Wydział Matematyki i Nauk Informacyjnych
Politechniki Warszawskiej

Teoria Algorytmów i Obliczeń
Laboratorium - Etap 1

Specyfikacja wstępna

Adrian Bednarz,
Bartłomiej Dach,
Tymon Felski

Wersja 1.0

17.10.2017

Lista zmian:

Data	**Autor**	**Opis**	**Wersja**
15.10.2017	Tymon Felski	Stworzenie szablonu dokumentu	1.0

Spis treści

1 Opis problemu

2 Algorytm

3 Dowód poprawności

W tym rozdziale wykażemy związek między postawionym problemem a zagadnieniem wyznaczania przepływu maksymalnego oraz równoważność rozwiązań obu zadań.

Na początek zdefiniujmy w sposób formalny pojęcia użyte w zadaniu. Załóżmy, że dane są następujące zbiory:

- **zbiór ekspertów**, oznaczony E,
- **zbiór umiejętności**, oznaczony S,
- **zbiór projektów**, oznaczony P.

Definicja 1. Funkcją umiejętności nazywamy funkcję

$$\text{ability} : E \times S \to \{0, 1\}$$

gdzie dla eksperta $e \in E$ oraz umiejętności $s \in S$ zachodzi $\text{ability}(e, s) = 1$ wtedy i tylko wtedy, gdy ekspert e posiada umiejętność s, zaś 0 w przeciwnym przypadku.

Definicja 2. Zapotrzebowaniem projektu nazywamy funkcję

$$\text{need} : P \times S \to \mathbb{N}$$

gdzie dla projektu $p \in P$ i umiejętności $s \in S$ zachodzi $\text{need}(p, s) = n$ wtedy i tylko wtedy, gdy w projekcie p liczba potrzebnych ekspertów w dziedzinie umiejętności s wynosi n.

Definicja 3. Przyporządkowaniem eksperta nazywamy funkcję

$$\text{assign} : E \to P \times S$$

gdzie dla projektu $p \in P$ i umiejętności $s \in S$ zachodzi $\text{assign}(e) = (p, s)$ wtedy i tylko wtedy, gdy:

- ekspert e posiada umiejętność s (tj. $\text{ability}(e, s) = 1$),
- ekspert e został przyporządkowany do pracy w projekcie p w dziedzinie umiejętności s.

Ponadto, dla każdego projektu p i umiejętności s musi zachodzić

$$\left|\text{assign}^{-1}[p, s]\right| \leq \text{need}(p, s)$$

gdzie $\text{assign}^{-1}[p, s]$ jest przeciwobrazem funkcji assign dla argumentów p, s.

Definicja 4. Liczbą braków w projekcie p dla danego przyporządkowania assign nazywamy liczbę

$$\text{missing}(p, \text{assign}) = \sum_{s \in S} \left(\text{need}(p, s) - \left|\text{assign}^{-1}[p, s]\right|\right)$$

Definicja 5. Całkowitą liczbą braków dla danego przyporządkowania assign nazywamy liczbę

$$M(\text{assign}) = \sum_{p \in P} \text{missing}(p, \text{assign})$$

Widoczne jest, że M jest parametrem minimalizowanym w postawionym problemie, zależnym od końcowego przyporządkowania.

Na podstawie powyższych definicji skonstruujemy teraz sieć, której użyjemy do wyznaczenia rozwiązań problemu.

Definicja 6. Siecią przydziałów nazwiemy sieć $N = (G, c, s_G, t_G)$, gdzie:

- $G = (V_G, E_G)$ jest grafem skierowanym takim, że:
  - $V_G = E \cup S \cup P \cup \{s_G, t_G\}$,
  - $E_G = \{(e, s) : \text{ability}(e, s) = 1, e \in E, s \in S\} \cup \{(s, p) : \text{need}(s, p) > 0, s \in S, p \in P\}$, tj. krawędziami połączeni są eksperci z ich opanowanymi umiejętnościami, oraz projekty z potrzebnymi do ich realizacji umiejętnościami.
- $c : E_G \to \mathbb{N}$ jest funkcją pojemności zdefiniowaną następująco:
  - jeżeli $e = s_G u, u \in E$, to $c(e) = 1$,
  - jeżeli $e = es, e \in E, s \in S$, to $c(e) = \text{ability}(e, s) = 1$,
  - jeżeli $e = sp, s \in S, p \in P$, to $c(e) = \text{need}(p, s)$,
  - jeżeli $e = pt_G, p \in P$, to
  $$c(e) = \sum_{sp \in E_G} c(up)$$
  (tj. pojemność tej krawędzi jest równa sumie pojemności krawędzi wchodzących do wierzchołka p).
- s_G, t_G są wyróżnionymi wierzchołkami z V_G — kolejno źródłem i ujściem.

Lemat 1. *Dla dowolnego przyporządkowania* assign *mamy*

$$M(\text{assign}) \geq \left(\sum_{p \in P} \sum_{s \in S} \text{need}(p, s) \right) - |E|$$

Dowód. Mamy

$$\begin{aligned} M(\text{assign}) &= \sum_{p \in P} \text{missing}(p, \text{assign}) = \\ &= \sum_{p \in P} \left(\sum_{s \in S} \text{need}(p, s) - \left|\text{assign}^{-1}[p, s]\right| \right) = \\ &= \left(\sum_{p \in P} \sum_{s \in S} \text{need}(p, s) \right) - \left(\sum_{p \in P} \sum_{s \in S} \left|\text{assign}^{-1}[p, s]\right| \right) = \\ &\geq \left(\sum_{p \in P} \sum_{s \in S} \text{need}(p, s) \right) - |E| \end{aligned}$$

na mocy rozłączności przeciwobrazów funkcji assign. □

Twierdzenie 1. *Przepływ maksymalny w sieci przydziałów wyznacza przyporządkowanie o minimalnej możliwej wartości parametru M.*

Dowód. □