Laboratorio 3 – Regresión lineal, transformaciones no lineales e interpretación

Table of contents

El propósito de este laboratorio es practicar: estimar **regresiones**, calcular **fórmulas** de MCO “a mano”, **visualizar** la *Función de Regresión Muestral* (Sample Regression Function), usar **transformaciones no lineales** e **interpretar coeficientes**.

Primeros pasos

Abre un nuevo script de R y carga los paquetes

```r
# Instalar paquetes solo si faltan (estilo ECO/EPG)
pkgs <- c("tidyverse", "modelsummary", "broom", "wooldridge", "kableExtra")
to_install <- pkgs[!pkgs %in% rownames(installed.packages())]
if (length(to_install) > 0) {
  install.packages(to_install, repos = "http://cran.us.r-project.org")
}

library(tidyverse)
library(modelsummary)
library(broom)
library(wooldridge)
```

```r
library(kableExtra)

# Receta ECO/EPG: forzar tablas estables (LaTeX clásico)
options(modelsummary_factory_default = "kableExtra")
```

Para este laboratorio usaremos datos sobre **gasto escolar** y **tasas de aprobación** de matemáticas en Michigan. Esto está en el conjunto `meap93` del paquete `wooldridge`. Cada observación corresponde a un **distrito escolar** de Michigan.

```r
df <- as_tibble(meap93)
```

Relación entre gasto y tasa de aprobación en matemáticas

Estima el siguiente modelo de regresión:

$$math10 = \beta_0 + \beta_1\, expend + u$$

El código para hacerlo es:

```r
est <- lm(math10 ~ expend, data = df)
tidy(est)
```

```
# A tibble: 2 x 5
  term        estimate std.error statistic    p.value
  <chr>          <dbl>     <dbl>     <dbl>      <dbl>
1 (Intercept) 13.4      2.93          4.55 0.00000700
2 expend       0.00246  0.000660      3.72 0.000227
```

```r
glance(est)
```

```
# A tibble: 1 x 12
  r.squared adj.r.squared sigma statistic  p.value    df logLik   AIC   BIC
      <dbl>         <dbl> <dbl>     <dbl>    <dbl> <dbl>  <dbl> <dbl> <dbl>
1    0.0330        0.0306  10.3      13.8 0.000227     1 -1531. 3067. 3079.
# i 3 more variables: deviance <dbl>, df.residual <int>, nobs <int>
```

Deberías obtener un coeficiente cercano a `0.00246` para `expend`. **Interpreta** este coeficiente. (Puedes escribir la interpretación como un comentario en tu script .R). ¿Te parece un número pequeño, considerando las unidades en que están `math10` y `expend`?

Coeficientes de regresión "a mano"

Verifica que los coeficientes estimados en `est` coinciden con las fórmulas del libro:

$$\hat{\beta}_0 = \overline{math10} - \hat{\beta}_1\,\overline{expend}, \qquad \hat{\beta}_1 = \frac{\widehat{cov}(math10, expend)}{\widehat{var}(expend)}$$

Puedes hacerlo escribiendo:

```
beta1 <- cov(df$math10, df$expend) / var(df$expend)
beta0 <- mean(df$math10) - beta1 * mean(df$expend)
beta0
```

```
[1] 13.35923
```

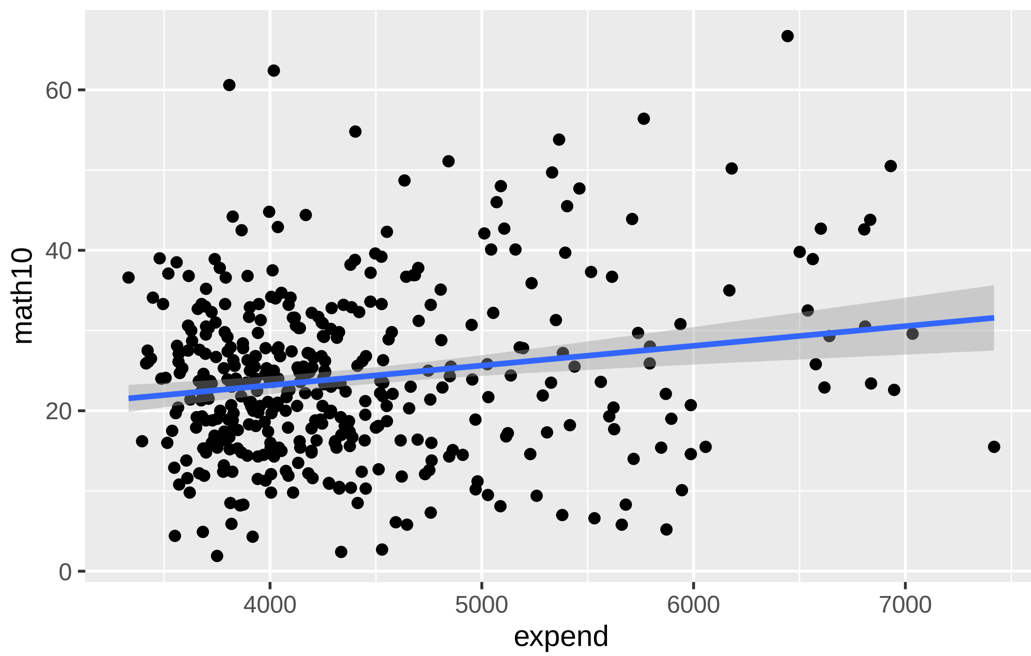
```
beta1
```

```
[1] 0.002455715
```

Visualización de los estimadores

A menudo es útil visualizar el modelo estimado. Wooldridge lo llama la **Función de Regresión Muestral** (*Sample Regression Function*). Podemos hacerlo con:

```
ggplot(df, aes(expend, math10)) +
  geom_point() +
  geom_smooth(method = "lm")
```



Transformaciones no lineales

Considera una versión modificada del modelo donde usamos el **logaritmo** del gasto en vez del gasto en niveles. ¿Por qué querríamos usar log(gasto)?

Una razón típica es que pensamos que **cada dólar adicional no tiene el mismo efecto** sobre la tasa de aprobación: los retornos marginales podrían ser **decrecientes** (ver también: *Ley de rendimientos marginales decrecientes*).

Crea la variable logarítmica usando `mutate()`:

```
df <- df %>% mutate(logexpend = log(expend))
```

Ahora estima el modelo nuevamente y vuelve a visualizar (mostrando ambas formas funcionales juntas):

```
est <- lm(math10 ~ logexpend, data = df)
tidy(est)
```

```
# A tibble: 2 x 5
  term        estimate std.error statistic  p.value
  <chr>          <dbl>     <dbl>     <dbl>    <dbl>
```

```
1 (Intercept)    -69.3     26.5      -2.61 0.00929
2 logexpend       11.2      3.17      3.52 0.000475
```

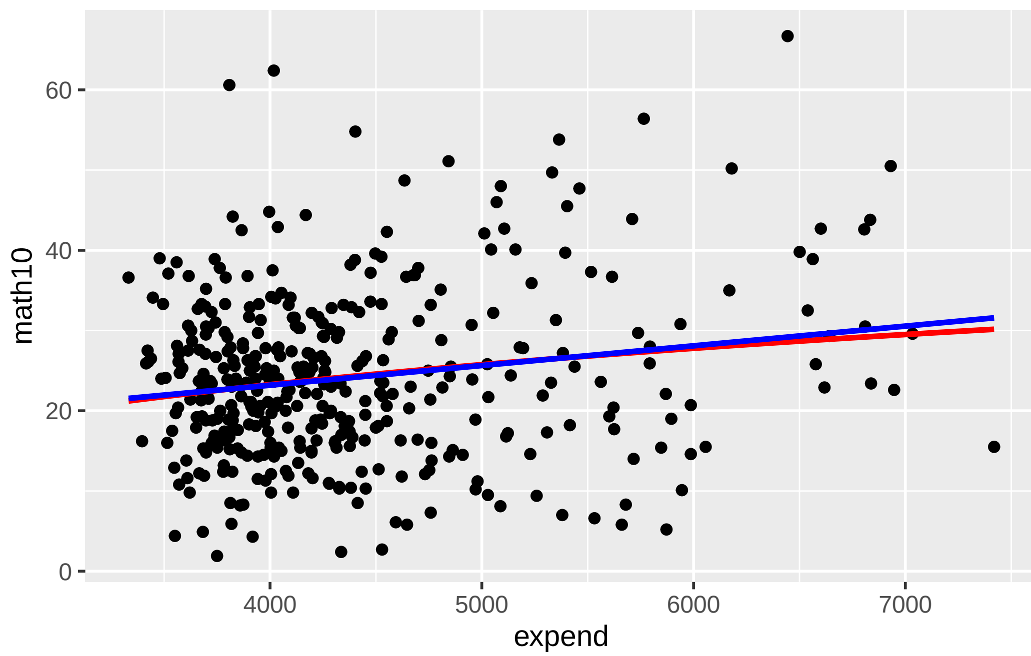
```r
glance(est)
```

```
# A tibble: 1 x 12
  r.squared adj.r.squared sigma statistic  p.value    df logLik   AIC   BIC
      <dbl>         <dbl> <dbl>     <dbl>    <dbl> <dbl>  <dbl> <dbl> <dbl>
1    0.0297        0.0273  10.3      12.4 0.000475     1 -1531. 3069. 3081.
# i 3 more variables: deviance <dbl>, df.residual <int>, nobs <int>
```

```r
# Tabla del modelo (estable para PDF)
modelsummary(est, output = "kableExtra") |>
  kable_styling(full_width = FALSE, position = "center", latex_options = "hold_position")
```

	(1)
(Intercept)	−69.341
	(26.530)
logexpend	11.164
	(3.169)
Num.Obs.	408
R2	0.030
R2 Adj.	0.027
AIC	3068.8
BIC	3080.8
Log.Lik.	−1531.396
F	12.411
RMSE	10.32

```r
# Visualización: forma logarítmica vs lineal (ambas sobre el mismo gráfico)
ggplot(df, aes(expend, math10)) +
  geom_point() +
  stat_smooth(method = "lm", se = FALSE, formula = y ~ log(x), col = "red") +
  stat_smooth(method = "lm", se = FALSE, col = "blue")
```



¿Cuál es la interpretación de β_1 en este nuevo modelo? (Agrégala como comentario en tu script).

Errores estándar y salida de regresión

Finalmente, mira el **error estándar**, el **estadístico t** y los **p-values** asociados a los parámetros β_0 y β_1. El `p.value` reportado en `tidy(est)` prueba la hipótesis:

$$H_0 : \beta_1 = 0 \quad \text{vs} \quad H_a : \beta_1 \neq 0$$

¿Un mayor gasto escolar incrementa significativamente la tasa de aprobación en matemáticas?

Cálculo de errores estándar "a mano" (opcional)

Si te queda tiempo, intenta calcular los errores estándar "a mano" según las fórmulas del texto. Para ello necesitamos calcular: `sig` (la desviación estándar de u), `n` (tamaño muestral), `SSTx` ($(n-1)$ veces la varianza de `logexpend`), y la suma de cuadrados de `logexpend`:

```r
n <- dim(df)[1]
sig <- sqrt(sum(est$residuals^2) / (n - 2))  # alternativa: glance(est)$sigma
SSTx <- (n - 1) * var(df$logexpend)
sumx2 <- sum(df$logexpend^2)
```

El error estándar del intercepto se calcula con:

```r
sqrt((sig^2 * (1/n) * sumx2) / SSTx)
```

```
[1] 26.53013
```

Y el error estándar de la pendiente (para `logexpend`) es:

```r
sqrt(sig^2 / SSTx)
```

```
[1] 3.169011
```