Wydział Matematyki i Nauk Informacyjnych
Politechniki Warszawskiej

Teoria Algorytmów i Obliczeń
Laboratorium - Etap 1

Specyfikacja wstępna

Adrian Bednarz,
Bartłomiej Dach,
Tymon Felski

Wersja 1.0

17.10.2017

Lista zmian:

Data	**Autor**	**Opis**	**Wersja**
15.10.2017	Tymon Felski	Stworzenie szablonu dokumentu	1.0

Spis treści

1 Opis problemu

2 Algorytm

3 Dowód poprawności

W tym rozdziale wykażemy związek między postawionym problemem a zagadnieniem wyznaczania przepływu maksymalnego oraz równoważność rozwiązań obu zadań.

Na początek zdefiniujmy w sposób formalny pojęcia użyte w zadaniu. Załóżmy, że dane są następujące zbiory:

- **zbiór ekspertów**, oznaczony E,
- **zbiór umiejętności**, oznaczony S,
- **zbiór projektów**, oznaczony P.

Definicja 1. Funkcją umiejętności nazywamy funkcję

$$\text{ability} : E \times S \to \{0, 1\}$$

gdzie dla eksperta $e \in E$ oraz umiejętności $s \in S$ zachodzi $\text{ability}(e, s) = 1$ wtedy i tylko wtedy, gdy ekspert e posiada umiejętność s, zaś 0 w przeciwnym przypadku.

Definicja 2. Zapotrzebowaniem projektu nazywamy funkcję

$$\text{need} : P \times S \to \mathbb{N}$$

gdzie dla projektu $p \in P$ i umiejętności $s \in S$ zachodzi $\text{need}(p, s) = n$ wtedy i tylko wtedy, gdy w projekcie p liczba potrzebnych ekspertów w dziedzinie umiejętności s wynosi n.

Definicja 3. Przyporządkowaniem eksperta nazywamy funkcję

$$\text{assign} : E \to P \times S$$

gdzie dla projektu $p \in P$ i umiejętności $s \in S$ zachodzi $\text{assign}(e) = (p, s)$ wtedy i tylko wtedy, gdy:

- ekspert e posiada umiejętność s (tj. $\text{ability}(e, s) = 1$),
- ekspert e został przyporządkowany do pracy w projekcie p w dziedzinie umiejętności s.

Ponadto, dla każdego projektu p i umiejętności s musi zachodzić

$$\left|\text{assign}^{-1}[p, s]\right| \leq \text{need}(p, s)$$

gdzie $\text{assign}^{-1}[p, s]$ jest przeciwobrazem funkcji assign dla argumentów p, s.

Definicja 4. Liczbą braków w projekcie p dla danego przyporządkowania assign nazywamy liczbę

$$\text{missing}(p, \text{assign}) = \sum_{s \in S} \left(\text{need}(p, s) - \left|\text{assign}^{-1}[p, s]\right|\right)$$

Definicja 5. Całkowitą liczbą braków dla danego przyporządkowania assign nazywamy liczbę

$$M(\text{assign}) = \sum_{p \in P} \text{missing}(p, \text{assign})$$

Widoczne jest, że M jest parametrem minimalizowanym w postawionym problemie, zależnym od końcowego przyporządkowania.

Na podstawie powyższych definicji skonstruujemy teraz sieć, której użyjemy do wyznaczenia rozwiązań problemu.

Definicja 6. **Siecią przydziałów** nazwiemy sieć $N = (G, c, s_G, t_G)$, gdzie:

- $G = (V_G, E_G)$ jest grafem skierowanym takim, że:
  - $V_G = E \cup S \cup P \cup \{s_G, t_G\}$,
  - $E_G = \{(e, s) : \mathrm{ability}(e, s) = 1, e \in E, s \in S\} \cup \{(s, p) : \mathrm{need}(s, p) > 0, s \in S, p \in P\}$, tj. krawędziami połączeni są eksperci z ich opanowanymi umiejętnościami, oraz projekty z potrzebnymi do ich realizacji umiejętnościami.
- $c : E_G \to \mathbb{N}$ jest funkcją pojemności zdefiniowaną następująco:
  - jeżeli $e = s_G u, u \in E$, to $c(e) = 1$,
  - jeżeli $e = es, e \in E, s \in S$, to $c(e) = \mathrm{ability}(e, s) = 1$,
  - jeżeli $e = sp, s \in S, p \in P$, to $c(e) = \mathrm{need}(p, s)$,
  - jeżeli $e = pt_G, p \in P$, to
  $$c(e) = \sum_{sp \in E_G} c(up)$$
  (tj. pojemność tej krawędzi jest równa sumie pojemności krawędzi wchodzących do wierzchołka p).
- s_G, t_G są wyróżnionymi wierzchołkami z V_G — kolejno źródłem i ujściem.

Lemat 1. *Dla dowolnego przyporządkowania* assign *mamy*

$$M(\mathrm{assign}) \geq \left(\sum_{p \in P} \sum_{s \in S} \mathrm{need}(p, s) \right) - |E|$$

Dowód. Mamy

$$\begin{aligned} M(\mathrm{assign}) &= \sum_{p \in P} \mathrm{missing}(p, \mathrm{assign}) = \\ &= \sum_{p \in P} \left(\sum_{s \in S} \mathrm{need}(p, s) - \left|\mathrm{assign}^{-1}[p, s]\right| \right) = \\ &= \left(\sum_{p \in P} \sum_{s \in S} \mathrm{need}(p, s) \right) - \left(\sum_{p \in P} \sum_{s \in S} \left|\mathrm{assign}^{-1}[p, s]\right| \right) = \\ &\geq \left(\sum_{p \in P} \sum_{s \in S} \mathrm{need}(p, s) \right) - |E| \end{aligned}$$

na mocy rozłączności przeciwobrazów funkcji assign. □

Twierdzenie 1. *Przepływ maksymalny w sieci przydziałów wyznacza przyporządkowanie o minimalnej możliwej wartości parametru M.*

Dowód. Aby dowieść to twierdzenie, wykażemy kolejno, że:

1. Dowolny przepływ w sieci przydziałów wyznacza poprawne (niekoniecznie maksymalne) przyporządkowanie ekspertów do zadań.

   Niech dany będzie pewien przepływ f w sieci przydziałów N. Przyporządkowanie ekspertów do projektów wyznaczamy w następujący sposób:

   (a) Pewnego eksperta $e \in E$ przypisujemy do umiejętności $s \in S$, jeżeli $f(e, s) = 1$.

   (b) Niech dana będzie pewna umiejętność $s \in S$. Oznaczmy zbiór ekspertów przypisanych do tej umiejętności w punkcie (a) jako E_s.

   Zbiór E_s dzielimy na rozłączne podzbiory $E_{s,p}$ takie, że $|E_{s,p}| = f(s, p)$.

   (c) Dla każdego z uzyskanych podzbiorów $E_{s,p}$, gdzie $s \in S, p \in P$ określamy wartość przyporządkowania assign_f jako

   $$(\forall e \in E_{s,p})\, \mathrm{assign}_f(e) = (s, p)$$

   Zauważmy następujące fakty:

   - Rozważmy wierzchołek $e \in E$ odpowiadający pewnemu ekspertowi.

     Z definicji zbioru krawędzi sieci i funkcji przepustowości, do wierzchołka tego wchodzi dokładnie jedna krawędź o pojemności 1, a wychodzi z niego co najwyżej $|S|$ krawędzi o pojemności 1.

     Stąd w przepływie f tylko jedna z krawędzi wychodzących może mieć przepływ 1, a więc każdy ekspert może być przyporządkowany do co najwyżej jednej umiejętności.

   - Rozważmy dowolny wierzchołek $s \in S$ odpowiadający pewnej umiejętności.

     Z własności przepływu mamy

     $$\sum_{us \in E_G} f(us) = \sum_{sv \in E_G} f(sv)$$

     Wiedząc, że wszystkie krawędzie wchodzące do s wychodzą ze zbioru E, oraz że wszystkie krawędzie wychodzące z s wchodzą do zbioru P, mamy

     $$\sum_{e \in E} f(es) = \sum_{p \in P} f(sp)$$

     Krawędzie o niezerowym przepływie wchodzące do e reprezentują ekspertów przydzielonych do danej umiejętności, zaś krawędzie o niezerowym przepływie wychodzące z e reprezentują zapotrzebowanie projektów na ekspertów z umiejętnością s.

     Ponieważ suma przepływów krawędzi wchodzących i wychodzących jest taka sama, każdego eksperta w dziedzinie umiejętności s można przypisać do dokładnie jednego projektu, a więc można wykonać punkt (b) konstrukcji.

   - Rozważmy dowolne dwa wierzchołki $s \in S, p \in P$ takie, że $sp \in E_G$. Z definicji sieci mamy $c(s, p) = \mathrm{need}(s, p)$, a z konstrukcji rozwiązania wynika, że $f(s, p) = \left|\mathrm{assign}_f^{-1}[s, p]\right|$. Stąd na mocy definicji przepływu mamy

     $$\left|\mathrm{assign}_f^{-1}[s, p]\right| = f(s, p) \leq c(s, p) = \mathrm{need}(s, p)$$

   - Rozważmy dowolny wierzchołek $p \in P$. Z definicji funkcji pojemności, jeśli wszystkie krawędzie wchodzące do p będą wysycone przepływem (tj. $f(e) = c(e)$), to przepływ ten można przekazać w całości do ujścia krawędzią pt_G, bo

     $$c(pt_G) = \sum_{up \in E_G} c(up)$$

     Stąd pojemność krawędzi pt_G nie ogranicza wartości maksymalnego przepływu.

Wyznaczone przyporządkowanie assign_f spełnia więc wszystkie warunki prawidłowego przyporządkowania ekspertów do projektów.

2. Skonstruowane z przepływu maksymalnego przyporządkowanie wyznacza minimalną wartość parametru M.

   Dowód nie wprost: Załóżmy, że przyporządkowanie $\mathrm{assign}_{\max}$ skonstruowane na podstawie przepływu maksymalnego $f_{\max}$ w sposób opisany w punkcie 1. można rozszerzyć tak, aby zmniejszyć wartość parametru M.

   Na mocy lematu mamy

$$\left(\sum_{p\in P}\sum_{s\in S}\mathrm{need}(p,s)\right)-\left(\sum_{p\in P}\sum_{s\in S}\left|\mathrm{assign}_{\max}^{-1}[p,s]\right|\right)=M(\mathrm{assign}_{\max})>$$
$$>\left(\sum_{p\in P}\sum_{s\in S}\mathrm{need}(p,s)\right)-|E|$$

   a więc istnieje co najmniej jeden ekspert $e\in E$, który nie jest przyporządkowany do jednego z projektów.

   (a) Jeżeli $(\forall s\in S)\,\mathrm{ability}(e,s)=0$, to eksperta nie można przyporządkować do żadnego projektu.

   (b) Załóżmy, że istnieje umiejętność $s\in S$ taka, że $\mathrm{ability}(e,s)=1$.

      i. Jeżeli $(\forall p\in P)\,\mathrm{need}(p,s)=\left|\mathrm{assign}_{\max}^{-1}[p,s]\right|$, to eksperta nie można przyporządkować do żadnego projektu.

      ii. Załóżmy, że istnieje projekt p taki, że $\mathrm{need}(p,s)>\left|\mathrm{assign}_{\max}^{-1}[p,s]\right|$. Wówczas w sieci rezydualnej dla przepływu $f_{\max}$ istnieje ścieżka rozszerzająca postaci $s_G espt_G$, wzdłuż której można zwiększyć przepływ o 1. Sprzeczność z maksymalnością przepływu $f_{\max}$.

$\square$