Capitulo 2 Correlación y Regresión Simple

Econometría para la Gestión (ECO_EPG) - FEN UAH

Tabla de contenidos

1. 1. Material descargable

Descargar PDF de contenidos teóricos

El PDF **"Capitulo_2_Correlacion_regresion_simple"** desarrolla los siguientes temas principales (a modo de índice):

- Covarianza y correlación.
- Diagramas de dispersión.
- Prueba de hipótesis para la correlación.
- Ecuaciones lineales y modelo lineal simple.
- Método de mínimos cuadrados.
- Residuos y error estándar de la estimación.
- Predicción e intervalos de confianza.
- Coeficiente de determinación simple (R^2).
- Prueba de hipótesis sobre el parámetro de pendiente (_1).

En este laboratorio llevaremos varios de estos conceptos a la práctica con **R**.

2. Configuración inicial en R

En esta sección cargaremos las **librerías** necesarias y definiremos la **ruta a los datos**.

2.1. Carga de librerías

```r
# Cargamos las librerías necesarias para el laboratorio
library(openxlsx)  # leer archivos Excel (.xlsx)
```

> Tip
>
> Si alguna librería no está instalada, puedes hacerlo con:
>
> ```r
> install.packages("openxlsx")
> ```

2.2. Definir la ruta de trabajo

Vamos a guardar la ruta donde están los datos en un objeto llamado `ruta_datos`.
Así solo modificamos una línea si cambiamos la carpeta en el futuro.

```r
# Definimos la ruta donde están los archivos de datos del laboratorio.
# IMPORTANTE: Ajusta esta ruta si tu carpeta tiene otro nombre o ubicación.

ruta_datos <- "C:/Users/manue/Desktop/lab-econometria/labs_epg/data_epg"

# Podemos verificar el contenido de la carpeta (opcional)
list.files(ruta_datos)
```

```
 [1] "annos_mantenimiento.xlsx" "auto_peso_consumo.xlsx"
 [3] "costos.xlsx"              "data_PCA_Decathlon.csv"
 [5] "data_PCA_ExpertWine.csv"  "Ejemplo1.xlsx"
 [7] "Ejemplo2.xlsx"            "millaje.txt"
 [9] "orange.csv"               "tabla_ejemplo_R.xlsx"
```

> Nota
>
> En R es recomendable usar / (slash) en lugar de \ en las rutas de Windows.
> Por eso escribimos `"C:/Users/manue/Desktop/..."` en lugar de `"C:\\Users\\..."`.

3. Ejemplo 1: Correlación entre peso del auto y consumo de gasolina

En este ejemplo estudiaremos la relación entre:

- `Peso_Libras`: peso del automóvil (en libras).
- `Consumo_Millas_por_galon`: rendimiento (millas por galón).

La idea es:

1. Graficar un **diagrama de dispersión**.
2. Calcular el **coeficiente de correlación**.
3. Realizar una **prueba de hipótesis** para ver si la correlación es distinta de cero.

3.1. Lectura de los datos de autos

```
archivo_autos <- file.path(ruta_datos, "auto_peso_consumo.xlsx")

datos <- read.xlsx(
  archivo_autos,
  sheet    = "Hoja1",
  colNames = TRUE
)

# Vemos las primeras filas
head(datos)
```

```
  Auto Peso_Libras Consumo_Millas_por_galon
1    1        2743                     21.4
2    2        3518                     15.2
3    3        1855                     38.9
4    4        5214                     12.7
5    5        4341                     17.8
```

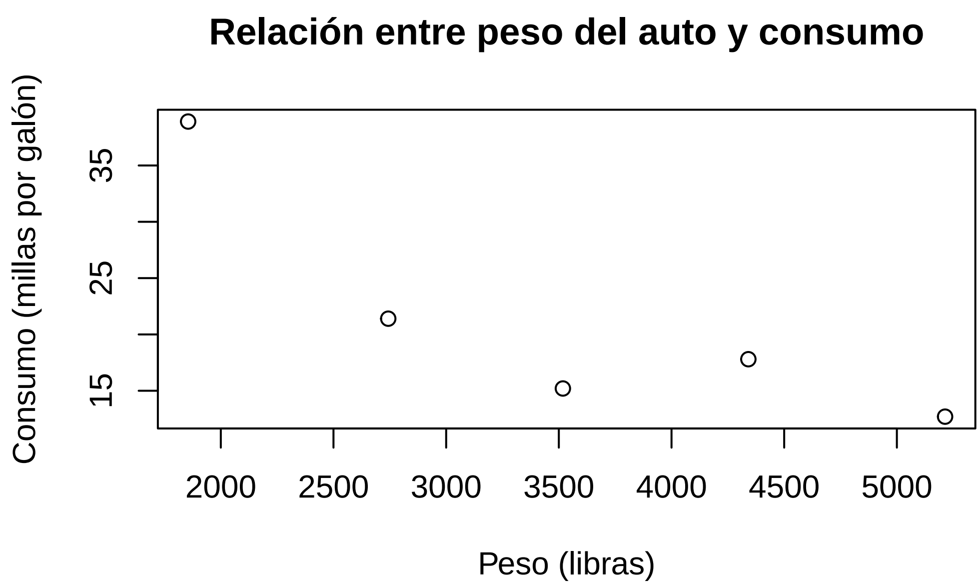
Esperamos que el archivo contenga, al menos, las columnas:

- `Peso_Libras`
- `Consumo_Millas_por_galon`

3.2. Diagrama de dispersión

El **diagrama de dispersión** nos permite ver visualmente si existe una relación lineal entre las variables.

```
plot(
  datos$Peso_Libras,
  datos$Consumo_Millas_por_galon,
  xlab = "Peso (libras)",
  ylab = "Consumo (millas por galón)",
  main = "Relación entre peso del auto y consumo"
)
```



> **Nota**
>
> - Si al aumentar el peso el consumo (millas por galón) **disminuye**, la nube de puntos tendrá una forma descendente → **correlación negativa**.
> - Si al aumentar el peso el consumo **aumentara**, veríamos una nube ascendente → **correlación positiva**.
> - Si no hay patrón claro, la correlación podría ser cercana a cero.

3.3. Cálculo de la correlación

El coeficiente de correlación de Pearson mide la **intensidad y dirección** de la relación lineal entre dos variables numéricas.

```
r <- cor(datos$Peso_Libras, datos$Consumo_Millas_por_galon)
r
```

```
[1] -0.8549912
```

- (r) está entre -1 y 1.
- (r < 0): relación negativa.
- (r > 0): relación positiva.
- (|r|) cercano a 1 → relación lineal fuerte.
- (|r|) cercano a 0 → relación lineal débil.

3.4. Prueba de hipótesis para la correlación (cálculo manual)

En la teoría se plantea la prueba:

$$H_0 : \rho = 0 \quad \text{vs} \quad H_1 : \rho \neq 0$$

La idea es ver si la correlación poblacional ( ) podría ser cero o no.

En el script se calcula el **error estándar** del coeficiente de correlación y luego el estadístico t:

```
# Cálculo manual basado en la fórmula del error estándar de r
sr <- sqrt((1 - r) / 3)   # comentario original: n número de datos menos 2

t <- r / sr               # estadístico t aproximado

t
```

```
[1] -1.087305
```

Luego se calcula el **valor crítico** y el **p-valor** usando la distribución t de Student:

```r
c <- qt(0.025, 3, lower.tail = FALSE)  # valor crítico (cola superior)
c
```

```
[1] 3.182446
```

```r
# p-valor aproximado
pt(-t, 3, lower.tail = FALSE)
```

```
[1] 0.1782267
```

> **Nota**
>
> - Si el **p-valor** es pequeño (por ejemplo, menor que 0.05), rechazamos (H_0) y concluimos que la correlación es **significativamente distinta de cero**.
> - Si el p-valor es grande, no tenemos evidencia suficiente para afirmar que exista correlación lineal distinta de cero.

3.5. Prueba de hipótesis para la correlación con `cor.test`

En lugar de hacer todos los cálculos "a mano", R nos ofrece la función `cor.test`, que:

- Calcula el coeficiente de correlación.
- Realiza la prueba de hipótesis.
- Entrega el p-valor y un intervalo de confianza para ( ).

```r
cor.test(datos$Peso_Libras, datos$Consumo_Millas_por_galon)
```

```

	Pearson's product-moment correlation

data:  datos$Peso_Libras and datos$Consumo_Millas_por_galon
t = -2.8553, df = 3, p-value = 0.06483
alternative hypothesis: true correlation is not equal to 0
95 percent confidence interval:
 -0.9902684  0.1110238
```

```
sample estimates:
       cor
-0.8549912
```

> **Tip**
>
> Siempre que sea posible, conviene **verificar los resultados manuales** con funciones integradas como `cor.test`, ya que éstas manejan bien detalles como el tamaño de muestra, grados de libertad y supuestos.

4. Ejemplo 2: Correlación y regresión del costo de mantenimiento

En este ejemplo utilizamos datos de:

- `Tiempo_operacion`: años de operación de un bus.
- `Costo_Mantenimiento`: costo anual de mantenimiento (por ejemplo, en dólares).

Queremos:

1. Ver si existe correlación entre el tiempo de operación y el costo de mantenimiento.
2. Ajustar una **regresión lineal simple** para predecir el costo a partir del tiempo.
3. Evaluar los residuos y la calidad del ajuste.
4. Calcular predicciones e intervalos de confianza.

4.1. Lectura de los datos de mantenimiento

```r
archivo_mant <- file.path(ruta_datos, "annos_mantenimiento.xlsx")

datos2 <- read.xlsx(
  archivo_mant,
  sheet    = "Hoja1",
  colNames = TRUE
)

head(datos2)
```

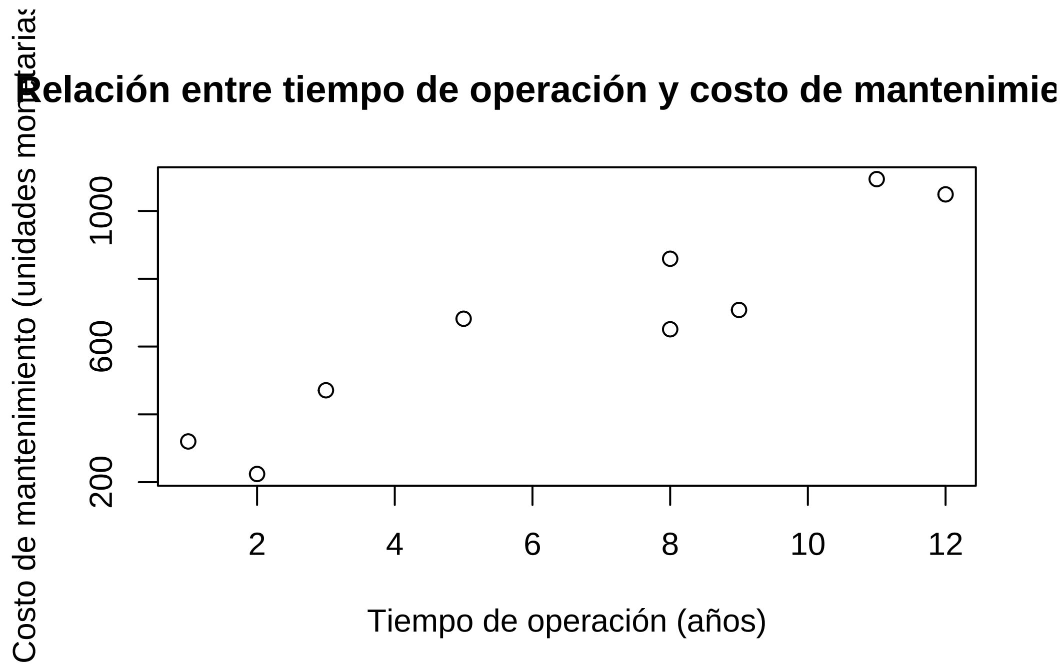
```
  Bus Costo_Mantenimiento Tiempo_operacion
1   1                 859                8
2   2                 682                5
3   3                 471                3
4   4                 708                9
5   5                1094               11
6   6                 224                2
```

Esperamos las columnas:

- `Tiempo_operacion`
- `Costo_Mantenimiento`

4.2. Diagrama de dispersión

```r
plot(
  datos2$Tiempo_operacion,
  datos2$Costo_Mantenimiento,
  xlab = "Tiempo de operación (años)",
  ylab = "Costo de mantenimiento (unidades monetarias)",
  main = "Relación entre tiempo de operación y costo de mantenimiento"
)
```



ℹ Nota

Este gráfico permite ver si al aumentar los años de operación los costos de mantenimiento tienden a subir.
Si la nube de puntos sugiere una recta ascendente, tiene sentido ajustar un modelo lineal.

4.3. Cálculo de la correlación y prueba de hipótesis

```
r <- cor(datos2$Tiempo_operacion, datos2$Costo_Mantenimiento)
r
```

```
[1] 0.9376733
```

Nuevamente, calculamos el error estándar y el estadístico t de forma manual (siguiendo la lógica del script original):

```
sr <- sqrt((1 - r) / 7)  # comentario original: aquí se usa 7 como "n - 2"

t <- r / sr
t
```

```
[1] 9.937184
```

Se podría obtener un valor crítico (aunque en el script se reutiliza un valor con 3 grados de libertad), y luego:

```r
cor.test(datos2$Tiempo_operacion, datos2$Costo_Mantenimiento)
```

```

	Pearson's product-moment correlation

data:  datos2$Tiempo_operacion and datos2$Costo_Mantenimiento
t = 7.1388, df = 7, p-value = 0.0001872
alternative hypothesis: true correlation is not equal to 0
95 percent confidence interval:
 0.7250800 0.9870994
sample estimates:
      cor 
0.9376733 
```

Tip

`cor.test` es la forma recomendada de hacer la prueba de hipótesis para la correlación, ya que usa la fórmula teórica correcta y ajusta automáticamente los grados de libertad.

4.4. Ajuste del modelo de regresión lineal simple

Planteamos el modelo:

$$\text{Costo\_Mantenimiento} = \beta\_0 + \beta\_1 \cdot \text{Tiempo\_operacion} + \varepsilon$$

Lo estimamos con `lm`:

```r
modelo <- lm(Costo_Mantenimiento ~ Tiempo_operacion, data = datos2)

summary(modelo)
```

```

Call:
lm(formula = Costo_Mantenimiento ~ Tiempo_operacion, data = datos2)
```

```
Residuals:
    Min      1Q  Median      3Q     Max 
-138.47 -124.55   40.88   83.45  119.21 

Coefficients:
                 Estimate Std. Error t value Pr(>|t|)    
(Intercept)       208.203     75.002   2.776 0.027457 *  
Tiempo_operacion   70.918      9.934   7.139 0.000187 ***
---
Signif. codes:  0 '***' 0.001 '**' 0.01 '*' 0.05 '.' 0.1 ' ' 1

Residual standard error: 111.6 on 7 degrees of freedom
Multiple R-squared:  0.8792,	Adjusted R-squared:  0.862 
F-statistic: 50.96 on 1 and 7 DF,  p-value: 0.0001872
```

El output de `summary(modelo)` incluye:

- Estimaciones de (_0) (intercepto) y (_1) (pendiente).
- Error estándar de cada coeficiente.
- Estadístico t y p-valor para probar si los coeficientes son distintos de cero.
- (R^2): porcentaje de variabilidad en el costo explicado por el tiempo de operación.

> **Nota**
>
> - Si el p-valor asociado a la pendiente (_1) es pequeño (ej. $<$ 0.05), concluimos que el tiempo de operación es un **buen predictor** del costo de mantenimiento.
> - Un (R^2) alto indica que el modelo lineal explica gran parte de la variabilidad del costo.

4.5. Predicción para 5 años de operación

Supongamos que queremos predecir el **costo de mantenimiento** para un bus con **5 años** de operación.

```r
nuevo <- data.frame(Tiempo_operacion = c(5))  # valor donde evaluamos el modelo

valor_predicho <- predict(object = modelo, newdata = nuevo)
```

```r
valor_predicho
```

```
      1
562.794
```

Este es el **valor esperado** de costo de mantenimiento según el modelo lineal.

4.6. Análisis de residuos

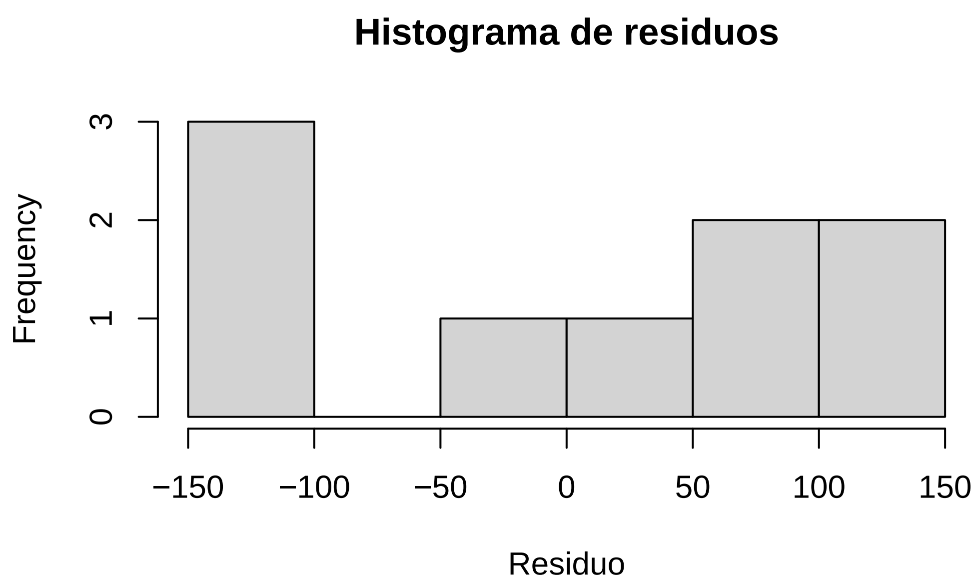
Los residuos son las diferencias entre los valores observados y los valores ajustados por el modelo:

$$\hat{\varepsilon}\_i = y_i - \hat{y}\_i$$

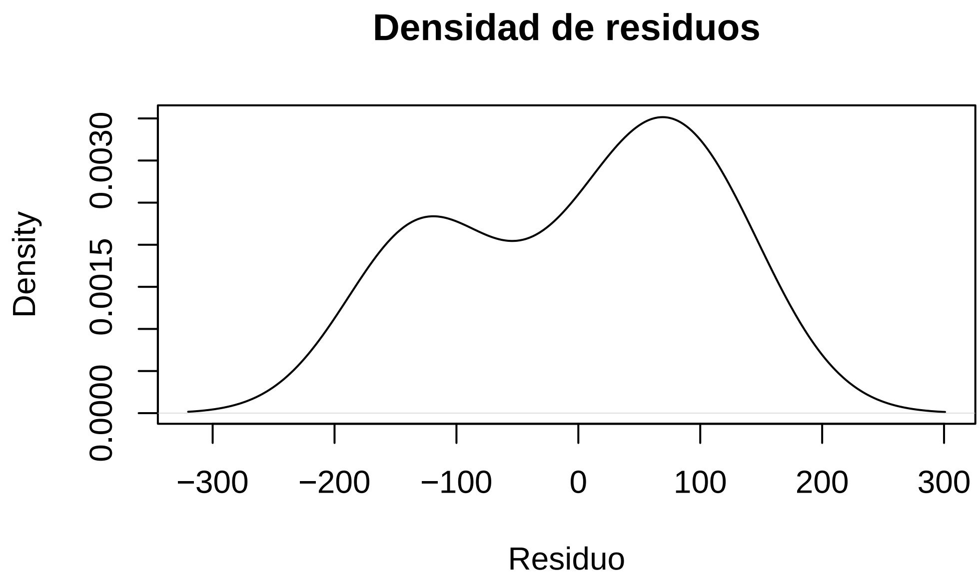
```r
# Vector de residuos
modelo$residuals
```

```
         1          2          3          4          5          6          7
  83.45158  119.20599   50.04225 -138.46655  105.69718 -126.03961   40.87852
         8          9
-124.54842  -10.22095
```

```r
# Histograma de residuos
hist(
  modelo$residuals,
  main = "Histograma de residuos",
  xlab = "Residuo"
)
```




```r
# Densidad de los residuos
plot(
  density(modelo$residuals),
  main = "Densidad de residuos",
  xlab = "Residuo"
)
```




```
# Media de los residuos
mean(modelo$residuals)
```

```
[1] -2.368187e-15
```

> **Nota**
>
> - En un buen modelo lineal, los residuos deberían:
>   - Tener **media cercana a cero**.
>   - No mostrar patrones sistemáticos.
>   - Aproximarse a una **distribución normal** (especialmente importante para los intervalos de confianza).
> - El histograma y la densidad ayudan a evaluar visualmente estas propiedades.

4.7. Cálculo del error estándar de la estimación (s_{y,x})

El script calcula manualmente el error estándar de la estimación a partir de los residuos:

$$s\_y, x = \sqrt{\frac{\sum \hat{\varepsilon}_i^2}{n-2}}$$

```r
s_yx <- sqrt(sum(modelo$residuals^2) / 7)  # aquí se usa 7 como "n - 2"
s_yx
```

```
[1] 111.6097
```

Este valor mide la **dispersión típica** de los puntos alrededor de la recta de regresión.

4.8. Intervalo de predicción para un valor individual (x_0 = 5)

Para un valor específico (x_0 = 5), el error estándar de la predicción se calcula (según la teoría) como:

$$s\_\hat{y}x = s\_y, x\sqrt{1 + \frac{1}{n} + \frac{(x_0 - \bar{x})^2}{\sum(x_i - \bar{x})^2}}$$

El script implementa esto en varios pasos.

```r
raiz <- sqrt(
  1 +
    1 / 9 +
    (5 - mean(datos2$Tiempo_operacion))^2 /
      sum((datos2$Tiempo_operacion - mean(datos2$Tiempo_operacion))^2)
)

s_hatyx <- s_yx * raiz
s_hatyx
```

```
[1] 118.6576
```

Luego se obtiene el valor crítico t y se calculan los límites del **intervalo de predicción**:

```r
t_crit <- qt(0.025, 7, lower.tail = FALSE)  # valor crítico t para 95%

lim_sup <- valor_predicho + t_crit * s_hatyx
lim_inf <- valor_predicho - t_crit * s_hatyx

lim_inf
```