UNIVERSIDADE FEDERAL DO CEARÁ

Exercise List 2

Antonio Felype Ferreira Maciel - 576261

Master's Course in Teleinformatics Engineering
Federal University of Ceará

TIP8300 - Nonlinear System Optimization

1. Considere o seguinte problema de otimização:

$$\begin{array}{ll} \text{minimize} & (x_1-1)^2+(x_2-2)^2 \\ \text{sujeito a} & (x_1-1)^2 = 6x_2 \end{array}$$

(a) Como este problema pode ser classificado?
O problema é um Programa Quadrático com Restrição Quadrática (QCQP).

(b) Verifique se é possível encontrar um problema equivalente convexo.
Utilizando a relaxação convexa, podemos relaxar a restrição de igualdade para uma restrição de inequidade:

$$(x_1-1)^2 \leq 6x_2.$$

Dessa forma, o problema passa a ser um problema de otimização convexo.

(c) Expresse as condições de KKT para o problema.
Neste problema, desejamos minimizar a função $f(x_1,x_2) = (x-1)^2 + (x_2-2)^2$ sujeita à restrição $h(x_1,x_2) = (x_1-1)^2 - 6x_2 = 0$.
As condições de KKT para o problema são:

I **Restrições primárias:** $f_i(x) \leq 0$, $i = 1,\ldots,m$, $h_i(x) = 0$, $i = 1,\ldots,p$.

$$h(x_1,x_2) = 0 \rightsquigarrow (x_1-1)^2 - 6x_2 = 0 \tag{1}$$

II **Restrições duais:** $\lambda \succeq 0$.
Para as restrições de igualdade, não há restrições de sinal para o multiplicador de Lagrange. Logo, a restrição dual é $\lambda \in \mathbf{R}$.

III **Folga complementar:** $\lambda_i f_i(x) = 0$, $i = 1,\ldots,m$.
Para restrições de igualdade, a folga complementar é satisfeita já que a restrição é rígida.

IV O gradiente do Lagrangeano com respeito a x desaparece:

$$\nabla f_0(x) + \sum_{i=1}^{m} \lambda_i \nabla f_i(x) + \sum_{i=1}^{p} \nu_i h_i(x) = 0.$$

A função Lagrangeano $\mathcal{L}(x_1,x_2,\lambda)$ pode ser definida como:

$$\mathcal{L}(x_1,x_2,\lambda) = f(x_1,x_2) + \lambda \cdot h(x_1,x_2).$$

Substituindo $f(\cdot)$ e $h(\cdot)$ em $\mathcal{L}(\cdot)$, temos:

$$\mathcal{L}(x_1,x_2,\lambda) = (x_1-1)^2 + (x_2-2)^2 + \lambda((x_1-1)^2 - 6x_2).$$

O gradiente do Lagrangeano com respeito a x_1 e x_2 deve ser zero, então $\dfrac{\partial \mathcal{L}}{\partial x_1} = 0$ e $\dfrac{\partial \mathcal{L}}{\partial x_2} = 0$.

$$\begin{aligned} \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial x_1} =& 2(x_1-1)(1+\lambda) \\ \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial x_2} =& 2(x_2-2) - 6\lambda \end{aligned}$$

As condições do gradiente são, portanto:

$$2(x_1-1)(1+\lambda) = 0 \tag{2}$$
$$2(x_2-2) - 6\lambda = 0. \tag{3}$$

(d) Determine a solução ótima.

A primeira condição do gradiente (2) nos dá duas possibilidades: ou $x_1 = 1$ ou $\lambda = -1$. Pela segunda condição do gradiente (3), $x_2 = 2 + 3\lambda$. Substituindo na restrição primária (1):

- Para $x_1 = 1$, $x_2 = 0$. Já que $x_2 = 2 + 3\lambda$, então $\lambda = -\frac{2}{3}$. Logo, uma das soluções é:

$$x_1 = 1, \quad x_2 = 0, \quad \lambda = -\frac{2}{3}.$$

- Para $\lambda = -1$. Já que $x_2 = 2 + 3\lambda$, então $x_2 = -1$. Substituindo na restrição primária (1), temos que

$$(x_1 - 1)^2 = -6,$$

o que não é possível, já que o lado esquerdo da igualdade é não-negativo, enquanto que o lado direito é negativo.

Portanto, a única solução que satisfaz as condições de KKT é:

$$x_1 = 1, \quad x_2 = 0, \quad \lambda = -\frac{2}{3}.$$

2. Considere o problema de otimização:

$$\begin{aligned} \text{minimize} \quad & x^2 + 3x + 1 \\ \text{sujeito a} \quad & (x-1)(x-3) \leq 0 \end{aligned}$$

(a) Expresse as condições de KKT para o problema.

Seja $f(x) = x^2 + 3x + 1$ a função a ser minimizada e $h(x) = (x-1)(x-3) \leq 0$ a restrição do problema. Reescrevendo $h(x)$, temos que

$$h(x) = x^2 - 4x + 3 \leq 0.$$

O a função Lagrangeano então é dada por

$$\begin{aligned} \mathcal{L}(x, \lambda) =& f(x) + \lambda \cdot h(x) \\ \mathcal{L}(x, \lambda) =& x^2 + 3x + 1 + \lambda(x^2 - 4x + 3). \end{aligned}$$

As condições de KKT para o problema são:

I **Restrição primária:**

$$h(x) \leq 0 \rightsquigarrow (x-1)(x-3) \leq 0 \tag{4}$$

.

II **Restrição dual:**

$$\lambda \geq 0. \tag{5}$$

III **Folga complementar**:

$$\lambda \cdot h(x) = 0 \rightsquigarrow \lambda \cdot (x-1)(x-3) = 0 \tag{6}$$

.

IV **Gradiente do Lagrangeano desaparece:**
$\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial x} = 0.$

$$\begin{aligned}\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial x} =& \frac{\partial}{\partial x} x^2 + 3x + 1 + \lambda(x^2 - 4x + 3)\\ \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial x} =& 2x + 3 + \lambda(2x - 4) = 0.\end{aligned} \tag{7}$$

(b) Determine a solução ótima.
Utilizando a folga complementar (6), temos três possibilidades: $\lambda = 0$, $x = 1$ ou $x = 3$.

- Para $\lambda = 0$, utilizando a condição do gradiente (7):

$$2x + 3 = 0 \rightsquigarrow x = -\frac{3}{2}.$$

Substituindo na restrição primária (4):

$$(x - 1)(x - 3) = \frac{45}{4} > 0$$

o que viola a restrição primária. Portanto, $\lambda = 0$ não é uma solução válida.

- Para $x = 1$, utilizando a condição do gradiente (7):

$$2 + 3 + \lambda(-2) = 0 \rightsquigarrow \lambda = \frac{5}{2},$$

o que está de acordo com a restrição dual (5).

- Para $x = 3$, utilizando a condição do gradiente (7):

$$9 + 2\lambda = 0 \rightsquigarrow \lambda = -\frac{9}{2},$$

o que viola a restrição dual (5). Portanto, $x = 3$ não é uma solução válida.

Dessa forma, a solução ótima para o problema é:

$$x = 1, \quad \lambda = \frac{5}{2}.$$

(c) Encontre a função dual e o problema dual.
A função dual $g(\lambda)$ é encontrada ao minimizar o Lagrangeano com relação a x:

$$g(\lambda) = \min_x \mathcal{L}(x, \lambda).$$

Derivando $\mathcal{L}(\cdot)$ e igualando a 0, temos

$$\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial x} = 2(1 + \lambda)x + (3 - 4\lambda) = 0,$$

o que nos dá

$$x = \frac{4\lambda - 3}{2(1 + \lambda)}.$$

Substituindo x no Lagrangeano, temos que a função dual é

$$g(\lambda) = -\frac{(4\lambda - 3)^2}{4(1 + \lambda)} + 1 + 3\lambda.$$

O problema dual é definido então como maximizar a função dual sujeito à restrição dual. Dessa forma, o problema dual é

$$\begin{aligned} \max \quad & g(\lambda) \\ \text{s.t.} \quad & \lambda \geq 0. \end{aligned}$$

(d) Verifique se o problema apresenta dualidade forte.

A função objetivo $f(x)$ é quadrática e convexa. A restrição $h(x) = (x-1)(x-3) \leq 0$ pode ser reescrita como $h(x) = x^2 - 4x + 3 \leq 0$ e também é convexa. A região viável $h(x) \leq 0$ é o intervalo $[1, 3]$, que é um conjunto convexo. Dessa forma, o problema é um problema de otimização convexo.

De acordo com a condição de Slater, a dualidade forte é atendida se existe um ponto viável x tal que $h(x) < 0$. A restrição $h(x) = (x-1)(x-3) \leq 0$ é satisfeita por $x \in [1, 3]$. Para $x = 2$, $h(x) = -1 \leq 0$. Portanto, a condição de Slater é atendida.

O problema primário pode ser resolvido encontrando o mínimo de $f(x)$ sujeito a $x \in [1, 3]$. O ponto mínimo de $f(x)$ pode ser encontrado quando a derivada é zero:

$$f'(x) = 2x + 3 = 0 \rightsquigarrow x = -\frac{3}{2}.$$

Porém, esse ponto não é viável pois está fora do intervalo $[1, 3]$. Para $x = 1$, $f(x) = 5$. Para $x = 3$, $f(x) = 19$. O valor mínimo de $f(x)$ na região viável é 5, encontrado para $x = 1$.

O problema dual é

$$\begin{aligned} & \max g(\lambda) = -\frac{(4\lambda - 3)^2}{4(1+\lambda)} + 1 + 3\lambda \\ & \text{s.t. } \lambda \geq 0. \end{aligned}$$

Pelas condições de KKT, a solução ótima dual é $\lambda = \frac{5}{2}$. Substituindo λ na função dual, temos que

$$g(\frac{5}{2}) = 5.$$

Já que as soluções primárias e dual são iguais, a dualidade forte é válida para o problema.

3. Considere o problema de otimização:

$$\begin{aligned} \text{minimize} \quad & x^2 + y^2 \\ \text{sujeito a} \quad & \begin{cases} x + y \geq 1 \\ y \leq 2 \\ y^2 \geq x \end{cases} \end{aligned}$$

(a) Expresse as condições de KKT para o problema. Seja $f(x, y) = x^2 + y^2$ a função a ser minimizada e h(x,y) as restrições do problema:

$$\begin{cases} h_1(x, y) = 1 - x - y \leq 0 \\ h_2(x, y) = y - 2 \leq 0 \\ h_3(x, y) = x - y^2 \leq 0. \end{cases}$$

O Lagrangeano $\mathcal{L}(x, y, \lambda_1, \lambda_2, \lambda_3)$ é definido por

$$\mathcal{L}(x, y, \lambda) = f(x, y) + \lambda_1 h_1(x, y) + \lambda_2 h_2(x, y) + \lambda_3 h_3(x, y).$$

Substituindo $f(x, y)$ e as restrições na equação acima, temos que

$$\mathcal{L}(x, y, \lambda) = x^2 + y^2 + \lambda_1(1 - x - y) + \lambda_2(y - 2) + \lambda_3(x - y^2).$$

I **Condições do gradiente do Lagrangeano**

$$\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial x} = 0 \quad \text{e} \quad \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial y} = 0.$$

$$\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial x} = 2x - \lambda_1 + \lambda_3 = 0 \tag{8}$$
$$\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial y} = 2y - \lambda_1 + \lambda_2 - 2\lambda_3 y = 0 \tag{9}$$

II **Restrições primárias**

$$h_1(x,y) \leq 0, \quad h_2(x,y) \leq 0, \quad h_3(x,y) \leq 0.$$

$$1 - x - y \leq 0 \tag{10}$$
$$y - 2 \leq 0 \tag{11}$$
$$x - y^2 \leq 0. \tag{12}$$

III **Restrições duais**

$$\lambda_1 \geq 0, \quad \lambda_2 \geq 0, \quad \lambda_3 \geq 0.$$

IV **Folga complementar**

$$\lambda_1 h_1(x,y) = 0, \quad \lambda_2 h_2(x,y) = 0, \quad \lambda_3 h_3(x,y) = 0.$$

$$\lambda_1(1 - x - y) = 0 \tag{13}$$
$$\lambda_2(y - 2) = 0 \tag{14}$$
$$\lambda_3(x - y^2) = 0. \tag{15}$$

(b) Determine os pontos que satisfazem as condições de KKT e encontre a solução ótima.
Considerando as condições de folga complementar:

i $\lambda_1 = 0$, $\lambda_2 = 0$, $\lambda_3 = 0$. Substituindo nas condições do gradiente (8, 9), tem-se que

$$2x = 0 \quad \rightsquigarrow \quad x = 0$$
$$2y = 0 \quad \rightsquigarrow \quad y = 0.$$

Isso porém não atende às restrições primárias e portanto não é viável: $1-0-0 = 1 \leq 0$.

ii $\lambda_1 > 0$, $\lambda_2 = 0$, $\lambda_3 = 0$.
A partir de 13:

$$1 - x - y = 0 \rightsquigarrow x + y = 1.$$

Substituindo em 8 e 9:

$$2x - \lambda_1 = 0 \rightsquigarrow \lambda_1 = 2x$$
$$2y - \lambda_1 = 0 \rightsquigarrow \lambda_1 = 2y.$$

Dessa forma, $2x = 2y \therefore x = y$. Substituindo $x = y$ em $x + y = 1$:

$$2x = 1 \rightsquigarrow x = \frac{1}{2}, \quad y = \frac{1}{2}.$$

No entanto, o caso não é viável pois não atende à restrição primária (12):

$$x - y^2 = \frac{1}{2} - \frac{1}{4} = \frac{1}{4} \leq 0.$$

iii $\lambda_1 = 0,\ \lambda_2 > 0,\ \lambda_3 = 0$ A partir de (14):

$$y - 2 = 0 \rightsquigarrow y = 2.$$

Substituindo em (8) e (9):

$$\begin{aligned} &2x + \lambda_3 = 0 \rightsquigarrow \lambda_3 = -2x \\ &2y - \lambda_1 + \lambda_2 - 2\lambda_3 y = 0 \rightsquigarrow 4 - \lambda_1 + \lambda_2 - 4\lambda_3 = 0. \end{aligned}$$

Já que $\lambda_1 = \lambda_3 = 0$

$$4 + \lambda_2 = 0 \rightsquigarrow \lambda_2 = -4,$$

o que viola a restrição dual. Dessa forma, o caso não é viável.

iv $\lambda_1 = 0,\ \lambda_2 = 0,\ \lambda_3 > 0$ A partir de (15):

$$x - y^2 = 0 \rightsquigarrow x = y^2.$$

Substituindo em (8) e (9):

$$\begin{aligned} &2x + \lambda_3 = 0 \rightsquigarrow \lambda_3 = 2x \\ &2y - \lambda_1 + \lambda_2 - 2\lambda_3 y = 0 \rightsquigarrow y(2 + 4x) = 0. \end{aligned}$$

Já que $y \neq 0$, pois $x = y^2$, tem-se que

$$2 + 4x = 0 \rightsquigarrow x = -\frac{1}{2},$$

o que viola $x = y^2 \geq 0$. Portanto, o caso não é viável.

v $\lambda_1 > 0,\ \lambda_2 > 0,\ \lambda_3 = 0$ A partir de (13) e (14):

$$\begin{aligned} &1 - x - y = 0 \rightsquigarrow x + y = 1 \\ &y - 2 = 0 \rightsquigarrow y = 2. \end{aligned}$$

Substituindo $y = 2$ em $x + y = 1$

$$x + 2 = 1 \rightsquigarrow x = -1.$$

Substituindo em (8): $\lambda_1 = -2$, o que viola a restrição dual. Portanto, o caso não é viável.

vi $\lambda_1 > 0,\ \lambda_2 = 0,\ \lambda_3 > 0$ A partir de (13) e (14):

$$\begin{aligned} &1 - x - y = 0 \rightsquigarrow x + y = 1 \\ &x - y^2 = 0 \rightsquigarrow x = y^2. \end{aligned}$$

Substituindo $x = y^2$ em $x + y = 1$:

$$y^2 + y - 1 = 0 \rightsquigarrow y = \frac{-1 \pm \sqrt{5}}{2}.$$

A solução positiva é

$$y = \frac{-1 + \sqrt{5}}{2} \approx 0.618.$$

Dessa forma, $x = y^2 \approx 0.382$, o que está de acordo com a restrição primária $y - 2 = -1.382 \leq 0$.

Substituindo em (8) e (9):

$$\begin{aligned}
&2x - \lambda_1 + \lambda_3 = 0 \rightsquigarrow \lambda_1 - \lambda_3 = 0.764 \\
&2y - \lambda_1 + 2\lambda_3 y = 0 \rightsquigarrow \lambda_1 + 1.236\lambda_3 = 1.236.
\end{aligned}$$

Resolvendo o sistema, temos que $\lambda_3 \approx -0.211$ e $\lambda_1 = 0.975$. Uma vez que ambos λ_1 e λ_2 atendem às restrições duais, o caso é viável.

vii $\lambda_1 = 0$, $\lambda_2 > 0$, $\lambda_3 > 0$ A partir de (14) e (15):

$$\begin{aligned}
&y - 2 = 0 \rightsquigarrow y = 2 \\
&x - y^2 = 0 \rightsquigarrow x = 4.
\end{aligned}$$

Substituindo em (8), $\lambda_3 = -8$, o que viola a restrição dual. Portanto, o caso não é viável.

viii $\lambda_1 > 0$, $\lambda_2 > 0$, $\lambda_3 > 0$ A partir de (13), (14) e (15):

$$\begin{aligned}
&1 - x - y = 0 \rightsquigarrow x + y = 1 \\
&y - 2 = 0 \rightsquigarrow y = 2 \\
&x - y^2 = 0 \rightsquigarrow x = 4.
\end{aligned}$$

Substituindo $y = 2$ em $x + y = 1$:

$$x + 2 = 1 \rightsquigarrow x = -1,$$

porém isso contradiz $x = 4$. Portanto, o caso não é viável.

Para o único caso viável,

$$x \approx 0.382, \quad y =\approx -0.618.$$

Os multiplicadores de Lagrange são

$$\lambda_1 \approx 0.975, \quad \lambda_2 = 0, \quad \lambda_3 \approx 0.211.$$

Dessa força, a função objetivo no ponto ótimo é $f(x, y) = 0.528$.