo do tempo. Os esquemas de integração numérica que resolvem esse problema constitutivo estão descritos na seção 6.5 e se mostraram adequados para a resolução da lei constitutiva elastoplástica-viscoplástica. Verificações com soluções analíticas e outro *software* (GEOMEC91) demonstraram que esse modelo, bastante geral, consegue reproduzir cada comportamento em separado (elástico, viscoplástico e elastoplástico). O modelo constitutivo também conseguiu reproduzir com bastante precisão a solução analítica de Piepi (1995) para um túnel em um meio elastoplástico-viscoplástico com critério de Tresca.

O modelo também foi capaz de simular o fenômeno de amolecimento/endurecimento característico dos maciços frágeis e dúcteis. Em elastoplasticidade, adotando as mesmas propriedades de Piepi (1995), uma redução na coesão pela metade devido ao amolecimento conduziu a uma convergência 37% maior. E para o modelo elastoplástico-viscoplástico, o mesmo amolecimento representou uma convergência 28% maior, no final da construção do túnel, e 24% maior no longo prazo.

Foram também feitas algumas análises paramétricas para mostrar as diferenças do modelo

acoplado em relação ao modelo viscoplástico comumente usado para análises de longo prazo. Utilizando novamente as propriedades de Piepi (1995), sem a presença do revestimento, foram encontradas diferenças significativas de 30%, no final da construção do túnel, e 50%, no longo prazo. Com a presença do revestimento a diferença foi de 17% a 23% para uma distância não suportada de  $d_0 = 0$  e de 26% a 30% para uma distância não suportada  $d_0 = 4L_p$ . Essa diferença ocorre pois o modelo constitutivo acoplado considera a plastificação do maciço nas deformações instantâneas, enquanto que o modelo viscoplástico considera essas deformações como elásticas.

Uma vez que o modelo constitutivo foi generalizado para o caso tridimensional, foi feita uma análise paramétrica considerando a variação da razão de aspecto de uma seção transversal elíptica. Como a seção é elíptica as convergências são medidas ao longo do maior e menor raio da seção. De uma forma geral, quando se aumenta a razão de aspecto os deslocamentos aumentam. Sem revestimento, uma razão de aspecto de 2, levou a maiores convergências no modelo elastoplástico-viscoplástico na direção  $x$  (direção que se tem as maiores plastificações) em relação ao modelo viscoplástico. Foi encontrada uma convergência 2,05 vezes maior no curto prazo. Na direção  $y$  (onde a plastificação não é tão intensa) encontrou-se uma convergência 1,22 vezes maior do que o modelo viscoplástico no curto prazo. No longo prazo, para ambas as direções, os valores ficaram equivalentes dado o nível de plastificação próximo em ambos os modelos nessa direção. Contudo, foi também constatado que o revestimento pode bloquear as deformações plásticas instantâneas, fazendo com que os modelos não apresentem diferenças tão significativas.

Frente a essas análises, foi constatada a relevância do modelo constitutivo acoplado frente ao modelo viscoplástico e é importante que esse modelo seja estudado com mais profundidade e ampliado. Portanto, como sugestões para serem adicionadas em trabalhos futuros, pode-se citar:

- a) fazer mais validações com estudos experimentais;
- b) fazer mais estudos paramétricos para compreender melhor o comportamento desse modelo constitutivo acoplado, como, por exemplo, considerando a anisotropia das tensões iniciais;
- c) adicionar outras superfícies de plasticidade e viscoplasticidade além da superfície de Drucker-Prager. Apesar dessa superfície ser bastante geral e incluir a dependência da pressão hidrostática, há superfícies especializadas em captar aspectos próprios da geomecânica de túneis;
- d) adicionar uma lei de amolecimento e endurecimento que considere a variação do ângulo de atrito durante a deformação plástica;
- e) aplicar esse modelo constitutivo em domínios mais complexos como o caso de túneis

- gêmeos e encontro de galerias;
- f) fazer um estudo considerando revestimentos que possuem comportamento diferido, como o caso do concreto que sofre fluênciā e retração;
  - g) construir curvas de convergências para o modelo elastoplástico-viscoplástico e propor ajustes no método NIM;
  - h) generalizar a solução para considerar grandes deformações.

## REFERÊNCIAS

- ALEJANO, L. R.; RODRIGUEZ-DONO, A.; ALONSO, E.; FDEZ.-MANÍN, G. Ground reaction curves for tunnels excavated in different quality rock masses showing several types of post-failure behaviour. **Tunnelling and Underground Space Technology**, Pergamon, v. 24, n. 6, p. 689–705, nov 2009. ISSN 08867798. Disponível em: <<https://www.sciencedirect.com/science/article/pii/S0886779809000686>>. Acesso em: 24 mar. 2021. Citado na página 68.
- ANSYS Inc. **Structural Analysis Guide**. [S.l.], 2018. 454 p. Citado na página 120.
- \_\_\_\_\_. **Theory reference guide**. [S.l.], 2018. 904 p. Citado 8 vezes nas páginas 13, 14, 116, 117, 119, 121, 122 e 123.
- ARMAND, G.; NOIRET, A.; ZGHONDI, J.; SEYEDI, D. M. Short- and long-term behaviors of drifts in the Callovo-Oxfordian claystone at the Meuse/Haute-Marne Underground Research Laboratory. **Journal of Rock Mechanics and Geotechnical Engineering**, Chinese Academy of Sciences, v. 5, n. 3, p. 221–230, jun 2013. ISSN 16747755. Disponível em: <<https://www.sciencedirect.com/science/article/pii/S1674775513000395>>. Acesso em: 24 mar. 2021. Citado na página 63.
- AUGARDE, C. E.; BURD, H. J. Three-dimensional finite element analysis of lined tunnels. **International Journal for Numerical and Analytical Methods in Geomechanics**, v. 25, n. 3, p. 243–262, 2001. ISSN 03639061. Disponível em: <<https://onlinelibrary.wiley.com/doi/10.1002/nag.127>>. Acesso em: 15 mar. 2021. Citado na página 55.
- BARLA, G.; BONINI, M.; DEBERNARDI, D. Time Dependent Deformations in Squeezing Tunnels. **The 12th International Conference of International Association for Computer Methods and Advances in Geomechanics (IACMAG)**, p. 1–6, 2008. Disponível em: <[https://www.researchgate.net/publication/237746659\\_Time\\_Dependent\\_Deformations\\_in\\_Squeezing\\_Tunnels](https://www.researchgate.net/publication/237746659_Time_Dependent_Deformations_in_Squeezing_Tunnels)>. Acesso em: 31 mar. 2021. Citado na página 74.
- \_\_\_\_\_. Time dependent deformations in squeezing tunnels. **International Journal of Geoengineering Case Histories**, v. 2, n. 1, p. 40–65, 2010. Disponível em: <<http://dx.doi.org/10.4417/IJGCH-02-01-03>>. Acesso em: 09 mar. 2021. Citado 3 vezes nas páginas 9, 37 e 74.
- BELYTSCHKO, T.; LIU, W. K.; MORAN, B. **Nonlinear Finite Elements for continua and Structures**. 1. ed.. ed. John Wiley and Sons, 2000. 1–650 p. ISBN 0471987743. Disponível em: <<http://library.lol/main/787C6236E61EE8A85FECD4240F8CE6C9>>. Citado 5 vezes nas páginas 101, 126, 127, 130 e 131.
- BENAMAR, I. **Etude des effets différenciés dans les tunnels profonds**. 205 p. Tese (Doutorado) — Ecole Nationale des Ponts et Chaussées, 1996. Disponível em: <<https://pastel.archives-ouvertes.fr/tel-00523617>>. Acesso em: 19 abr. 2021. Citado 2 vezes nas páginas 11 e 78.

BÉREST, P.; NGUYEN, D. M. modèle viscoplastique pour le comportement d'un tunnel revêtu. **Revue Française de Géotechnique**, p. 19–25, 1983. Disponível em: <<https://www.geotechnique-journal.org/articles/geotech/pdf/1983/03/geotech1983024p19.pdf>>. Acesso em: 29 mar. 2021. Citado na página 72.

BERNAUD, D. **Tunnels profonds dans les milieux viscoplastiques: approches expérimentale et numérique**. 354 p. Tese (Doutorado) — Ecole Nationale des Ponts et Chaussées, 1991. Disponível em: <<https://pastel.archives-ouvertes.fr/tel-00529719>>. Acesso em: 11 mar. 2021. Citado 12 vezes nas páginas 12, 13, 39, 55, 72, 84, 85, 86, 98, 107, 131 e 151.

BERNAUD, D.; BENAMAR, I.; ROUSSET, G. La ((nouvelle méthode implicite)) pour le calcul des tunnels dans les milieux élastoplastiques et viscoplastiques. **Revue Française de Géotechnique**, n. 68, p. 3–19, 1994. Disponível em: <<https://www.geotechnique-journal.org/articles/geotech/pdf/1994/03/geotech1994068p3.pdf>>. Acesso em: 26 abr. 2021. Citado 4 vezes nas páginas 12, 86, 88 e 89.

BERNAUD, D.; MAGHOUS, S.; BUHAN, P. de; COUTO, E. A numerical approach for design of bolt-supported tunnels regarded as homogenized structures. **Tunnelling and Underground Space Technology**, Elsevier Ltd, v. 24, n. 5, p. 533–546, 2009. ISSN 08867798. Disponível em: <<http://dx.doi.org/10.1016/j.tust.2009.02.002>>. Acesso em: 18 mar. 2021. Citado na página 55.

BERNAUD, D.; QUEVEDO, F. P. Analytical solution of deep tunnels in a strain-hardening elasto-plastic rock mass. **Latin American Journal of Solids and Structures**, Associação Brasileira de Ciências Mecânicas, v. 17, n. 6, p. 1–21, sep 2020. ISSN 1679-7817. Disponível em: <<http://www.scielo.br/j/lajss/a/bwtxFY5KpThZZRQhtKX3DZn/?lang=en>>. Acesso em: 07 nov. 2021. Citado 2 vezes nas páginas 14 e 149.

BERNAUD, D.; ROUSSET, G. La « nouvelle méthode implicite » pour l'étude du dimensionnement des tunnels. **Revue Française de Géotechnique**, n. 60, p. 5–26, 1992. Disponível em: <<https://www.geotech-fr.org/sites/default/files/rfg/article/60-1.pdf>>. Acesso em: 27 abr. 2021. Citado 4 vezes nas páginas 12, 87, 88 e 89.

BIOT, M. A. General Theory of Three-Dimensional Consolidation. **Journal of Applied Physics**, v. 12, p. 164, oct 1941. Disponível em: <<https://doi.org/10.1063/1.1712886>>. Acesso em: 30 mar. 2021. Citado na página 74.

BOIDY, E.; BOUVARD, A.; PELLET, F. Back analysis of time-dependent behaviour of a test gallery in claystone. **Tunnelling and Underground Space Technology**, v. 17, n. 4, p. 415–424, oct 2002. ISSN 08867798. Disponível em: <<https://linkinghub.elsevier.com/retrieve/pii/S0886779802000664>>. Acesso em: 29 mar. 2021. Citado na página 72.

BONINI, M.; DEBERNARDI, D.; BARLA, M.; BARLA, G. The Mechanical Behaviour of Clay Shales and Implications on the Design of Tunnels. **Rock Mechanics and Rock Engineering**, v. 42, n. 2, p. 361–388, apr 2009. ISSN 0723-2632. Disponível em: <<http://link.springer.com/10.1007/s00603-007-0147-6>>. Acesso em: 31 mar. 2021. Citado na página 75.

BRADY, B. H. G.; BROWN, E. T. **Rock Mechanics for underground mining**. 3 ed.. ed. Kluwer Academic, 2006. 628 p. Disponível em: <<http://libgen.rs/book/index.php?md5=06018329FE47B8115831FB3A5A9D4044>>. Acesso em: 21 abr. 2021. Citado na página 80.

BROWN, E. T.; BRAY, J. W.; LADANYI, B.; HOEK, E. Ground Response Curves for Rock Tunnels. **Journal of Geotechnical Engineering**, v. 109, n. 1, p. 15–39, 1983. ISSN 0733-9410. Disponível em: <[https://sci-hub.do/10.1061/\(ASCE\)0733-9410\(1983\)109:1\(15\)](https://sci-hub.do/10.1061/(ASCE)0733-9410(1983)109:1(15))>. Acesso em: 24 mar. 2021. Citado 2 vezes nas páginas 68 e 87.

BROX, D. **Practical Guide to Rock Tunneling**. London: CRC Press Taylor e Francis Group, 2017. 274 p. ISBN 9781315210117. Citado na página 48.

BURD, H. J.; HOULSBY, G. T.; AUGARDE, C. E.; LIU, G. Modelling tunnellmg-induced settlement of masonry buildings. **Proceedings of the Institution of Civil Engineers: Geotechnical Engineering**, v. 143, n. 1, p. 17–29, 2000. ISSN 13532618. Disponível em: <<https://www.icevirtuallibrary.com/doi/full/10.1680/geng.2000.143.1.17>>. Acesso em: 15 mar. 2021. Citado na página 55.

CAMBOU, B.; JAFARI, K. Constitutive model for granular materials based on two plasticity mechanisms. In: SAADA, A.; BIANCHINI, G. (Ed.). **International Workshop on Constitutive Equations for Granular non-Cohesive soils**. [S.l.]: CRC Press, 1987. p. 149–167. Citado na página 74.

CARRANZA-TORRES, C. Elasto-plastic solution of tunnel problems using the generalized form of the Hoek-Brown failure criterion. **International Journal of Rock Mechanics and Mining Sciences**, Elsevier BV, v. 41, n. SUPPL. 1, p. 1–11, may 2004. ISSN 13651609. Disponível em: <<https://www.sciencedirect.com/science/article/pii/S1365160904001583>>. Acesso em: 24 mar. 2021. Citado na página 68.

CARRANZA-TORRES, C.; FAIRHURST, C. The elasto-plastic response of underground excavations in rock masses that satisfy the Hoek-Brown failure criterion. **International Journal of Rock Mechanics and Mining Sciences**, Elsevier Science Ltd, v. 36, n. 6, p. 777–809, sep 1999. ISSN 01489062. Disponível em: <<https://www.sciencedirect.com/science/article/pii/S0148906299000479>>. Acesso em: 24 mar. 2021. Citado na página 68.

CHAKERI, H.; HASANPOUR, R.; HINDISTAN, M. A.; ÜNVER, B. Analysis of interaction between tunnels in soft ground by 3D numerical modeling. **Bulletin of Engineering Geology and the Environment**, v. 70, n. 3, p. 439–448, 2011. ISSN 14359529. Disponível em: <<https://link.springer.com/article/10.1007/s10064-010-0333-8>>. Acesso em: 15 mar. 2021. Citado na página 55.

CHAN, A.; OU, J. Three-Dimensional Numerical Analysis of a Dynamic Structure, Saturated Soil and Pore Fluid Interaction Problem. In: PAPADRAKAKIS, M.; TOPPING, B. H. V. (Ed.). **Trends in Engineering Computational Technology**. Stirlingshire: Saxe-Coburg Publications, 2008. cap. 17, p. 335–353. Disponível em: <<https://www.ctresources.info/csets/chapter.html?id=18>>. Citado 2 vezes nas páginas 55 e 56.

CHAPMAN, D.; METJE, N.; STÄRK, A. **Introduction to tunnel construction**. 2. ed. Boca Raton: CRC Press Taylor e Francis Group, 2018. ISBN 9781315120164. Citado 5 vezes nas páginas 9, 48, 49, 50 e 81.

CHEN, W. F.; HAN, D. J. **Plasticity for Structural Engineers**. New York: Springer-Verlag, 1988. 609 p. ISBN 978-1-4612-8380-5. Disponível em: <<http://libgen.rs/book/index.php?md5=1BD099ECCC8CD644C33488ED5B6EBA70>>. Acesso em: 09 jun. 2021. Citado 6 vezes nas páginas 13, 14, 96, 100, 104 e 122.

CORBETTA, F. **Nouvelles méthodes d'étude des tunnels profonds: calculs analytiques et numériques.** Tese (Doutorado) — École Nationale Supérieure des Mines, 1990. Disponível em: <<https://www.theses.fr/1990ENMP0227>>. Citado 3 vezes nas páginas 68, 87 e 150.

CORMEAU, I. Numerical stability in quasi-static elasto-visco-plasticity. **International Journal for Numerical Methods in Engineering**, v. 9, n. 1, p. 109–127, 1975. ISSN 0029-5981. Disponível em: <<https://libgen.is/scimag/10.1002%2Fnme.1620090110>>. Acesso em: 26 jun. 2021. Citado 2 vezes nas páginas 130 e 132.

COSTA, A. M. da. **Uma aplicação de métodos computacionais e princípios de mecânica das rochas no projeto e análise de escavações destinadas à mineração subterrânea.** 1488 p. Tese (Doutorado), 1984. Disponível em: <<http://www.coc.ufrj.br/pt/teses-de-doutorado/128-1984/718-alvaro-maia-da-costa>>. Acesso em: 25 mar. 2021. Citado 2 vezes nas páginas 11 e 69.

COUTO, E. C. **Um modelo tridimensional para túneis escavados em rocha reforçada por tirantes passivos.** 141 p. Tese (Doutorado) — Universidade Federal do Rio Grande do Sul, Porto Alegre, 2011. Disponível em: <<https://www.lume.ufrgs.br/bitstream/handle/10183/38962/000822209.pdf?...1>>. Acesso em: 18 mar. 2021. Citado 5 vezes nas páginas 10, 12, 55, 59 e 84.

CRISTESCU, N. Viscoplastic creep of rocks around horizontal tunnels. **International Journal of Rock Mechanics and Mining Sciences and**, Pergamon, v. 22, n. 6, p. 453–459, dec 1985. ISSN 01489062. Disponível em: <[https://doi.org/10.1016/0148-9062\(85\)90009-9](https://doi.org/10.1016/0148-9062(85)90009-9)>. Acesso em: 29 mar. 2021. Citado na página 72.

CRISTESCU, N. D. Viscoplastic creep of rocks around a lined tunnel. **International Journal of Plasticity**, v. 4, n. 4, p. 393–412, 1988. ISSN 07496419. Disponível em: <[https://doi.org/10.1016/0749-6419\(88\)90026-5](https://doi.org/10.1016/0749-6419(88)90026-5)>. Acesso em: 25 mar. 2021. Citado na página 72.

CRISTESCU, N. D.; HUNSCHE, U. **Time Effects in Rock Mechanics.** New York: Jhon Wiley and Sons, 1998. 336 p. ISBN 0-471-95517-5. Disponível em: <<http://libgen.rs/book/index.php?md5=B7EFB419F5A06D40B550ADD2E0F4818>>. Acesso em: 25 mar. 2021. Citado na página 71.

de SOUZA NETO, E. A.; PERI, D.; OWEN, D. R. J. **Computational Methods for Plasticity.** Chichester, UK: John Wiley and Sons, Ltd, 2008. 791 p. ISBN 9780470694626. Disponível em: <<http://libgen.rs/book/index.php?md5=82D92BB71B5D2452E068E8AA61D6B1F4>>. Acesso em: 08 jun. 2021. Citado 10 vezes nas páginas 13, 95, 96, 98, 99, 102, 104, 105, 126 e 131.

de Souza, R. M. **O Método dos Elementos Finitos Aplicado ao Problema de Condução de Calor.** Belém, 2003. 40 p. Disponível em: <[http://www.inf.ufes.br/\\$lsm\\$luciac/fem/livros-fem/ApostilaElementosFinitosNiCAE.pdf](http://www.inf.ufes.br/$lsm$luciac/fem/livros-fem/ApostilaElementosFinitosNiCAE.pdf)>. Acesso em: 16 jun. 2021. Citado 2 vezes nas páginas 13 e 113.

DEBERNARDI, D. **Viscoplastic behaviour and design of tunnels.** 302 p. Tese (Doutorado) — Politecnico di Torino, 2008. Disponível em: <[https://www.danieledebernardi.it/sites/danieledebernardi.it/files/Daniele\\_Debernardi\\_PhD\\_Thesis.pdf](https://www.danieledebernardi.it/sites/danieledebernardi.it/files/Daniele_Debernardi_PhD_Thesis.pdf)>. Acesso em: 31 mar. 2021. Citado na página 75.

DEBERNARDI, D.; BARLA, G. New Viscoplastic Model for Design Analysis of Tunnels in Squeezing Conditions. **Rock Mechanics and Rock Engineering**, v. 42, n. 2, p. 259–288, apr

2009. ISSN 0723-2632. Disponível em: <<https://libgen.is/scimag/10.1007%2Fs00603-009-0174-6>>. Acesso em: 30 mar. 2021. Citado 4 vezes nas páginas 13, 73, 75 e 109.

DELERUYELLE, F.; BUI, T. A.; WONG, H.; DUFOUR, N. Analytical modelling of a deep tunnel in a viscoplastic rock mass accounting for a simplified life cycle and extension to a particular case of porous media. **Geological Society, London, Special Publications**, v. 400, n. 1, p. 367–379, 2014. ISSN 0305-8719. Disponível em: <[https://www.researchgate.net/publication/274972493\\_Analytical\\_modelling\\_of\\_a\\_deep\\_tunnel\\_in\\_a\\_viscoplastic\\_rock\\_mass\\_accounting\\_for\\_a\\_simplified\\_life\\_cycle\\_and\\_extension\\_to\\_a\\_particular\\_case\\_of\\_porous\\_media](https://www.researchgate.net/publication/274972493_Analytical_modelling_of_a_deep_tunnel_in_a_viscoplastic_rock_mass_accounting_for_a_simplified_life_cycle_and_extension_to_a_particular_case_of_porous_media)>. Acesso em: 29 mar. 2021. Citado na página 72.

DEPARTAMENTO DE ESTRADAS E RODAGEM (SÃO PAULO). **Instrução de Projeto para elaboração de túneis subterrâneos (NATM)**. São Paulo, 2005. 52 p. Disponível em: <[http://www.portaldageotecnica.com.br/wp-content/uploads/2018/05/Projeto-de-T{ú}nel-Instruções-~a-de-](http://www.portaldageotecnica.com.br/wp-content/uploads/2018/05/Projeto-de-Túnel-Instruções-~a-de-)>. Acesso em: 11 mar. 2021. Citado 2 vezes nas páginas 10 e 51.

DETournay, E.; FAIRHURST, C. Two-dimensional elastoplastic analysis of a long, cylindrical cavity under non-hydrostatic loading. **International Journal of Rock Mechanics and Mining Sciences and**, Pergamon, v. 24, n. 4, p. 197–211, aug 1987. ISSN 01489062. Disponível em: <<https://www.sciencedirect.com/science/article/pii/0148906287901756>>. Acesso em: 24 mar. 2021. Citado na página 68.

DETournay, E.; St. John, C. M. Design charts for a deep circular tunnel under non-uniform loading. **Rock Mechanics and Rock Engineering**, v. 21, n. 2, p. 119–137, 1988. ISSN 0723-2632. Disponível em: <<https://libgen.is/scimag/10.1007%2Fbf01043117>>. Acesso em: 20 abr. 2021. Citado 3 vezes nas páginas 12, 79 e 80.

DIEDERICHS, M. S. The 2003 Canadian Geotechnical Colloquium: Mechanistic interpretation and practical application of damage and spalling prediction criteria for deep tunnelling. **Canadian Geotechnical Journal**, v. 44, n. 9, p. 1082–1116, sep 2007. ISSN 0008-3674. Disponível em: <<https://libgen.is/scimag/10.1139%2F07-033>>. Acesso em: 23 mar. 2021. Citado 2 vezes nas páginas 10 e 62.

DO, N. A.; DIAS, D.; ORESTE, P.; DJERAN-MAIGRE, I. Three-dimensional numerical simulation of a mechanized twin tunnels in soft ground. **Tunnelling and Underground Space Technology**, Elsevier Ltd, v. 42, p. 40–51, 2014. ISSN 08867798. Disponível em: <<http://dx.doi.org/10.1016/j.tust.2014.02.001>>. Acesso em: 15 mar. 2021. Citado na página 55.

DUSSEAUlT, M. B.; FORDHAM, C. J. Time-dependent Behavior of Rocks. In: **Rock Testing and Site Characterization**. Elsevier, 1993. v. 3, p. 119–149. Disponível em: <<https://sci-hub.do/10.1016/b978-0-08-042066-0.50013-6>>. Acesso em: 25 mar. 2021. Citado na página 71.

EISENSTEIN, Z.; HEINZ, H.; NEGRO, A. On Three-Dimensional Ground Response to Tunnelling. In: LO, K. Y. (Ed.). **Tunnelling in Soil and Rock: Two Sessions at GEOTECH '84**. New York: American Society of Civil Engineers (ASCE), 1984. p. 107–127. Citado 2 vezes nas páginas 12 e 84.

FAHIMIFAR, A.; TEHRANI, F. M.; HEDAYAT, A.; VAKILZADEH, A. Analytical solution for the excavation of circular tunnels in a visco-elastic Burger's material under hydrostatic stress field. **Tunnelling and Underground Space Technology**, Elsevier Ltd, v. 25, n. 4, p. 297–304,

2010. ISSN 08867798. Disponível em: <<https://doi.org/10.1016/j.tust.2010.01.002>>. Acesso em: 29 mar. 2021. Citado na página 72.

FEDA, J. **Creep of soils and related phenomena**. Prague: Elsevier, 1992. 422 p. ISBN 0-444-98822-X. Disponível em: <<http://libgen.rs/book/index.php?md5=8965DFF5DC77F3DB5D6A594F0A76B748>>. Acesso em: 25 mar. 2021. Citado na página 71.

FEDERAL HIGHWAY ADMINISTRATION (U.S.). **Technical Manual for Design and Construction of Road Tunnels — Civil Elements**. Fhwa-nhi-1. Books Express Publishing, 2009. 702 p. ISBN 1782661727. Disponível em: <[https://www.fhwa.dot.gov/bridge/Tunnel/pubs/nhi09010/tunnel\\_manual.pdf](https://www.fhwa.dot.gov/bridge/Tunnel/pubs/nhi09010/tunnel_manual.pdf)>. Acesso em: 09 mar. 2021. Citado 5 vezes nas páginas 9, 10, 45, 50 e 52.

FELIPPA, C. A. Solution of linear equations with skyline-stored symmetric matrix. **Computers and Structures**, v. 5, n. 1, p. 13–29, apr 1975. ISSN 00457949. Disponível em: <<https://libgen.is/scimag/10.1016%2F0045-7949%2875%2990016-4>>. Acesso em: 21 jun. 2021. Citado na página 119.

FENNER, R. Untersuchungen zur Erkenntnis des Gebirgsdruckes. **Glückauf**, v. 74, p. 681–695, 705–715, 1938. Citado na página 87.

FERRÃO, W. C.; JENSEN, B. M.; BERNAUD, D. Numerical modeling of shallow tunnels: analysis of the surface settlements. In: **Ibero-Latin-American Congress on Computational Methods in Engineering**. Foz do Iguaçu: ABMEC, 2020. p. 7. ISSN 2675-6269. Disponível em: <<https://lume.ufrgs.br/handle/10183/217231>>. Acesso em: 18 mar. 2021. Citado na página 55.

FRANÇA, P. T. **Estudo do comportamento de túneis: análise numérica tridimensional com modelos elasto-plásticos**. 185 p. Dissertação (Mestrado) — Universidade de São Paulo, São Paulo, aug 2006. Disponível em: <<http://www.teses.usp.br/teses/disponiveis/3/3145/tde-08122006-151549>>. Acesso em: 19 mar. 2021. Citado 3 vezes nas páginas 10, 57 e 58.

FRITZ, P. An analytical solution for axisymmetric tunnel problems in elasto-viscoplastic media. **International Journal for Numerical and Analytical Methods in Geomechanics**, v. 8, n. 4, p. 325–342, 1984. ISSN 10969853. Disponível em: <<https://libgen.is/scimag/10.1002%2Fnag.1610080403>>. Acesso em: 29 mar. 2021. Citado na página 72.

GEORGE, A.; LIU, J. W. H. **Computer Solution of Large Sparse Positive Definite Systems**. Prentice Hall, 1981. 335 p. Disponível em: <<http://libgen.rs/book/index.php?md5=6AB741BD045A8D4CC43D6BC8C4687DEC>>. Acesso em: 21 jun. 2021. Citado na página 120.

GERMANOVICH, L.; DYSKIN, A. Fracture mechanisms and instability of openings in compression. **International Journal of Rock Mechanics and Mining Sciences**, v. 37, n. 1-2, p. 263–284, jan 2000. ISSN 13651609. Disponível em: <<https://linkinghub.elsevier.com/retrieve/pii/S1365160999001057>>. Acesso em: 23 mar. 2021. Citado 2 vezes nas páginas 10 e 62.

GIODA, G.; CIVIDINI, A. Finite Element Analysis of Time Dependent Effects in Tunnels. In: CRISTESCU, N.; GIODA, G. (Ed.). **Visco-Plastic Behaviour of Geomaterials**. New York: Springer-Verlag Wien, 1994. cap. 4, p. 209–243. Disponível em: <[https://link.springer.com/chapter/10.1007/978-3-7091-2710-0\\_4](https://link.springer.com/chapter/10.1007/978-3-7091-2710-0_4)>. Acesso em: 29 mar. 2021. Citado na página 72.

GOODMAN, R. E. **Introduction to Rock Mechanics**. 2 ed. ed. John Wiley and Sons, 1989. 562 p. ISBN 0471812005. Disponível em: <<http://libgen.rs/book/index.php?md5=D0043C73A14DF689B1292CAC2732B82E>>. Acesso em: 29 mar. 2021. Citado na página 72.

GRAD, P. **Pioneering drill+blast work in Hong Kong - TunnelTalk**. 2013. 1 p. Disponível em: <<https://www.tunneltalk.com/Hong-Kong-4Dec2013-Pioneering-double-deck-blasting-method-for-successful-South-Island-Line-drill-blast-excavation.php>>. Acesso em: 10 mar. 2021. Citado 2 vezes nas páginas 9 e 47.

GRIFFITHS, D. V. Coupled Analyses in Geomechanics. In: CRISTESCU, N.; GIODA, G. (Ed.). **Visco-Plastic Behaviour of Geomaterials**. New York: Springer-Verlag Wien, 1994. cap. 5, p. 245–317. Disponível em: <<https://link.springer.com/content/pdf/10.1007%2F978-3-7091-2710-0.pdf>>. Acesso em: 26 mar. 2021. Citado na página 72.

GUAYACÁN-CARRILLO, L. M.; SULEM, J.; SEYEDI, D. M.; GHABEZLOO, S.; NOIRET, A.; ARMAND, G. Analysis of Long-Term Anisotropic Convergence in Drifts Excavated in Callovo-Oxfordian Claystone. **Rock Mechanics and Rock Engineering**, v. 49, n. 1, p. 97–114, 2016. ISSN 07232632. Disponível em: <<https://link.springer.com/article/10.1007/s00603-015-0737-7>>. Acesso em: 24 mar. 2021. Citado 2 vezes nas páginas 11 e 64.

HANAFY, E. A.; EMERY, J. J. Advancing face simulation of tunnel excavations and lining placement. In: **Canadian Rock Mechanics Symposium (Proceedings)**. [S.I.]: CIM, 1980. v. 18, n. 6, p. 119–125. ISSN 01489062. Citado 2 vezes nas páginas 10 e 59.

Health and Safety Executive (HSE). **Safety of New Austrian Tunnelling Method (NATM) Tunnels: A review of sprayed concrete lined tunnels with particular reference to London clay**. [S.I.], 1996. 137 p. Disponível em: <<https://www.hse.gov.uk/pubns/natm.pdf>>. Acesso em: 23 mar. 2021. Citado na página 60.

HEINIÖ, M. **Rock Excavation Handbook**. [S.I.]: Sandvik Tamrock, 1999. 364 p. Citado 2 vezes nas páginas 9 e 47.

HOEK, E.; BROWN, E. T. **Underground Excavations in Rock**. London: CRC Press, 1980. 532 p. ISBN 9781482288926. Disponível em: <<http://libgen.rs/book/index.php?md5=A31AA664D8C93E11BC9181B7A6C024FA>>. Acesso em: 24 mar. 2021. Citado 7 vezes nas páginas 11, 12, 68, 76, 77, 78 e 79.

HOEK, E.; KAISER, P. K.; BAWDEN, W. F. **Support of Underground Excavations in Hard Rock**. 3 ed.. ed. Rotterdam: A.A. Balkema, 1998. 215 p. ISBN 9054101865. Disponível em: <<http://libgen.rs/book/index.php?md5=BBFCD945E7183BC8D2B9A9D2ED097FB9>>. Acesso em: 19 abr. 2021. Citado na página 77.

HUANG, J.; GRIFFITHS, D. V. Return Mapping Algorithms and Stress Predictors for Failure Analysis in Geomechanics. **Journal of Engineering Mechanics**, v. 135, n. 4, p. 276–284, 2009. ISSN 0733-9399. Disponível em: <<https://libgen.rs/scimag/10.1061%2F28asce%290733-99%282009%29135%3A4%28276%29>>. Acesso em: 26 jun. 2021. Citado na página 126.

HUGHES, T. J.; TAYLOR, R. L. Unconditionally stable algorithms for quasi-static elasto-viscoplastic finite element analysis. **Computers and Structures**, v. 8, n. 2, p. 169–173, apr 1978. ISSN 00457949. Disponível em: <<https://sci-hub.se/10.1016/0045-7949%2878%2990019-6>>. Acesso em: 26 jun. 2021. Citado na página 130.

- HUNSCHE, U. Uniaxial and triaxial creep and failure tests on rock: experimental technique and interpretation. In: CRISTESCU, N. D.; GIODA, G. (Ed.). **Visco-Plastic Behaviour of Geomaterials**. New York: Springer-Verlag Wien, 1994. cap. 1, p. 1–54. Disponível em: <<https://link.springer.com/content/pdf/10.1007%2F978-3-7091-2710-0.pdf>>. Acesso em: 25 mar. 2021. Citado na página 71.
- ITASCA, I. **User's Manual Creep Material Models**. Minneapolis, 2006. 124 p. Disponível em: <<https://web.mst.edu/~norbert/ge5471/Assignments/Assign%201%20-%20FLAC%20I/FLAC%20manual/FLAC%20manual/f2d421.pdf>>. Acesso em: 31 mar. 2021. Citado na página 75.
- JING, L. A review of techniques, advances and outstanding issues in numerical modelling for rock mechanics and rock engineering. **International Journal of Rock Mechanics and Mining Sciences**, v. 40, n. 3, p. 283–353, 2003. ISSN 13651609. Disponível em: <<https://www.sciencedirect.com/science/article/pii/S1365160903000133>>. Acesso em: 18 mar. 2021. Citado na página 56.
- KALIAKIN, V. N. Parameter Estimation for Time-Dependent Bounding Surface Models for Cohesive Soils. In: **Soil Constitutive Models**. Reston, VA: American Society of Civil Engineers (ASCE), 2005. p. 237–256. ISSN 08950563. Disponível em: <<https://sci-hub.se/10.1061/40771%28169%2910>>. Acesso em: 30 mar. 2021. Citado na página 74.
- KALIAKIN, V. N.; DAFALIAS, Y. F. Theoretical Aspects of the Elastoplastic-Viscoplastic Bounding Surface Model for Cohesive Soils. **Soils and Foundations**, v. 30, n. 3, p. 11–24, sep 1990. ISSN 00380806. Disponível em: <[https://sci-hub.se/10.3208/sandf1972.30.3\\_11](https://sci-hub.se/10.3208/sandf1972.30.3_11)>. Acesso em: 30 mar. 2021. Citado na página 74.
- KIRSCH, G. Die theorie der elastizität und die bedürfnisse der festigkeitslehre. **Zeitschrift des Vereines deutscher Ingenieure**, v. 42, p. 797–807, 1898. Citado na página 67.
- KLEINE, A. **Modélisation numérique du comportement des ouvrages souterrains par une approche viscoplastique**. 313 p. Tese (Doutorado) — Institut National Polytechnique de Lorraine, Lorraine, nov 2007. Disponível em: <<https://hal.univ-lorraine.fr/tel-01752829/document>>. Acesso em: 23 mar. 2021. Citado 3 vezes nas páginas 61, 73 e 74.
- LADANYI, B.; GILL, D. E. Design of tunnel linings in a creeping rock. **International Journal of Mining and Geological Engineering**, v. 6, n. 2, p. 113–126, 1988. ISSN 02690136. Disponível em: <<https://link.springer.com/article/10.1007/BF00880802>>. Acesso em: 29 mar. 2021. Citado na página 72.
- LAMÉ, G. **Leçons sur la théorie mathématique de l'élasticité des corps solides**. Paris: Bachelier, 1852. 384 p. Disponível em: <<https://archive.org/details/leonssurlathori09lamgoog/page/n1/mode/2up>>. Acesso em: 24 mar. 2021. Citado na página 67.
- LEEM, J.; KEMENY, J. Finite element micromechanical-based model for hydro-mechanical coupling. In: **The 37th U.S. Symposium on Rock Mechanics (USRMS)**. OnePetro, 1999. Disponível em: <<https://onepetro.org/ARMAUSRMS/proceedings-abstract/ARMA99/All-ARM-A99/ARMA-99-0153/130892>>. Acesso em: 15 mar. 2021. Citado 2 vezes nas páginas 55 e 72.
- LEMAITRE, J.; CHABOCHE, J.-L. **Mechanics of solid materials**. Cambridge: Cambridge University Press, 1994. 556 p. ISBN 978-0-521-47758-1. Disponível em: <<http://libgen.rs/book/index.php?md5=27B3867CA5939D1B5C83133A2F908B62>>. Acesso em: 31 mar. 2021. Citado 2 vezes nas páginas 75 e 105.

LEWIS, R. W.; SCHREFLER, B. A. **The Finite Element Method in the Static and Dynamic Deformation and Consolidation of Porous Media**. 2. ed. Chichester: Jhon Wiley and Sons, 1998. 475 p. Disponível em: <<http://libgen.rs/book/index.php?md5=F2F37588E5F080329BA044570DFBA920>>. Acesso em: 30 mar. 2021. Citado na página 74.

LIZARZA, J. T. C. **Método de los Elementos Finitos para Análisis Estructural**. UNICOPIA C.B., 2011. 287 p. ISBN 8492197021. Disponível em: <<http://dadun.unav.edu/handle/10171/19069>>. Acesso em: 16 jun. 2021. Citado 2 vezes nas páginas 13 e 115.

LUNARDI, P. Application de la mécanique des roches aux tunnels autoroutiers exemple des tunnels du Fréjus (côté Italie) et du Gran Sasso. **Revue Française de Geotechnique**, n. 12, p. 43, 1980. Disponível em: <<https://www.geotechnique-journal.org/articles/geotech/pdf/1980/03/geotech1980012p5.pdf>>. Acesso em: 24 mar. 2021. Citado 2 vezes nas páginas 11 e 64.

MAIDL, B.; THEWES, M.; MAIDL, U. **Handbook of Tunnel Engineering Volume I : Structures and Methods**. 1. ed. Berlin: Wilhelm Ernst e Sohn, 2013. I. 455 p. ISBN 9783433030486. Citado na página 50.

MALEKI, M.; DUBUJET, P.; CAMBOU, B. Modélisation hiérarchisée du comportement des sols. **Revue Française de Génie Civil**, Informa UK Limited, v. 4, n. 7-8, p. 895–928, jan 2000. ISSN 1279-5119. Disponível em: <<https://www.tandfonline.com/doi/pdf/10.1080/12795119.2000.9692702?needAccess=true>>. Acesso em: 30 mar. 2021. Citado na página 74.

MANCHAO, H.; Leal e Sousa, R.; MÜLLER, A.; VARGAS, E.; Ribeiro e Sousa, L.; XIN, C. Analysis of excessive deformations in tunnels for safety evaluation. **Tunnelling and Underground Space Technology**, Elsevier Ltd, v. 45, p. 190–202, jan 2015. ISSN 08867798. Disponível em: <<http://dx.doi.org/10.1016/j.tust.2014.09.006>>. Acesso em: 09 mar. 2021. Citado 2 vezes nas páginas 9 e 37.

MANH, H. T.; SULEM, J.; SUBRIN, D.; BILLAUX, D. Anisotropic Time-Dependent Modeling of Tunnel Excavation in Squeezing Ground. **Rock Mechanics and Rock Engineering**, v. 48, n. 6, p. 2301–2317, nov 2015. ISSN 0723-2632. Disponível em: <<http://link.springer.com/10.1007/s00603-015-0717-y>>. Acesso em: 30 mar. 2021. Citado 2 vezes nas páginas 73 e 75.

MARQUES, J. M.; OWEN, D. R. Strain hardening representation for implicit quasistatic elasto-viscoplastic algorithms. **Computers and Structures**, v. 17, n. 2, p. 301–304, 1983. ISSN 00457949. Disponível em: <[https://sci-hub.se/10.1016/0045-7949\(83\)90018-4](https://sci-hub.se/10.1016/0045-7949(83)90018-4)>. Acesso em: 26 jun. 2021. Citado na página 131.

MARTIN, C.; KAISER, P.; CHRISTIANSSON, R. Stress, instability and design of underground excavations. **International Journal of Rock Mechanics and Mining Sciences**, v. 40, n. 7-8, p. 1027–1047, oct 2003. ISSN 13651609. Disponível em: <<https://linkinghub.elsevier.com/retrieve/pii/S1365160903001102>>. Acesso em: 19 abr. 2021. Citado na página 76.

MARTOS, F. Concerning an approximate equation of the subsidence trough and its time factors. In: **International Strata Control Congress**. Leipzig: [s.n.], 1958. p. 191–205. Citado na página 82.

MATA, M. d. L. F. **Tunneling under squeezing conditions : Effect of the excavation method**. 207 p. Tese (Doutorado) — Université Paris-Est, 2018. Disponível em:

<<https://pastel.archives-ouvertes.fr/tel-02122931/file/TH2018PESC1071.pdf>>. Acesso em: 31 mar. 2021. Citado na página 75.

MAYNAR, M. J.; RODRÍGUEZ, L. E. Discrete Numerical Model for Analysis of Earth Pressure Balance Tunnel Excavation. **Journal of Geotechnical and Geoenvironmental Engineering**, v. 131, n. 10, p. 1234–1242, 2005. ISSN 1090-0241. Disponível em: <[https://sci-hub.se/10.1061/\(ASCE\)1090-0241\(2005\)131:10\(1234\)](https://sci-hub.se/10.1061/(ASCE)1090-0241(2005)131:10(1234))>. Acesso em: 18 mar. 2021. Citado na página 56.

MENDONÇA, P. d. T. R.; FANCELLO, E. A. **O Método de Elementos Finitos aplicado à Mecânica dos Sólidos**. 1 ed. ed. Florianópolis, SC: Orsa Maggiore, 2019. 706 p. ISBN 978-85-907153-1-3. Citado na página 119.

MESRI, G.; CASTRO, A.; FEBRES-CORDERO, E.; SHIELDS, D. R. Shear stress-strain-time behaviour of clays. **Geotechnique**, v. 31, n. 4, p. 537–552, dec 1981. ISSN 17517656. Disponível em: <<https://sci-hub.se/10.1680/geot.1981.31.4.537>>. Acesso em: 26 mar. 2021. Citado na página 72.

MITTERNDORFER, K. H. **Roadheaders in Tunneling - Tunnel Business Magazine**. 2013. 1 p. Disponível em: <<http://tunnelingonline.com/roadheaders-tunneling/>>. Acesso em: 03 mar. 2021. Citado 2 vezes nas páginas 9 e 46.

MORAN, B.; ORTIZ, M.; SHIH, C. F. Formulation of implicit finite element methods for multiplicative finite deformation plasticity. **International Journal for Numerical Methods in Engineering**, v. 29, n. 3, p. 483–514, mar 1990. ISSN 0029-5981. Disponível em: <<https://sci-hub.se/10.1002/nme.1620290304>>. Acesso em: 23 jun. 2021. Citado na página 127.

MROUEH, H.; SHAHOUR, I. A full 3-D finite element analysis of tunneling-adjacent structures interaction. **Computers and Geotechnics**, v. 30, n. 3, p. 245–253, 2003. ISSN 0266352X. Disponível em: <<https://www.sciencedirect.com/science/article/abs/pii/S0266352X02000472>>. Acesso em: 15 mar. 2021. Citado na página 55.

NAYAK, G. C.; ZIENKIEWICZ, O. C. Elasto-plastic stress analysis. A generalization for various constitutive relations including strain softening. **International Journal for Numerical Methods in Engineering**, v. 5, n. 1, p. 113–135, sep 1972. ISSN 0029-5981. Disponível em: <<https://sci-hub.se/10.1002/nme.1620050111>>. Acesso em: 23 jun. 2021. Citado na página 126.

NORTON, F. H. **The creep of steel at high temperatures**. McGraw-Hill, 1929. 90 p. Disponível em: <<https://archive.org/details/creepofsteelath00nort/page/74/mode/1up>>. Acesso em: 11 jun. 2021. Citado na página 105.

OBERT, L. **Creep in Model Pillars**. [S.I.], 1965. 23 p. Disponível em: <<https://www.osti.gov/servlets/purl/7106658>>. Acesso em: 26 mar. 2021. Citado na página 72.

O'REILLY, M. P.; NEW, B. M. Settlements above tunnels in the United Kingdom, their magnitude and prediction. In: **Proceedings of Tunnelling**. Brighton: [s.n.], 1982. p. 173–181. Citado 2 vezes nas páginas 12 e 83.

OTTOSEN, N. Viscoelastic—viscoplastic formulas for analysis of cavities in rock salt. **International Journal of Rock Mechanics and Mining Sciences and Geomechanics**

**Abstracts**, v. 23, n. 3, p. 201–212, jun 1986. ISSN 01489062. Disponível em: <<https://linkinghub.elsevier.com/retrieve/pii/0148906286909666>>. Acesso em: 29 mar. 2021. Citado na página 72.

OWEN, D. R. J.; HINTON, E. **Finite elements in plasticity: theory and practice**. Swansea: Pineridge Press Limited, 1980. 603 p. ISBN 0906674050. Disponível em: <<http://libgen.rs/book/index.php?md5=B5CC28CFE34CDD384CD6633D1DDB5AB4>>. Acesso em: 10 jun. 2021. Citado 4 vezes nas páginas 100, 101, 126 e 136.

PACHER, F. Deformationsmessungen im Versuchsstollen als Mittel zur Erforschung des Gebirgsverhaltens und zur Bemessung des Ausbaues. In: MÜLLER, L.; FAIRHURST, C. (Ed.). **Grundfragen auf dem Gebiete der Geomechanik - Principles in the Field of Geomechanics**. Berlin, Heidelberg: Springer Berlin Heidelberg, 1964. p. 149–161. ISBN 978-3-662-23624-6. Disponível em: <<http://libgen.rs/book/index.php?md5=75078FC914D518325EDD34854E4C16A1>>. Acesso em: 27 abr. 2021. Citado na página 87.

PAN, Y. W.; DONG, J. J. Time-dependent tunnel convergence-I. Formulation of the model. **International Journal of Rock Mechanics and Mining Sciences and**, v. 28, n. 6, p. 469–475, 1991. ISSN 01489062. Disponível em: <[https://doi.org/10.1016/0148-9062\(91\)91122-8](https://doi.org/10.1016/0148-9062(91)91122-8)>. Acesso em: 29 mar. 2021. Citado na página 72.

\_\_\_\_\_. Time-dependent tunnel convergence-II. Advance rate and tunnel-support interaction. **International Journal of Rock Mechanics and Mining Sciences and**, v. 28, n. 6, p. 477–488, 1991. ISSN 01489062. Disponível em: <[https://doi.org/10.1016/0148-9062\(91\)91123-9](https://doi.org/10.1016/0148-9062(91)91123-9)>. Acesso em: 29 mar. 2021. Citado na página 72.

PANET, M. Time-Dependent Deformations In Underground Works. In: **4th ISRM Congress. International Society for Rock Mechanics and Rock Engineering**. Montreux: OnePetro, 1979. p. 279–290. Disponível em: <<https://onepetro.org/isrmcongress/proceedings-abstract/CONGRESS79/All-CONGRESS79/ISRM-4CONGRESS-1979-221/166422>>. Acesso em: 29 mar. 2021. Citado na página 72.

\_\_\_\_\_. **Le Calcul des Tunnels par la Méthode Convergence-Confinement**. Presses De L'école Nationale Des Ponts Et Chaussees, 1995. 161 p. ISBN 2859782303. Disponível em: <<https://pt.scribd.com/document/456649940/1995-Calcul-Des-Tunnels-Par-La-Methode-Convergence-Confinement-Panet>>. Acesso em: 27 abr. 2021. Citado 5 vezes nas páginas 10, 11, 59, 71 e 87.

PANET, M.; GUELLEC, P. Contribution à l'étude du soutènement derrière le front de taille. In: **3rd Congress ISRM, Denver, 2, part B**. [S.l.: s.n.], 1974. p. 1130–1134. Citado na página 87.

PANJI, M.; KOOHSARI, H.; ADAMPIRA, M.; ALIELAHI, H.; Asgari Marnani, J. Stability analysis of shallow tunnels subjected to eccentric loads by a boundary element method. **Journal of Rock Mechanics and Geotechnical Engineering**, Elsevier Ltd, v. 8, n. 4, p. 480–488, aug 2016. ISSN 16747755. Disponível em: <<http://dx.doi.org/10.1016/j.jrmge.2016.01.006>>. Acesso em: 23 abr. 2021. Citado na página 83.

PECK, R. B. Deep excavations and tunnelling in soft ground. In: **Proc. 7th International Conference Soil Mechanics and Foundation Engineering**. Mexico City: [s.n.], 1969. p. 225–290. Citado 2 vezes nas páginas 82 e 83.

PEIRCE, D.; SHIH, C. F.; NEEDLEMAN, A. A tangent modulus method for rate dependent solids. **Computers and Structures**, v. 18, n. 5, p. 875–887, 1984. ISSN 00457949. Disponível em: <[https://sci-hub.se/10.1016/0045-7949\(84\)90033-6](https://sci-hub.se/10.1016/0045-7949(84)90033-6)>. Acesso em: 26 jun. 2021. Citado na página 131.

PELLET, F. L.; ROOSEFID, M. Time dependent behavior of rock and practical implications to tunnel design. In: **Proc. 11th International Congress on Rock Mechanics, Lisboa, Portugal**. [S.l.: s.n.], 2007. p. 1079–1082. ISBN 9780415450843. Acesso em: 15 mar. 2021. Citado na página 55.

PERZYNA, P. Fundamental Problems in Viscoplasticity. In: **Advances in Applied Mechanics**. [s.n.], 1966. v. 9, n. C, p. 243–377. ISBN 9780120020096. Disponível em: <<https://sci-hub.se/10.1016/S0065-2156%2808%2970009-7>>. Acesso em: 30 mar. 2021. Citado 2 vezes nas páginas 73 e 74.

PHIENWEJ, N.; THAKUR, P. K.; CORDING, E. J. Time-Dependent Response of Tunnels Considering Creep Effect. **International Journal of Geomechanics**, American Society of Civil Engineers (ASCE), v. 7, n. 4, p. 296–306, jul 2007. ISSN 1532-3641. Disponível em: <<http://ascelibrary.org/doi/10.1061/%28ASCE%291532-3641%282007%297%3A4%28296%29>>. Acesso em: 26 mar. 2021. Citado na página 72.

PIEPI, G. T. **Comportement viscoplastique avec rupture des argiles raides: applications aux ouvrages souterrains**. 155 p. Tese (Doutorado) — Ecole Nationale des Ponts et Chaussées, 1995. Disponível em: <<https://pastel.archives-ouvertes.fr/tel-00523616/document>>. Acesso em: 30 mar. 2021. Citado 13 vezes nas páginas 15, 16, 39, 73, 74, 162, 163, 164, 165, 166, 167, 178 e 179.

PIERRAT, C. **Las excavadoras sobre cadenas Liebherr R 944 C Tunnel impulsan el proyecto ferroviario «Stuttgart-Ulm»**. 2014. 1 p. Disponível em: <<https://www.liebherr.com/es/deu/actualidad/noticias-y-comunicados-de-prensa/detalle/las-excavadoras-sobre-cadenas-liebherr-r-944-c-tunnel-impulsan-el-proyecto-ferroviario-\T1\guillemotleftstuttgart-ulm\T1\guillemotright.html>>. Acesso em: 03 mar. 2021. Citado 2 vezes nas páginas 9 e 46.

PINTO, F.; WHITTLE, A. J. Ground Movements due to Shallow Tunnels in Soft Ground. I: Analytical Solutions. **Journal of Geotechnical and Geoenvironmental Engineering**, American Society of Civil Engineers (ASCE), v. 140, n. 4, p. 04013040, apr 2014. ISSN 1090-0241. Disponível em: <<https://sci-hub.se/10.1061/%28ASCE%29GT.1943-5606.0000948>>. Citado 2 vezes nas páginas 12 e 81.

POTTS, D. M.; ZDRAVKOVIC, L. **Finite element analysis in geotechnical engineering: theory**. London: Thomas Telford, 1999. 459 p. Disponível em: <<https://libgen.is/book/index.php?md5=A0F67F135CC35BD9AAE8FD96AE7F625C>>. Acesso em: 14 jul. 2021. Citado 2 vezes nas páginas 13 e 103.

PRASSETYO, S. H.; GUTIERREZ, M. Effect of transient coupled hydro-mechanical response on the longitudinal displacement profile of deep tunnels in saturated ground. **Tunnelling and Underground Space Technology**, Elsevier, v. 75, n. July 2017, p. 11–20, 2018. ISSN 08867798. Disponível em: <<https://doi.org/10.1016/j.tust.2018.02.003>>. Acesso em: 29 mar. 2021. Citado na página 72.

PURWODIHARDJO, A.; CAMBOU, B. Effect of strain-softening on settlement due to tunnelling in soft soil. In: ROSENBAUM, M. S.; TURNER, A. K. (Ed.). **New Paradigms in**

**Subsurface Prediction.** 99. ed. Berlin, Heidelberg: Springer Berlin Heidelberg, 2003. cap. 16, p. 173–188. Disponível em: <[http://link.springer.com/10.1007/3-540-48019-6\\_16](http://link.springer.com/10.1007/3-540-48019-6_16)>. Acesso em: 15 mar. 2021. Citado na página 55.

\_\_\_\_\_. Time-dependent modelling for soils and its application in tunnelling. **International Journal for Numerical and Analytical Methods in Geomechanics**, v. 29, n. 1, p. 49–71, jan 2005. ISSN 0363-9061. Disponível em: <<https://sci-hub.se/10.1002/nag.404>>. Acesso em: 30 mar. 2021. Citado 2 vezes nas páginas 73 e 74.

**QUEVEDO, F. P. d. M. Comportamento a longo prazo de túneis profundos revestidos com concreto : modelo em elementos finitos.** 210 p. Dissertação (Mestrado) — Universidade Federal do Rio Grande do Sul, Porto Alegre, 2017. Disponível em: <<https://lume.ufrgs.br/handle/10183/163886>>. Acesso em: 15 mar. 2021. Citado 5 vezes nas páginas 55, 133, 137, 150 e 162.

**RABCEWICZ, L. v.** The New Austrian Tunnelling Method: part one. **Water Power**, v. 16, n. 11, p. 453–457, nov 1964. Disponível em: <<https://www.eoas.ubc.ca/courses/eosc547/lecture-material/Rabcewicz-NATM.pdf>>. Acesso em: 22 mar. 2021. Citado na página 60.

\_\_\_\_\_. The New Austrian Tunnelling Method: part two. **Water Power**, v. 16, n. 12, p. 511–515, dec 1964. Disponível em: <<https://www.eoas.ubc.ca/courses/eosc547/lecture-material/Rabcewicz-NATM.pdf>>. Acesso em: 22 mar. 2021. Citado na página 60.

\_\_\_\_\_. The New Austrian Tunnelling Method: part three. **Water Power**, v. 17, n. 1, p. 19–24, jan 1965. Disponível em: <<https://www.eoas.ubc.ca/courses/eosc547/lecture-material/Rabcewicz-NATM.pdf>>. Acesso em: 22 mar. 2021. Citado na página 60.

**RABCEWICZ, L. v.; GOLSER, J.** Principles of dimensioning the supporting system for the New Austrian Tunnelling Method. **Water Power**, v. 25, n. 3, p. 88–93, 1973. Citado na página 60.

**RAMONI, M.; ANAGNOSTOU, G.** Thrust force requirements for TBMs in squeezing ground. **Tunnelling and Underground Space Technology**, Elsevier Ltd, v. 25, n. 4, p. 433–455, 2010. ISSN 08867798. Disponível em: <<http://dx.doi.org/10.1016/j.tust.2010.02.008>>. Acesso em: 09 mar. 2021. Citado na página 38.

\_\_\_\_\_. Tunnel boring machines under squeezing conditions. **Tunnelling and Underground Space Technology**, v. 25, n. 2, p. 139–157, 2010. ISSN 08867798. Disponível em: <<https://doi.org/10.1016/j.tust.2009.10.003>>. Acesso em: 09 mar. 2021. Citado na página 38.

**RANKIN, W. J.** Ground movements resulting from urban tunnelling: predictions and effects. **Geological Society, London, Engineering Geology Special Publications**, v. 5, n. 1, p. 79–92, 1988. ISSN 0267-9914. Disponível em: <<https://sci-hub.se/10.1144/gsl.eng.1988.005.01.06>>. Acesso em: 23 abr. 2021. Citado 3 vezes nas páginas 12, 82 e 83.

**REYNOLDS, P.** **Collapse and flooding delay progress in Iceland.** 2015. 1 p. Disponível em: <<https://tunneltalk.com/Iceland-17Jun2015-Vadlaheidi-road-tunnel-progressive-face-collapse-and-flood-delays-progress.php>>. Acesso em: 11 mar. 2021. Citado 2 vezes nas páginas 10 e 50.

**ROADTRAFFIC-TECHNOLOGY. Nordhavnsvej (Northern Harbour Link) Project, Copenhagen - Verdict Traffic.** 2017. Disponível em: <<https://www.roadtraffic-technology.com/projects/nordhavnsvej-northern-harbour-link-project-copenhagen/>>. Acesso em: 09 mar. 2021. Citado 2 vezes nas páginas 9 e 45.

ROATEŞI, S. Finite Element Analysis for the Problem of Tunnel Excavation Successive Phases and Lining Mounting. In: EBRAHIMI, F. (Ed.). **Finite Element Analysis - New Trends and Developments**. InTech, 2012. cap. 14, p. 301–332. Disponível em: <<http://www.intechopen.com/books/finite-element-analysis-new-trends-and-developments/finite-element-analysis-for-the-problem-of-tunnel-excavation-successive-phases-and-lining-mounting>>. Acesso em: 29 mar. 2021. Citado na página 72.

\_\_\_\_\_. Analytical and numerical approach for tunnel face advance in a viscoplastic rock mass. **International Journal of Rock Mechanics and Mining Sciences**, v. 70, p. 123–132, 2014. ISSN 13651609. Disponível em: <<https://linkinghub.elsevier.com/retrieve/pii/S1365160914000987>>. Acesso em: 15 mar. 2021. Citado 2 vezes nas páginas 55 e 72.

ROUSSET, G. **Comportement Mecanique des Argiles Profondes: application au stockage de dechets radioactifs**. Tese (Doutorado) — L'Ecole Nationale des Ponts et Chaussees, 1988. Citado 13 vezes nas páginas 11, 13, 63, 65, 66, 67, 70, 71, 73, 74, 107, 108 e 109.

ROUSSET, G. Les sollicitations à long terme des revêtements des tunnels. **Revue Française de Géotechnique**, n. 53, p. 5–20, oct 1990. ISSN 0181-0529. Disponível em: <<http://www.geotechnique-journal.org/10.1051/geotech/1990053005>>. Acesso em: 30 mar. 2021. Citado na página 73.

SAKURAI, S. Approximate time-dependent analysis of tunnel support structure considering progress of tunnel face. **International Journal for Numerical and Analytical Methods in Geomechanics**, v. 2, n. 2, p. 159–175, 1978. ISSN 10969853. Disponível em: <<https://sci-hub.se/10.1002/nag.1610020205>>. Acesso em: 29 mar. 2021. Citado na página 72.

SALENÇON, J. Contraction quasi-statique d'une cavité symétrie sphérique ou cylindrique dans un milieu élastoplastique. In: **Annales des Ponts et Chaussées**. [S.l.: s.n.], 1969. p. 231–236. Citado na página 68.

SCHMIDT, B. **Settlements and ground movements associated with tunneling in soils**. Tese (Doutorado) — University of Illinois, 1969. Citado na página 82.

SCHOFIELD, A. N. Cambridge Geotechnical Centrifuge Operations. **Géotechnique**, v. 30, n. 3, p. 227–268, sep 1980. ISSN 0016-8505. Disponível em: <<http://www.icevirtuallibrary.com/doi/10.1680/geot.1980.30.3.227>>. Acesso em: 11 mar. 2021. Citado 2 vezes nas páginas 10 e 50.

SCHWEIGER, H. F.; MARCHER, T.; SCHÄDLICH, B. Application of a New Shotcrete Constitutive Model to the Numerical Analysis of a Tunnel Excavation. **Tunneling and Underground Construction**, American Society of Civil Engineers, p. 890–899, 2014. Disponível em: <<http://ascelibrary.org/doi/10.1061/9780784413449.088>>. Acesso em: 15 mar. 2021. Citado na página 55.

SEIDENFUSS, T. **Collapses in Tunnelling**. 194 p. Dissertação (Mestrado) — Foundation Engineering and Tunnelling, 2006. Disponível em: <<https://pt.scribd.com/document/369445627/Collapses-in-tunnelling-pdf>>. Acesso em: 15 mar. 2021. Citado na página 60.

SEKINE, Y.; ZHANG, F.; TASAKA, Y.; OHMORI, T.; KUROSE, H. Model tests and numerical analysis on the evaluation of long-term stability of existing tunnel. **Proceedings of the 17th International Conference on Soil Mechanics and Geotechnical Engineering**, p. 1848–1851, 2009. Disponível em: <<https://ebooks.iospress.nl/publication/30340>>. Acesso em: 29 mar. 2021. Citado na página 72.

SHAFIQU, Q. S. M.; TAHA, M. R.; CHIK, Z. H. (PDF) Finite element analysis of tunnels using the elastoplastic-viscoplastic bounding surface model. **Journal of Engineering and Applied Sciences**, v. 3, n. 3, p. 36–42, jun 2008. Disponível em: <[https://www.researchgate.net/publication/242375508\\_Finite\\_element\\_analysis\\_of\\_tunnels\\_using\\_the\\_elastoplastic-viscoplastic\\_bounding\\_surface\\_model](https://www.researchgate.net/publication/242375508_Finite_element_analysis_of_tunnels_using_the_elastoplastic-viscoplastic_bounding_surface_model)>. Acesso em: 30 mar. 2021. Citado 2 vezes nas páginas 73 e 74.

SHARAN, S. K. Elastic-brittle-plastic analysis of circular openings in Hoek-Brown media. **International Journal of Rock Mechanics and Mining Sciences**, Elsevier BV, v. 40, n. 6, p. 817–824, sep 2003. ISSN 13651609. Disponível em: <<https://www.sciencedirect.com/science/article/pii/S1365160903000406>>. Acesso em: 24 mar. 2021. Citado na página 68.

\_\_\_\_\_. Exact and approximate solutions for displacements around circular openings in elastic-brittle-plastic Hoek-Brown rock. **International Journal of Rock Mechanics and Mining Sciences**, Elsevier BV, v. 42, n. 4, p. 542–549, jun 2005. ISSN 13651609. Disponível em: <<https://www.sciencedirect.com/science/article/pii/S1365160905000274>>. Acesso em: 24 mar. 2021. Citado na página 68.

SHEOREY, P. A theory for In Situ stresses in isotropic and transverseley isotropic rock. **International Journal of Rock Mechanics and Mining Sciences and Geomechanics Abstracts**, Pergamon, v. 31, n. 1, p. 23–34, feb 1994. ISSN 01489062. Disponível em: <<https://www.sciencedirect.com/science/article/pii/0148906294923124>>. Acesso em: 19 abr. 2021. Citado na página 77.

SHI, J.; ORTIGAO, J. A. R.; BAI, J. MODULAR NEURAL NETWORKS FOR PREDICTING SETTLEMENTS DURING TUNNELING. **Journal of Geotechnical and Geoenvironmental Engineering**, v. 124, n. May, p. 389–395, 1998. Disponível em: <[https://sci-hub.se/10.1061/\(ASCE\)1090-0241\(1998\)124:5\(389\)](https://sci-hub.se/10.1061/(ASCE)1090-0241(1998)124:5(389))>. Acesso em: 18 mar. 2021. Citado na página 56.

SHRESTHA, P. K.; PANTHI, K. K. Assessment of the effect of stress anisotropy on tunnel deformation in the Kaligandaki project in the Nepal Himalaya. **Bulletin of Engineering Geology and the Environment**, Springer Verlag, v. 74, n. 3, p. 815–826, aug 2015. ISSN 1435-9529. Disponível em: <[https://www.researchgate.net/publication/264037936\\_Assessment\\_of\\_the\\_effect\\_of\\_stress\\_anisotropy\\_on\\_tunnel\\_deformation\\_in\\_the\\_Kaligandaki\\_project\\_in\\_the\\_Nepal\\_Himalaya](https://www.researchgate.net/publication/264037936_Assessment_of_the_effect_of_stress_anisotropy_on_tunnel_deformation_in_the_Kaligandaki_project_in_the_Nepal_Himalaya)>. Citado na página 80.

SIMO, J.; HUGHES, T. **Computational Inelasticity**. Springer, 1998. 392 p. ISBN 0387975209. Disponível em: <<https://link.springer.com/content/pdf/10.1007%2Fb98904.pdf>>. Acesso em: 23 jun. 2021. Citado na página 126.

SIMO, J.; TAYLOR, R. Consistent tangent operators for rate-independent elastoplasticity. **Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering**, v. 48, n. 1, p. 101–118, feb 1985. ISSN 00457825. Disponível em: <<https://sci-hub.se/10.1016/0045-7825%2885%2990070-2>>. Acesso em: 21 jun. 2021. Citado 2 vezes nas páginas 123 e 126.

SINGH, A.; MITCHELL, J. K. General Stress-Strain-Time Function for Soils. **Journal of the Soil Mechanics and Foundations Division**, American Society of Civil Engineers (ASCE), v. 94, n. 1, p. 21–46, jan 1968. ISSN 0044-7994. Disponível em: <<https://ascelibrary.org/doi/abs/10.1061/JSFEAQ.0001084>>. Citado na página 72.

SKRZYPEK, J. J. **Plasticity and creep. Theory, examples and problems.** [S.l.]: CRC Press, 1993. Citado na página 105.

SMITH, I. M.; GRIFFITHS, D. V.; MARGETTS, L. **Programming the finite element method.** 5 ed. ed. John Wiley and Sons, 2014. 684 p. ISBN 978-1-119-97334-8. Disponível em: <<http://libgen.rs/book/index.php?md5=0277B58B01F8C9A6016EFFD72102E356>>. Acesso em: 21 jun. 2021. Citado 3 vezes nas páginas 119, 131 e 135.

SOULEY, M.; ARMAND, G.; SU, K.; GHOREYCHI, M. Modeling the viscoplastic and damage behavior in deep argillaceous rocks. **Physics and Chemistry of the Earth, Parts A/B/C**, Elsevier Ltd, v. 36, n. 17-18, p. 1949–1959, jan 2011. ISSN 14747065. Disponível em: <<https://linkinghub.elsevier.com/retrieve/pii/S1474706511002890>>. Acesso em: 30 mar. 2021. Citado 2 vezes nas páginas 73 e 75.

SOUSA, R. L. **Risk Analysis for Tunneling Projects.** 589 p. Tese (Doutorado) — Massachusetts Institute of Technology, 2010. Disponível em: <<https://dspace.mit.edu/handle/1721.1/58282>>. Acesso em: 23 mar. 2021. Citado 3 vezes nas páginas 10, 60 e 61.

ŠPAČKOVÁ, O. **Risk management of tunnel construction projects.** 164 p. Tese (Doutorado) — Czech Technical University in Prague, Prague, jun 2012. Disponível em: <[https://mech.fsv.cvut.cz/wiki/images/7/7a/PhD\\_dissertation\\_Spackova\\_2012.pdf](https://mech.fsv.cvut.cz/wiki/images/7/7a/PhD_dissertation_Spackova_2012.pdf)>. Acesso em: 23 mar. 2021. Citado 2 vezes nas páginas 10 e 60.

STALLMANN, M. **Verbrüche im Tunnelbau: Ursachen und Sanierung.** Stuttgart: VDM Verlag Dr. Müller, 2005. 128 p. ISBN 9783639306422. Citado na página 60.

STERPI, D.; GIODA, G. Visco-Plastic Behaviour around Advancing Tunnels in Squeezing Rock. **Rock Mechanics and Rock Engineering**, v. 42, n. 2, p. 319–339, apr 2009. ISSN 0723-2632. Disponível em: <<http://link.springer.com/10.1007/s00603-007-0137-8>>. Acesso em: 29 mar. 2021. Citado 2 vezes nas páginas 11 e 73.

SU, K. **Development of Hydro-mechanical models of the Callovo-Oxfordian Argillites for the Geological Disposal of Radioactive Waste (MODEX-REP): Final Report. Contract No. FIKW-CT-2000-00029.** [S.l.], 2007. 71 p. Disponível em: <[https://cordis.europa.eu/docs/projects/files/FIKW/FIKW-CT-2000-00029/92334551-6\\_en.pdf](https://cordis.europa.eu/docs/projects/files/FIKW/FIKW-CT-2000-00029/92334551-6_en.pdf)>. Acesso em: 31 mar. 2021. Citado na página 75.

SULEM, J.; PANET, M.; GUENOT, A. An analytical solution for time-dependent displacements in a circular tunnel. **International Journal of Rock Mechanics and Mining Sciences and**, v. 24, n. 3, p. 155–164, 1987. ISSN 01489062. Disponível em: <[https://doi.org/10.1016/0148-9062\(87\)90523-7](https://doi.org/10.1016/0148-9062(87)90523-7)>. Acesso em: 29 mar. 2021. Citado na página 72.

VILADKAR, M.; NOORZAEI, J.; GODBOLE, P. Convenient forms of yield criteria in elasto-plastic analysis of geological materials. **Computers and Structures**, v. 54, n. 2, p. 327–337, jan 1995. ISSN 00457949. Disponível em: <<https://sci-hub.se/10.1016/0045-7949%2894%29e0199-c>>. Acesso em: 09 jun. 2021. Citado 2 vezes nas páginas 97 e 100.

WANG, H.; CHEN, X.; JIANG, M.; SONG, F.; WU, L. The analytical predictions on displacement and stress around shallow tunnels subjected to surcharge loadings. **Tunnelling and Underground Space Technology**, v. 71, n. March 2017, p. 403–427, jan 2018. ISSN 08867798. Disponível em: <<https://linkinghub.elsevier.com/retrieve/pii/S0886779817302262>>. Acesso em: 29 mar. 2021. Citado na página 72.

WANG, H. N.; UTILI, S.; JIANG, M. J. An analytical approach for the sequential excavation of axisymmetric lined tunnels in viscoelastic rock. **International Journal of Rock Mechanics and Mining Sciences**, Elsevier, v. 68, p. 85–106, 2014. ISSN 13651609. Disponível em: <<http://dx.doi.org/10.1016/j.ijrmms.2014.02.002>>. Acesso em: 29 mar. 2021. Citado na página 72.

WONG, H.; MORVAN, M.; DELERUYELLE, F.; LEO, C. J. Analytical study of mine closure behaviour in a poro-visco-elastic medium. **International Journal for Numerical and Analytical Methods in Geomechanics**, v. 32, n. 14, p. 1737–1761, oct 2008. ISSN 03639061. Disponível em: <<https://onlinelibrary.wiley.com/doi/abs/10.1002/nag.694>>. Acesso em: 26 mar. 2021. Citado na página 72.

WORD HIGHWAYS. **Improving tunneling method selection**. 2015. 1 p. Disponível em: <<https://www.worldhighways.com/wh10/feature/improving-tunneling-method-selection>>. Acesso em: 09 mar. 2021. Citado 2 vezes nas páginas 9 e 46.

XIN, W.; ZENG RONG, L. The FEM analysis of influence of metro construction and operation on the historic buildings considering soil-structure interaction. **2009 International Conference on Information Management, Innovation Management and Industrial Engineering, ICIII 2009**, v. 2, p. 585–588, 2009. Disponível em: <<https://sci-hub.se/10.1109/iciii.2009.299>>. Acesso em: 15 mar. 2021. Citado na página 55.

YEATES, J.; GEDDES, J. D. The response of buried pipelines to ground movements caused by tunneling in soil. In: **Ground Movements and Structures: Proc., 3rd Int. Conf. held at the University of Wales Institute of Science and Technology**. Plymouth: Pentech Press, 1985. p. 145–160. Citado 2 vezes nas páginas 12 e 82.

ZHONG, D.; HU, N.; CHENG, Z.; LÜ, P.; TONG, D. 3D finite element analysis of TBM water diversion tunnel segment coupled with seepage field. **Transactions of Tianjin University**, v. 22, n. 1, p. 35–42, feb 2016. ISSN 1006-4982. Disponível em: <<https://link.springer.com/content/pdf/10.1007/s12209-016-2527-z.pdf>>. Acesso em: 15 mar. 2021. Citado na página 55.

ZHOU, J.; CHEN, D.; WANG, D.; ZHANG, L.-L.; ZHANG, L.-M. Failure Probability of Transverse Surface Settlement Induced by EPB Shield Tunneling in Clayey Soils. **ASCE-ASME Journal of Risk and Uncertainty in Engineering Systems, Part A: Civil Engineering**, American Society of Civil Engineers (ASCE), v. 4, n. 3, p. 04018030, sep 2018. ISSN 2376-7642. Disponível em: <[https://www.researchgate.net/publication/326343499\\_Failure\\_Probability\\_of\\_Transverse\\_Surface\\_Settlement\\_Induced\\_by\\_EPB\\_Shield\\_Tunneling\\_in\\_Clayey\\_Soils](https://www.researchgate.net/publication/326343499_Failure_Probability_of_Transverse_Surface_Settlement_Induced_by_EPB_Shield_Tunneling_in_Clayey_Soils)>. Acesso em: 23 abr. 2021. Citado na página 83.

ZHU, Z. Evaluation of the range of horizontal stresses in the earth's upper crust by using a collinear crack model. **Journal of Applied Geophysics**, Elsevier B.V., v. 88, p. 114–121, jan 2013. ISSN 09269851. Disponível em: <<http://dx.doi.org/10.1016/j.jappgeo.2012.10.007>>. Acesso em: 19 abr. 2021. Citado na página 77.

ZIENKIEWICZ, O.; TAYLOR, R.; ZHU, J. **The Finite Element Method: its Basis and Fundamentals**. 6 ed. ed. Elsevier, 2005. 709 p. ISBN 9781856176330. Disponível em: <<http://libgen.rs/book/index.php?md5=FE045473539241D9A2690AD8966384BD>>. Acesso em: 16 jun. 2021. Citado 3 vezes nas páginas 111, 115 e 116.

ZIENKIEWICZ, O. C.; CORMEAU, I. C. Visco-plasticity-plasticity and creep in elastic solids-a unified numerical solution approach. **International Journal for Numerical Methods in Engineering**, v. 8, n. 4, p. 821–845, 1974. ISSN 00295981. Disponível em: <<https://sci-hub.se/10.1002/nme.1620080411>>. Acesso em: 09 jun. 2021. Citado 5 vezes nas páginas 13, 97, 106, 107 e 130.

ZIENKIEWICZ, O. C.; VALLIAPPAN, S.; KING, I. P. Elasto-plastic solutions of engineering problems ‘initial stress’, finite element approach. **International Journal for Numerical Methods in Engineering**, v. 1, n. 1, p. 75–100, jan 1969. ISSN 0029-5981. Disponível em: <<https://sci-hub.se/10.1002/nme.1620010107>>. Acesso em: 23 jun. 2021. Citado na página 126.

## **APÊNDICES**

## APÊNDICE A – SCRIPT APDL TÚNEL AXISSIMÉTRICO

Neste anexo encontra-se o script APDL para túneis em Axissimetria.

```

1 !***** !
2 !** SCRIPT APDL - TUNEL AXISSIMETRICO          **!
3 !** Versão: 2021.7                                **!
4 !**
5 !** Objetivo: faz análise da convergência de tuneis   **!
6 !**           profundos com seção circular considerando **!
7 !**           modelo axissimétrico.                  **!
8 !**
9 !** Programador: Felipe Quevedo                  **!
10 !** Inicio      : (05/06/2021)                   **!
11 !** Situação    : OK                            **!
12 !** Unidades   : MPa,m,dia                    **!
13 !**
14 !***** !
15 !
16 !***** !
17 ! 1. CONFIGURAÇÕES INICIAIS                   !
18 !***** !
19 ! Inicializando o ANSYS
20 FINISH
21 /CLEAR,NOSTART
22 !
23 !***** !
24 ! 2. DADOS DE ENTRADA PARA O PROBLEMA        !
25 !***** !
26 !
27 ! Nessa seção define-se todos os dados de entrada necessarios
28 !
29 !***** !
30 ! 2.1 Parâmetros geométricos                  !
31 !***** !
32 Ri          = 1      ! [m] raio externo do túnel
33 esp         = 0.1    ! [m] espessura do revestimento
34 R1          = 10     ! [Ri] raio da região de refinamento
35 Lx          = 20     ! [Ri] dimensão da base do domínio
36 Ly2         = 10     ! [Ri] dimensão do trecho não escavado
37 Lp          = 1/3*Ri ! [m] tamanho do passo de escavação
38 np          = 38     ! [un] numero de passos de escavação
39 npi         = 3      ! [un] numero de passos na primeira escavação
40 d0          = 0      ! [lp] dimensão não suportada (multiplo do passo)
41 revested0  = 1      ! 0 - não reveste ultimo d0+Lp, 1 - reveste
42 revesteface= 1      ! 0 - não reveste a ultima face, 1 - reveste
43 !
44 !***** !
45 ! 2.2 Modelos e parâmetros para o material do maciço !
46 !***** !
47 !
48 ! Modelo do material do maciço
49 ! matmacico = 1          ! elastico do ANSYS
50 ! matmacico = 4          ! usermat3D_VM do ANSYS (BISO)

```

```

51 ! matmacico = 5          ! usermat3D_elastico
52 ! matmacico = 6          ! usermat3D_EP
53 ! matmacico = 7          ! usermat3D_VP
54 ! matmacico = 8          ! usermat3D_EPVP
55 !
56 matmacico      = 8      ! Tipo de modelo escolhido
57 !
58 ! Parâmetros de todos os modelos
59 E1           = 1500 ! [MPa] modulo elasticidade (1,4,5,6,7,8)
60 nu1          = 0.498 ! [adm] coeficiente de poisson (1,4,5,6,7,8)
61 !
62 ! Parametros para o modelo 6 e 8
63 superficief = 2       ! função de escoamento: 1-DPI, 2-DPII, 3-DPIII (6,8)
64 superficieg = 2       ! função potencial: 1-DPI, 2-DPII, 3-DPIII (6,8)
65 fi            = 0       ! [graus] angulo de atrito (0 - VM ou TR) (6,8)
66 psi           = 0       ! [graus] angulo de dilatância (6,8)
67 c1            = 4*SQRT(3)/2 ! [MPa] coesão inicial (6,8)
68 c2            = 4*SQRT(3)/2 ! [MPa] coesão de pico (6,8)
69 c3            = 4*SQRT(3)/2 ! [MPa] coesão residual (6,8)
70 eps1          = 0.010 ! [adm] deformação equiv. limite da zona 1 (6,8)
71 eps2          = 0.020 ! [adm] deformação equiv. limite da zona 2 (6,8)
72 eps3          = 0.025 ! [adm] deformação equiv. limite da zona 3 (6,8)
73 Dalg          = 0       ! 0 - módulo elastico, 1 - módulo algorítmico
74 !
75 ! Parametros para o modelo 7 e 8
76 superficiefpv = 2       ! função de escoamento: 1-DPI, 2-DPII, 3-DPIII (7,8)
77 superficiegpv = 2       ! função potencial: 1-DPI, 2-DPII, 3-DPIII (7,8)
78 fivp          = 0       ! [graus] angulo de atrito (0 - VM ou TR) (7,8)
79 psivp          = 0       ! [graus] angulo de dilatância (7,8)
80 cvp           = 3*SQRT(3)/2 ! [MPa] coesão inicial (7,8)
81 n1             = 1       ! [adm] expoente do modelo de Perzyna (7,8)
82 eta            = 4*10000 ! [dia] constante de viscosidade dinâmica (7,8)
83 f0             = 1       ! [MPa] valor de referência (7,8)
84 thetavp        = 0       ! 0 - totalmente explícito, 1 - semi-implícito (7,8)
85 !
86 !
87 !*****!
88 ! 2.3 Modelos e parâmetros para o material do revestimento !
89 !*****!
90 !
91 ! Modelo do material do revestimento
92 ! matrev = 0           ! sem revestimento
93 ! matrev = 1           ! elastico do ANSYS
94 !
95 matrev          = 0       ! Tipo de modelo escolhido
96 E2              = 30000 ! [MPa] modulo elasticidade (1)
97 nu2             = 0.3    ! [adm] coeficiente de poisson (1)
98 !
99 !*****!
100 ! 2.4 Condições de contorno
101 !*****!
102 !
103 ! Pressão geostática
104 ph              = 9       ! [MPa] Pressão geostática horizontal
105 pv              = 9       ! [MPa] Pressão geostática vertical
106 !
107 !*****!
108 ! 2.5 Discretização do tempo nos passos
109 !*****!
110 !
111 ! Discretização do tempo durante os passos de escavação

```

```

112 v          = 10      ! [m/d] velocidade da escavação
113 tp         = Lp/v    ! [d] tempo do passo de escavação
114 dt         = 0.5*tp ! [d] incremento de tempo a cada passo
115 dtmax     = dt      ! [d] incremento máximo de tempo cada passo
116 !
117 ! Discretização do tempo nos passos após a escavação
118 tp2        = 200     ! [d] tempo de cada passo após a escavação do túnel
119 np2        = 5       ! [un] número de passos após a escavação do túnel
120 dtp2       = 0.5*tp2 ! [d] incremento de tempo de cada passo
121 dtp2max   = dtp2    ! [d] incremento máximo de tempo de cada passo
122 !
123 !*****!
124 ! 2.6 Discretização da malha
125 !*****!
126 !
127 tipoelem   = 0      ! 0 - PLANE182, 1 - PLANE183
128 nrev        = 2      ! [un] divisões na espessura do revestimento
129 nLp         = 1      ! [un] numero de elementos no passo escavado
130 nRi         = 10     ! [un] divisões na interface túnel-maciço
131 nR1         = 15     ! [un] divisões ao longo do raio da região refinada
132 mR1         = 15     ! [%] taxa de crescimento de nR1
133 nLx1        = 5      ! [un] divisões na base fora da região refinada
134 mLx1        = 1.2    ! [%] taxa de crescimento de mLx1
135 nLy2        = 15     ! [un] numero de elementos no trecho não escavado
136 mLy2        = 5      ! [%] taxa de crescimento de nLy2
137 !
138 !*****!
139 ! 2.7 Configurações da solução
140 !*****!
141 !
142 nr          = 2      ! Newton-Raphson
143 !           ! 1 - INIT rigidez não é atualizada
144 !           ! 2 - FULL rigidez atualizada a cada iteração
145 !           ! 3 - UNSYM assimétrica atualizada a cada iteração
146 !
147 psc         = 1      ! 1 - Ativa, 0 - desativa a opção de paralelização SMP
148 nlg         = 0      ! 1 - Ativa, 0 - desativa a não lineariedade geométrica
149 soleq       = 1      ! 1 - calcula o equilibrio do maciço antes de iniciar
150 !
151 !
152 !
153 !.....FIM ENTRADA DE DADOS.....!
154 !
155 !
156 !
157 !
158 !*****!
159 ! 3. Pré-Processamento
160 !*****!
161 /PREP7          ! inicia módulo de pré-processamento
162 !
163 !*****!
164 ! 3.1 Parâmetros calculados
165 !*****!
166 R1          = R1*Ri   ! [m] raio da região de refinamento próxima do túnel
167 Lx          = Lx*Ri   ! [m] dimensão da base do domínio
168 ly1         = np*lp   ! [m] dimensão do trecho escavado
169 nLy1        = np*nlp  ! [un] numero de elementos no trecho escavado
170 nRv         = nri/2   ! [un] divisões da parte interna da seção do túnel
171 d0          = d0*lp   ! [m] comprimento não revestido
172 ly2         = ly2*Ri   ! [m] comprimento do trecho não escavado

```

```

173 Lx1      = Lx-R1      ! [m] altura acima da região de refinamento
174 Ly      = Lyl+Ly2      ! [m] comprimento total do modelo
175 nesc    = np-npi+1    ! [un] total de escavações
176 !
177 ! Parâmetros para o modelo usermat3D_VM do ANSYS (BISO)
178 yield   = 2*c1          ! [MPa] tensão de escoamento
179 Ep      = 2*(c2-c1)/(eps1)      ! [MPa] módulo plástico tangente
180 youngt = Ep*E1/(E1+Ep)      ! [MPa] módulo de elastoplástico tangente
181 !
182 !*****!
183 ! 3.2 Configurando elemento finito
184 !*****!
185 *IF,tipoelem,eq,0,then
186     ET,1,PLANE182
187     KEYOPT,1,1,0
188     KEYOPT,1,3,1
189     KEYOPT,1,6,0
190     !
191 *ELSEIF,tipoelem,eq,1,then
192     ET,1,PLANE183
193     KEYOPT,1,1,0
194     KEYOPT,1,3,1
195     KEYOPT,1,6,0
196 *ENDIF
197 !
198 !*****!
199 ! 3.3 Material do maciço
200 !*****!
201 *IF,matmacico,eq,1,then
202     ! Definindo o material elástico do Ansys
203     MPTEMP,1,0
204     MPDATA,EX,1,,E1
205     MPDATA,PRXY,1,,nul
206 *ELSEIF,matmacico,eq,4,then
207     ! Definindo material usermat3D VM do Ansys
208     TB,USER,1,2,5
209     TBTEMP,1.0
210     TBDATA,1,matmacico,E1,nul,yield,youngt
211     TB,STATE,1,,8
212 *ELSEIF,matmacico,eq,5,then
213     ! Definindo material usermat3D_elástico
214     TB,USER,1,2,3
215     TBTEMP,1.0
216     TBDATA,1,matmacico,E1,nul
217     TB,STATE,1,,8
218 *ELSEIF,matmacico,eq,6,then
219     ! Definindo material usermat3D_EP
220     TB,USER,1,2,14
221     TBTEMP,1.0
222     TBDATA,1,matmacico,E1,nul
223     TBDATA,4,superficief,superficieg
224     TBDATA,6,fi,psi,
225     TBDATA,8,c1,c2,c3,eps1,eps2,eps3
226     TBDATA,14,Dalg
227     TB,STATE,1,,20
228 *ELSEIF,matmacico,eq,7,then
229     ! Definindo material usermat3D_VP
230     TB,USER,1,2,13
231     TBTEMP,1.0
232     TBDATA,1,matmacico,E1,nul

```

```

233      TBDATA, 4, superficievp, superficiegvp
234      TBDATA, 6, fivp, psivp,
235      TBDATA, 8, cvp, n1, eta, f0, thetavp
236      TB, STATE, 1,, 20
237 *ELSEIF, matmacico, eq, 8, then
238     ! Definindo material usermat3D_EPVP
239     TB, USER, 1, 2, 23
240     TBTEMP, 1.0
241     TBDATA, 1, matmacico, E1, nul
242     TBDATA, 4, superficief, superficieg
243     TBDATA, 6, fi, psi,
244     TBDATA, 8, c1, c2, c3, eps1, eps2, eps3
245     TBDATA, 14, Dalg
246     TBDATA, 15, superficievp, superficiegvp
247     TBDATA, 17, fivp, psivp
248     TBDATA, 19, cvp
249     TBDATA, 20, n1, eta, f0
250     TBDATA, 23, thetavp
251     TB, STATE, 1,, 20
252 *ENDIF
253 !
254 ! *****
255 ! 3.4 Material do revestimento
256 ! *****
257 *IF, matrev, EQ, 1, THEN
258   *DO, i, 2, nesc, 1
259     MPTEMP, 1, 0
260     MPDATA, EX, i,, E2
261     MPDATA, PRXY, i,, nu2
262   *ENDDO
263 *ENDIF
264 !
265 ! *****
266 ! 3.5 Modelo sólido
267 ! *****
268 ! Criando pontos chaves
269 K, 1, 0, 0, 0
270 K, 10, Ri-esp, 0, 0
271 K, 9, Ri, 0, 0
272 K, 8, R1, 0, 0
273 K, 7, Lx, 0, 0
274 K, 101, 0, Ly1, 0
275 K, 110, Ri-esp, Ly1, 0
276 K, 109, Ri, Ly1, 0
277 K, 108, R1, Ly1, 0
278 K, 107, Lx, Ly1, 0
279 K, 201, 0, Ly, 0
280 K, 210, Ri-esp, Ly, 0
281 K, 209, Ri, Ly, 0
282 K, 208, R1, Ly, 0
283 K, 207, Lx, Ly, 0
284 !
285 ! Criação das linhas e discretização da malha
286 L, 1, 10, nRv
287 L, 10, 9, nrev
288 L, 9, 8, nR1, mR1
289 L, 8, 7, nLx1, mLx1
290 L, 101, 110, nRv
291 L, 110, 109, nrev
292 L, 109, 108, nR1, mR1

```

```

293 L,108,107,nLx1,mLx1
294 L,201,210,nRv
295 L,210,209,nrev
296 L,209,208,nR1,mR1
297 L,208,207,nLx1,mLx1
298 L,1,101,nLy1
299 L,10,110,nLy1
300 L,9,109,nLy1
301 L,8,108,nLy1
302 L,7,107,nLy1
303 L,101,201,nLy2,mLy2
304 L,110,210,nLy2,mLy2
305 L,109,209,nLy2,mLy2
306 L,108,208,nLy2,mLy2
307 L,107,207,nLy2,mLy2
308 !
309 ! Criação das áreas
310 LSEL,S,LINE,,1
311 LSEL,A,LINE,,14
312 LSEL,A,LINE,,5
313 LSEL,A,LINE,,13
314 AL,ALL
315 CM,A1,AREA
316 !
317 LSEL,S,LINE,,2
318 LSEL,A,LINE,,15
319 LSEL,A,LINE,,6
320 LSEL,A,LINE,,14
321 AL,ALL
322 CMSEL,U,A1,AREA
323 CM,A2,AREA
324 !
325 LSEL,S,LINE,,3
326 LSEL,A,LINE,,16
327 LSEL,A,LINE,,7
328 LSEL,A,LINE,,15
329 AL,ALL
330 CMSEL,U,A2,AREA
331 CM,A3,AREA
332 !
333 LSEL,S,LINE,,4
334 LSEL,A,LINE,,17
335 LSEL,A,LINE,,8
336 LSEL,A,LINE,,16
337 AL,ALL
338 CMSEL,U,A3,AREA
339 CM,A4,AREA
340 !
341 LSEL,S,LINE,,5
342 LSEL,A,LINE,,19
343 LSEL,A,LINE,,9
344 LSEL,A,LINE,,18
345 AL,ALL
346 CMSEL,U,A4,AREA
347 CM,A5,AREA
348 !
349 LSEL,S,LINE,,6
350 LSEL,A,LINE,,20
351 LSEL,A,LINE,,10
352 LSEL,A,LINE,,19

```

```

353 AL,ALL
354 CMSEL,U,A5,AREA
355 CM,A6,AREA
356 !
357 LSEL,S,LINE,,7
358 LSEL,A,LINE,,21
359 LSEL,A,LINE,,11
360 LSEL,A,LINE,,20
361 AL,ALL
362 CMSEL,U,A6,AREA
363 CM,A7,AREA
364 !
365 LSEL,S,LINE,,8
366 LSEL,A,LINE,,22
367 LSEL,A,LINE,,12
368 LSEL,A,LINE,,21
369 AL,ALL
370 CMSEL,U,A7,AREA
371 CM,A8,AREA
372 !
373 !*****!
374 ! 3.6 Atribuindo malha
375 !*****!
376 ALLSEL,ALL
377 MSHKEY,1
378 MSHAPE,0,2D
379 AMESH,ALL
380 !
381 !*****!
382 ! 3.7 Condições de contorno
383 !*****!
384 ! Aplicação das tensões iniciais
385 ALLSEL,ALL
386 INISTATE, DEFINE,,,-pv,-ph,-ph,0,0,0
387 !
388 ! Simetria em x
389 LSEL,ALL
390 LSEL,S,LINE,,1
391 LSEL,A,LINE,,2
392 LSEL,A,LINE,,3
393 LSEL,A,LINE,,4
394 DL,ALL,,SYMM
395 !
396 ! Simetria em y
397 LSEL,ALL
398 LSEL,S,LINE,,13
399 LSEL,A,LINE,,18
400 DL,ALL,,SYMM
401 !
402 ! Pressão no topo do modelo
403 LSEL,ALL
404 LSEL,S,LINE,,9
405 LSEL,A,LINE,,10
406 LSEL,A,LINE,,11
407 LSEL,A,LINE,,12
408 SFL,ALL,PRESS,ph
409 !
410 ! Pressão na lateral direita do modelo
411 LSEL,ALL
412 LSEL,S,LINE,,22

```

```

413 LSEL,A,LINE,,17
414 SFL,ALL,PRESS,pv
415 !
416 !
417 !*****!
418 ! 3.8 Criando elementos do revestimento !
419 !*****!
420 ! Obs: esses elementos ficam sobrepostos ao do solo. Durante
421 ! a análise, conforme vai desligando os elementos do
422 ! solo vai-se ligando os do revestimento, se houver.
423 !
424 *IF,matrev,NE,0,THEN
425     ! Gerando elementos sobrepostos do revestimento
426     ESEL,ALL
427     ESEL,S,CENT,Y,0,ly1
428     ESEL,R,CENT,X,ri-esp,ri
429     EGEN,2,0,all,all,1,1,,,0,0,0
430     ESEL,ALL
431     NUMMRG,node, , , ,LOW
432 *ENDIF
433 !
434 !*****!
435 ! 3.9 Criando grupos de escavação-revestimento !
436 !*****!
437 !
438 ! Primeira escavação
439 i = 1
440 ESEL,ALL
441 yi=0
442 yf=npi*lp
443 ESEL,S,CENT,Y,yi,yf
444 ESEL,R,CENT,X,0,Ri
445 ESEL,R,MAT,,1
446 CM,esc %i%,ELEM
447 CMSEL,S,esc %i%,ELEM
448 !
449 ! Proximas escavações e resvestimentos
450 *DO,i,2,nesc,1
451     ! criando grupos com os elementos escavados do passo i
452     yi=yf
453     yf=(i-1)*lp+npi*lp
454     ESEL,S,CENT,Y,yi,yf
455     ESEL,R,CENT,X,0,ri
456     CM,esc %i%,ELEM
457     CMSEL,S,esc %i%,ELEM
458     !
459     *IF,matrev,NE,0,THEN
460         ! criando grupos com os elementos revestidos do passo i
461         *IF,i,EQ,2,THEN
462             yi=0
463         *ELSE
464             yi=npi*lp+(i-2)*lp-(lp+d0)
465         *ENDIF
466         yf=(i-1)*lp+npi*lp-(lp+d0)
467         ESEL,S,CENT,Y,yi,yf
468         ESEL,R,CENT,X,ri-esp,ri
469         ESEL,R,MAT,,2
470         MPCHG,i,ALL
471         CM,rev %i-1%,ELEM
472         CMSEL,S,rev %i-1%,ELEM

```

```

473      *ENDIF
474      !
475      ! revestindo o ultimo trecho
476      *IF,i,EQ,nesc,THEN
477          *IF,matrev,NE,0,THEN
478              *IF,revested0,EQ,1,THEN
479                  yi=Ly1-lp-d0
480                  yf=Ly1
481                  ESEL,S,CENT,Y,yi,yf
482                  ESEL,R,CENT,X,ri-esp,ri
483                  ESEL,R,MAT,,2
484                  MPCHG,i,ALL
485                  CM,rev %i%,ELEM
486                  CMSEL,S,rev %i%,ELEM
487          *ENDIF
488          *IF,revesteface,EQ,1,THEN
489              yi=Ly1
490              yf=Ly1+(lp)
491              ESEL,ALL
492              ESEL,S,CENT,Y,yi,yf
493              ESEL,R,CENT,X,0,ri
494              CM,soloface,ELEM
495              CMSEL,S,soloface,ELEM
496          !
497          fi=Ly1
498          ff=Ly1+(lp)
499          ESEL,ALL
500          ESEL,S,CENT,Y,yi,yf
501          ESEL,R,CENT,X,0,ri
502          EGEN,2,0,all,all,1,1,,,0,0,0
503          NUMMRG,node,,LOW
504          ESEL,R,MAT,,2
505          MPCHG,i,ALL
506          CM,revface,ELEM
507          CMSEL,S,revface,ELEM
508      *ENDIF
509      *ENDIF
510  *ENDIF
511 *ENDDO
512 !
513 ! criando grupo de elementos escavados
514 ESEL,S,CENT,Y,0,ly1
515 ESEL,R,CENT,X,0,Ri
516 CM,esctotal,ELEM
517 !
518 !*****!
519 ! 4. Solução
520 !*****!
521 /SOL
522 !
523 ! Configurações iniciais
524 *IF,nlg,eq,0,then
525     NLGEOM,OFF
526 *ELSEIF,nlg,eq,1,then
527     NLGEOM,ON
528 *ENDIF
529 *IF,nr,eq,1,then
530     NROPT,INIT
531 *ELSEIF,nr,eq,2,then
532     NROPT,FULL

```

```

533 *ELSEIF, nr, eq, 3, then
534     NROPT, UNSYM
535 *ENDIF
536 *IF, psc, eq, 0, then
537     PSCONTROL, ALL, OFF
538 *ELSEIF, nlg, eq, 1, then
539     PSCONTROL, ALL, ON
540 *ENDIF
541 OUTRES, SVAR, ALL
542 OUTRES, ALL, ALL
543 ALLSEL, ALL
544 !
545 ! Apaga os elementos do revestimento
546 *IF, matrev, NE, 0, THEN
547     ESEL, S, CENT, Y, 0, Ly1
548     ESEL, R, CENT, X, ri-esp, ri
549     ESEL, R, MAT,, 2, nesc
550     EKILL, ALL
551     ESEL, ALL
552     *IF, revesteface, EQ, 1, THEN
553         CMSEL, S, revface, ELEM
554         EKILL, ALL
555         ESEL, ALL
556     *ENDIF
557 *ENDIF
558 !
559 ! Verifica o equilibrio do maciço
560 *IF, soleq, EQ, 1, THEN
561     ANTYPE, 0, NEW
562     ESEL, ALL
563     TIME, 1
564     DELTIM, 0.5,, 0.5
565     SOLVE
566     FINISH
567     /POST1
568     RSYS, 1
569     PLNSOL, U, SUM, 0, 1.0
570     ESEL, ALL
571 *ENDIF
572 !
573 ! Solução com as escavações
574 /SOL
575 *IF, matmacico, LT, 0, AND, matrev, EQ, 0, THEN
576     !
577     ! Maciço elástico sem revestimento (não precisa escavar)
578     ANTYPE, 0, NEW
579     CMSEL, S, esctotal, ELEM
580     EKILL, ALL
581     SAVE
582     TIME, tp*nesc
583     DELTIM, dt,, dtmax
584     ESEL, ALLSOLVE
585     FINISH
586 *ELSE
587     !
588     ! Necessário fazer vários passos de escavação
589     ANTYPE, 0, NEW
590     !
591     ! Primeiro passo de escavação
592     i=1

```

```

594     CMSEL,S,esc %i%,ELEM
595     EKILL,ALL
596     ESEL,S,LIVE
597     EPLOT
598     TIME, tp*i
599     DELTIM,dt,,dtmax
600     ESEL,ALL
601     SOLVE
602     SAVE
603     FINISH
604     /POST1
605     RSYS,1
606     ESEL,S,LIVE
607     PLNSOL,U,SUM,0,1.0
608     !
609     ! Próximos passos de escavação
610     /SOL
611     ANTYPE,0,RESTART
612     *DO,i,2,nesc,1
613         CMSEL,S,esc %i%,ELEM
614         EKILL,ALL
615         ESEL,S,LIVE
616         EPLOT
617         !
618         ! Ativa o revestimento
619         *IF,matrev,NE,0,THEN
620             CMSEL,S,rev %i-1%,ELEM
621             EALIVE,ALL
622             *IF,revested0,EQ,1,THEN
623                 *IF,i,EQ,nesc,THEN
624                     CMSEL,S,rev %i%,ELEM
625                     EALIVE,ALL
626                 *ENDIF
627             *ENDIF
628             *IF,revesteface,EQ,1,THEN
629                 *IF,i,EQ,nesc,THEN
630                     CMSEL,S,revface,ELEM
631                     EALIVE,ALL
632                     CMSEL,S,soloface,ELEM
633                     EKILL,ALL
634                 *ENDIF
635             *ENDIF
636         *ENDIF
637         !
638         ESEL,S,LIVE
639         EPLOT
640         TIME, tp*i
641         DELTIM,dt,,dtmax
642         OUTRES,ESOL, LAST
643         ESEL,ALL
644         SAVE
645         SOLVE
646     *ENDDO
647     !
648     ! Análise após a escavação (modelos viscosos)
649     *IF,matmacico,GT,6,OR,matrev,GT,1,THEN
650         *DO,i,1,np2
651             TIME, tp*(nesc)+i*tp2
652             DELTIM,dtp2,,dtp2max

```

```

653           ESEL, ALL
654           SOLVE
655           SAVE*ENDDO
656       *ENDIF
657       FINISH
658   *ENDIF
659 !
660 ! *****
661 ! 5 Pós-processamento
662 ! *****
663 !
664 !
665 ! *****
666 ! 5.1 Alterando a cor dos elementos para pós processamento !
667 ! *****
668 ALLSEL, ALL
669 ASEL,S,AREA,,1
670 ASEL,A,AREA,,5
671 ASEL,A,AREA,,3
672 ASEL,A,AREA,,7
673 ESLA,S
674 /COLOR,ELEM,13,ALL
675 !
676 ALLSEL, ALL
677 ASEL,S,AREA,,2
678 ASEL,A,AREA,,6
679 ASEL,A,AREA,,4
680 ASEL,A,AREA,,8
681 ESLA,S
682 /COLOR,ELEM,14,ALL
683 !
684 ALLSEL, ALL
685 EPLOT
686 !
687 /RGB, INDEX, 100, 100, 100, 0
688 /RGB, INDEX, 80, 80, 80, 13
689 /RGB, INDEX, 60, 60, 60, 14
690 /RGB, INDEX, 0, 0, 0, 15
691 !
692 ! *****
693 ! 5.2 Gráfico de convergências
694 ! *****
695 /POST1
696 RSYS,5          ! sistema cilíndrico para os resultados
697 ESEL,S,LIVE     ! só elementos ativos
698 !
699 ! numero de analyses
700 *IF,matmacico,EQ,23,OR,matmacico,EQ,7,THEN
701     nanalises=nesc+np2
702 *ELSE
703     *IF,matmacico,EQ,8,THEN
704         nanalises=nesc+np2
705     *ELSE
706         nanalises=nesc
707     *ENDIF
708 *ENDIF
709 !
710 ! selecionando nós
711 ALLSEL, ALL
712 NSEL,S,LOC,Y,0,Ly
713 NSEL,R,LOC,X,0.999*Ri,1.001*Ri

```

```

714 ESEL,S,LIVE
715 !
716 ! dimensionando arrays
717 *GET,ncount,NODE,,COUNT
718 *GET,ntotal,NODE,,NUM,MAX
719 *DIM,convergence,TABLE,ncount,2+analises
720 *DIM,pressure,TABLE,ncount,2+analises
721 *DIM,coordy,ARRAY,ntotal
722 *DIM,u_x,ARRAY,ntotal
723 *DIM,s_x,ARRAY,ntotal
724 *DIM,n_sel,ARRAY,ntotal
725 !
726 ! Coloca lista de nós em ordem na primeira coluna
727 *VGET,convergence(1,1),NODE,,NLIST
728 *VGET,pressure(1,1),NODE,,NLIST
729 !
730 ! criando o vetor de coordenadas
731 *VGET,n_sel(1),NODE,1,NSEL
732 *VGET,coordy(1),NODE,1,LOC,y
733 *VOPER,coordy(1),coordy(1),MULT,1/Ri
734 !
735 ! Preenchendo o convergence e pressure com as coordenadas
736 *VMASK,n_sel(1)
737 *VFUN,convergence(1,2),COMP,coordy(1)
738 *VMASK,n_sel(1)
739 *VFUN,pressure(1,2),COMP,coordy(1)
740 !
741 ! preenchendo o convergence com a convergência
742 *DO,i,1,analises,1
743     ! identifica o passo
744     *IF,i,EQ,analises,THEN
745         SUBSET, LAST
746     *ELSE
747         *IF,matmacico,LT,1,AND,matrev,EQ,0,THEN
748             SUBSET, LAST
749         *ELSE
750             SUBSET,i,,,
751         *ENDIF
752     *ENDIF
753     !
754
755     !
756     ! Preenchendo o array com os deslocamentos radiais e tensões radiais
757     *VMASK,n_sel(1)
758     *VGET,u_x(1),NODE,1,U,X
759     *VOPER,u_x(1),u_x(1),MULT,-1/Ri*100
760     !
761     *VMASK,n_sel(1)
762     *VGET,s_x(1),NODE,1,S,X
763     *VOPER,s_x(1),s_x(1),MULT,1
764     !
765     ! Preenchendo o convergence e pressure
766     *VMASK,n_sel(1)
767     *VFUN,convergence(1,2+i),COMP,u_x(1)
768     *VMASK,n_sel(1)
769     *VFUN,pressure(1,2+i),COMP,s_x(1)
770 *ENDDO
771 !
772 ! ordena a tabela de acordo com a segunda coluna (das coordenadas)
773 *MOPER,ORDER,convergence,SORT,convergence(1,2)
774 *MOPER,ORDER,pressure,SORT,pressure(1,2)

```

```

775 !
776 ! Coleta o maior valor das convergências
777 *VSCFUN,umaximofinal,max,convergence(1,2+nanalises)
778 *VSCFUN,smaximofinal,max,pressure(1,2+nanalises)
779 *VSCFUN,sminimofinal,min,pressure(1,2+nanalises)
780 !
781 ! formatando grafico de convergencia
782 /RGB, INDEX, 100,100,100,0
783 /RGB, INDEX, 0,0,0,15
784 /AXLAB,X,Y/Ri
785 /AXLAB,Y,U=-u(r=Ri)/Ri (%)
786 /XRANGE,0,1y/Ri
787 /YRANGE,umaximofinal*1.2,0
788 /GROPT,DIVY,20
789 /GROPT,DIVX,10
790 /GROPT,DIG1,3
791 /GTHK,CURVE,1
792 /PLOPTS,INFO,on
793 !
794 ! graficando na tela do Ansys
795 /ERASE
796 *DO,i,1,nanalises,1
797     *IF,i,EQ,nanalises,THEN
798         /COLOR,CURVE,MAGE,1
799     *ELSEIF,i,EQ,nesc,THEN
800         /COLOR,CURVE,YELL,1
801     *ELSE
802         /COLOR,CURVE,LGRA,1
803     *ENDIF
804     *VPLOT,convergence(1,2),convergence(1,2+i)
805     /NOERASE
806 *ENDDO
807 /ERASE
808 !
809 !
810 ! formatando grafico do pressure
811 /RGB, INDEX, 100,100,100,0
812 /RGB, INDEX, 0,0,0,15
813 /AXLAB,X,Y/Ri
814 /AXLAB,Y,Sx (MPa)
815 /XRANGE,0,1y/Ri
816 /YRANGE,smaximofinal*1.2,sminimofinal*1.2
817 /GROPT,DIVY,20
818 /GROPT,DIVX,10
819 /GROPT,DIG1,3
820 /GTHK,CURVE,1
821 /PLOPTS,INFO,on
822 !
823 ! graficando na tela do Ansys
824 /ERASE
825 *DO,i,1,nanalises,1
826     *IF,i,EQ,nanalises,THEN
827         /COLOR,CURVE,MAGE,1
828     *ELSEIF,i,EQ,nesc,THEN
829         /COLOR,CURVE,YELL,1
830     *ELSE
831         /COLOR,CURVE,LGRA,1
832     *ENDIF
833     *VPLOT,pressure(1,2),pressure(1,2+i)
834     /NOERASE

```

```
835 *ENDDO
836 /ERASE
837 !
838 ! Escrevendo em arquivo as convergências
839 *CREATE,ansuitmp
840 *MWRITE,convergence,convergencias,txt
841 (1000(E10.4,3X))
842 *END
843 /INPUT,ansuitmp
844 !
845 ! Escrevendo em arquivo as pressões
846 *CREATE,ansuitmp
847 *MWRITE,pressure,pressure,txt
848 (1000(E10.4,3X))
849 *END
850 /INPUT,ansuitmp
851 !
852 ! Cria arquivo com os parâmetros
853 PARSAV,SCALAR,parametros,txt
```

## APÊNDICE B – SUBROTINA ELASTOPLÁSTICA-VISCOPLÁSTICA

Neste anexo encontra-se a subrotina *Usermat* do modelo constitutivo EPVP.

```

1      *deck,usermat3d    USERDISTRIB  parallel                               gal
2      subroutine usermat3d_EPVP (
3      &          matId, elemId,kDomIntPt, kLayer, kSectPt,
4      &          ldstep,isubst,keycut,
5      &          nDirect,nShear,ncomp,nStatev,nProp,
6      &          Time,dTime,Temp,dTemp,
7      &          stress,ustatev,dsdePl,sedEl,sedPl,epseq,
8      &          Strain,dStrain, epsPl, prop, coords,
9      &          var0, defGrad_t, defGrad,
10     &         tsstif, epsZZ, cutFactor,
11     &         var1, var2, var3, var4, var5,
12     &         var6, var7)
13
14 #include "impcom.inc"
15 ! *****
16 ! ** SUBROTINA: USERMAT3D_EPVP                                         ** !
17 ! **
18 ! ** Objetivo: atualiza as tensões, variáveis de estado e matriz      ** !
19 ! **                 constitutiva para o modelo constitutivo EPVP       ** !
20 ! **
21 ! ** Situação: OK (10/11/2021)                                         ** !
22 ! **
23 ! *****
24 !
25 ! *****
26 ! Declaração variáveis de entrada e saída da subrotina               !
27 ! *****
28
29      INTEGER
30      &          matId, elemId,
31      &          kDomIntPt, kLayer, kSectPt,
32      &          ldstep,isubst,keycut,
33      &          nDirect,nShear,ncomp,nStatev,nProp
34      DOUBLE PRECISION
35      &          Time,      dTime,      Temp,      dTemp,
36      &          sedEl,     sedPl,     epseq,     epsZZ,     cutFactor
37      DOUBLE PRECISION
38      &          stress  (ncomp ), ustatev (nStatev),
39      &          dsdePl (ncomp,ncomp),
40      &          Strain (ncomp ), dStrain (ncomp ),
41      &          epsPl  (ncomp ), prop     (nProp ),
42      &          coords (3),
43      &          defGrad (3,3),   defGrad_t(3,3),
44      &          tsstif  (2)
45      DOUBLE PRECISION var0, var1, var2, var3, var4, var5,
46      &          var6, var7
47
48      ! *****
49      ! Informações sobre as variáveis locais (precisão, tipo, escopo)   !
50      c      ! aux1           (dp,sc,l)                                     !
51      ! aux1           (dp,sc,l)                                     denominador no dlambdapV

```

```

51 c ! c (dp,sc,1)
52 c ! c1,c2,c3 (dp,sc,1)
53 c ! cp,ci,cr (dp,sc,1)
54 c ! czao (dp,sc,1)
55 c ! czaoVP (dp,sc,1)
56 c ! cVP (dp,sc,1)
57 c ! ddlam (dp,sc,1)
58 c ! dfds (dp,ar(ncomp),1)
59 c ! dfds_m (dp,ar(1,ncomp),1)
60 c ! dgds (dp,ar(ncomp),1)
61 c ! dgdsVP (dp,ar(ncomp),1)
62 c ! dgds_m (dp,ar(ncomp,1),1)
63 c ! dgds_VP_m (dp,ar(ncomp,1),1)
64 c ! dhdq,dfdq,dfdc,dcde (dp,sc,1)
65 c ! dgPHItD (dp,ar(ncomp,ncomp),1)
66 c ! dlam (dp,sc,1)
67 c ! dlambdavp (dp,sc,1)
68 c ! depsEP (dp,ar(ncomp),1)
69 c ! depsVP (dp,ar(ncomp),1)
70 c ! depsEPeq (dp,sc,1)
71 c ! DgftD (dp,ar(ncomp,ncomp),1)
72 c ! dsdeEl (dp,ar(ncomp,ncomp),1)
73 c ! dsdeElinv (dp,ar(ncomp,ncomp),1)

74 c ! dt1,dt2 (dp,sc,1)
75 c ! eps1,eps2,eps3 (dp,sc,1)
76 c ! epsEP (dp,ar(ncomp),1)
77 c ! epsVP (dp,ar(ncomp),1)
78 c ! epsEPeq (dp,sc,1)
79 c ! epsVPeq (dp,sc,1)
80 c ! f (dp,sc,1)
81 c ! fVP (dp,sc,1)
82 c ! fi (dp,sc,1)
83 c ! fiVP (dp,sc,1)
84 c ! ftDg (dp,sc,1)
85 c ! g1,g2,g3 (dp,ar(ncomp),1)
86 c ! i,j,k (int,sc,1)
87 c ! I1 (dp,sc,1)
88 c ! J2 (dp,sc,1)
89 c ! J3 (dp,sc,1)
90 c ! n,eta,f0 (dp,sc,1)
91 c ! ncompgt (int,sc,1)
92 c ! nrmax (int,sc,1)
93 c ! PHI (dp,sc,1)
94 c ! PHItDdeps (dp,sc,1)
95 c ! PHItDg (dp,sc,1)
96 c ! psi (dp,sc,1)
97 c ! psivp (dp,sc,1)
98 c ! s (dp,ar(ncomp),1)
99 c ! sigi (dp,ar(ncomp),1)
100 c ! sigmap (dp,ar(ncomp),1)
101 c ! stressn (dp,ar(ncomp),1)
102 c ! stresstrial (dp,ar(ncomp),1)
103 c ! theta (dp,sc,1)
104 c ! thetaVP (dp,sc,1)
105 c ! young (dp,sc,1)
106 c ! posn (dp,sc,1)
107 c ! q1,dq (dp,sc,1)
108 c ! superficief (int,sc,1)
109 c ! superficiefVP (int,sc,1)
110 c ! superficiegVP (int,sc,1)

coesão
cs do vetor de fluxo
coesão inicial, pico e residual
constante para def. plast. equiv.
constante para def. viscop. equiv.
coesão do modelo viscoplástico
ddlam pelo NR do corretor plástico
df/dsigma
df/dsigma^T para aplicar MATMUL
dg/dsigma
dg/dsigma viscoplástico
dg/dsigma para aplicar MATMUL
dg/dsigmaVP para aplicar MATMUL
dh/dq, df/dq, df/dc, dc/de
produto dg/dsigma*PHI^T*D
delta lambda elastoplástico
delta lambda viscoplastico
incremento deformações plásticas
incremento deformações viscoplásticas
incremen. defor. plástica equivalente
produto D*dg/dsigma*df/dsigma^T*D
matriz constitutiva elastica
inversa de dsdeEl

tempos limites do modelo viscoplástico
deformações plast. equiva. amol/endur.
deformações plásticas
deformações viscoplasticas
deformação plástica equivalente
deformação viscoplástica equivalente
função de escoamento elastoplástico
função de escoamento viscoplástico
ângulo de atrito elastoplástico
ângulo de atrito viscoplástico
produto df/dsigma^T*D*dg/dsigma
componentes diretoras do vetor de fluxo
contadores
primeiro invariante das tensões
segundo invariante do desviador
terceiro invariante do desviador
constantes do modelo de Perzyna
componentes de tensões iniciais
quantidade máxima de interações de NR
função de sobretensão
produto PHI^T*D*deps
produto dPHI/ds^T*D*dg/ds
angulo de dilatância
angulo de dilatância viscoplástico
tensor desviador
tensão inicial
tensão inicial a descontar
tensão no inicio do passo
tensão tentativa
ângulo de Lode
ângulo de Lode do modelo viscoplástico
módulo de Young
coeficiente de Poisson
variaveis auxiliares
f : 1-DPI, 2-DPII, 3-DPIII
fVP : 1-DPI, 2-DPII, 3-DPIII
g : 1-DPI, 2-DPII, 3-DPIII

```

```

111 c ! superficieg (int,sc,l) gVP : 1-DPI, 2-DPII, 3-DPIII
112 c ! vPi (dp,sc,l) Pi
113 c !
114 c !***** INFORMAÇÕES DAS VARIÁVEIS DE ESTADO !*****
115 c ! INFORMAÇÕES DAS VARIÁVEIS DE ESTADO !
116 c !***** !*****
117 c !
118 c ! nstatev = 20
119 c ! ustatev(1) = epsEPeq
120 c ! ustatev(2) = dlam
121 c ! ustatev(3) = c
122 c ! ustatev(4) = q
123 c ! ustatev(5) = f
124 c ! ustatev(6) = epsVPeq
125 c ! ustatev(7) = dt1
126 c ! ustatev(8) = dt2
127 c ! ustatev(9:ncomp) = espEP(1:ncomp)
128 c ! ustatev(15:ncomp) = espVP(1:ncomp)
129 c !
130 c ! OBS: as variáveis de estados podem ser plotadas na GUI do ANSYS
131 c ! utilizando o comando PLESOL,SVAR,[componente] ou PLNESOL,SVAR,[componente]
132 c !
133 c !***** !*****
134 c ! Declaração das variáveis locais !
135 c !***** !*****
136 c !
137 c ! Variáveis comuns a ambos modelos
138 c
139 c      INTEGER i, j, k, ncompgt
140 c      DOUBLE PRECISION
141 c          I1,J2,J3,theta,
142 c          c1,c2,c3,
143 c          vPi, young, posn
144 c          dstress(ncomp), sigi(ncomp),
145 c          dsdeEl(ncomp,ncomp),
146 c          s(ncomp), g1(ncomp),g2(ncomp),g3(ncomp)
147 c          PARAMETER (
148 c              vPi = 3.14159265358979323846d0
149 c          )
150 c
151 c      EXTERNAL
152 c          vzero, vmove, get_ElmData, get_ElmInfo,
153 c          matrizD, invars, normatensor, calcula_czao,
154 c          matinv, yield, c1c2c3, g1g2g3
155 c
156 c      !
157 c      ! variáveis do modelo viscoplástico
158 c      DOUBLE PRECISION
159 c          fVP, PHI,
160 c          dlambdapVP, PHItDdeps, PHItDg, aux1,
161 c          epsVPeq, depsVPeq, czaoVP
162 c
163 c      DOUBLE PRECISION
164 c          dgdsVP(ncomp), dPHIDs(ncomp),
165 c          dPHIDs_m(1,ncomp), dgdsVP_m(ncomp,1),
166 c          epsVP(ncomp), depsVP(ncomp),
167 c          dgPHItD(ncomp, ncomp),
168 c          sigmap(ncomp), dt1, dt2
169 c      INTEGER
170 c          superficiefVP, superficiegVP
171 c      DOUBLE PRECISION
172 c          CVP, fiVP, psiVP, n, eta, f0, thetaVP
173 c
174 c      ! variáveis do modelo elastoplástico

```

```

175      INTEGER
176      &          nrmax, dalg
177      DOUBLE PRECISION
178      &          tolEP,
179      &          f,
180      &          dlam,ddlamm,ftDg,
181      &          dhdq,dfdq,dqdc,dcde,
182      &          epsEPEq,depsEPEq,czao,
183      &          q,dq,Xi
184      DOUBLE PRECISION
185      &          dsdeElinv(ncomp,ncomp),
186      &          stresstrial(ncomp),
187      &          dgds(ncomp),dfds(ncomp),
188      &          dfds_m(1,ncomp),dgds_m(ncomp,1),
189      &          epsEP(ncomp),depsEP(ncomp),
190      &          DgftD(ncomp,ncomp),
191      &          stressn(ncomp)
192      INTEGER
193      &          superficief,superficieg
194      DOUBLE PRECISION
195      &          c,fi,psi,ci,cp,cr,eps1,eps2,eps3
196      PARAMETER      (nrmax = 100000,
197      &                      tolEP = 0.000000000000001d0
198      &                      )
199      EXTERNAL
200      &          calcula_Xi,calcula_dcde
201      !
202      ! *****
203      ! Entrada de dados
204      ! *****
205      !
206      ! Variavel que controla o método da bisseção caso não haja convergência
207      keycut      = 0
208      !
209      ! Propriedades elásticas
210      young      = prop(2)
211      posn       = prop(3)
212      !
213      ! Propriedades do modelo EP
214      superficief = prop(4)
215      superficieg = prop(5)
216      fi          = prop(6)*vPi/180
217      psi         = prop(7)*vPi/180
218      ci          = prop(8)
219      cp          = prop(9)
220      cr          = prop(10)
221      eps1        = prop(11)
222      eps2        = prop(12)
223      eps3        = prop(13)
224      dalg        = prop(14)
225      !
226      ! Propriedades do modelo VP
227      superficiefVP = prop(15)
228      superficiegVP = prop(16)
229      fiVP         = prop(17)*vPi/180
230      psiVP        = prop(18)*vPi/180
231      cVP          = prop(19)
232      n            = prop(20)
233      eta          = prop(21)
234      f0            = prop(22)

```

```

235     thetaVP      = prop(23)
236   c !
237   c ! Limpando variáveis do modelo EP
238   depsEP      = 0.0d0
239   depsEPEq    = 0.0d0
240   dq          = 0.0d0
241   f           = 0.0d0
242   stressn    = 0.0d0
243   dcde       = 0.0d0
244   k           = 0
245   c !
246   c ! Limpando variáveis do modelo VP
247   depsVP      = 0.0d0
248   fVP         = 0.0d0
249   dt1         = 0.0d0
250   dt2         = 0.0d0
251   c !
252   c !*****!
253   c ! Coletando variáveis de estado e deformações plásticas do passo convergido!
254   c !*****!
255   c ! Modelo EP
256   epsEPEq    = ustatev(1)
257   dlam        = ustatev(2)
258   c           = ustatev(3)
259   q           = ustatev(5)
260   CALL vmove(ustatev(9), epsEP(1), ncomp)
261   c !
262   c ! Inicializa o valor da coesão
263   IF(c.EQ.0.0d0)c=ci
264   IF(q.EQ.0.0d0)THEN
265     CALL calcula_Xi(superficief,fi,Xi)
266     q=Xi*ci
267   ENDIF
268   c !
269   c ! Modelo VP
270   epsVPEq    = ustatev(6)
271   CALL vmove(ustatev(15), epsVP(1), ncomp)
272   c !
273   c !*****!
274   c ! Calculo da matriz constitutiva
275   c !*****!
276   dsdeEl      = 0.0d0
277   CALL MatrizD(young, posn, ncomp, dsdeEl)
278   dsdePl      = dsdeEl
279   c !
280   c !*****!
281   c ! Calculo módulo de rigidez transversal para hourglass
282   c !*****!
283   tsstif(1) = 0.5d0*(young /(1.0d0+posn))
284   c !
285   c !*****!
286   c ! Coletando tensões iniciais
287   c !*****!
288   call get_ElmInfo('NCOMP', ncompgt)
289   call vzero(sig(1),ncompgt)
290   call get_ElmData ('ISIG', elemId,kDomIntPt, ncompgt, sigi)
291   c !
292   c !*****!
293   c ! Calculo da tensão no passo n
294   c !*****!

```

```

295     stress = MATMUL(dsdeEl(1:ncomp,1:ncomp),
296     &           strain(1:ncomp)
297     &           -epsVP(1:ncomp)
298     &           -epsEP(1:ncomp))+sigi
299 C   !
300 C   ! *****
301 C   ! Calculo da função de sobretensão
302 C   ! *****
303 PHI = 0.0d0
304 CALL invars(stress,ncomp,I1,J2,J3,theta,s)
305 CALL yield(superficiefVP,I1,J2,theta,cVP,fiVP,fVP)
306 PHI = (fVP/f0)**n
307 IF(PHI.LE.0.0d0) PHI = 0.0d0
308 C   !
309 C   ! *****
310 C   ! Calculo dgdsvp
311 C   ! *****
312 CALL glg2g3(s,ncomp,J2,g1,g2,g3)
313 CALL c1c2c3(J2,theta,superficiegVP,psiVP,c1,c2,c3)
314 dgdsVP = c1*g1 + c2*g2 + c3*g3
315 C   !
316 C   ! *****
317 C   ! Calculo dPHIDs, PHItDg, PHItDdeps, aux1
318 C   ! *****
319 CALL c1c2c3(J2,theta,superficiefVP,psiVP,c1,c2,c3)
320 dPHIDs = c1*g1 + c2*g2 + c3*g3
321 IF(PHI.LE.0.0d0) dPHIDs = 0.0d0
322 C   !
323 C   ! *****
324 C   ! Verificação do incremento de tempo
325 C   ! *****
326 IF(PHI.GT.0.0d0) THEN
327 dt1 = 4.0d0/3.0d0*eta/PHI*(1.0d0+posn)/young*DSQRT(3.0d0*J2)
328 dt2 = eta*f0/(n*(fVP/f0)**(n-1))*(
329 &           (1.0d0+posn)*(1.0d0-2.0d0*posn)/young*
330 &           ((3.0d0-DSIN(fiVP))**2)/
331 &           (3.0d0/4.0d0*(1.0d0-2.0d0*posn)*(3.0d0-DSIN(fiVP))**2+
332 &           6.0d0*(1.0d0+posn)*DSIN(fiVP)**2)
333 IF(dtme.GT.dt1.OR.dtme.GT.dt2) THEN
334     keycut = 1
335     RETURN
336 ENDIF
337 ENDIF
338 C   !
339 C   ! *****
340 C   ! Atualização do módulo constitutivo
341 C   ! *****
342 PHItDg = DOT_PRODUCT(dPHIDs,MATMUL(dsdeEl,dgdsVP))
343 aux1 = (eta/dtme + thetaVP*PHItDg)
344 dPHIDs_m(1,:) = dPHIDs
345 dgdsVP_m(:,1) = dgdsVP
346 DgPHItD = MATMUL(MATMUL(
347 &           (MATMUL(dsdeEl,dgdsVP_m),dPHIDs_m),dsdeEl)
348 dsdePl = dsdePl - thetaVP*DgPHItD/aux1
349 C   !
350 C   ! *****
351 C   ! Calculo do p
352 C   ! *****
353 sigmap = PHI*MATMUL(dsdeEl(1:ncomp,1:ncomp),
354 &           dgdsVP(1:ncomp))/aux1
355 C   !

```

```

356 c ! *****
357 c ! Calculo da deformação viscoplastica
358 c ! *****
359 PHItDdeps = DOT_PRODUCT(dPHIDs,MATMUL(dsdeEl,dstrain))
360 dlambdavP = (PHI + thetaVP*PHItDdeps)/aux1
361 depsVP = dlambdavP*dgdsVP
362 c !
363 c ! Calcula as deformações viscoplasticas totais
364 epsVP = epsVP + depsVP
365 CALL normatensor(epsVP,ncomp,epsVPeq)
366 CALL calcula_Czao(superficielfVP,fiVP,CzaoVP)
367 epsVPeq = CzaoVP*epsVPeq
368 c !
369 c !
370 c ! *****
371 c ! Calculo preditor elástico
372 c ! *****
373 stresstrial = 0.0d0
374 stresstrial = MATMUL(dsdeEl(1:ncomp,1:ncomp),
375 & strain(1:ncomp)+dstrain(1:ncomp)
376 & -epsEP(1:ncomp)-epsVP(1:ncomp)) + sigi
377 stress = stresstrial
378 c !
379 c ! *****
380 c ! Calcula função de escoamento
381 c ! *****
382 CALL invars(stresstrial,ncomp,I1,J2,J3,theta,s) ! Invariante
383 CALL yield(superficielf,I1,J2,theta,c,fi,f) ! função de escoamento
384 c !
385 c ! *****
386 c ! Verifica o critério de escoamento
387 c ! *****
388 IF(f.GT.0.0d0)THEN
389 c !
390 c ! Aplica o corretor plástico
391 c !
392 c ! *****
393 c ! Calcula dgds
394 c ! *****
395 dgds = 0.0d0
396 stressn = stresstrial
397 CALL invars(stressn,ncomp,I1,J2,J3,theta,s)
398 CALL g1g2g3(s,ncomp,J2,g1,g2,g3)
399 CALL c1c2c3(J2,theta,superficiieg,psi,c1,c2,c3)
400 dgds = c1*g1 + c2*g2 + c3*g3
401 c !
402 c ! *****
403 c ! Calcula dhdq referente ao endurecimento e amolecimento
404 c ! *****
405 dhdq = 0.0d0
406 dfdq = -1.0d0
407 CALL calcula_Xi(superficielf,fi,Xi)
408 dqdc = Xi
409 CALL calcula_dcde(ci,cp,cr,eps1,eps2,eps3,epsEPEq,dcde)
410 dhdq = -dfdq*dqdc*dcde
411 c !
412 c ! *****
413 c ! Interações de NR local do modelo constitutivo
414 c ! *****
415 k = 0
416 DO

```

```

417 c ! *****
418 c ! Calculo de ddlamb !
419 c ! *****
420 c !
421 c ! Calcula dfds
422 dfds = 0.0d0
423 CALL invars(stress,ncomp,I1,J2,J3,theta,s)
424 CALL g1g2g3(s,ncomp,J2,g1,g2,g3)
425 CALL c1c2c3(J2,theta,superficief,fi,c1,c2,c3)
426 dfds = c1*g1 + c2*g2 + c3*g3
427 c !
428 c ! Calcula dfdq
429 dfdq = -1.0d0
430 !
431 c ! Calcula denominador de ddlamb
432 ftDg = DOT_PRODUCT(dfds,MATMUL(dsdeEl,dgds))
433 c !
434 c ! Calcula ddlamb
435 ddlam = f/(ftDg - dfdq*dhdq)
436 c !
437 c ! Calculo do corretor plástico !
438 c ! *****
439 c ! Incremento das tensões e do dlam !
440 dstress = -ddlam*MATMUL(dsdeEl,dgds)
441 dq = -ddlam*(-dhdq)
442 c !
443 c ! *****
444 c ! Incremento das tensões e do dlam !
445 c ! *****
446 stress = stress + dstress
447 c = c + dq/Xi
448 dlam = dlam + ddlam
449 q = q + dq
450 k = k + 1
451 c !
452 c ! *****
453 c ! Calcula deformação plástica equivalente !
454 c ! *****
455 call matinv(ncomp,dsdeEl,dsdeElinv)
456 depsEP = depsEP-MATMUL(dsdeElinv,dstress)
457 c !
458 c ! Verifica critério de escoamento !
459 c ! *****
460 c ! *****
461 CALL invars(stress,ncomp,I1,J2,J3,theta,s)
462 CALL yield(superficief,I1,J2,theta,c,fi,f)
463 IF(f.LE.toleP) EXIT
464 c !
465 c ! Caso atinja o número de iterações limites, faça a bisseção
466 IF(k.EQ.nrmax) THEN
467 keycut = 1
468 RETURN
469 ENDIF
470 ENDDO
471 c !
472 c ! *****
473 c ! Atualizando o módulo constitutivo !
474 c ! *****
475 IF(dalg.EQ.1) THEN
476 dfds_m(1,:) = dfds
477 dgds_m(:,1) = dgds

```

```

478         DgftD= MATMUL(MATMUL(MATMUL(dsdeEl,dgds_m),dfds_m),dsdeEl)
479         dsdePl = dsdePl - DgftD/(ftDg - dfdq*dhdq)
480     ENDIF
481   c !
482   ELSE
483     depsEp = 0.0d0
484   ENDIF
485   c !
486   c !*****Guardando deformações plásticas totais*****!
487   c ! Guardando deformações plásticas totais
488   c !*****Guardando deformações plásticas totais*****!
489   c !
490   c ! Calcula as deformações plásticas totais
491   epsEP = epsEP + depsEP
492   CALL normatensor(epsEP,ncomp,epsEPEq)
493   CALL calcula_Czao(superficief,fi,Czao)
494   epsEPEq = Czao*epsEPEq
495   c !
496   c ! Retorna as deformações inelásticas totais e equivalentes (só tem plásticas)
497   epsPl = epsEP+epsVP
498   epseq = epsEPEq+epsVPEq
499   c !
500   c ! Calcula o trabalho elástico
501   sedEl = 0.0d0
502   sedEl = 1.0d0/2.0d0*
503   &          DOT_PRODUCT(stress,strain+dstrain-epsPl-epsVP)
504   c !
505   c !
506   c ! Calcula o trabalho inelástico (só tem plástico)
507   CALL normatensor(depsEP,ncomp,depsEPEq)
508   CALL calcula_Czao(superficief,fi,Czao)
509   depsEPEq = Czao*depsEPEq
510   CALL normatensor(depsVP,ncomp,depsVPEq)
511   CALL calcula_Czao(superficief,fi,Czao)
512   depsVPEq = Czao*depsVPEq
513   sedPl = sedPl + (q)*depsEPEq+depsVPEq
514   c !
515   c ! Guarda valores nas variáveis de estado
516   ustatev(1) = epsEPEq
517   ustatev(2) = dlam
518   ustatev(3) = c
519   ustatev(4) = q
520   ustatev(5) = f
521   ustatev(6) = epsVPEq
522   ustatev(7) = dt1
523   ustatev(8) = dt2
524   CALL vmove(epsEP(1), ustatev(9), ncomp)
525   CALL vmove(epsVP(1), ustatev(15), ncomp)
526   c !
527   RETURN
528   END
529   !

```

```

530      SUBROUTINE matrizD(E,Poisson,ncomp,D)
531      C ! *****
532      C ! ** Função: matrizD
533      C ! **
534      C ! ** Objetivo: calcula a matriz consitutiva do material isotrópico
535      C ! **           adaptado de Smith, Griffiths e Margetts (2014, p.42-44)
536      C ! **
537      C ! ** Situação: (28-09-2016) OK
538      C ! **
539      C ! *****
540      IMPLICIT NONE
541      DOUBLE PRECISION E           ! módulo de elasticidade
542      DOUBLE PRECISION Poisson     ! coeficiente de Poisson
543      INTEGER ncomp               ! numero de componentes
544      DOUBLE PRECISION D(ncomp,ncomp) ! matriz constitutiva elástica isotrópica
545      C !
546      D=0.1d0
547      D(1,1)=(E*(1.0d0-Poisson))/((1.0d0+Poisson)*(1.0d0-2.0d0*Poisson))
548      D(1,2)=(E*Poisson)/((1.0d0+Poisson)*(1.0d0-2.0d0*Poisson))
549      D(1,3)=D(1,2)
550      D(2,1)=D(1,2)
551      D(2,2)=D(1,1)
552      D(2,3)=D(1,2)
553      D(3,1)=D(1,3)
554      D(3,2)=D(2,3)
555      D(3,3)=D(1,1)
556      D(4,4)=(E)/((1.0d0+Poisson)*2.0d0)
557      C !
558      IF(ncomp.EQ.6)THEN
559          D(ncomp-1,ncomp-1)=D(4,4)
560          D(ncomp,ncomp)=D(4,4)
561      ENDIF
562      C !
563      END SUBROUTINE MatrizD
564      C !
565      SUBROUTINE invars(stress,ncomp,I1,J2,J3,theta,s)
566      C ! *****
567      C ! ** Subrotina: invars
568      C ! **
569      C ! ** Objetivo: calcula os invariantes do tensor de tensões e o tensor
570      C ! **           desviador. Adaptado de Chen e Han (1998, p.57-72)
571      C ! **
572      C ! ** Situação: (10-11-2021) OK
573      C ! **
574      C ! *****
575      IMPLICIT NONE
576      DOUBLE PRECISION stress(ncomp) ! tensões
577      INTEGER ncomp                ! numero de componentes
578      DOUBLE PRECISION I1          ! primeiro invariante do tensor de tensões
579      DOUBLE PRECISION J2,J3        ! segundo e terceiro invariante do desviador
580      DOUBLE PRECISION theta       ! angulo de Lode
581      DOUBLE PRECISION s(6)        ! desviador
582      DOUBLE PRECISION p,q         ! pressão hidrostática e tensão eq. de vm
583      DOUBLE PRECISION sine        ! variavel auxiliar
584      C !
585      C ! Inicializando variaveis
586      I1      = 0.0d0
587      J2      = 0.0d0
588      p       = 0.0d0
589      q       = 0.0d0
590      s       = 0.0d0

```

```

591      J3      = 0.0d0
592      theta   = 0.0d0
593      sine    = 0.0d0
594  c !
595  c ! Calculo do I1 (p. 53)
596  I1 = stress(1) + stress(2) + stress(3)
597  c !
598  c ! Calculo do J2 (p. 58)
599  J2 = 1/6.0d0*((stress(1)-stress(2))**2+(stress(2)-stress(3))**2+
600 &     (stress(3)-stress(1))**2)+
601 &     stress(4)**2
602  c !
603  IF(ncomp.EQ.6)THEN
604      J2 = J2 + stress(ncomp-1)**2+stress(ncomp)**2
605  ENDIF
606  c !
607  c ! Calculo do p (p. 57)
608  p = 1.0d0/3.0d0*I1
609  c !
610  c ! Calculo do desviador s (p. 57)
611  s(1) = stress(1) - p
612  s(2) = stress(2) - p
613  s(3) = stress(3) - p
614  s(4) = stress(4)
615  IF(ncomp.EQ.6)THEN
616      s(ncomp-1) = stress(ncomp-1)
617      s(ncomp) = stress(ncomp)
618  ENDIF
619  c !
620  c ! Calculo do J3 (p. 58)
621  J3 = s(1)*s(2)*s(3)-s(3)*s(4)*s(4)
622  IF(ncomp.EQ.6)THEN
623      J3 = J3 - s(1)*s(ncomp-1)*s(ncomp-1)-s(2)*s(ncomp)*s(ncomp)+
624 &         2.0d0*s(4)*s(ncomp-1)*s(ncomp)
625  ENDIF
626  c !
627  c ! Calculo do ângulo de Lode (p. 70) e Owen e Hinton (1980, p.229)
628  q = DSQRT(3.0d0*J2)
629  IF(q < 1.E-7)THEN
630      theta = 0.0d0
631  ELSE
632      sine = -3.0d0*DSQRT(3.0d0)*J3/(2.0d0*DSQRT(J2)**3)
633      IF(sine>1.0d0)sine=1.0d0
634      IF(sine<-1.0d0)sine=-1.0d0
635      theta=DASIN(sine)/3.0d0
636  END IF
637  c !
638  END SUBROUTINE
639  c !
640  SUBROUTINE g1g2g3(s,ncomp,J2,g1,g2,g3)
641  c !*****!
642  c !** Subrotina: g1g2g3
643  c !**
644  c !** Objetivo: calcula as direções do vetor de fluxo. Adaptado de Owen e
645  c !** Hinton (1980, p.231 e 233)
646  c !**
647  c !** Situação: (10-11-2021) OK
648  c !**
649  c !*****!
650  IMPLICIT NONE
651  DOUBLE PRECISION s(ncomp)           ! desviador

```

```

652      INTEGER          ncomp           ! numero de componentes
653      DOUBLE PRECISION J2            ! segundo invariante do desviador
654      DOUBLE PRECISION g1(ncomp), g2(ncomp), g3(ncomp)
655      c
656      ! Inicializando variaveis
657      g1 = 0.0d0
658      g2 = 0.0d0
659      g3 = 0.0d0
660      c
661      ! Calculo do g1
662      g1(1) = 1.0d0
663      g1(2) = 1.0d0
664      g1(3) = 1.0d0
665      c
666      ! Calculo do g2
667      g2(1) = s(1)
668      g2(2) = s(2)
669      g2(3) = s(3)
670      g2(4) = 2.0d0*s(4)
671      IF(ncomp.EQ.6)THEN
672          g2(ncomp-1) = 2.0d0*s(ncomp-1)
673          g2(ncomp) = 2.0d0*s(ncomp)
674      ENDIF
675      IF(J2.EQ.0.0d0)THEN
676          g2 = 0.0d0
677      ELSE
678          g2 = 1.0d0/(2.0d0*DSQRT(J2))*g2
679      ENDIF
680      c
681      ! Calculo do g3
682      g3(1) = s(2)*s(3) + J2/3.0d0
683      g3(2) = s(1)*s(3) + J2/3.0d0
684      g3(3) = s(1)*s(2) - s(4)**2 + J2/3.0d0
685      g3(4) = 2.0d0*(-s(3)*s(4))
686      IF(ncomp.EQ.6)THEN
687          g3(1) = g3(1) - s(ncomp-1)**2
688          g3(2) = g3(2) - s(ncomp)**2
689          g3(4) = g3(4) + 2.0d0*s(ncomp-1)*s(ncomp)
690          g3(ncomp-1) = 2.0d0*(s(ncomp)*s(4)-s(1)*s(ncomp-1))
691          g3(ncomp) = 2.0d0*(s(4)*s(ncomp-1)-s(2)*s(ncomp))
692      ENDIF
693      c
694      END SUBROUTINE
695      c
696      !
697      SUBROUTINE c1c2c3(J2,theta,superficie,fi,c1,c2,c3)
698      ! ****
699      !** Subrotina: c1c2c3
700      !**
701      !** Objetivo: calcula a magnitude das componentes do vetor de fluxo.
702      !** Adaptado de Bernaud (1991, p.90, 91)
703      !** Adaptado de Owen e Hinton (1980, p.231)
704      !**
705      !** Situação: (10-11-2021) OK
706      !**
707      ! ****
708      IMPLICIT NONE
709      DOUBLE PRECISION J2           ! segundo invariante do desviador
710      DOUBLE PRECISION theta        ! ângulo de Lode
711      DOUBLE PRECISION fi           ! Ângulo de atrito
712      INTEGER          superficie   ! 1-DPI, 2-DPII, 3-DPIII

```

```

713      DOUBLE PRECISION c1,c2,c3          ! magnitude das componentes do vetor
714      DOUBLE PRECISION beta1,beta2,beta3 ! parâmetros do DP
715      DOUBLE PRECISION k                ! coeficiente de empuxo
716  c   !
717  c   ! Seleciona o modelo
718  SELECT CASE (superficie)
719    CASE(1)
720      !
721      ! DPI
722      k = (1.0d0+DSIN(fi))/(1.0d0-DSIN(fi))
723      c1 = (k-1.0d0)/3.0d0
724      c2 = (k+2.0d0)/DSQRT(3.0d0)
725      c3 = 0.0d0
726  c   !
727  CASE(2)
728  c   !
729  c   ! DPII
730  k = (1.0d0+DSIN(fi))/(1.0d0-DSIN(fi))
731  c1 = (k-1.0d0)/3.0d0
732  c2 = (2.0d0*k+1.0d0)/DSQRT(3.0d0)
733  c3 = 0.0d0
734  c   !
735  CASE(3)
736  c   !
737  c   ! DPIII - Owen e Hinton (1980, p.231)
738  c1 = 2.0d0*DSIN(fi)/(DSQRT(3.0d0)*(3.0d0+DSIN(fi)))
739  c2 = 1.0d0
740  c3 = 0.0d0
741  c   !
742  ENDSELECT
743  END SUBROUTINE
744  c   !
745  SUBROUTINE yield(superficie,I1,J2,theta,c,fi,f)
746  c   ! **** Subrotina: yield ****!
747  c   !**
748  c   !**
749  c   !** Objetivo: calcula o critério de escoamento. ****!
750  c   !**           Adaptado de Bernaud (1991, p.90, 91) ****!
751  c   !**           Adaptado de Souza Neto, Peri, Owen (2008, p. 162-167) ****!
752  c   !**
753  c   !** Situação: (10-11-2021) OK ****!
754  c   !**
755  c   ! ****
756  IMPLICIT NONE
757  INTEGER         superficie        ! 1-DPI, 2-DPII, 3-DPIII
758  DOUBLE PRECISION I1              ! primeiro invariante do tensor de tensões
759  DOUBLE PRECISION J2              ! segundo invariante do desviador
760  DOUBLE PRECISION theta          ! ângulo de Lode
761  DOUBLE PRECISION c              ! coesão
762  DOUBLE PRECISION fi             ! Ângulo de atrito
763  DOUBLE PRECISION f              ! função de escoamento
764  DOUBLE PRECISION beta1,beta2,beta3 ! Parametros para DP
765  DOUBLE PRECISION k              ! coeficiente de empuxo
766  c   !
767  c   ! Seleciona o modelo
768  SELECT CASE (superficie)
769  CASE(1)
770  c   !
771  c   ! DPI
772  k = (1.0d0+DSIN(fi))/(1.0d0-DSIN(fi))
773  betal = (k-1.0d0)/3.0d0

```

```

774      beta2 = (k+2.0d0)/DSQRT(3.0d0)
775      beta3 = 2.0d0*DSQRT(k)*c
776      f = beta1*I1 + beta2*DSQRT(J2)-beta3
777      !
778      CASE(2)
779      !
780      ! DPII
781      k = (1.0d0+DSIN(fi))/(1.0d0-DSIN(fi))
782      beta1 = (k-1.0d0)/3.0d0
783      beta2 = (2.0d0*k+1.0d0)/DSQRT(3.0d0)
784      beta3 = 2.0d0*DSQRT(k)*c
785      f = beta1*I1 + beta2*DSQRT(J2)-beta3
786      !
787      CASE(3)
788      !
789      ! DPIII Souza Neto, Peri, Owen (2008, p. 162-167)
790      beta1 = 2.0d0*DSIN(fi)/(DSQRT(3.0d0)*(3.0d0+DSIN(fi)))
791      beta2 = 1.0d0
792      beta3 = 6.0d0*DCOS(fi)/(DSQRT(3.0d0)*(3.0d0+DSIN(fi)))*c
793      f = beta1*I1 + beta2*DSQRT(J2)-beta3
794      !
795      ENDSELECT
796      END SUBROUTINE
797      !
798      subroutine matinv(n,a,ainv)
799      ! *****
800      !*** Subrotina: matinv
801      !**
802      !** Objetivo: inverte uma matriz pela técnica de pivotamento
803      !**
804      !** Situação: (26-10-2016) OK
805      !**
806      ! *****
807      INTEGER          n          ! dimensão do sistema
808      DOUBLE PRECISION a(n,n)    ! matriz dos coeficientes
809      DOUBLE PRECISION ainv(n,n) ! matriz inversa
810      DOUBLE PRECISION b(n,2*n)  ! matriz aumentada
811      DOUBLE PRECISION pivot   ! pivô
812      DOUBLE PRECISION xnum    ! auxiliar
813      INTEGER          i,j,k    ! contador
814      !
815      ! Fazer matriz aumentada
816      do i=1,n
817          do j=1,n
818              b(i,j) = 0.0d0
819              b(i,j+n) = 0.0d0
820              b(i,j)=a(i,j)
821              if(i.eq.j)then
822                  b(i,j+n)=1.0d0
823              endif
824          enddo
825      enddo
826      !
827      do i=1,n
828          ! Escolher o elemento não nulo mais a esquerda como pivot
829          do j=1,n
830              if (dabs(b(i,j)).gt.0.0d0)then
831                  pivot=b(i,j)
832                  exit
833              endif
834          enddo

```

```

835 c !
836 c ! Passo 1: alterar o pivo escolhido
837 do j=1,2*n
838     b(i,j)=b(i,j)/pivot
839 enddo
840 pivot=b(i,i)
841 c !
842 c ! Passo 2: mudando o restante da coluna do pivo para 0,
843 c     adicionando a cada linha um multiplo adequado do pivot
844 do k=1,n
845     if(k.ne.i)then
846         xnum=b(k,i)/pivot
847         do j=1,2*n
848             b(k,j)=b(k,j)-xnum*b(i,j)
849         enddo
850     endif
851 enddo
852 enddo
853 c !
854 c ! Prepara a matriz inversa final
855 do i=1,n
856     do j=1,n
857         ainv(i,j)=b(i,j+n)
858     enddo
859 enddo
860 return
861 end
862 c !
863 SUBROUTINE normatensor(tensor,ncomp,norma)
864 c !*****!
865 c !** Subrotina: normatensor
866 c !**
867 c !** Objetivo: calcula a norma de um tensor escrito em notação de Voigt
868 c !**
869 c !** Situação: (10-11-2021) OK
870 c !**
871 c !*****!
872 IMPLICIT NONE
873 INTEGER ncomp
874 DOUBLE PRECISION tensor(ncomp)
875 DOUBLE PRECISION norma
876 c !
877 IF(ncomp.EQ.6)THEN
878     norma = DSQRT(tensor(1)**2 + tensor(2)**2 + tensor(3)**2 +
879 &                 2*((tensor(4))**2 +
880 &                 (tensor(5))**2 + (tensor(6))**2))
881 ELSEIF(ncomp.EQ.4)THEN
882     norma = DSQRT(tensor(1)**2 + tensor(2)**2 + tensor(3)**2 +
883 &                 2*(tensor(4)**2))
884 ELSE
885 ENDIF
886 c !
887 END SUBROUTINE

```

```

888 c !
889 c SUBROUTINE calcula_Czao(superficie,fi,Czao)
890 c !*****
891 c !** Subrotina: Czao
892 c !**
893 c !** Objetivo: calcula o C utilizado no calculo da deformação plástica
894 c !** efetiva. Adaptado de Chen e Han (1988, p. 257-259).
895 c !**
896 c !** Situação: (10-11-2021) OK
897 c !**
898 c !*****
899 IMPLICIT NONE
900 INTEGER superficie ! 1-DPI, 2-DPII, 3-DPIII
901 DOUBLE PRECISION fi ! angulo de atrito
902 DOUBLE PRECISION Czao ! constante da deformação plástica efetiva
903 DOUBLE PRECISION beta ! constante referente a pressão hidrostática
904 c !
905 c ! Seleciona o modelo
906 SELECT CASE (superficie)
907 CASE(1)
908 c !
909 c ! DPI
910 c beta = 2.0d0*DSIN(fi)/(DSQRT(3.0d0)*(3.0d0-DSIN(fi)))
911 c !
912 CASE(2)
913 c !
914 c ! DPII
915 c beta = 2.0d0*DSIN(fi)/(DSQRT(3.0d0)*(3.0d0+DSIN(fi)))
916 c !
917 CASE(3)
918 c !
919 c ! DPIII
920 c beta = 2.0d0*DSIN(fi)/(DSQRT(3.0d0)*(3.0d0+DSIN(fi)))
921 c !
922 ENDSELECT
923 Czao = (beta+1.0d0/DSQRT(3.0d0))/(
924 & (DSQRT(3.0d0*beta**2+1.0d0/2.0d0)))
925 END SUBROUTINE
926 c !
927 SUBROUTINE calcula_Xi(superficie,fi,Xi)
928 c !*****
929 c !** Subrotina: calcula_Xi
930 c !**
931 c !** Objetivo: calcula Xi
932 c !** Adaptado de Potts e Zdravkovic (1999, p. 158)
933 c !**
934 c !**
935 c !** Situação: (10-11-2021) OK
936 c !**
937 c !*****
938 IMPLICIT NONE
939 INTEGER superficie ! 1-DPI, 2-DPII, 3-DPIII
940 DOUBLE PRECISION fi ! angulo de atrito
941 DOUBLE PRECISION Xi ! derivada de f em relação a c
942 DOUBLE PRECISION k ! coeficiente de empuxo
943 !
944 SELECT CASE (superficie)
945 CASE(1)
946 k = (1.0d0+DSIN(fi))/(1.0d0-DSIN(fi))
947 Xi = 2.0d0*DSQRT(k)
948 CASE(2)

```

```

949         k = (1.0d0+DSIN(fi))/(1.0d0-DSIN(fi))
950         Xi = 2.0d0*DSQRT(k)
951 CASE(3)
952     k = (1.0d0+DSIN(fi))/(1.0d0-DSIN(fi))
953     Xi = 6.0d0*DCOS(fi)/(DSQRT(3.0d0)*(3.0d0+DSIN(fi)))
954 END SELECT
955 END SUBROUTINE
956 !
957 SUBROUTINE calcula_dcde(ci,cp,cr,eps1,eps2,eps3,epsPleq,
958 & dcde)
959 !
960 !** Subrotina: calcula_dcde
961 !
962 !** Objetivo: calcula dc/de
963 !**             Adaptado de Potts e Zdravkovic (1999, p. 158)
964 !
965 !** Situação: (10-11-2021) OK
966 !
967 !
968 IMPLICIT NONE
969 DOUBLE PRECISION ci ! coesão inicial
970 DOUBLE PRECISION cp ! coesão no pico
971 DOUBLE PRECISION cr ! coesão residual
972 DOUBLE PRECISION eps1 ! deformação plástica equivalente 1
973 DOUBLE PRECISION eps2 ! deformação plástica equivalente 2
974 DOUBLE PRECISION eps3 ! deformação plástica equivalente 3
975 DOUBLE PRECISION epsPleq ! deformação plástica equivalente
976 DOUBLE PRECISION dcde ! dc/depsPleq
977 !
978 IF(epsPleq.LT.eps1)THEN
979     dcde = (cp-ci)/(eps1)
980 ELSEIF((epsPleq.GE.eps1).AND.(epsPleq.LE.eps2))THEN
981     dcde = 0.0d0
982 ELSEIF((epsPleq.GT.eps2).AND.(epsPleq.LT.eps3))THEN
983     dcde = (cr-cp)/(eps3-eps2)
984 ELSEIF(epsPleq.GE.eps3)THEN
985     dcde = 0.0d0
986 ENDIF
987 !
988 END SUBROUTINE
989

```