Timoshenko梁单元的实现和前沿应用

力6 司马锲 2016011548

在弹性力学问题和工程实践中，我们往往在线弹性细长梁的建模与计算中采用欧拉-伯努利梁模型，在该模型中我们忽略了平面剪切变形并假定变形后横截面的平面仍与变形后的轴线相垂直，即垂直截面假设。在该模型中，所有剪切变形和转动变形均被忽视，主要考虑弯曲变形。横截面内的剪应变通过轴向应力平衡微分方程解得。而当我们面临有效长度较短的短梁、复合材料梁、和高频激励下波长接近厚度的梁时，上述模型不再有效，继而引入考虑剪切和转动变形的铁木辛柯梁模型，该模型通过协调方程而非平衡微分方程计算得到梁的正应力与切应力。

在铁木辛柯梁模型中，垂直截面假设不再成立且剪切和转动变形不能忽略，因此在经典的铁木辛柯有限元单元构建的过程中，我们必须要考虑到剪切变形带来的影响。在现有的研究中，构建铁木辛柯梁单元的方法主要有三种：直接法、势能法（或称变分法）、传递函数法。

在直接法构建铁木辛柯梁单元中，我们从基本的几何方程、平衡方程、变形协调方程和物理本构方程出发，推导出单元的位移控制方程并在位移方程求解求解中确定位移向量系数，以此为基础分别构建单元弯曲，剪切，扭转位移形函数，继而得出三类单元刚度矩阵和单元节点等效载荷向量，从而构建有限元形式。该方法优点是物理意义直观，且能给出单元在三个形变方向上刚度矩阵和等效载荷的解析形式，结果可靠，；缺陷是依赖于简化后的线性铁木辛柯梁方程，在极端短梁和非线性形变效应较大时失效，同时推导位移控制方程，构造形函数过程过于繁琐，不适合超大项目的计算。

在势能法中，我们在铁木辛柯梁的应力应变关系基础上导出其包含剪切变形的势能函数，再通过变分法求势能驻点得到其有限元形式。根据变分法我们可以得到二维平面内的铁木辛柯单元满足新的平衡方程。铁木辛柯梁单元的刚度阵相比于欧拉-伯努利梁模型同时包含了拉压刚度矩阵和扭转刚度矩阵，其余形式同欧拉伯努利梁一致。因此在建立单元网格和矩阵计算过程中，仍可以采用与欧拉伯努利梁相似的计算方法。该方法推导简洁，将三种形变统一到势能函数中来，变分法推导过程十分直观简洁，缺陷是需要额外构造形函数并且不能考虑到部分非线性请况下，各类形变之间的耦合效应。

分布参数系统的传递函数方法是一种基于控制论和半解析有限元思想的计算方法，该方法利用控制理论中的状态空间方法，将描述问题的多种类型数学物理方程转化为一组由自变量构成的正交基张成空间中的状态转换方程，再利用控制理论中的结论得到其目标函数的解析求解形式。将该方法的优点是求解过程简洁统一、精度高、边界条件处理规范和方便，便于计算机编程，还可与有限元等通用数值方法相耦合处理各类数学物理问题。在平面铁木辛柯梁单元的传递函数方法构建中，我们选取梁单元的弯曲变形、剪切变形及其各自的导数为空间正交基，并定义状态变量η，继而我们可以根据平面铁木辛柯梁轴向的剪力和弯矩平衡方程得到其状态空间内的状态转换方程和边界条件，再根据控制理论中的结论，设状态空间解的形式为通解，代入原方程联立得到梁的广义特性本构矩阵。继而对比状态空间中和经典有限元单元平衡方程，得到单元系统刚度矩阵和单元节点等效载荷向量用广义特性本构矩阵和状态变量η解的表示形式，从而实现有限元的构建。

铁木辛柯梁在实际工程中有着广泛的应用，因其在处理短梁、复合材料梁和高激励梁问题的有效性，其往往被用于分析微纳米元器件中的梁单元动力学问题，以及梁的振动问题。在实际应用中，铁木辛柯梁往往根据实际需要衍生出不同类型的单元。下面着重介绍小尺度下的应变梯度理论单元和铁木辛柯梁边界元

应变梯度理论单元

应变梯度理论是为解释材料在微米尺度下的尺寸效应现象而发展起来的一种新理论，Fleck等人最先于1994年在细铜丝的扭转实验中观测到微尺度下应变梯度的硬化，实验中12.5μm直径的铜丝的剪切强度约为170μm直径铜丝的三倍。在薄镍梁的微弯曲试验中，Stolken 和 Evans[2]观察到当梁的厚度从 100 微米减小到 12.5 微米时梁的规范化弯曲硬化有了巨大的增加。Lam 等人[3]在环氧聚合物梁的微弯曲试验中发现当梁的厚度从 115 微米减小到 20 微米时，梁的弯曲刚度增加了大约 2.4 倍。传统连续介质理论不含有尺寸参数，因此传统理论不适用于微结构。而应变梯度理论可以解决尺寸效应的问题，因此得到了广泛的应用。在这一类情况下，我们将应变梯度方程代入到铁木辛柯梁的平衡方程和本构方程中，通过哈密顿原理求其哈密顿量的驻值得到平面条件下铁木辛柯梁关于弯曲形变和剪切形变的控制方程。我们注意到，在该类情况下，小尺度中边界效应导致势能函数中含有的高阶张量被矢量化，我们将其简化为二次形式表示，新铁木辛柯梁单元的刚度和质量矩阵中也因此出现二次项。为了完备描述其动力学行为，与标准Timoshenko梁单元相比，新单元需要两个额外的节点自由度由横向平移和旋转的导数组成从而推导出铁木辛柯微梁静态模型的积分弱形式。将边界条件代入到弱形式确定位移向量的系数，并在较低连续性条件（C0型连续和C1型弱连续）的条件下采用一阶Hermite插值构建形函数，从而构建起应变梯度微梁的静态有限元形式。这类基于应变梯度弹性理论的非传统铁木辛柯梁单元来可以有效预测和分析微梁的弯曲力学行为，有效解决了微米尺度下梯度效应对梁单元构建的问题。同时，应变梯度梁单元满足C0型连续和C1型弱连续，并且这个单元包含三个內秉尺寸参数，相比于传统的铁木辛柯梁单元更容易构建且具有较高的计算精度。

铁木辛柯梁边界元

Timoshenko梁模型应用于梁内的高频振动问题研究自[Han S.M., Benaroya H](http://www.sciepub.com/reference/221406)1999年发表关于剪应力作用下发生横截面内振动的梁动力学分析相关的论文以来一直是振动学界的研究重点。边界元法作为现代数值方法之一，其基本思想是用边界积分方程求解微分方程边界元方法具有降低问题的维数、计算精度高等优点，其应用领域已遍及弹塑性力学、岩土力学、热学、声学、电磁学、生物细胞学等，近年来，随着高性能大容量微机的出现，边界元法广泛应用于大型和非线性科学工程领域的数值计算，已成为一种强有力的数值计算方法梁、板作为常用的工程结构元件，探索其自由振动固有频率的求解方法对认识和参数设计结构动态性能具有重要意义，但是对于梁、板等单元在高频激励下所产生的固有频率问题，其波长已经接近板厚的前提下，如果采用一般静态频率进行拟合将具有极大的误差。因此采用基于铁木辛柯梁静态基本解的边界元来求解一维、二维固有频率问题将带来极大便利。我们对铁木辛柯梁的两个变量进行无量纲化后，进行分离变量，根据傅里叶变换求得静态解后采用加权残量法来建立铁木辛柯梁的边界积分方程，在确定边界条件的基础上构建铁木辛柯梁边界元。该方法可以精确求解一维均匀结构的固有频率问题，同时在二维情况下相比于静态解拟合有更高精度，但是其精度仍然依赖于频率扫描步长。

参考文献

|  |
| --- |
| [1]许晶,李世尧,王斌泰,李静,蒋秀根.解析型Timoshenko梁有限单元[J/OL].西南交通大学学报 |
| [2]杨柳. 非线性梁的动力学分析[D].石家庄铁道大学,2015. |
| [3]张龙. 基于应变梯度理论的铁木辛柯梁单元[A]. 中国力学学会计算力学专业委员会.中国计算力学大会2014暨第三届钱令希计算力学奖颁奖大会论文集[C].中国力学学会计算力学专业委员会:中国力学学会,2014:7. |
| [4]金晶,邢誉峰.铁木辛柯梁固有振动频率的边界元解法[J].北京航空航天大学学报,2012,38(07):976-980. |
| [5]蒋纯志,金桂,陈亚琦.等截面铁木辛柯梁的分布传递函数方法[J].湖南科技学院学报,2009,30(08):50-53. |
| [6]蒋纯志,李海阳.基于传递函数解的铁木辛柯梁分析[J].湖南理工学院学报(自然科学版),2006(02):19-21.  [7] Fleck N A, Muller G M, Ashby M F and Hutchinson J W. Strain gradient plasticity: theory and experiment[J]. Acta Metallurgica et Materialia. 1994,42:475-487.  [8] Stolken J S and Evans A G. A microbend test method for measuring the plasticity length scale[J]. Acta Materialia. 1998, 46:5109-5115.  [9] Lam D C C, Yang F, Chong A C M, Wang J, and Tong P. Experiments and theory in strain gradient elasticity[J]. Journal Of the Mechanics And Physics Of Solids. 2003, 51: 1477-1508. |