Travaux dirigés : Algèbre linéaire

Cyrille Combété

cyrille.combete@imsp-uac.org

Exercice 1. *On considère les matrices M et P suivantes :*

$$M = \begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 \\ -2 & 3 & 4 \\ 0 & 1 & 1 \end{pmatrix} \quad et \quad P = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

1. *Effectuer si possible les opérations suivantes : PM, MP et P^2.*
2. *Déterminer le rang de la matrice P.*
3. *La matrice M est-elle symétrique ? antisymétrique ?*
4. *Calculer le déterminant $det(M)$, la comatrice $com(M)$ et l'inverse M^{-1} de M.*
5. *On considère le système (S_m) suivant :*

$$(S_m) \begin{cases} x \quad - \ z = m \\ -2x + 3y + 4z = 1 \\ y + \ z = 2m \end{cases},$$

où m est un paramètre réel.

   (a) *Justifier que le système (S_m) est de Cramer.*

   (b) *Résoudre le système (S) par la méthode matricelle.*

Exercice 2. *On considère le système:* $(S_\alpha) \quad \begin{cases} 2x - y - z = 1 \\ -x + 2y - \alpha z = 1 \\ -\alpha x - y + 2z = 1 \end{cases}$ *, où α est un paramètre réel.*

1. *Donner une écriture matricielle de la forme $A_\alpha X = B$ du système (S_α) tout en précisant A_α, X et B.*
2. *Pour quelles valeurs du réel α le système (S_α) est-il de Cramer ?*
3. *Résoudre, par la méthode des déterminants, le système (S_α) pour $\alpha = 2$.*

Exercice 3. *On munit $\mathbb{R}^3$ de sa base canonique $\mathcal{B} = \{i, j, k\}$. On considère l'application $f : \mathbb{R}^3 \mapsto \mathbb{R}^3$ définie pour tout vecteur $u = (x, y, z) \in \mathbb{R}^3$ par : $f(u) = (6x - 4y - 4z, 5x - 3y - 4z, x - y)$.*

1. *Montrer que f est une application linéaire.*
2. a) *Déterminer $f(i)$, $f(j)$ et $f(k)$.*

   b) *En déduire la matrice de f relativement à la base $\mathcal{B}$.*
3. a) *Déterminer le noyau $Ker(f)$ de l'application f.*

   b) *Déterminer l'image $Im(f)$ de l'application f.*

   c) *f est-elle injective ? surjective ? bijective ?*

Exercice 4. *On considère l'endomorphisme de $\mathbb{R}^3$ défini par $f : (x, y, z) \mapsto (3x - z, 2x + 4y + 2z, -x + 3z)$.*

1. Déterminer la matrice $A = Mat_{\mathcal{B}}(f)$ de f dans la base canonique $\mathcal{B}$ de $\mathbb{R}^3$.

2. Déterminer le polynôme caractéristique de f. En déduireles valeurs propres de f.

3. Déterminer une base pour chaque espace propre de f. L'endomorphisme f est-il diagonalisable ?

4. Trouver une matrice P telle que $A = PDP^{-1}$, où D est une matrice diagonale que l'on explicitera.

5. Déterminer la matrice A^n, pour tout $n \geq 1$.

Exercice 5. *Diagonaliser les matrices A suivantes, lorsque cela est possible.*

$$A = \begin{pmatrix} -1 & 1 & 1 \\ 1 & -1 & 1 \\ 1 & 1 & -1 \end{pmatrix}, \quad A = \begin{pmatrix} 2 & -1 & 1 \\ 1 & 0 & -1 \\ 2 & -2 & 1 \end{pmatrix}, \quad A = \begin{pmatrix} -1 & 2 & 3 \\ 0 & -2 & 0 \\ 1 & 2 & 1 \end{pmatrix}, \quad A = \begin{pmatrix} 1 & 3 & 0 \\ 3 & -2 & -1 \\ 0 & -1 & 1 \end{pmatrix}$$

Exercice 6. *On considère la matrice*

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 4 & -2 \\ 0 & 6 & -3 \\ -1 & 4 & 0 \end{pmatrix} \in \mathbb{M}_3(\mathbb{R}).$$

1. A est-elle trigonalisable sur $\mathbb{R}$?

2. Si oui, trouver P telle que $P^{-1}AP$ soit triangulaire supérieure ?

3. Calculer la réduction de Jordan de A.

Reprendre l'exercice pour :

$$A = \begin{pmatrix} 2 & 2 & -8 \\ 8 & -4 & -17 \\ -1 & 1 & 0 \end{pmatrix}, \quad A = \begin{pmatrix} 3 & -1 & -1 \\ -1 & 5 & 1 \\ 2 & 0 & 4 \end{pmatrix}, \quad A = \begin{pmatrix} -2 & 2 & -4 & 9 \\ -2 & 2 & -3 & 6 \\ 1 & -1 & 2 & -3 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$