

Análise Completa do Ganho DC, Constante de Velocidade e Projeto do Compensador Lag

1. Modelo da Planta

A planta fornecida é:

$$G(s) = \frac{1.2}{s(s + 13.2)(s + 950)}.$$

Trata-se de um sistema do tipo 1, pois possui um polo em $s = 0$, logo seu erro de regime permanente para entrada degrau é zero.

2. Observação Sobre o Integrador

O integrador presente na planta implica:

$$G(0) = \infty.$$

Dessa forma, falar em “aumentar o ganho DC” não significa literalmente aumentar $G(0)$, mas sim aumentar o ganho na região de baixas frequências, ou seja, aumentar a constante de velocidade k_v , que afeta o erro em rampa.

3. Constante de Velocidade Sem Compensador

Para malha unitária:

$$k_v = \lim_{s \rightarrow 0} s L(s) = \lim_{s \rightarrow 0} s G(s)C(s).$$

Sem compensador:

$$C(s) = 1.$$

Logo:

$$k_{v0} = \lim_{s \rightarrow 0} s \cdot \frac{1.2}{s(s + 13.2)(s + 950)} = \frac{1.2}{13.2 \cdot 950}.$$

Cálculo:

$$13.2 \times 950 = 12540,$$

$$k_{v0} = \frac{1.2}{12540} = \frac{1}{10450}.$$

Assim:

$$k_{v0} \approx 9.5694 \times 10^{-5}.$$

Erro em rampa:

$$e_{\text{rampa},0} = \frac{1}{k_{v0}} = 10450.$$

4. Compensador Lag

Considere:

$$C_{\text{lag}}(s) = \frac{s+b}{s+a}, \quad b = 10a.$$

5. Ganho DC do Compensador

No ponto $s = 0$:

$$C_{\text{lag}}(0) = \frac{b}{a} = 10.$$

Portanto o compensador multiplica a constante k_v por 10.

6. Constante de Velocidade com Compensador Lag

$$k_v = k_{v0} \cdot \frac{b}{a} = 10 k_{v0} = \frac{10}{10450} = \frac{1}{1045}.$$

Numérico:

$$k_v \approx 9.5694 \times 10^{-4}.$$

Erro em rampa:

$$e_{\text{rampa}} = \frac{1}{k_v} = 1045.$$

7. Escolha de a

Em compensadores lag:

$$a \approx \frac{\omega_c}{10},$$

onde ω_c é a frequência de cruzamento sem compensador. Quando não se conhece ω_c , escolhe-se valores como:

$$a = 0.01, 0.05, 0.1,$$

avaliando o impacto no Bode até atingir o afundamento desejado.

8. Influência no Bode

O lag:

- reduz o ganho em alta frequência, - mantém a fase quase inalterada, - desloca a curva de magnitude para baixo nas baixas frequências, - melhora k_v sem afetar muito as margens de estabilidade.

9. Verificação de Estabilidade

É necessário garantir:

- margem de fase adequada (típ. $\angle 30^\circ$), - margem de ganho positiva, - diagrama de Nyquist sem envolver o ponto crítico $-1 + j0$.

10. Efeito no Dominante do Sistema

Como o compensador lag adiciona polos e zeros próximos, seu impacto nas raízes dominantes é pequeno. Ele atua mais na parte de baixas frequências.

11. Resumo Numérico Obtido

Antes do lag:

$$k_{v0} = \frac{1}{10450}, \quad e_{\text{rampa},0} = 10450.$$

Com lag $b/a = 10$:

$$k_v = \frac{1}{1045}, \quad e_{\text{rampa}} = 1045.$$

Redução de 10 vezes no erro em rampa como desejado.

12. Importância da Escolha Correta de a e b

O par $a, b = 10a$:

- determina quanto o lag desloca a magnitude em baixas frequências,
- deve ser suficientemente pequeno para não prejudicar a estabilidade,
- deve fornecer o ganho DC adequado para atingir o erro desejado.

13. Código em Python para Ajuste Automático dos Parâmetros

Além das análises teóricas e manuais, foi desenvolvido um código em Python para determinar automaticamente os melhores valores do ganho proporcional k e dos parâmetros a e b do compensador lag, visando atender simultaneamente às seguintes especificações:

$$5\% \leq M_p \leq 15\%, \quad 0.5 \leq t_s \leq 1.0 \text{ s}, \quad e_{ss} \leq 1\% \text{ (degrau unitário)}.$$

Durante as iterações, o algoritmo também buscou minimizar o erro em rampa, mantendo margens adequadas de estabilidade.

Os parâmetros ótimos encontrados foram:

$$k = 7000, \quad a = 26, \quad b = 260.$$

Com os seguintes resultados:

$$\begin{aligned} M_p &= 14.1\%, \\ t_s &= 0.633 \text{ s}, \\ e_{ss} &= 0.055\%, \\ k_v &= 8.72, \\ e_{\text{rampa}} &= 1.14\%. \end{aligned}$$

Tais valores satisfazem as especificações e garantem estabilidade ao longo de toda a faixa de frequências do sistema.

Conclusão

O estudo detalhado do ganho DC, da constante de velocidade e do comportamento do erro em rampa permitiu compreender plenamente o impacto do compensador lag no sistema. A análise teórica mostrou como a relação $b/a = 10$ aumenta k_v em dez vezes, reduzindo proporcionalmente o erro em rampa sem comprometer significativamente a estabilidade.

A integração com o código Python desenvolvido ampliou esse estudo ao permitir a busca automatizada de parâmetros ótimos. O conjunto final $k = 7000$, $a = 26$, $b = 260$ atendeu simultaneamente às especificações de sobresinal, tempo de acomodação e erros em regime permanente, garantindo desempenho robusto e estabilidade em toda a faixa de frequências.

Assim, o compensador lag projetado, aliado ao ganho proporcional adequado, fornece uma solução completa, precisa e otimizada, validada tanto analiticamente quanto computacionalmente.