无限元方法
——以课程程序为起点的简析与讨论

康金梁

2019 年 5 月 19 日

(清华大学航天航空学院，北京 100084)

摘要

有限元方法，即 finite element method，是一种将连续介质离散为有限个一定大小的单元，从而对实际问题进行分析计算的方法。但是在实际应用中，有很多种情况下，运用这样的有限元方法不能完全解决问题。例如课程上讲的水坝的基座问题等等。这些问题涉及到的模型为“半无限大”模型。如果采用有限元的方法进行划分，就会产生极多的单元，大大降低程序运行的效率。因此，无限元方法应运而生。

无限元方法，又被称为“Infinite Finite Element Method”，是一种将无限的思想引入有限元的的方法，在实际中也有很多应用。本文从课程程序出发，回顾了无限元方法的起源、发展以及分类。

关键字：无限元方法，有限元方法，半无限大问题

1　无限元方法的引入

在课程中，我们学习到了许多种不同形状，运用不同种构造方法的单元。这些单元的出现极大的推动了有限元的发展，提高程序效率，优化求解结果，使得该方法有了更多的应用。其中最吸引笔者的是“无限元”。这不仅仅是因为“无限”和“有限”的矛盾，还因为和其他单元相比，无限元迈出的跨步更大，想法更为奇特，应用更加符合实际。

一个非常经典的问题就是水坝问题。如果引入大量单元来模拟地面，则会大大降低程序本身的效率，而且不一定能够得到好的结果。

针对这样的，模型中含有半无限大物体的问题，应引入一种新的单元————半无限大单元。这种单元既有有限的边界，又有无限的边界，可以将有限元和无限大的边界连接起来，从而起到优化程序模型的效果。

1.1　STAPpp 程序的实现

按照以上思路，在 STAPpp 程序中，笔者定义了一个新的单元类————“IEM”类，作为无限元。这种单元和 4Q 单元类似，同样有四个节点，在平面上一共有八个自由度，如下图所示，

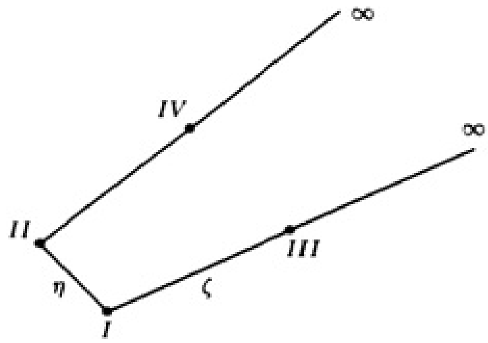


图 1: IEM 单元示意图.

通过设计坐标变换函数，可以使坐标在趋近变换函数奇点的时候趋向于无穷，从而将一段的无限边界转化为有限的边界。在母空间中，IEM 单元为矩形，如下图所示，

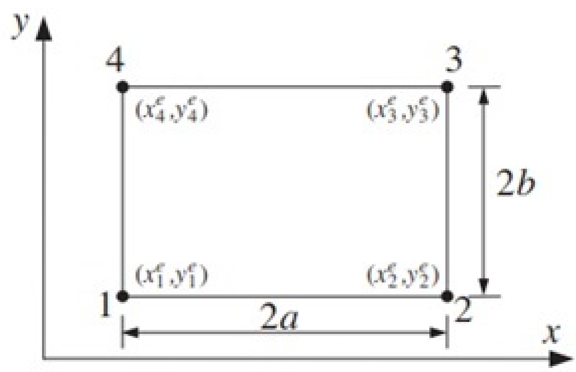
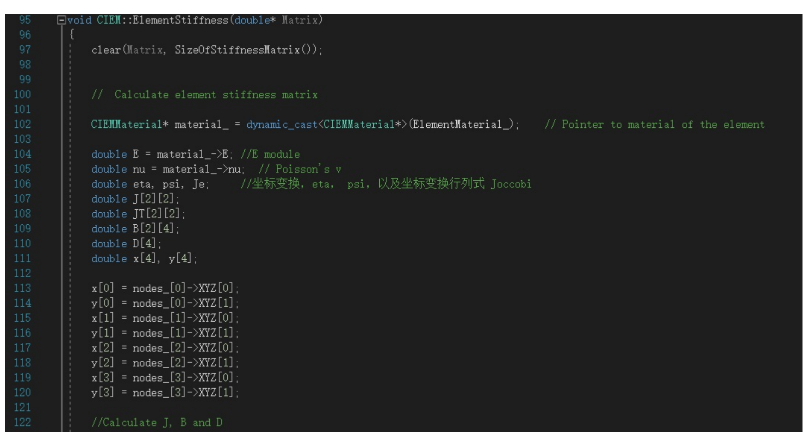


图 2: 母空间中 IEM 单元示意图.

这样，就可以在母空间中，利用 4Q 原有的各种函数，计算高斯点的位移、应力等等信息，再转化到无限元中，得到模拟结果。

程序部分代码如下图所示，


```
void CIEM::ElementStiffness(double* Matrix)
{
    clear(Matrix, SizeOfStiffnessMatrix());


    //  Calculate element stiffness matrix

    CIEMMaterial* material_ = dynamic_cast<CIEMMaterial*>(ElementMaterial_);    // Pointer to material of the element

    double E = material_->E; //E module
    double nu = material_->nu;  // Poisson's v
    double eta, psi, Je;     //坐标变换，eta， psi，以及坐标变换行列式 Joccobi
    double J[2][2];
    double JT[2][2];
    double B[2][4];
    double D[4];
    double x[4], y[4];

    x[0] = nodes_[0]->XYZ[0];
    y[0] = nodes_[0]->XYZ[1];
    x[1] = nodes_[1]->XYZ[0];
    y[1] = nodes_[1]->XYZ[1];
    x[2] = nodes_[2]->XYZ[0];
    y[2] = nodes_[2]->XYZ[1];
    x[3] = nodes_[3]->XYZ[0];
    y[3] = nodes_[3]->XYZ[1];

    //Calculate J, B and D
```

图 3: IEM 程序中部分代码.

经过检验，程序可以通过由 4Q 单元和 IEM 单元构成的简单的 patch test。

2 无限元方法的提出与发展

2.1 无限元方法的提出

无限元的概念最早是由 R.Ungless 于 1973 年提出[8]。

R.Ungless 当时发表了一篇名为《Infinite Finite Element》的文章。文章中首次使用了一种“无限的三角形单元”来解决半无限大的固体问题。这种单元如下图所示，

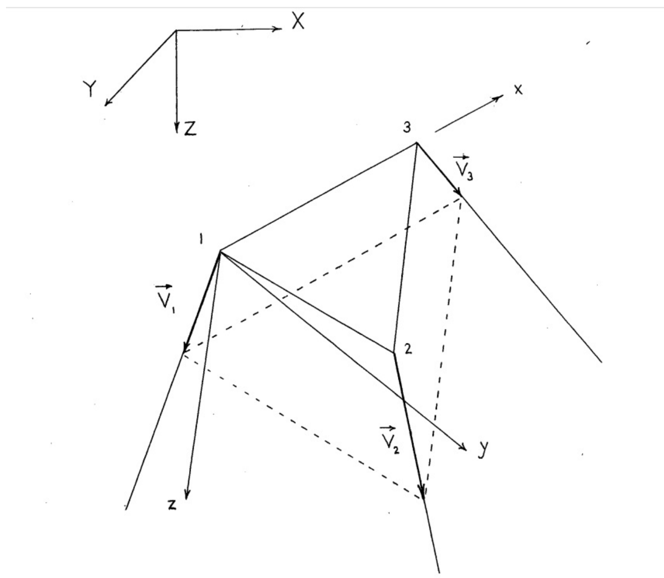


图 4: 无限的三角形单元示意图.

文章中还引入了坐标变换、stiffness matrix 等变换。虽然较为粗略，但是已经和现在的变换方式较为类似。再积分计算方面，他还使用了半无限大的数值积分，对几个例子进行求解，并且取得了不错的结果。

文章中摘取的部分内容如下所示，

$$\underline{u} = \left\{ \underline{F}(x,y)\ P(z) \right\} \underline{s} = \underline{A}\ \underline{s} \qquad (4.1)$$

where

$$\underline{u} = \begin{Bmatrix} u \\ v \\ w \end{Bmatrix} = \text{continuous displacements in local coordinate directions}$$

图 5: 文章中用到的位移表示.

2.2 无限元方法的发展

在无限元方法被提出之后，不少学者对它进行了发展。

1977 年，在一篇文章中，Bettess 也提出了无限元的方法。[1] 1980 年，Bettess 对无限元方法做出了改进。[10]

在 Bettess 撰写的《More On Infinite Elements》一文中，他针对当时现有的方法，引入了 Jaccobi 矩阵和 decay functions，对原有的单元形状方程（element shape functions）进行了改进。

$$N_i(\xi,\eta) = f_i(\xi,\eta)M_i(\xi,\eta)$$

其中 $f_i \quad decayfunctions$ 。

并且他使用了改进权重的 Gauss-Laguerre 积分。在文章的末尾，他给出了程序，并且对问题进行了计算，得出了较好的结果。

1981 年，G.Beer 和 J.L.Meek 撰写了《Infinite Domain Elements》一文。在文章中，针对二维或三位的无限介质的压力场问题，他们提出了含参的单元模型。[9]

在对实际问题的计算中，他们采用了“用一圈无限元包围有限个有限元”的近似方式，得到了不错的结果。

他们已经提出了和现在非常相同的公式、网格划分和计算方法。从文中摘取的部分计算公式及其表达方式如下所示，

$$J_{ik} = \frac{\partial \bar{N}_j}{\partial \xi_i} x_{kj} \qquad \frac{\partial \bar{M}_j}{\partial x_i} = J_{ik}^{-1} \frac{\partial \bar{M}_j}{\partial \xi_k}$$

$$\frac{\partial \bar{M}_j}{\partial \xi_i} = \frac{\partial M_j}{\partial \xi_i} f + \frac{\partial f}{\partial \xi_i} M_j$$

$$\mathbf{K} = \int_\Omega \mathbf{B}^{\mathrm{T}} \mathbf{D} \mathbf{B} \, \mathrm{d}V$$

图 6: 部分表达式.

之后人们还提出了不少关于无限元的理论，无限元方法也得到了较为充分的发展，本文就不再一一列举。

3 无限元的分类

无限元自提出以来，由于问题环境不同和问题的求解要求不同，产生了很多不同的无限单元。这些单元形状各异（例如之前提到的无限的三角形单元），但更主要的是构造方法不同。本文主要包括了三种较为著名的无限元。

3.1 Bettess 映射无限元

Bettess 映射无限元是由 Bettess 等人于 1977 年，在研究表面水波的衍射和折射时，首次提出的无限元单元概念。[1] [2] 该单元采用的几何映射为：

$$x = N_0(\xi)x_9 + N_2(\xi)x2$$

其中，ξ 为母空间中的函数左标。N_0 N_1 的表达式如下，

$$N_0(\xi) = \frac{-\xi}{1-\xi} \qquad N_2(\xi) = 1 + \frac{\xi}{1-\xi}$$

该方法对应的母空间中的单元如下图所示，

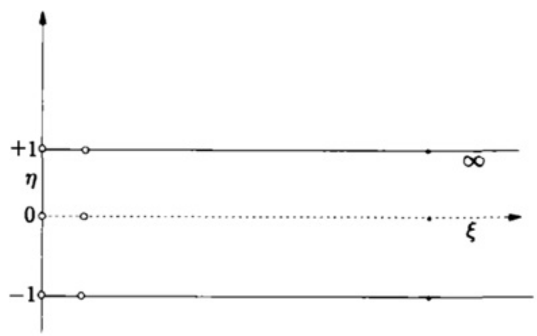


图 7: 部分表达式.

然而，该方法也有一定的缺点。由于该方法的母单元的特性，该映射单元的矩阵中含有数学上无法严格证明的积分，是的不少人对这种方法的可靠性产生了怀疑。

3.2 Astley 映射共轭无限元

1983 年，Astley 和 Eversman 采用形状函数的共轭作为 Galerkin 加权函数，消除了单元矩阵中的不定积分，从而使无限元方法在数学上更为严格[5]。

该方法采用的几何映射为，

$$x = \sum_{i=1}^{4} M_i x_i \qquad y = \sum_{i=1}^{4} M_i y_i$$

其中，

$$M_1 = -\frac{2\zeta}{1-\zeta}\frac{1-\eta}{2} \qquad M_2 = -\frac{2\zeta}{1-\zeta}\frac{1+\eta}{2} \qquad M_1 = -\frac{1+\zeta}{1-\zeta}\frac{1-\eta}{2} \qquad M_1 = -\frac{1+\zeta}{1-\zeta}\frac{1+\eta}{2}$$

当时，这种方法主要被用来求解声辐射问题。

3.3 Burnett 无限元

以上两种无限元虽然有所不同，但是都是利用一种映射关系，将物理空间中的无限单元转化为母空间中相应的单元，在母空间中进行计算。但是下面这种无限元则不是一种单一的映射关系。

1994 年，Burnett 采用共焦椭圆变换援救扁长形椭球结构的声辐射问题[6]。

$$x = \sqrt{\rho^2 - f^2} sin\theta cos\phi$$

$$y = \sqrt{\rho^2 - f^2} sin\theta sin\phi$$

$$z = \rho cos\theta$$

Burnett 元的优点在于：“求解大纵横比的声辐射问题时，大大降低用于模拟复杂近场的有限单元数目”，被视作无限元领域的“突破性发现”（a breakthrough discovery）[?]。

4 “另一种”无限元

其实除了以上各种“无限大”的无限元之外，还有一种无限元方法，即“无限多个单元”，用无穷细分单元的方法进行计算。

这种方法“将无限剖分的思想与有限元方法结合”。这种方法的文章，首推 Thatcher 在 1975 年发表的《Singularities in the solution of Laplace’s equation in two dimensions》一文。[11]

它的突出优点在于，利用有限的计算资源，可以使用“无穷多个单元”；而且不涉及解的解析表达式，当解析解很难或不能求出时依然可以使用。

参考文献

[1] Bettess P,Aienkiewicz O C.Diffraction and refraction of surface waves using ifnite and infinite elements. International Journal for Numerical Methods in Engineering, 1977, 11;1271 1290.

[2] Bettess P, Emson C, Chiam T C. A new mapped infinite element for exterior wave problems. In: Lewis R W, et al,eds. Numerical Methods in Coupled Systems. New York:John Wiley & Sons, 1984.489 504.

[3] Zienkiewicz, O. C., Bando, K., Bettess, P., Emson, C., & Chiam, T. C. (1985). Mapped infinite elements for exterior wave problems. International Journal for Numerical Methods in Engineering, 21(7), 1229-1251.

[4] Astley, R. J., Macaulay, G. J., & Coyette, J. P. (1994). Mapped wave envelope elements for acoustical radiation and scattering. Journal of Sound and Vibration, 170(1), 97-118.

[5] Astley, R. J., & Eversman, W. (1983). Finite element formulations for acoustical radiation. Journal of Sound and Vibration, 88(1), 47-64.

[6] Burnett, D. S. (1994). A three-dimensional acoustic infinite element based on a prolate spheroidal multipole expansion. The Journal of the Acoustical Society of America, 96(5), 2798-2816.

[7] 1996 Bell Labs Fellows

[8] Ungless, R. F. (1973). Infinite finite element (T). University of British Columbia. Retrieved from https://open.library.ubc.ca/collections/ubctheses/831/items/1.0050530

[9] Beer, G., & Meek, J. L. (1981). ‘Infinite domain’ elements. International Journal for Numerical Methods in Engineering, 17(1), 43-52.

[10] Bettess, P. (1980). More on infinite elements. International Journal for Numerical Methods in Engineering, 15(11), 1613-1626.

[11] 应隆安. (n.d.). 无限元方法 (1992.nd ed., 北京大学数学丛书). 北京: 北京大学出版社.