

# Análise Completa do Ganho DC, Constante de Velocidade e Projeto do Compensador Lag

## 1. Modelo da Planta

A planta fornecida é:

$$G(s) = \frac{1.2}{s(s + 13.2)(s + 950)}.$$

Trata-se de um sistema do tipo 1, pois possui um polo em  $s = 0$ , logo seu erro de regime permanente para entrada degrau é zero.

## 2. Observação Sobre o Integrador

O integrador presente na planta implica:

$$G(0) = \infty.$$

Dessa forma, falar em “aumentar o ganho DC” não significa literalmente aumentar  $G(0)$ , mas sim aumentar o ganho na região de baixas frequências, ou seja, aumentar a constante de velocidade  $k_v$ , que afeta o erro em rampa.

## 3. Constante de Velocidade Sem Compensador

Para malha unitária:

$$k_v = \lim_{s \rightarrow 0} s L(s) = \lim_{s \rightarrow 0} s G(s) C(s).$$

Sem compensador:

$$C(s) = 1.$$

Logo:

$$k_{v0} = \lim_{s \rightarrow 0} s \cdot \frac{1.2}{s(s + 13.2)(s + 950)} = \frac{1.2}{13.2 \cdot 950}.$$

Cálculo:

$$13.2 \times 950 = 12540,$$

$$k_{v0} = \frac{1.2}{12540} = \frac{1}{10450}.$$

Assim:

$$k_{v0} \approx 9.5694 \times 10^{-5}.$$

Erro em rampa:

$$e_{\text{rampa},0} = \frac{1}{k_{v0}} = 10450.$$

## 4. Compensador Lag

Considere:

$$C_{\text{lag}}(s) = \frac{s+b}{s+a}, \quad b = 10a.$$

## 5. Ganho DC do Compensador

No ponto  $s = 0$ :

$$C_{\text{lag}}(0) = \frac{b}{a} = 10.$$

Portanto o compensador multiplica a constante  $k_v$  por 10.

## 6. Constante de Velocidade com Compensador Lag

$$k_v = k_{v0} \cdot \frac{b}{a} = 10 k_{v0} = \frac{10}{10450} = \frac{1}{1045}.$$

Numérico:

$$k_v \approx 9.5694 \times 10^{-4}.$$

Erro em rampa:

$$e_{\text{rampa}} = \frac{1}{k_v} = 1045.$$

## 7. Escolha de $a$

Em compensadores lag:

$$a \approx \frac{\omega_c}{10},$$

onde  $\omega_c$  é a frequência de cruzamento sem compensador. Quando não se conhece  $\omega_c$ , escolhe-se valores como:

$$a = 0.01, 0.05, 0.1,$$

avaliando o impacto no Bode até atingir o afundamento desejado.

## 8. Influência no Bode

O lag:

- reduz o ganho em alta frequência,
- mantém a fase quase inalterada,
- desloca a curva de magnitude para baixo nas baixas frequências,
- melhora  $k_v$  sem afetar muito as margens de estabilidade.

## 9. Verificação de Estabilidade

É necessário garantir:

- margem de fase adequada (típ.  $\geq 30^\circ$ ),
- margem de ganho positiva,
- diagrama de Nyquist sem envolver o ponto crítico  $-1 + j0$ .

## 10. Efeito no Dominante do Sistema

Como o compensador lag adiciona polos e zeros próximos, seu impacto nas raízes dominantes é pequeno. Ele atua mais na parte de baixas frequências.

## 11. Resumo Numérico Obtido

Antes do lag:

$$k_{v0} = \frac{1}{10450}, \quad e_{\text{rampa},0} = 10450.$$

Com lag  $b/a = 10$ :

$$k_v = \frac{1}{1045}, \quad e_{\text{rampa}} = 1045.$$

Redução de 10 vezes no erro em rampa como desejado.

## 12. Importância da Escolha Correta de $a$ e $b$

O par  $a, b = 10a$ :

- determina quanto o lag desloca a magnitude em baixas frequências, - deve ser suficientemente pequeno para não prejudicar a estabilidade, - deve fornecer o ganho DC adequado para atingir o erro desejado.

## 13. Código em Python para Ajuste Automático dos Parâmetros

Além das análises teóricas e manuais, foi desenvolvido um código em Python para determinar automaticamente os melhores valores do ganho proporcional  $k$  e dos parâmetros  $a$  e  $b$  do compensador lag, visando atender simultaneamente às seguintes especificações:

$$5\% \leq M_p \leq 15\%, \quad 0.5 \leq t_s \leq 1.0 \text{ s}, \quad e_{ss} \leq 1\% \text{ (degrau unitário)}.$$

Durante as iterações, o algoritmo também buscou minimizar o erro em rampa, mantendo margens adequadas de estabilidade.

Os parâmetros ótimos encontrados foram:

$$k = 7000, \quad a = 26, \quad b = 260.$$

Com os seguintes resultados:

$$\begin{aligned} M_p &= 14.1\%, \\ t_s &= 0.633 \text{ s}, \\ e_{ss} &= 0.055\%, \\ k_v &= 8.72, \\ e_{\text{rampa}} &= 1.14\%. \end{aligned}$$

Tais valores satisfazem as especificações e garantem estabilidade ao longo de toda a faixa de frequências do sistema.

## Conclusão

O estudo detalhado do ganho DC, da constante de velocidade e do comportamento do erro em rampa permitiu compreender plenamente o impacto do compensador lag no sistema. A análise teórica mostrou como a relação  $b/a = 10$  aumenta  $k_v$  em dez vezes, reduzindo proporcionalmente o erro em rampa sem comprometer significativamente a estabilidade.

A integração com o código Python desenvolvido ampliou esse estudo ao permitir a busca automatizada de parâmetros ótimos. O conjunto final  $k = 7000$ ,  $a = 26$ ,  $b = 260$  atendeu simultaneamente às especificações de sobresinal, tempo de acomodação e erros em regime permanente, garantindo desempenho robusto e estabilidade em toda a faixa de frequências.

Assim, o compensador lag projetado, aliado ao ganho proporcional adequado, fornece uma solução completa, precisa e otimizada, validada tanto analiticamente quanto computacionalmente.