

Capitulo_4_Uso_de_la_Regresion_Multiple

Econometría para la Gestión (ECO_EPG) - FEN UAH

Tabla de contenidos

1	1. Material descargable	2
2	Configuración inicial en R	2
2.1	Carga de librerías	2
2.2	Definir ruta de trabajo	2
3	Parte 1: Regresión múltiple con inversión publicitaria (tv, radio, periodico)	3
3.1	Crear el conjunto de datos	3
3.2	Correlaciones y multicolinealidad	5
3.3	Modelo con las tres variables	7
3.4	Modelo sin variable no significativa	8
3.5	Superficie de regresión en 3D	9
3.6	Análisis de residuos del modelo reducido	11
3.7	Incorporar una interacción tv * radio	14
3.8	Superficie del modelo con interacción	18
3.9	Comparación de modelos con ANOVA	19
3.10	Modelo con interacción y término cuadrático en tv	20
4	Parte 2: Regresión polinomial y transformaciones (ejemplo de millaje)	23
4.1	Cargar los datos de millaje	24
4.2	Correlaciones y gráficos	24
4.3	Modelo lineal simple en hp y vol	26
4.4	Modelo polinomial cuadrático	28
4.5	Análisis de residuos del modelo polinomial	30
4.6	Curva predicha del modelo polinomial	33
4.7	Visualización con ggplot2	34
4.8	Polinomios de grados más altos	34
4.9	Modelos polinomiales y comparación	35
4.10	Transformaciones de la variable respuesta	39
4.10.1	Transformación logarítmica	39

4.10.2	Transformación raíz cuadrada	43
4.10.3	Transformación 1/sqrt(mpg)	45
4.10.4	Transformaciones más complejas	47
4.10.5	Modelos sin constante y selección	55
4.10.6	Un modelo candidato “bueno”	60
5	Cierre del laboratorio	65

1. 1. Material descargable

Descargar PDF de contenidos teóricos

2. Configuración inicial en R

2.1. Carga de librerías

```
library(openxlsx)
library(MASS)      # funciones adicionales para modelos lineales
library(corrplot)  # correlaciones gráficas
library(lmtest)    # pruebas como Durbin-Watson, Breusch-Pagan
library(ggplot2)   # gráficos avanzados
```

2.2. Definir ruta de trabajo

En tu proyecto utilizaremos la ruta:

```
ruta_datos <- "C:/Users/manue/Desktop/lab-econometria/labs_epg/data_epg"

# Verificamos que la carpeta exista y revisamos algunos archivos
list.files(ruta_datos)
```

```
[1] "annos_mantenimiento.xlsx"  "auto_peso_consumo.xlsx"
[3] "costos.xlsx"              "data_PCA_Decathlon.csv"
[5] "data_PCA_ExpertWine.csv"   "Ejemplo1.xlsx"
[7] "Ejemplo2.xlsx"             "millaje.txt"
[9] "orange.csv"                "tabla_ejemplo_R.xlsx"
```

💡 Tip

Si copias este laboratorio a otro computador, solo deberás **cambiar la ruta** de **ruta_datos** para que apunte a la nueva carpeta donde estén **millaje.txt** y otros archivos de datos.

3. Parte 1: Regresión múltiple con inversión publicitaria (tv, radio, periodico)

En esta primera parte trabajaremos con un ejemplo clásico de marketing:

- **tv**: gasto en publicidad en TV (en miles de dólares).
- **radio**: gasto en publicidad en radio.
- **periodico**: gasto en publicidad en periódicos.
- **ventas**: ventas del producto (en miles de unidades).

La idea es entender **cómo se relacionan las ventas con los distintos medios publicitarios**, usando regresión múltiple.

3.1. Crear el conjunto de datos

El script genera los vectores directamente en R y luego los combina en un **data.frame**:

```
tv <- c(230.1, 44.5, 17.2, 151.5, 180.8, 8.7, 57.5, 120.2, 8.6, 199.8, 66.1, 214.7,  
       23.8, 97.5, 204.1, 195.4, 67.8, 281.4, 69.2, 147.3, 218.4, 237.4, 13.2,  
       228.3, 62.3, 262.9, 142.9, 240.1, 248.8, 70.6, 292.9, 112.9, 97.2, 265.6,  
       95.7, 290.7, 266.9, 74.7, 43.1, 228.0, 202.5, 177.0, 293.6, 206.9, 25.1,  
       175.1, 89.7, 239.9, 227.2, 66.9, 199.8, 100.4, 216.4, 182.6, 262.7, 198.9,  
       7.3, 136.2, 210.8, 210.7, 53.5, 261.3, 239.3, 102.7, 131.1, 69.0, 31.5,  
       139.3, 237.4, 216.8, 199.1, 109.8, 26.8, 129.4, 213.4, 16.9, 27.5, 120.5,  
       5.4, 116.0, 76.4, 239.8, 75.3, 68.4, 213.5, 193.2, 76.3, 110.7, 88.3,  
       109.8, 134.3, 28.6, 217.7, 250.9, 107.4, 163.3, 197.6, 184.9, 289.7,  
       135.2, 222.4, 296.4, 280.2, 187.9, 238.2, 137.9, 25.0, 90.4, 13.1, 255.4,  
       225.8, 241.7, 175.7, 209.6, 78.2, 75.1, 139.2, 76.4, 125.7, 19.4, 141.3,  
       18.8, 224.0, 123.1, 229.5, 87.2, 7.8, 80.2, 220.3, 59.6, 0.7, 265.2,  
       8.4, 219.8, 36.9, 48.3, 25.6, 273.7, 43.0, 184.9, 73.4, 193.7, 220.5,  
       104.6, 96.2, 140.3, 240.1, 243.2, 38.0, 44.7, 280.7, 121.0, 197.6, 171.3,
```

```

187.8, 4.1, 93.9, 149.8, 11.7, 131.7, 172.5, 85.7, 188.4, 163.5, 117.2,
234.5, 17.9, 206.8, 215.4, 284.3, 50.0, 164.5, 19.6, 168.4, 222.4, 276.9,
248.4, 170.2, 276.7, 165.6, 156.6, 218.5, 56.2, 287.6, 253.8, 205.0,
139.5, 191.1, 286.0, 18.7, 39.5, 75.5, 17.2, 166.8, 149.7, 38.2, 94.2,
177.0, 283.6, 232.1)

radio <- c(37.8, 39.3, 45.9, 41.3, 10.8, 48.9, 32.8, 19.6, 2.1, 2.6, 5.8, 24.0,
35.1, 7.6, 32.9, 47.7, 36.6, 39.6, 20.5, 23.9, 27.7, 5.1, 15.9, 16.9,
12.6, 3.5, 29.3, 16.7, 27.1, 16.0, 28.3, 17.4, 1.5, 20.0, 1.4, 4.1,
43.8, 49.4, 26.7, 37.7, 22.3, 33.4, 27.7, 8.4, 25.7, 22.5, 9.9, 41.5,
15.8, 11.7, 3.1, 9.6, 41.7, 46.2, 28.8, 49.4, 28.1, 19.2, 49.6, 29.5,
2.0, 42.7, 15.5, 29.6, 42.8, 9.3, 24.6, 14.5, 27.5, 43.9, 30.6, 14.3,
33.0, 5.7, 24.6, 43.7, 1.6, 28.5, 29.9, 7.7, 26.7, 4.1, 20.3, 44.5,
43.0, 18.4, 27.5, 40.6, 25.5, 47.8, 4.9, 1.5, 33.5, 36.5, 14.0, 31.6,
3.5, 21.0, 42.3, 41.7, 4.3, 36.3, 10.1, 17.2, 34.3, 46.4, 11.0, 0.3,
0.4, 26.9, 8.2, 38.0, 15.4, 20.6, 46.8, 35.0, 14.3, 0.8, 36.9, 16.0,
26.8, 21.7, 2.4, 34.6, 32.3, 11.8, 38.9, 0.0, 49.0, 12.0, 39.6, 2.9,
27.2, 33.5, 38.6, 47.0, 39.0, 28.9, 25.9, 43.9, 17.0, 35.4, 33.2, 5.7,
14.8, 1.9, 7.3, 49.0, 40.3, 25.8, 13.9, 8.4, 23.3, 39.7, 21.1, 11.6,
43.5, 1.3, 36.9, 18.4, 18.1, 35.8, 18.1, 36.8, 14.7, 3.4, 37.6, 5.2,
23.6, 10.6, 11.6, 20.9, 20.1, 7.1, 3.4, 48.9, 30.2, 7.8, 2.3, 10.0,
2.6, 5.4, 5.7, 43.0, 21.3, 45.1, 2.1, 28.7, 13.9, 12.1, 41.1, 10.8,
4.1, 42.0, 35.6, 3.7, 4.9, 9.3, 42.0, 8.6)

periodico <- c(69.2, 45.1, 69.3, 58.5, 58.4, 75.0, 23.5, 11.6, 1.0, 21.2, 24.2,
4.0, 65.9, 7.2, 46.0, 52.9, 114.0, 55.8, 18.3, 19.1, 53.4, 23.5,
49.6, 26.2, 18.3, 19.5, 12.6, 22.9, 22.9, 40.8, 43.2, 38.6, 30.0,
0.3, 7.4, 8.5, 5.0, 45.7, 35.1, 32.0, 31.6, 38.7, 1.8, 26.4, 43.3,
31.5, 35.7, 18.5, 49.9, 36.8, 34.6, 3.6, 39.6, 58.7, 15.9, 60.0,
41.4, 16.6, 37.7, 9.3, 21.4, 54.7, 27.3, 8.4, 28.9, 0.9, 2.2, 10.2,
11.0, 27.2, 38.7, 31.7, 19.3, 31.3, 13.1, 89.4, 20.7, 14.2, 9.4,
23.1, 22.3, 36.9, 32.5, 35.6, 33.8, 65.7, 16.0, 63.2, 73.4, 51.4,
9.3, 33.0, 59.0, 72.3, 10.9, 52.9, 5.9, 22.0, 51.2, 45.9, 49.8,
100.9, 21.4, 17.9, 5.3, 59.0, 29.7, 23.2, 25.6, 5.5, 56.5, 23.2,
2.4, 10.7, 34.5, 52.7, 25.6, 14.8, 79.2, 22.3, 46.2, 50.4, 15.6,
12.4, 74.2, 25.9, 50.6, 9.2, 3.2, 43.1, 8.7, 43.0, 2.1, 45.1, 65.6,
8.5, 9.3, 59.7, 20.5, 1.7, 12.9, 75.6, 37.9, 34.4, 38.9, 9.0, 8.7,
44.3, 11.9, 20.6, 37.0, 48.7, 14.2, 37.7, 9.5, 5.7, 50.5, 24.3,
45.2, 34.6, 30.7, 49.3, 25.6, 7.4, 5.4, 84.8, 21.6, 19.4, 57.6,
6.4, 18.4, 47.4, 17.0, 12.8, 13.1, 41.8, 20.3, 35.2, 23.7, 17.6,
8.3, 27.4, 29.7, 71.8, 30.0, 19.6, 26.6, 18.2, 3.7, 23.4, 5.8, 6.0,
31.6, 3.6, 6.0, 13.8, 8.1, 6.4, 66.2, 8.7)

```

```

ventas <- c(22.1, 10.4, 9.3, 18.5, 12.9, 7.2, 11.8, 13.2, 4.8, 10.6, 8.6, 17.4,
         9.2, 9.7, 19.0, 22.4, 12.5, 24.4, 11.3, 14.6, 18.0, 12.5, 5.6, 15.5,
         9.7, 12.0, 15.0, 15.9, 18.9, 10.5, 21.4, 11.9, 9.6, 17.4, 9.5, 12.8,
         25.4, 14.7, 10.1, 21.5, 16.6, 17.1, 20.7, 12.9, 8.5, 14.9, 10.6, 23.2,
         14.8, 9.7, 11.4, 10.7, 22.6, 21.2, 20.2, 23.7, 5.5, 13.2, 23.8, 18.4,
         8.1, 24.2, 15.7, 14.0, 18.0, 9.3, 9.5, 13.4, 18.9, 22.3, 18.3, 12.4,
         8.8, 11.0, 17.0, 8.7, 6.9, 14.2, 5.3, 11.0, 11.8, 12.3, 11.3, 13.6,
         21.7, 15.2, 12.0, 16.0, 12.9, 16.7, 11.2, 7.3, 19.4, 22.2, 11.5, 16.9,
         11.7, 15.5, 25.4, 17.2, 11.7, 23.8, 14.8, 14.7, 20.7, 19.2, 7.2, 8.7,
         5.3, 19.8, 13.4, 21.8, 14.1, 15.9, 14.6, 12.6, 12.2, 9.4, 15.9, 6.6,
         15.5, 7.0, 11.6, 15.2, 19.7, 10.6, 6.6, 8.8, 24.7, 9.7, 1.6, 12.7,
         5.7, 19.6, 10.8, 11.6, 9.5, 20.8, 9.6, 20.7, 10.9, 19.2, 20.1, 10.4,
         11.4, 10.3, 13.2, 25.4, 10.9, 10.1, 16.1, 11.6, 16.6, 19.0, 15.6,
         3.2, 15.3, 10.1, 7.3, 12.9, 14.4, 13.3, 14.9, 18.0, 11.9, 11.9, 8.0,
         12.2, 17.1, 15.0, 8.4, 14.5, 7.6, 11.7, 11.5, 27.0, 20.2, 11.7, 11.8,
         12.6, 10.5, 12.2, 8.7, 26.2, 17.6, 22.6, 10.3, 17.3, 15.9, 6.7, 10.8,
         9.9, 5.9, 19.6, 17.3, 7.6, 9.7, 12.8, 25.5, 13.4)

datos <- data.frame(tv, radio, periodico, ventas)
head(datos)

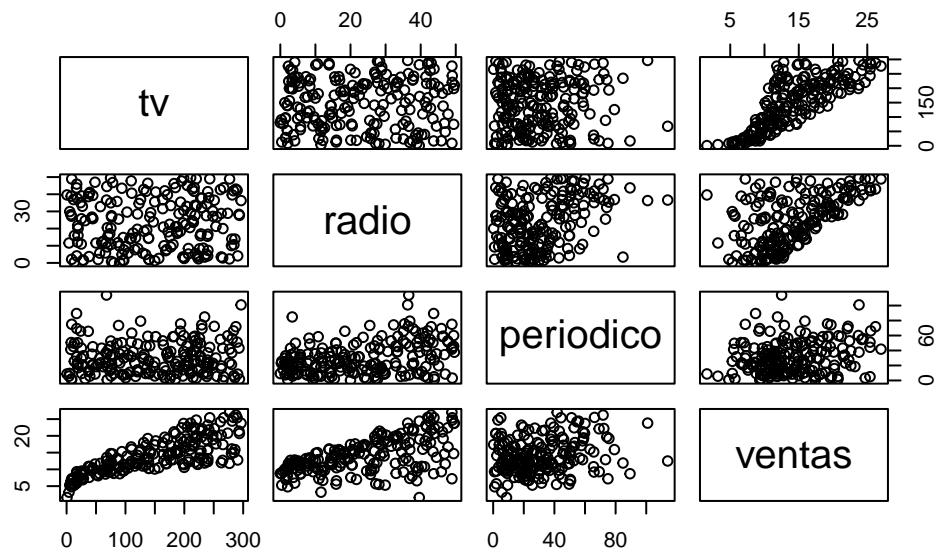
```

	tv	radio	periodico	ventas
1	230.1	37.8	69.2	22.1
2	44.5	39.3	45.1	10.4
3	17.2	45.9	69.3	9.3
4	151.5	41.3	58.5	18.5
5	180.8	10.8	58.4	12.9
6	8.7	48.9	75.0	7.2

3.2. Correlaciones y multicolinealidad

Primero, miramos las correlaciones entre variables:

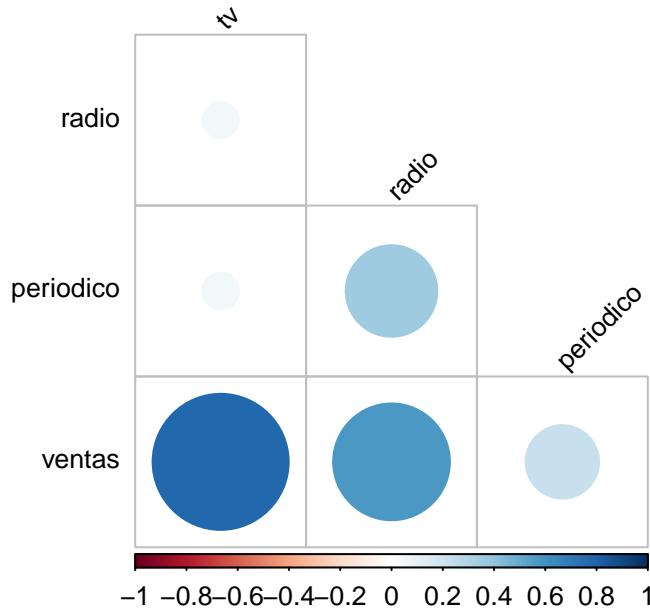
```
pairs(datos)
```



```
r <- cor(datos)
r
```

	tv	radio	periodico	ventas
tv	1.00000000	0.05480866	0.05664787	0.7822244
radio	0.05480866	1.00000000	0.35410375	0.5762226
periodico	0.05664787	0.35410375	1.00000000	0.2282990
ventas	0.78222442	0.57622257	0.22829903	1.0000000

```
corrplot(r, method="circle", type="lower", diag=FALSE,
         tl.col="black", tl.cex=0.8, tl.srt=45)
```



i Nota

Interpretación:

- La columna **ventas** te muestra cómo se relaciona la variable respuesta con cada medio.
- Si dos regresores (por ejemplo, **tv** y **radio**) tienen **correlación muy alta**, podría haber multicolinealidad.
- El **corrplot** ayuda a ver estas relaciones de forma más clara que solo con la matriz numérica.

3.3. Modelo con las tres variables

Ajustamos el modelo completo:

$$\text{ventas} = \beta_0 + \beta_1 \text{tv} + \beta_2 \text{radio} + \beta_3 \text{periodico} + \varepsilon$$

```
modelo_full <- lm(ventas ~ tv + radio + periodico, data = datos)
summary(modelo_full)
```

```

Call:
lm(formula = ventas ~ tv + radio + periodico, data = datos)

Residuals:
    Min      1Q  Median      3Q     Max 
-8.8277 -0.8908  0.2418  1.1893  2.8292 

Coefficients:
            Estimate Std. Error t value Pr(>|t|)    
(Intercept) 2.938889  0.311908   9.422 <2e-16 ***
tv          0.045765  0.001395  32.809 <2e-16 ***
radio       0.188530  0.008611  21.893 <2e-16 ***
periodico  -0.001037  0.005871  -0.177    0.86    
---
Signif. codes:  0 '***' 0.001 '**' 0.01 '*' 0.05 '.' 0.1 ' ' 1

Residual standard error: 1.686 on 196 degrees of freedom
Multiple R-squared:  0.8972,    Adjusted R-squared:  0.8956 
F-statistic: 570.3 on 3 and 196 DF,  p-value: < 2.2e-16

```

i Nota

Mira especialmente:

- El **p-value** de cada coeficiente → te indica si esa variable es significativa.
- El **p-value** de la prueba F → si el modelo completo explica significativamente a **ventas**.
- El **R²** y **R² ajustado** → qué porcentaje de la variación se explica por los regresores.

3.4. Modelo sin variable no significativa

Si el coeficiente de **periodico** no es significativo, podemos intentar un modelo más parsimonioso:

```

modelo <- lm(ventas ~ tv + radio, data = datos)
summary(modelo)

```

```

Call:
lm(formula = ventas ~ tv + radio, data = datos)

Residuals:
    Min      1Q  Median      3Q     Max 
-8.7977 -0.8752  0.2422  1.1708  2.8328 

Coefficients:
            Estimate Std. Error t value Pr(>|t|)    
(Intercept) 2.92110   0.29449   9.919 <2e-16 ***
tv          0.04575   0.00139  32.909 <2e-16 ***
radio       0.18799   0.00804  23.382 <2e-16 ***
---
Signif. codes:  0 '***' 0.001 '**' 0.01 '*' 0.05 '.' 0.1 ' ' 1

Residual standard error: 1.681 on 197 degrees of freedom
Multiple R-squared:  0.8972,    Adjusted R-squared:  0.8962 
F-statistic: 859.6 on 2 and 197 DF,  p-value: < 2.2e-16

```

💡 Tip

Eliminar variables no significativas:

- Simplifica la interpretación.
- Puede mejorar la capacidad predictiva fuera de muestra.
- Siempre es recomendable comparar modelos (por ejemplo, con ANOVA o criterios de información).

3.5. Superficie de regresión en 3D

Como ahora el modelo solo depende de **tv** y **radio**, podemos visualizar la “superficie de regresión” y cómo se ubican los datos alrededor de ella.

```

rango_tv <- range(datos$tv)
nuevos_valores_tv <- seq(from = rango_tv[1], to = rango_tv[2], length.out = 20)

rango_radio <- range(datos$radio)
nuevos_valores_radio <- seq(from = rango_radio[1], to = rango_radio[2],

```

```

length.out = 20)

predicciones <- outer(
  X = nuevos_valores_tv,
  Y = nuevos_valores_radio,
  FUN = function(tv, radio) {
    predict(object = modelo, newdata = data.frame(tv, radio))
  }
)

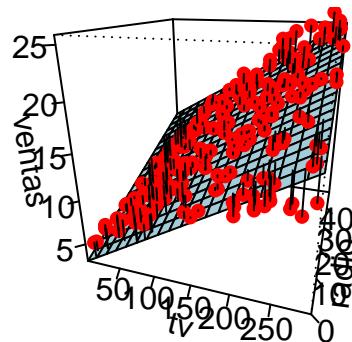
superficie <- persp(
  x = nuevos_valores_tv,
  y = nuevos_valores_radio,
  z = predicciones,
  theta = 18, phi = 20,
  col = "lightblue", shade = 0.1,
  xlab = "tv", ylab = "radio", zlab = "ventas",
  ticktype = "detailed",
  main = "Predicción ventas ~ tv + radio"
)

observaciones <- trans3d(datos$tv, datos$radio, datos$ventas, superficie)
error <- trans3d(datos$tv, datos$radio, fitted(modelo), superficie)

points(observaciones, col = "red", pch = 16)
segments(observaciones$x, observaciones$y, error$x, error$y)

```

Predicción ventas ~ tv + radio



Nota

- Los puntos rojos son las **observaciones reales**.
- Las líneas verticales muestran la **distancia** entre la superficie de predicción y los datos → son los errores del modelo.
- Si las líneas son pequeñas, el ajuste es bueno.

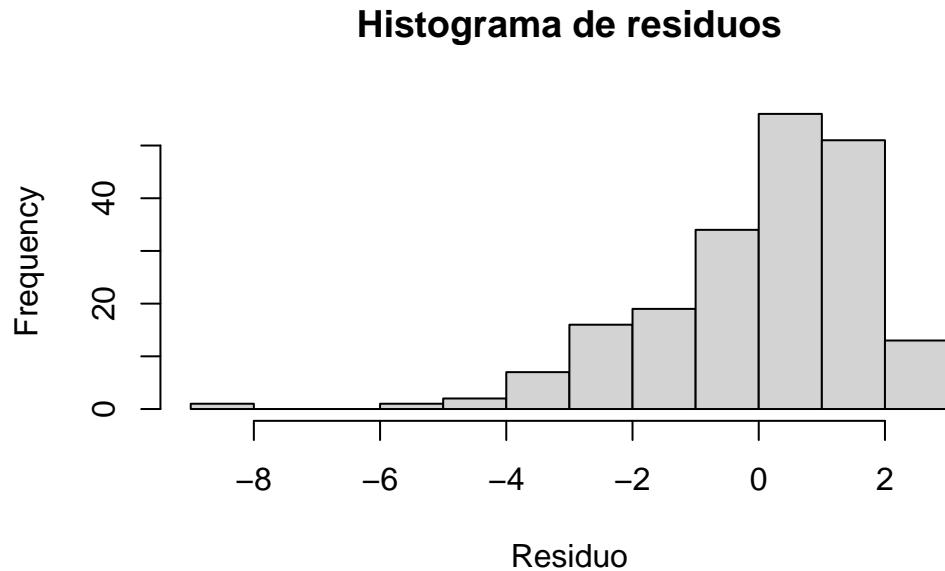
3.6. Análisis de residuos del modelo reducido

```
shapiro.test(modelo$residuals)
```

Shapiro-Wilk normality test

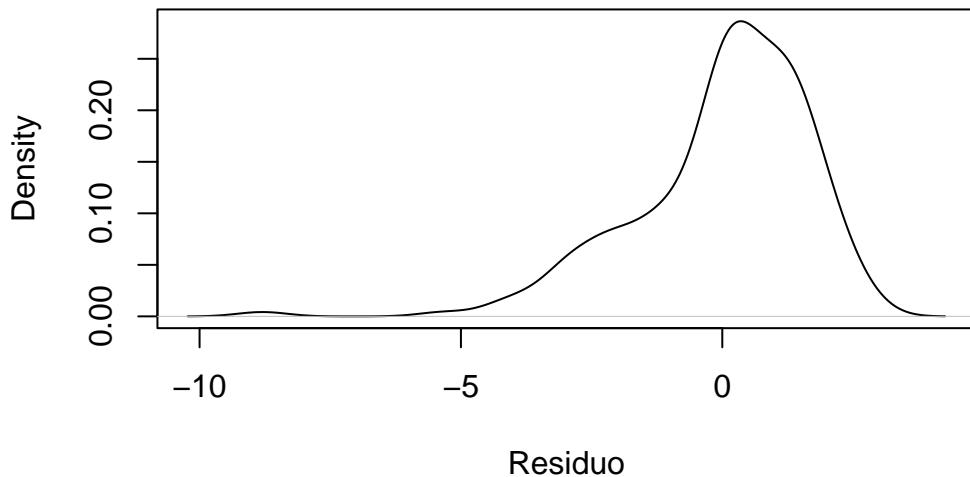
```
data: modelo$residuals  
W = 0.91804, p-value = 4.19e-09
```

```
hist(modelo$residuals, main="Histograma de residuos", xlab="Residuo")
```



```
plot(density(modelo$residuals), main="Densidad de residuos", xlab="Residuo")
```

Densidad de residuos



Pruebas de autocorrelación y heterocedasticidad:

```
dwtest(modelo, alternative ="two.sided", iterations = 1000)
```

Durbin-Watson test

```
data: modelo  
DW = 2.0808, p-value = 0.5656  
alternative hypothesis: true autocorrelation is not 0
```

```
bptest(modelo)
```

studentized Breusch-Pagan test

```
data: modelo  
BP = 4.8093, df = 2, p-value = 0.0903
```

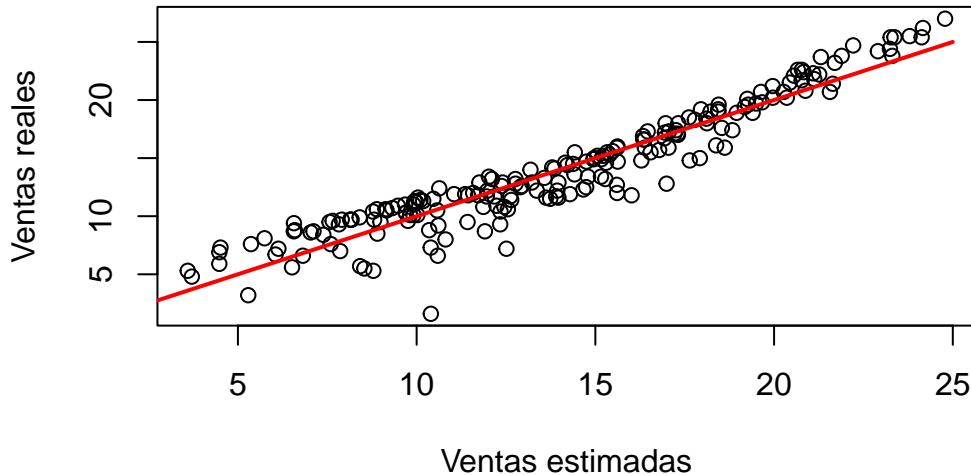
Gráfico de valores reales vs estimados:

```

plot(modelo$fitted.values, datos$ventas,
      xlab = "Ventas estimadas", ylab = "Ventas reales",
      main = "Ventas reales vs estimadas (modelo sin periodico)")
lines(c(0, 25), c(0, 25), col = "red", lwd = 2)

```

Ventas reales vs estimadas (modelo sin periodo)



Nota

- Si los puntos se alinean alrededor de la diagonal roja → el modelo predice razonablemente bien.
- Desviaciones sistemáticas o patrones curvos indicarían que falta estructura (no linealidad, interacciones, etc.).

3.7. Incorporar una interacción tv * radio

Ahora probamos un modelo donde el efecto de la TV depende del nivel de radio (y viceversa).

```
tv_radio <- tv * radio
```

```
modelo_interaccion <- lm(ventas ~ tv + radio + tv:radio, data = datos)
summary(modelo_interaccion)
```

Call:
lm(formula = ventas ~ tv + radio + tv:radio, data = datos)

Residuals:

Min	1Q	Median	3Q	Max
-6.3366	-0.4028	0.1831	0.5948	1.5246

Coefficients:

	Estimate	Std. Error	t value	Pr(> t)							
(Intercept)	6.750e+00	2.479e-01	27.233	<2e-16 ***							
tv	1.910e-02	1.504e-03	12.699	<2e-16 ***							
radio	2.886e-02	8.905e-03	3.241	0.0014 **							
tv:radio	1.086e-03	5.242e-05	20.727	<2e-16 ***							

Signif. codes:	0	'***'	0.001	'**'	0.01	'*'	0.05	'..'	0.1	' '	1

Residual standard error: 0.9435 on 196 degrees of freedom
Multiple R-squared: 0.9678, Adjusted R-squared: 0.9673
F-statistic: 1963 on 3 and 196 DF, p-value: < 2.2e-16

Analizamos los residuos del nuevo modelo:

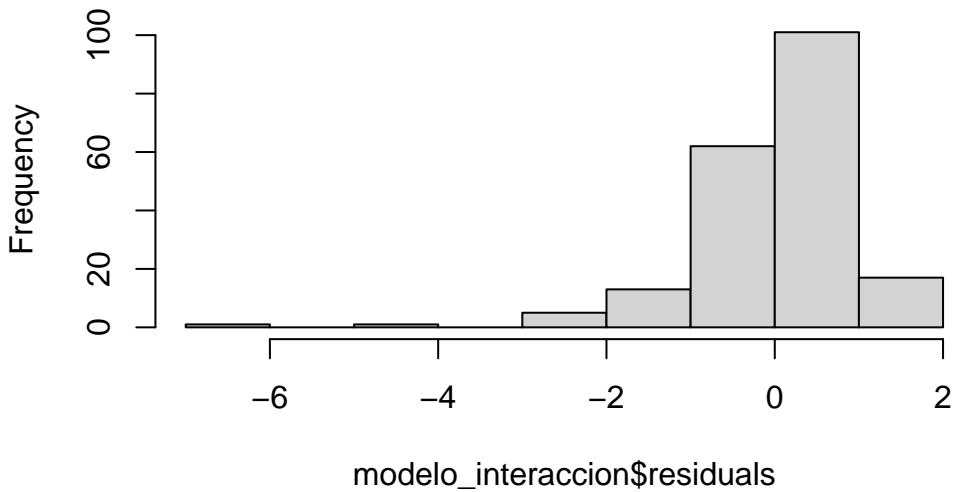
```
shapiro.test(modelo_interaccion$residuals)
```

```
Shapiro-Wilk normality test

data: modelo_interaccion$residuals
W = 0.8469, p-value = 3.047e-13

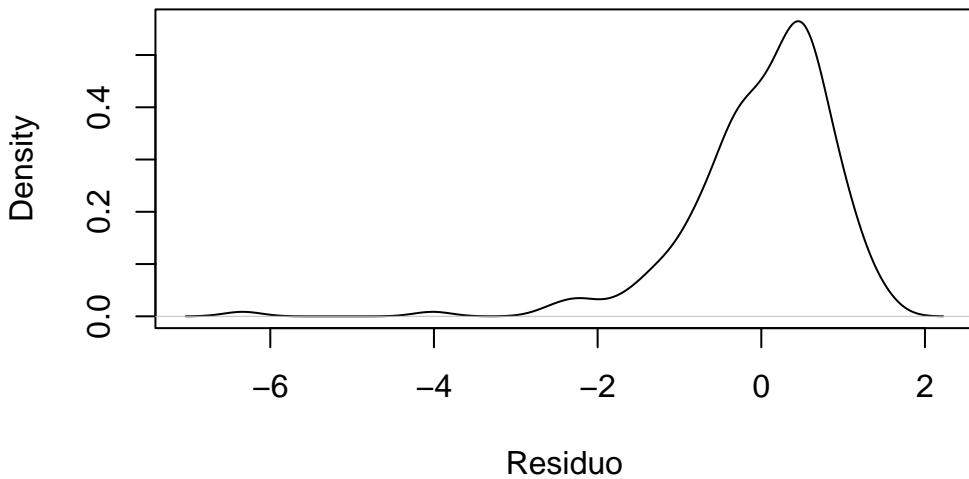
hist(modelo_interaccion$residuals, main="Histograma residuos modelo interacción")
```

Histograma residuos modelo interacción



```
plot(density(modelo_interaccion$residuals),  
     main="Densidad residuos modelo interacción", xlab="Residuo")
```

Densidad residuos modelo interacción



```
dwtest(modelo_interaccion, alternative ="two.sided", iterations = 1000)
```

Durbin-Watson test

```
data: modelo_interaccion
DW = 2.2236, p-value = 0.1103
alternative hypothesis: true autocorrelation is not 0
```

```
bptest(modelo_interaccion)
```

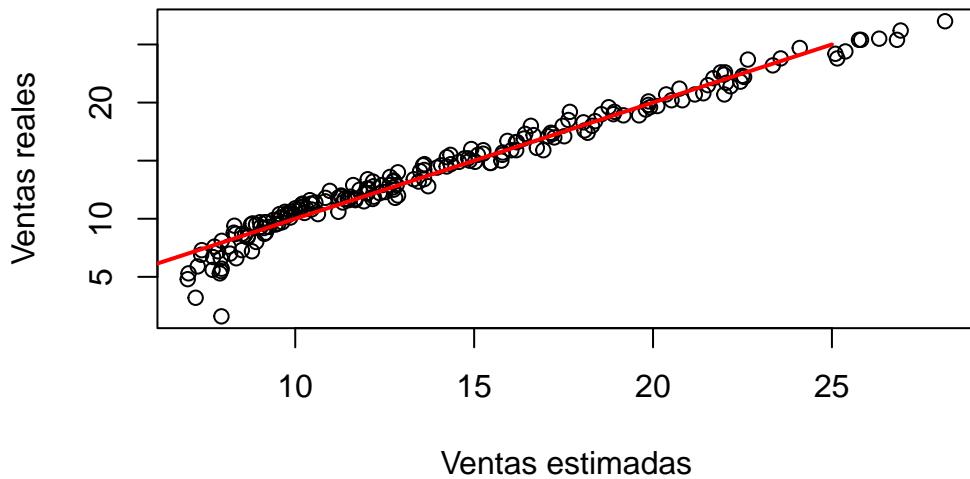
studentized Breusch-Pagan test

```
data: modelo_interaccion
BP = 14.324, df = 3, p-value = 0.002495
```

Ventas reales vs estimadas con interacción:

```
plot(modelo_interaccion$fitted.values, datos$ventas,
      xlab = "Ventas estimadas",
      ylab = "Ventas reales",
      main = "Ventas reales vs estimadas (modelo con interacción)")
lines(c(0, 25), c(0, 25), col = "red", lwd = 2)
```

Ventas reales vs estimadas (modelo con interacción)



3.8. Superficie del modelo con interacción

```
rango_tv <- range(datos$tv)
nuevos_valores_tv <- seq(from = rango_tv[1], to = rango_tv[2], length.out = 20)

rango_radio <- range(datos$radio)
nuevos_valores_radio <- seq(from = rango_radio[1], to = rango_radio[2], length.out = 20)

predicciones <- outer(
  X = nuevos_valores_tv,
  Y = nuevos_valores_radio,
  FUN = function(tv, radio) {
    predict(object = modelo_interaccion,
            newdata = data.frame(tv, radio))
  }
)

superficie <- persp(
  x = nuevos_valores_tv,
  y = nuevos_valores_radio,
  z = predicciones,
```

```

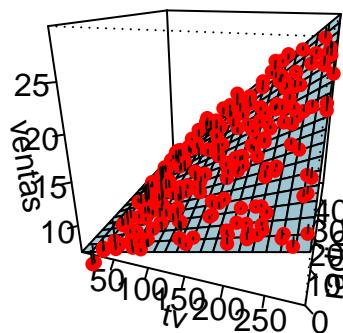
theta = 18, phi = 20,
col = "lightblue", shade = 0.1,
xlab = "tv", ylab = "radio", zlab = "ventas",
ticktype = "detailed",
main = "Predicción ventas ~ tv + radio + tv:radio"
)

observaciones <- trans3d(datos$tv, datos$radio, datos$ventas, superficie)
error <- trans3d(datos$tv, datos$radio, fitted(modelo_interaccion), superficie)

points(observaciones, col = "red", pch = 16)
segments(observaciones$x, observaciones$y, error$x, error$y)

```

Predicción ventas ~ tv + radio + tv:radio



3.9. Comparación de modelos con ANOVA

Comparamos el modelo sin interacción y el modelo con interacción:

```
anova(modelo, modelo_interaccion)
```

Analysis of Variance Table

```

Model 1: ventas ~ tv + radio
Model 2: ventas ~ tv + radio + tv:radio
  Res.Df    RSS Df Sum of Sq    F    Pr(>F)
1     197 556.91
2     196 174.48  1     382.43 429.59 < 2.2e-16 ***
---
Signif. codes:  0 '***' 0.001 '**' 0.01 '*' 0.05 '.' 0.1 ' ' 1

```

i Nota

- Si la prueba ANOVA da un **p-value pequeño**, la interacción aporta información estadísticamente significativa.
- Además de la significancia, es importante revisar residuos y lógica económica del modelo.

3.10. Modelo con interacción y término cuadrático en tv

Probamos un modelo más flexible:

$$\text{ventas} = \beta_0 + \beta_1 \text{tv} + \beta_2 \text{radio} + \beta_3 \text{tv}^2 + \beta_4 (\text{tv} \cdot \text{radio}) + \varepsilon$$

```

modelo_interaccion_1 <- lm(ventas ~ tv + radio + I(tv^2) + tv:radio, data = datos)
summary(modelo_interaccion_1)

```

Call:

```
lm(formula = ventas ~ tv + radio + I(tv^2) + tv:radio, data = datos)
```

Residuals:

Min	1Q	Median	3Q	Max
-4.9949	-0.2969	-0.0066	0.3798	1.1686

Coefficients:

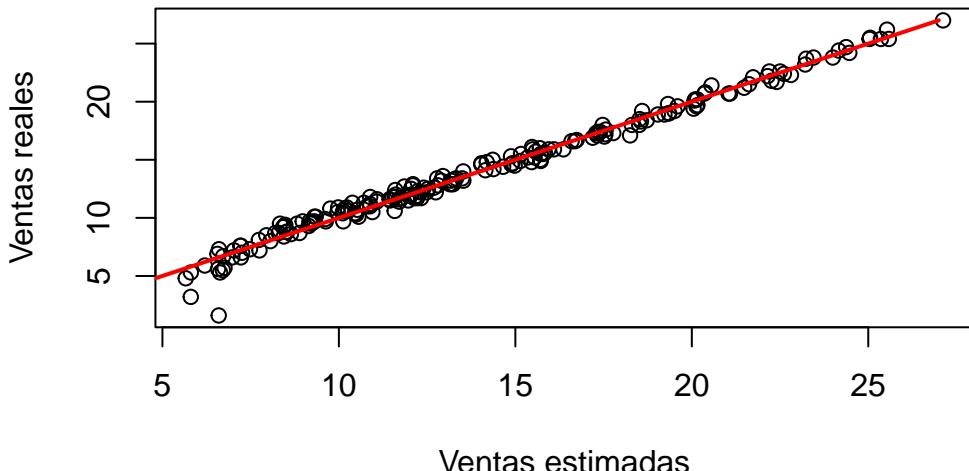
	Estimate	Std. Error	t value	Pr(> t)
(Intercept)	5.137e+00	1.927e-01	26.663	< 2e-16 ***
tv	5.092e-02	2.232e-03	22.810	< 2e-16 ***
radio	3.516e-02	5.901e-03	5.959	1.17e-08 ***
I(tv^2)	-1.097e-04	6.893e-06	-15.920	< 2e-16 ***
tv:radio	1.077e-03	3.466e-05	31.061	< 2e-16 ***

```
---
Signif. codes: 0 '***' 0.001 '**' 0.01 '*' 0.05 '.' 0.1 ' ' 1
```

```
Residual standard error: 0.6238 on 195 degrees of freedom
Multiple R-squared:  0.986, Adjusted R-squared:  0.9857
F-statistic: 3432 on 4 and 195 DF, p-value: < 2.2e-16
```

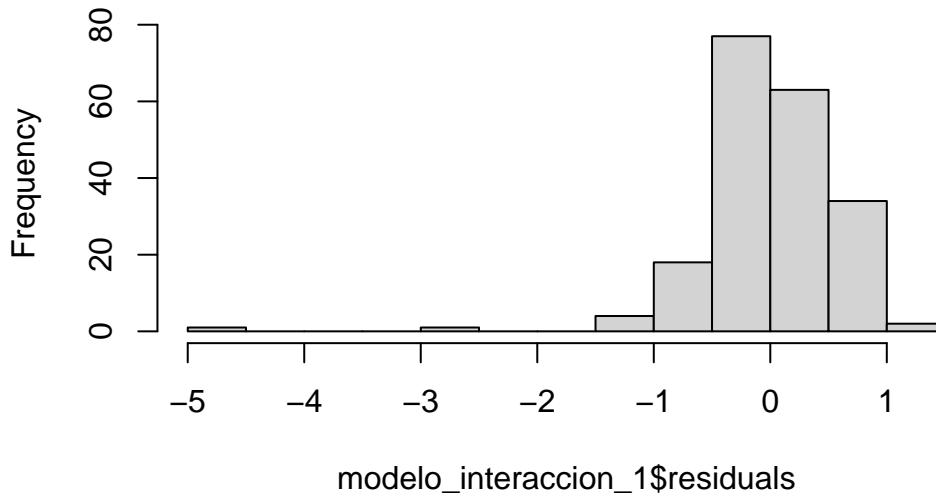
```
plot(modelo_interaccion_1$fitted.values, datos$ventas,
      xlab = "Ventas estimadas", ylab = "Ventas reales",
      main = "Ventas reales vs estimadas (modelo con tv^2 e interacción)")
lines(c(0, 27), c(0, 27), col = "red", lwd = 2)
```

Ventas reales vs estimadas (modelo con tv^2 e interacción)



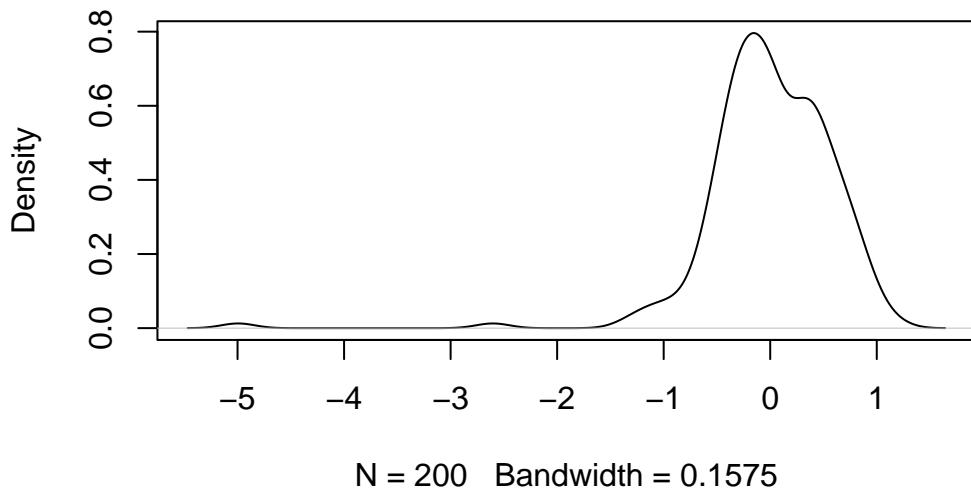
```
hist(modelo_interaccion_1$residuals, main="Histograma residuos modelo_interaccion_1")
```

Histograma residuos modelo_interaccion_1



```
plot(density(modelo_interaccion_1$residuals),
     main="Densidad residuos modelo_interaccion_1")
```

Densidad residuos modelo_interaccion_1



```
shapiro.test(modelo_interaccion_1$residuals)
```

Shapiro-Wilk normality test

```
data: modelo_interaccion_1$residuals  
W = 0.80888, p-value = 6.359e-15
```

```
dwtest(modelo_interaccion_1, alternative ="two.sided", iterations = 1000)
```

Durbin-Watson test

```
data: modelo_interaccion_1  
DW = 2.204, p-value = 0.1432  
alternative hypothesis: true autocorrelation is not 0
```

```
bptest(modelo_interaccion_1)
```

studentized Breusch-Pagan test

```
data: modelo_interaccion_1  
BP = 19.986, df = 4, p-value = 0.0005027
```

4. Parte 2: Regresión polinomial y transformaciones (ejemplo de millaje)

En esta parte trabajamos con el archivo `millaje.txt`, que contiene información de autos:

- `mpg`: millas por galón (consumo).
- `hp`: horsepower (potencia del motor).
- `vol`: alguna medida de volumen/cilindrada del motor.

Queremos modelar el **consumo de combustible** (`mpg`) en función de la potencia (`hp`) y otras características, usando polinomios y transformaciones.

4.1. Cargar los datos de millaje

```
archivo_millaje <- file.path(ruta_datos, "millaje.txt")  
  
millaje <- read.table(file = archivo_millaje, header = TRUE)  
head(millaje)
```

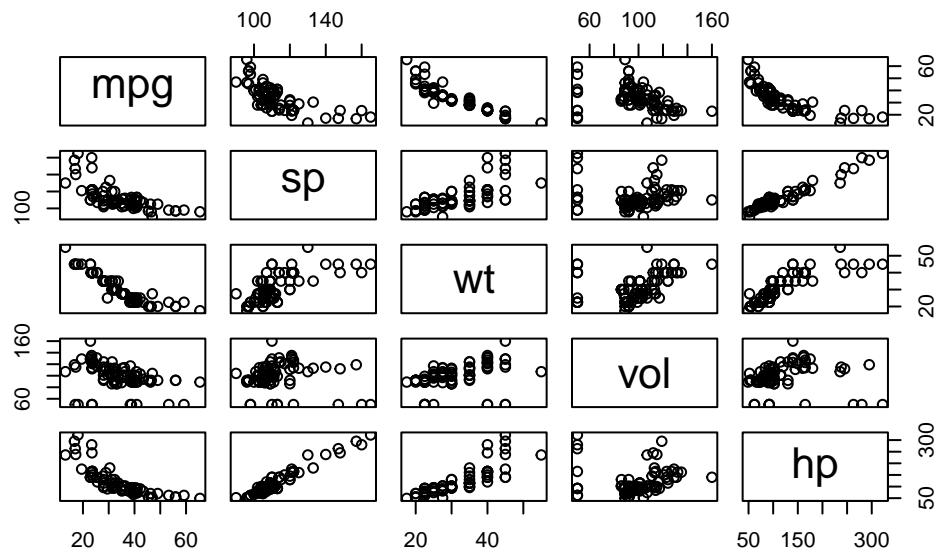
```
mpg   sp    wt  vol hp  
1 65.4 96 17.5 89 49  
2 56.0 97 20.0 92 55  
3 55.9 97 20.0 92 55  
4 49.0 105 20.0 92 70  
5 46.5 96 20.0 92 53  
6 46.2 105 20.0 89 70
```

4.2. Correlaciones y gráficos

```
r_auto <- cor(millaje)  
r_auto
```

```
      mpg          sp          wt          vol          hp  
mpg  1.0000000 -0.68844623 -0.9050849 -0.36861368 -0.78985635  
sp   -0.6884462  1.00000000  0.6785339 -0.04306242  0.96654517  
wt   -0.9050849  0.67853388  1.0000000  0.38495423  0.83222021  
vol  -0.3686137 -0.04306242  0.3849542  1.00000000  0.07647905  
hp   -0.7898564  0.96654517  0.8322202  0.07647905  1.00000000
```

```
pairs(millaje)
```



```
corrplot(r_auto, method="circle", type="lower", diag=FALSE,
         tl.col="black", tl.cex=0.8, tl.srt=45)
```

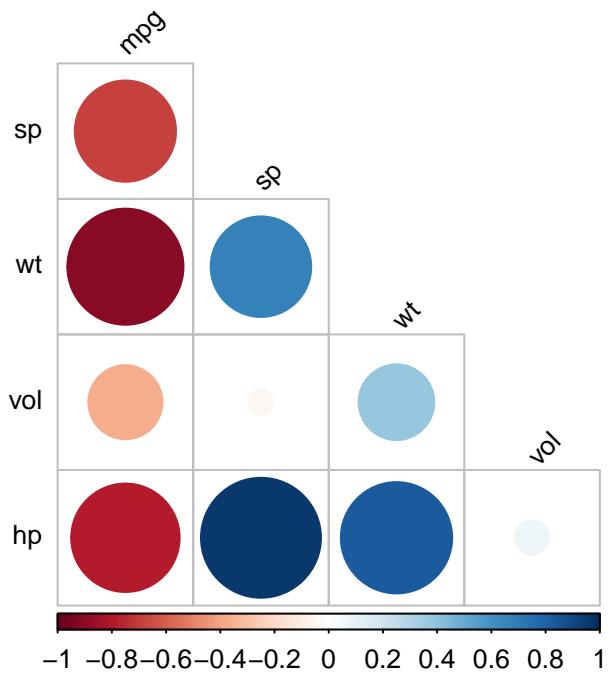
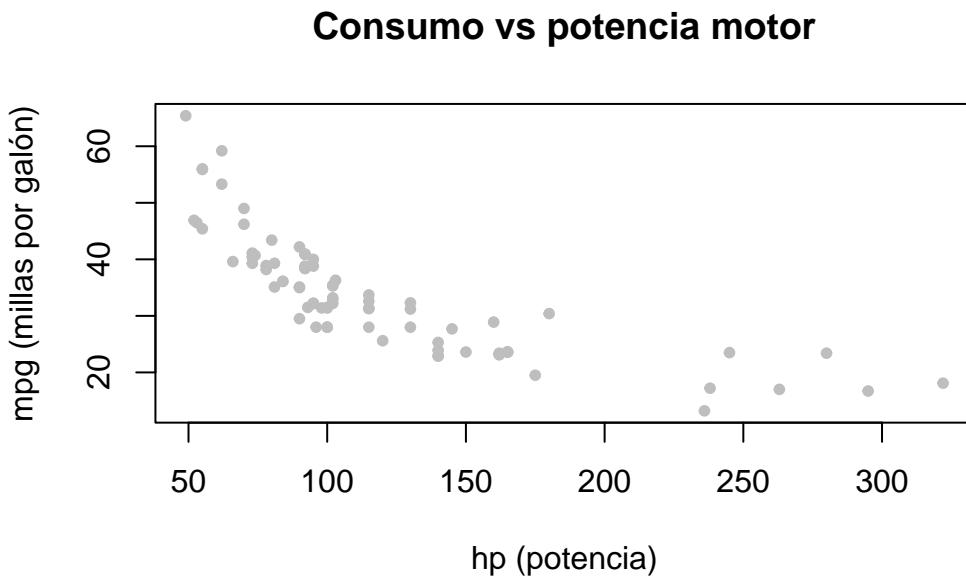


Gráfico simple de mpg vs hp:

```
plot(  
  x = millaje$hp,  
  y = millaje$mpg,  
  main = "Consumo vs potencia motor",  
  xlab = "hp (potencia)",  
  ylab = "mpg (millas por galón)",  
  pch = 20,  
  col = "grey"  
)
```



4.3. Modelo lineal simple en hp y vol

```
modelo_lineal <- lm(mpg ~ hp + vol, data = millaje)  
summary(modelo_lineal)
```

Call:
lm(formula = mpg ~ hp + vol, data = millaje)

```

Residuals:
    Min      1Q  Median      3Q     Max 
-10.556 -3.411 -0.687  2.736 21.058 

Coefficients:
            Estimate Std. Error t value Pr(>|t|)    
(Intercept) 63.40255   2.91066 21.783 < 2e-16 ***
hp          -0.13485   0.01052 -12.818 < 2e-16 ***
vol         -0.13993   0.02698 -5.187 1.61e-06 ***
---
Signif. codes:  0 '***' 0.001 '**' 0.01 '*' 0.05 '.' 0.1 ' ' 1

Residual standard error: 5.366 on 79 degrees of freedom
Multiple R-squared:  0.7194,    Adjusted R-squared:  0.7123 
F-statistic: 101.3 on 2 and 79 DF,  p-value: < 2.2e-16

```

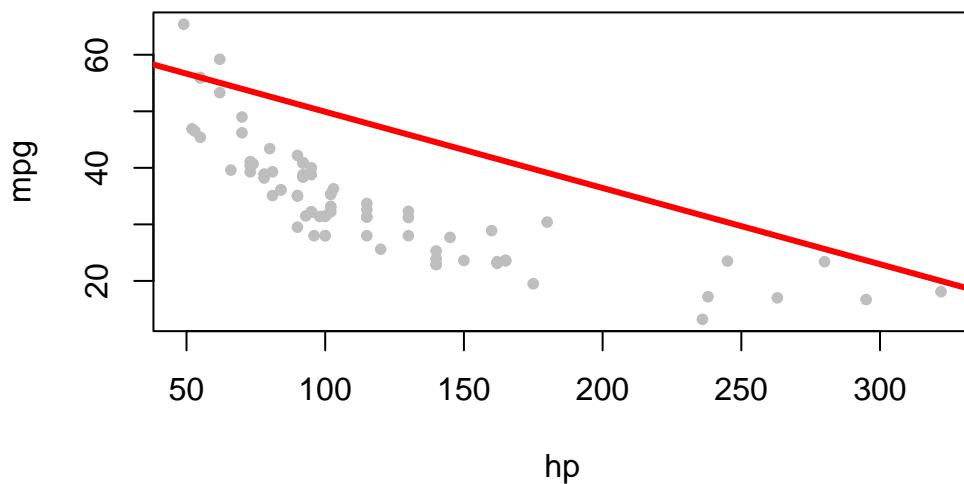
Visualizamos la recta de regresión en función de `hp` (manteniendo fijo `vol` en el promedio, de manera implícita):

```

plot(
  x = millaje$hp,
  y = millaje$mpg,
  main = "Consumo vs potencia motor (modelo lineal)",
  xlab = "hp",
  ylab = "mpg",
  pch = 20,
  col = "grey"
)
abline(modelo_lineal, lwd = 3, col = "red")

```

Consumo vs potencia motor (modelo lineal)



Nota

Este gráfico es más ilustrativo que riguroso (porque el modelo usa también `vol`), pero sirve para visualizar la tendencia lineal negativa: a mayor `hp`, menor `mpg`.

4.4. Modelo polinomial cuadrático

Ahora permitimos una relación **no lineal** entre `hp` y `mpg`:

```
modelo_pol2 <- lm(mpg ~ vol + hp + I(hp^2), data = millaje)
summary(modelo_pol2)
```

Call:

```
lm(formula = mpg ~ vol + hp + I(hp^2), data = millaje)
```

Residuals:

Min	1Q	Median	3Q	Max
-8.4677	-2.9686	-0.6293	2.3102	15.0791

Coefficients:

```

              Estimate Std. Error t value Pr(>|t|)
(Intercept) 73.3557314  2.8205235 26.008 < 2e-16 ***
vol          -0.0546235  0.0255711 -2.136  0.0358 *
hp           -0.4115233  0.0436316 -9.432 1.57e-14 ***
I(hp^2)      0.0008294  0.0001283  6.466 8.01e-09 ***
---
Signif. codes:  0 '***' 0.001 '**' 0.01 '*' 0.05 '.' 0.1 ' ' 1

Residual standard error: 4.357 on 78 degrees of freedom
Multiple R-squared:  0.8173,    Adjusted R-squared:  0.8103
F-statistic: 116.3 on 3 and 78 DF,  p-value: < 2.2e-16

```

```

modelo_cuadratico <- lm(mpg ~ poly(hp, 2), data = millaje)
summary(modelo_cuadratico)

```

Call:
`lm(formula = mpg ~ poly(hp, 2), data = millaje)`

Residuals:

Min	1Q	Median	3Q	Max
-8.2059	-3.3067	-0.4611	2.4724	14.3716

Coefficients:

	Estimate	Std. Error	t value	Pr(> t)
(Intercept)	33.7817	0.4919	68.674	< 2e-16 ***
poly(hp, 2)1	-71.1198	4.4545	-15.966	< 2e-16 ***
poly(hp, 2)2	38.4953	4.4545	8.642	4.87e-13 ***

```

---
Signif. codes:  0 '***' 0.001 '**' 0.01 '*' 0.05 '.' 0.1 ' ' 1

Residual standard error: 4.454 on 79 degrees of freedom
Multiple R-squared:  0.8067,    Adjusted R-squared:  0.8018
F-statistic: 164.8 on 2 and 79 DF,  p-value: < 2.2e-16

```

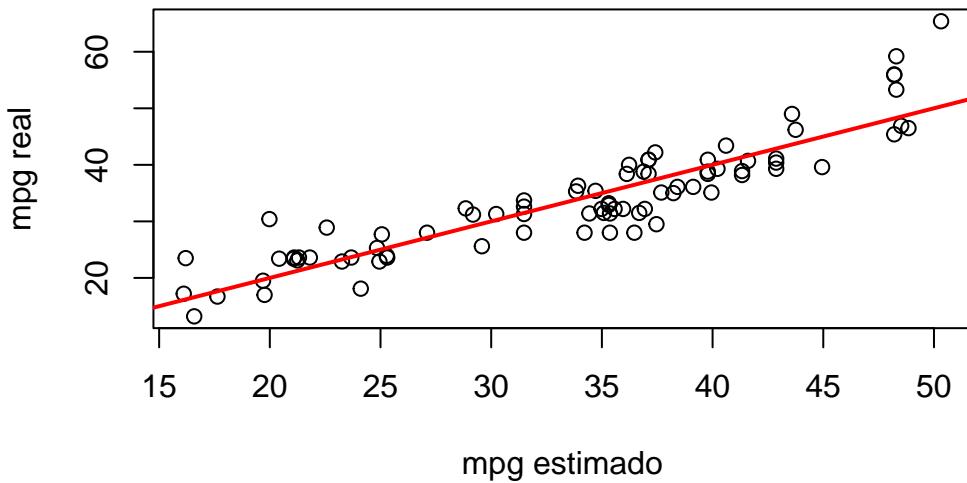
Comparación gráfico predicho vs real:

```

plot(modelo_pol2$fitted.values, millaje$mpg,
      xlab = "mpg estimado", ylab = "mpg real",
      main = "Ajuste modelo polinomial (grado 2)")
lines(c(10, 60), c(10, 60), col = "red", lwd = 2)

```

Ajuste modelo polinomial (grado 2)



4.5. Análisis de residuos del modelo polinomial

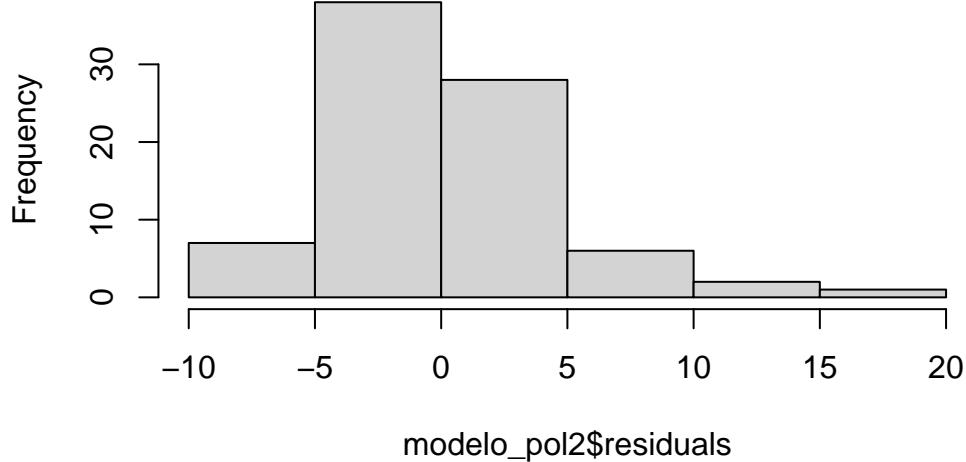
```
shapiro.test(modelo_pol2$residuals)
```

```
Shapiro-Wilk normality test
```

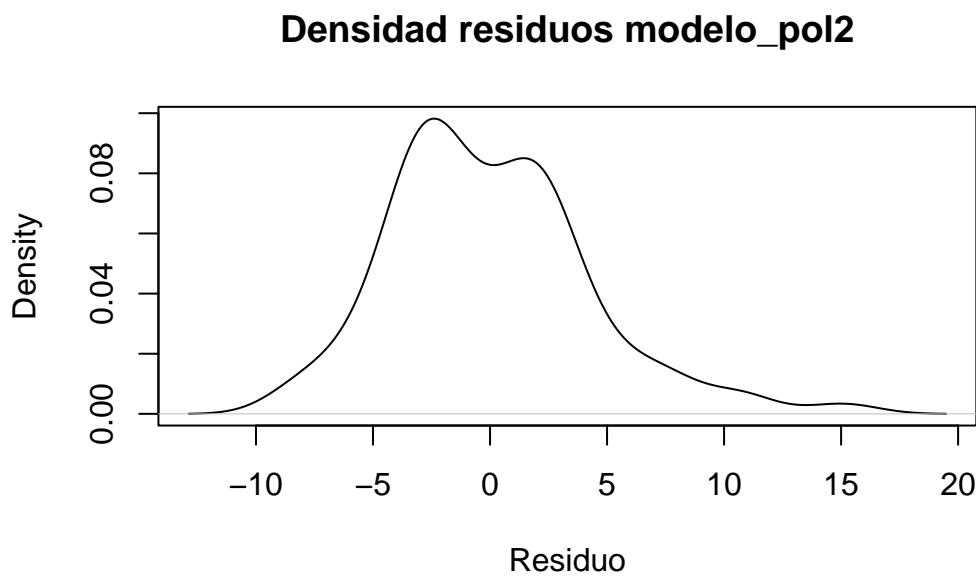
```
data: modelo_pol2$residuals  
W = 0.95926, p-value = 0.0107
```

```
hist(modelo_pol2$residuals, main="Histograma residuos modelo_pol2")
```

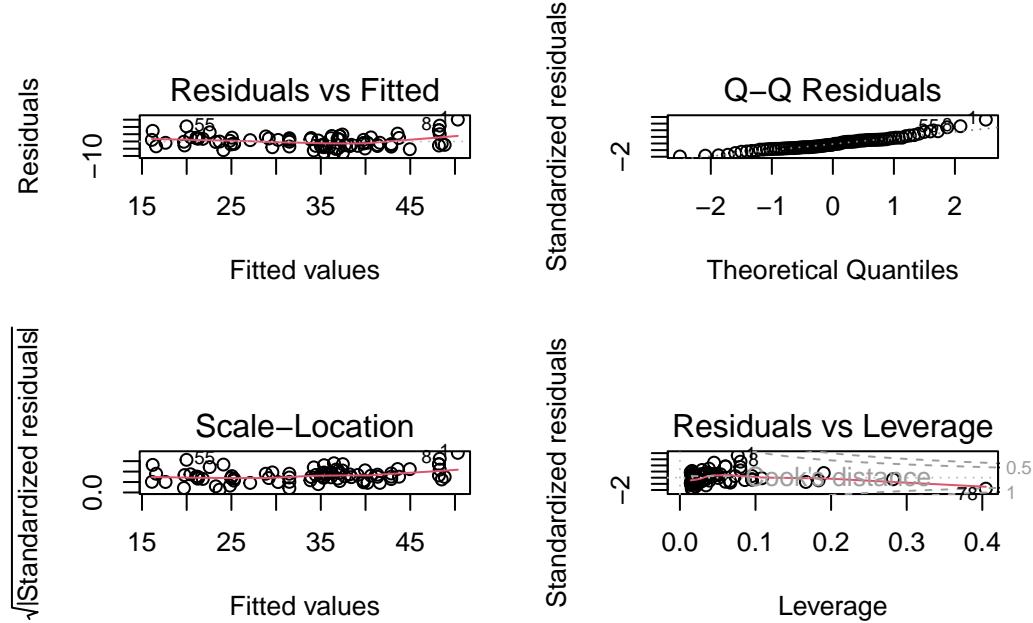
Histograma residuos modelo_pol2



```
plot(density(modelo_pol2$residuals),  
     main="Densidad residuos modelo_pol2", xlab="Residuo")
```



```
par(mfrow = c(2, 2))
plot(modelo_pol2)
```



```
par(mfrow = c(1, 1))
```

Comparación formal entre el modelo lineal y el polinomial:

```
anova(modelo_lineal, modelo_pol2)
```

Analysis of Variance Table

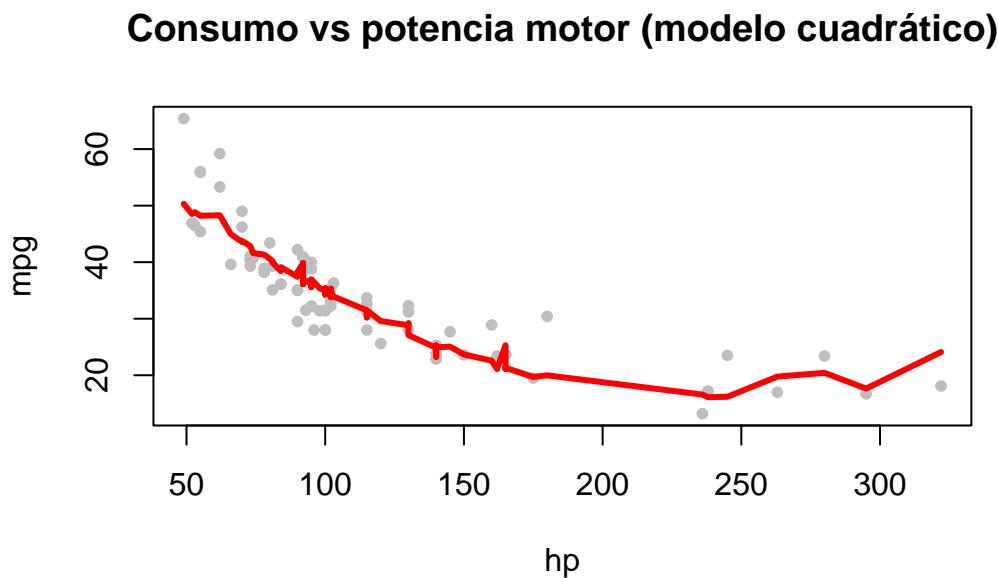
	Model 1: mpg ~ hp + vol	Model 2: mpg ~ vol + hp + I(hp^2)				
Res.Df	RSS	Df	Sum of Sq	F	Pr(>F)	
1	79	2274.8				
2	78	1480.9	1	793.86	41.813 8.009e-09 ***	

Signif. codes:	0 '***'	0.001 '**'	0.01 '*'	0.05 '.'	0.1 ' '	1

Si el p-valor es pequeño, el término cuadrático mejora significativamente el modelo.

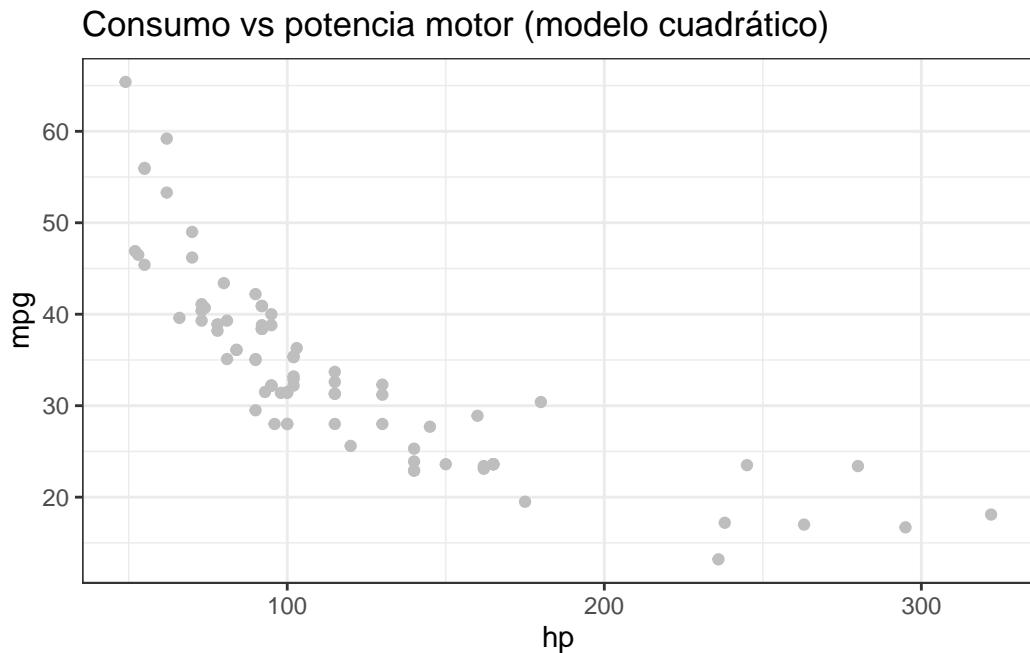
4.6. Curva predicha del modelo polinomial

```
plot(  
  x = millaje$hp,  
  y = millaje$mpg,  
  main = "Consumo vs potencia motor (modelo cuadrático)",  
  xlab = "hp",  
  ylab = "mpg",  
  pch = 20,  
  col = "grey"  
)  
  
puntos_interpolados <- seq(from = min(millaje$hp), to = max(millaje$hp), by = 1)  
  
prediccion <- predict(  
  object = modelo_pol2,  
  newdata = data.frame(hp = millaje$hp, vol = millaje$vol)  
)  
  
lines(sort(millaje$hp), prediccion[order(millaje$hp)],  
      col = "red", lwd = 3)
```



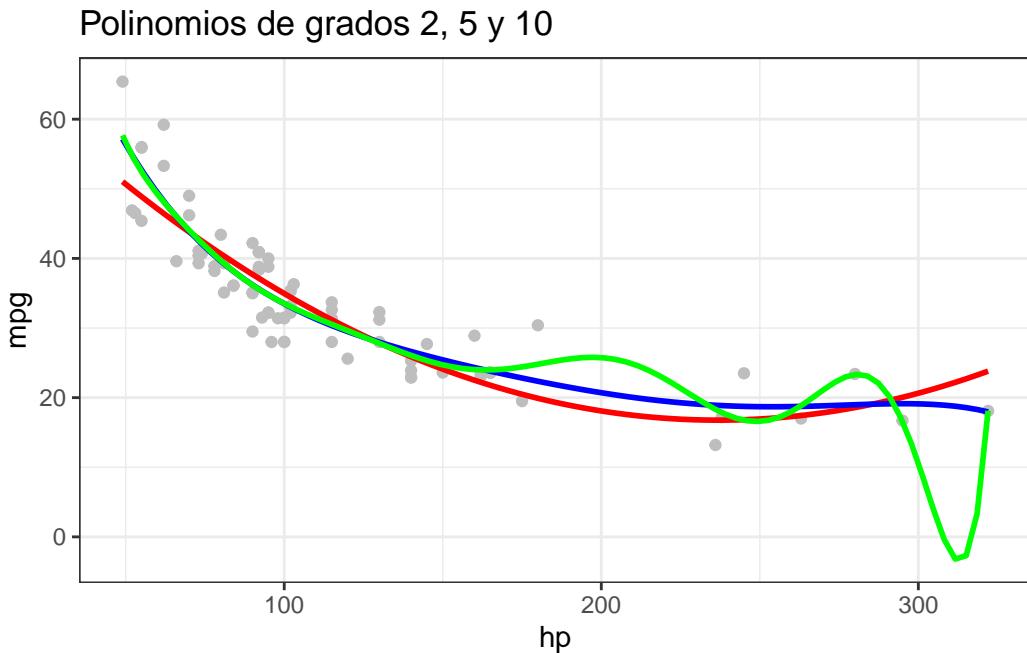
4.7. Visualización con ggplot2

```
ggplot(millaje, aes(x = hp, y = mpg)) +  
  geom_point(colour = "grey") +  
  stat_smooth(method = "lm", formula = y ~ hp + I(hp^2)) +  
  labs(title = "Consumo vs potencia motor (modelo cuadrático)") +  
  theme_bw()
```



4.8. Polinomios de grados más altos

```
ggplot(millaje, aes(x = hp, y = mpg)) +  
  geom_point(colour = "grey") +  
  stat_smooth(method = "lm", formula = y ~ poly(x, 2), colour = "red", se = FALSE) +  
  stat_smooth(method = "lm", formula = y ~ poly(x, 5), colour = "blue", se = FALSE) +  
  stat_smooth(method = "lm", formula = y ~ poly(x, 10), colour = "green", se = FALSE) +  
  labs(title = "Polinomios de grados 2, 5 y 10") +  
  theme_bw()
```



i Nota

Observa cómo los polinomios de grados más altos se ajustan fuertemente a los datos, pero pueden **sobreajustar** (overfitting) y producir curvas muy oscilantes poco realistas.

4.9. Modelos polinomiales y comparación

```
modelo_5 <- lm(mpg ~ poly(hp, 5), data = millaje)
summary(modelo_5)
```

```
Call:
lm(formula = mpg ~ poly(hp, 5), data = millaje)

Residuals:
    Min      1Q  Median      3Q     Max 
-7.9505 -2.5323 -0.4598  3.2027 10.9823 

Coefficients:
            Estimate Std. Error t value Pr(>|t|)    
(Intercept) 33.90000   1.87760 18.0500  <2e-16 ***
poly(hp, 5)1  0.00000   0.00000  0.0000  0.9999    
poly(hp, 5)2 -0.00000   0.00000  0.0000  0.9999    
poly(hp, 5)3  0.00000   0.00000  0.0000  0.9999    
poly(hp, 5)4  0.00000   0.00000  0.0000  0.9999    
poly(hp, 5)5  0.00000   0.00000  0.0000  0.9999    

```

```

(Intercept) 33.7817   0.4503  75.018 < 2e-16 ***
poly(hp, 5)1 -71.1198  4.0778 -17.441 < 2e-16 ***
poly(hp, 5)2  38.4953  4.0778  9.440 1.92e-14 ***
poly(hp, 5)3 -15.3033  4.0778 -3.753  0.00034 ***
poly(hp, 5)4   7.5552  4.0778  1.853  0.06780 .
poly(hp, 5)5  -3.5388  4.0778 -0.868  0.38822
---
Signif. codes: 0 '***' 0.001 '**' 0.01 '*' 0.05 '.' 0.1 ' ' 1

```

Residual standard error: 4.078 on 76 degrees of freedom
 Multiple R-squared: 0.8441, Adjusted R-squared: 0.8339
 F-statistic: 82.31 on 5 and 76 DF, p-value: < 2.2e-16

```
modelo_5_correjido <- lm(mpg ~ vol + hp + I(hp^2) + I(hp^3), data = millaje)
summary(modelo_5_correjido)
```

Call:
`lm(formula = mpg ~ vol + hp + I(hp^2) + I(hp^3), data = millaje)`

Residuals:

Min	1Q	Median	3Q	Max
-7.6503	-2.6022	-0.3181	2.6926	11.4477

Coefficients:

	Estimate	Std. Error	t value	Pr(> t)
(Intercept)	9.236e+01	5.361e+00	17.229	< 2e-16 ***
vol	-6.226e-02	2.345e-02	-2.655	0.009634 **
hp	-8.414e-01	1.135e-01	-7.410	1.38e-10 ***
I(hp^2)	3.765e-03	7.355e-04	5.119	2.20e-06 ***
I(hp^3)	-5.782e-06	1.430e-06	-4.044	0.000124 ***

Signif. codes: 0 '***' 0.001 '**' 0.01 '*' 0.05 '.' 0.1 ' ' 1

Residual standard error: 3.983 on 77 degrees of freedom
 Multiple R-squared: 0.8493, Adjusted R-squared: 0.8415
 F-statistic: 108.5 on 4 and 77 DF, p-value: < 2.2e-16

```
anova(modelo_cuadratico, modelo_5_correjido)
```

Analysis of Variance Table

```

Model 1: mpg ~ poly(hp, 2)
Model 2: mpg ~ vol + hp + I(hp^2) + I(hp^3)
  Res.Df    RSS Df Sum of Sq    F    Pr(>F)
1     79 1567.5
2     77 1221.5  2     346.02 10.906 6.758e-05 ***
---
Signif. codes:  0 '***' 0.001 '**' 0.01 '*' 0.05 '.' 0.1 ' ' 1

```

Análisis de residuos:

```
shapiro.test(modelo_5_correjido$residuals)
```

```

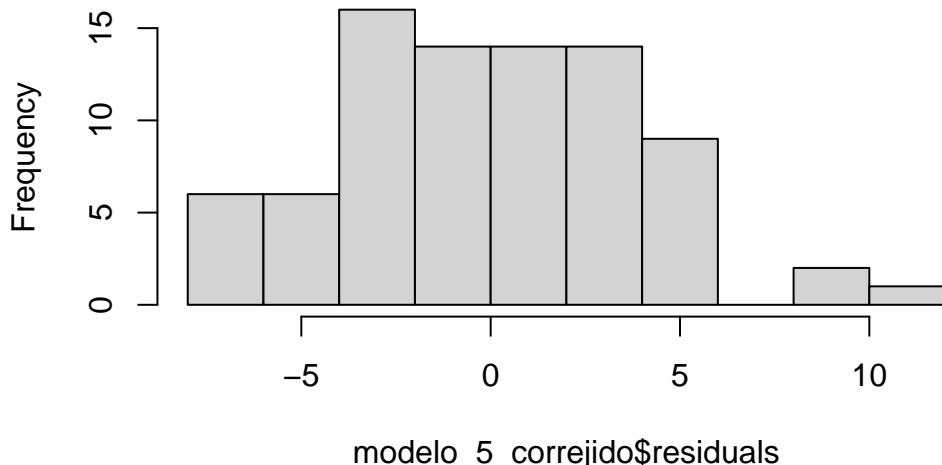
Shapiro-Wilk normality test

data: modelo_5_correjido$residuals
W = 0.98456, p-value = 0.4319

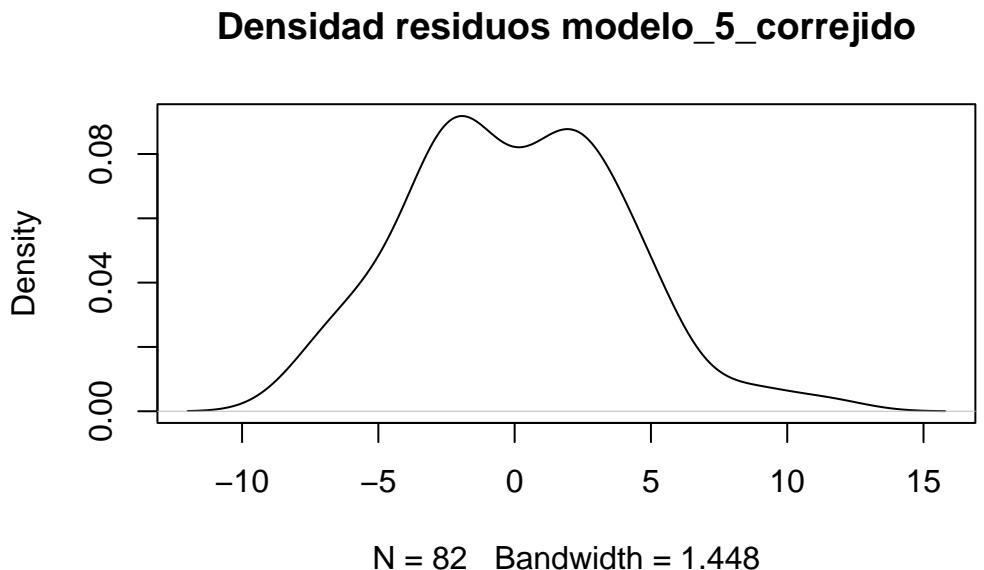
hist(modelo_5_correjido$residuals, main = "Histograma residuos modelo_5_correjido")

```

Histograma residuos modelo_5_correjido

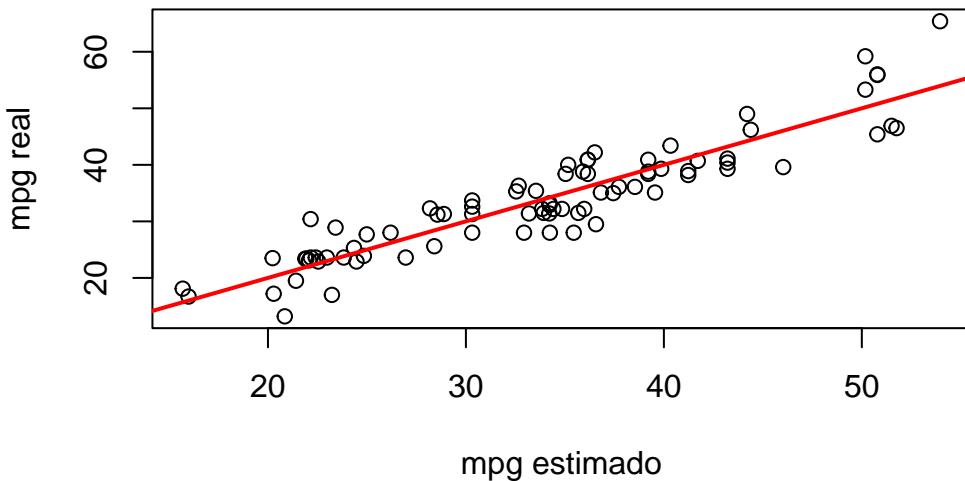


```
plot(density(modelo_5_correjido$residuals),  
      main = "Densidad residuos modelo_5_correjido")
```



```
plot(modelo_5_correjido$fitted.values, millaje$mpg,  
      xlab = "mpg estimado", ylab = "mpg real",  
      main = "Ajuste modelo_5_correjido")  
lines(c(10, 60), c(10, 60), col = "red", lwd = 2)
```

Ajuste modelo_5_correjido



4.10. Transformaciones de la variable respuesta

Buscamos mejorar la normalidad de los residuos y la homocedasticidad usando transformaciones de mpg:

4.10.1. Transformación logarítmica

```
modelo_pol2_trans <- lm(log(1 + mpg) ~ vol + hp + I(hp^2), data = millaje)
summary(modelo_pol2_trans)
```

```
Call:
lm(formula = log(1 + mpg) ~ vol + hp + I(hp^2), data = millaje)

Residuals:
    Min      1Q  Median      3Q     Max 
-0.31049 -0.06894 -0.02497  0.07082  0.33219 

Coefficients:
            Estimate Std. Error t value Pr(>|t|)    
(Intercept)  1.3855    0.0582  23.500  <2e-16 ***
vol          0.0008    0.0002   3.800   0.0004 ***
hp          -0.0002    0.0001  -1.800   0.0690    
I(hp^2)      0.0001    0.0001   1.000   0.3120    
---
Signif. codes:  0 ‘***’ 0.001 ‘**’ 0.01 ‘*’ 0.05 ‘.’ 0.1 ‘ ’ 1
```

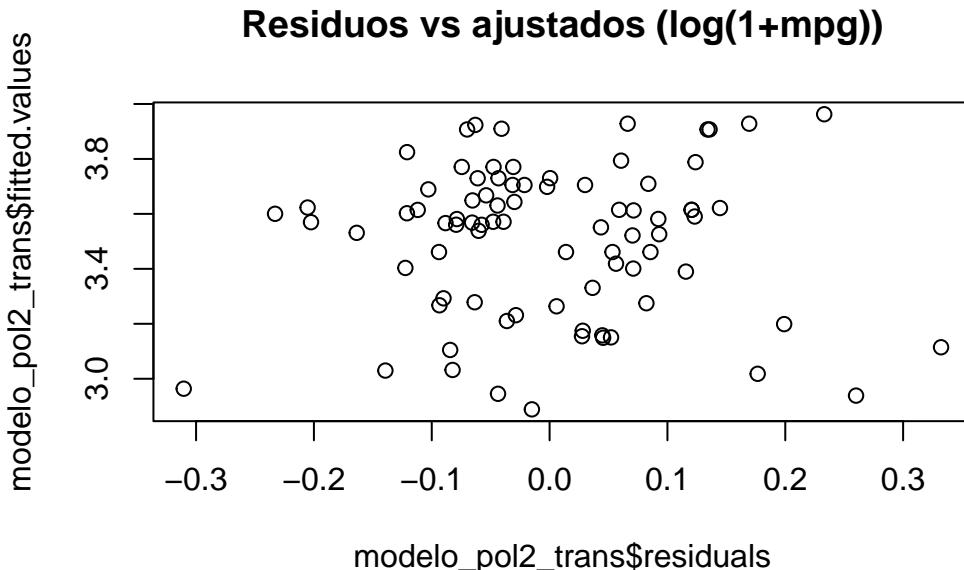
```

(Intercept) 4.581e+00 7.376e-02 62.104 < 2e-16 ***
vol         -1.846e-03 6.687e-04 -2.761 0.00718 **
hp          -1.011e-02 1.141e-03 -8.858 2.03e-13 ***
I(hp^2)     1.734e-05 3.354e-06  5.171 1.75e-06 ***
---
Signif. codes: 0 '***' 0.001 '**' 0.01 '*' 0.05 '.' 0.1 ' ' 1

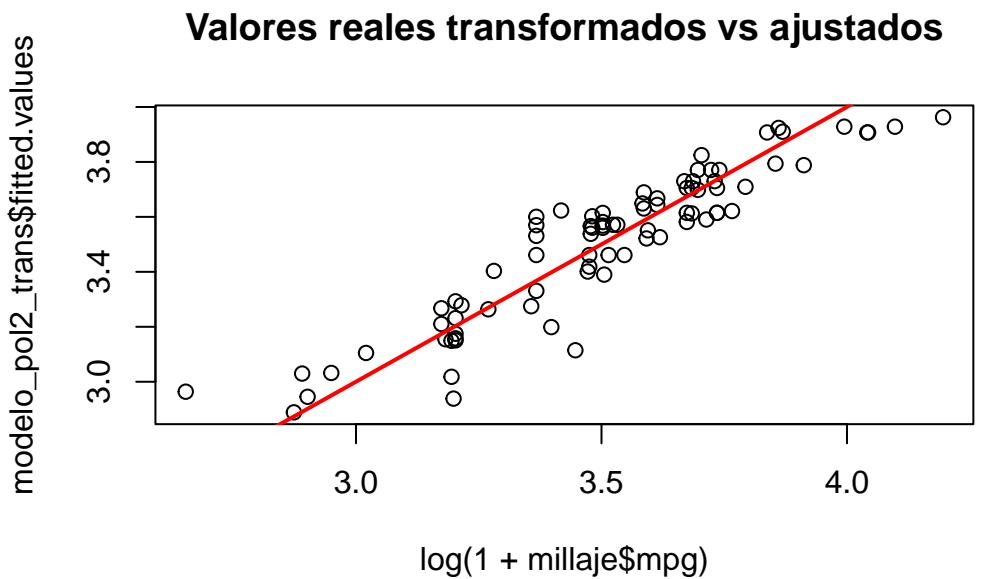
```

Residual standard error: 0.1139 on 78 degrees of freedom
 Multiple R-squared: 0.8557, Adjusted R-squared: 0.8501
 F-statistic: 154.1 on 3 and 78 DF, p-value: < 2.2e-16

```
plot(modelo_pol2_trans$residuals, modelo_pol2_trans$fitted.values,
  main = "Residuos vs ajustados (log(1+mpg))")
```



```
plot(log(1 + millaje$mpg), modelo_pol2_trans$fitted.values,
  main = "Valores reales transformados vs ajustados")
lines(c(2, 5), c(2, 5), col = "red", lwd = 2)
```



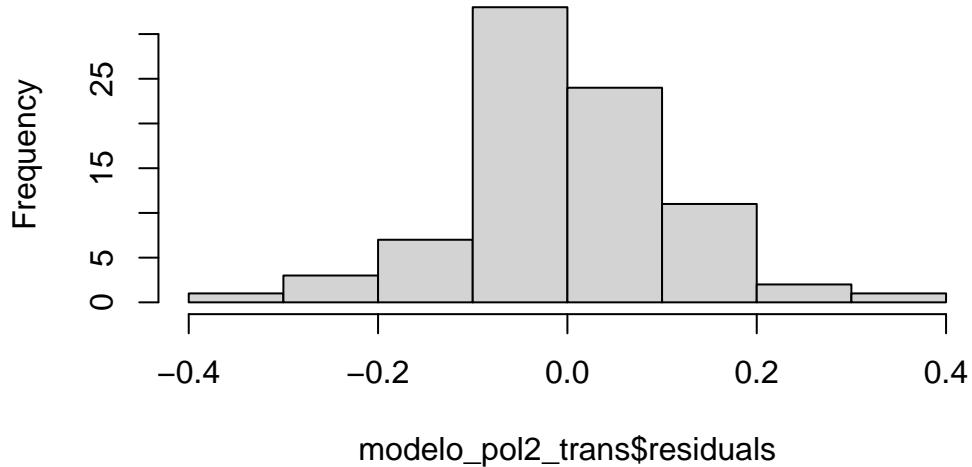
```
shapiro.test(modelo_pol2_trans$residuals)
```

Shapiro-Wilk normality test

```
data: modelo_pol2_trans$residuals
W = 0.98398, p-value = 0.4003
```

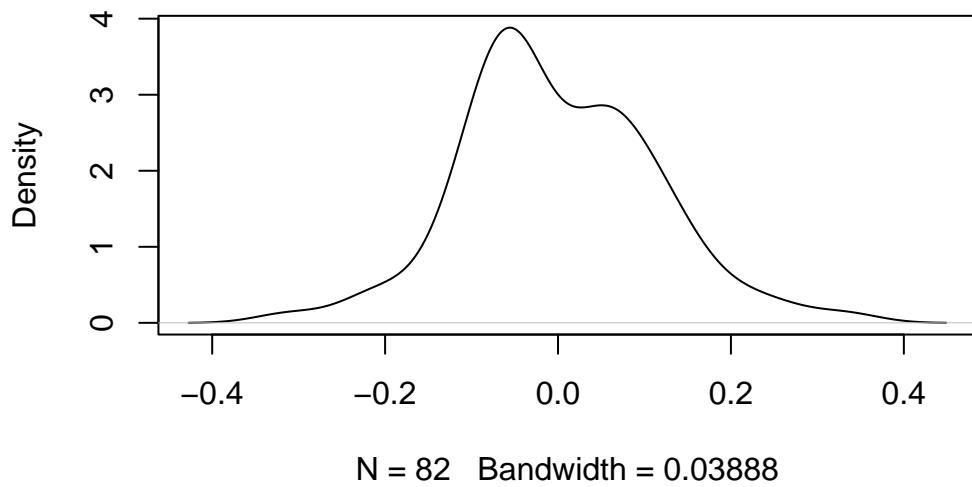
```
hist(modelo_pol2_trans$residuals, main = "Histograma residuos modelo_pol2_trans")
```

Histograma residuos modelo_pol2_trans



```
plot(density(modelo_pol2_trans$residuals),  
     main = "Densidad residuos modelo_pol2_trans")
```

Densidad residuos modelo_pol2_trans



4.10.2. Transformación raíz cuadrada

```
modelo_pol3_trans <- lm(sqrt(mpg) ~ vol + hp + I(hp^2), data = millaje)
summary(modelo_pol3_trans)
```

Call:

```
lm(formula = sqrt(mpg) ~ vol + hp + I(hp^2), data = millaje)
```

Residuals:

Min	1Q	Median	3Q	Max
-0.70979	-0.22004	-0.05431	0.19640	0.95714

Coefficients:

	Estimate	Std. Error	t value	Pr(> t)
(Intercept)	9.031e+00	2.232e-01	40.459	< 2e-16 ***
vol	-5.083e-03	2.024e-03	-2.512	0.0141 *
hp	-3.256e-02	3.453e-03	-9.429	1.59e-14 ***
I(hp^2)	6.117e-05	1.015e-05	6.027	5.21e-08 ***

Signif. codes: 0 '***' 0.001 '**' 0.01 '*' 0.05 '.' 0.1 ' ' 1

Residual standard error: 0.3448 on 78 degrees of freedom

Multiple R-squared: 0.8442, Adjusted R-squared: 0.8383

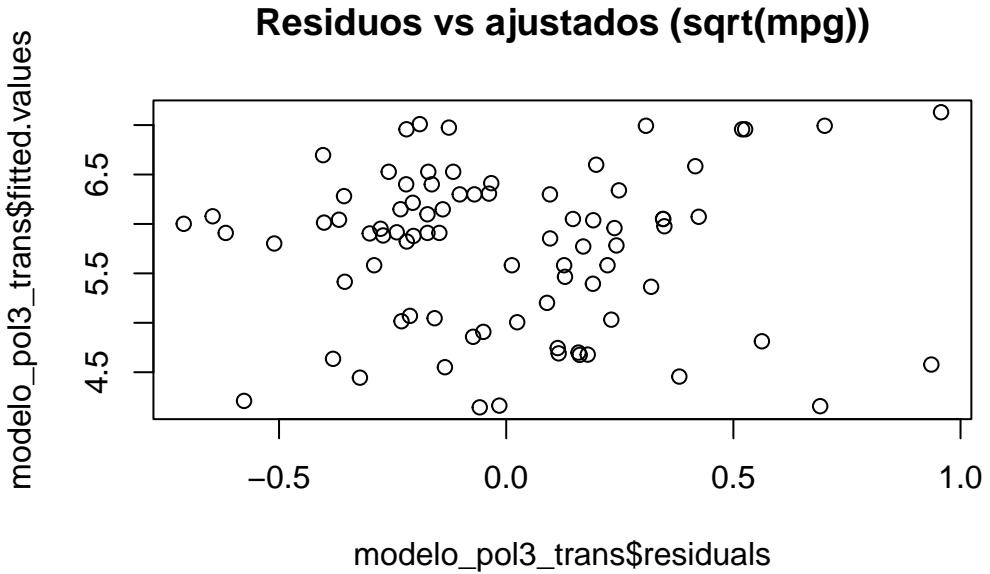
F-statistic: 140.9 on 3 and 78 DF, p-value: < 2.2e-16

```
shapiro.test(modelo_pol3_trans$residuals)
```

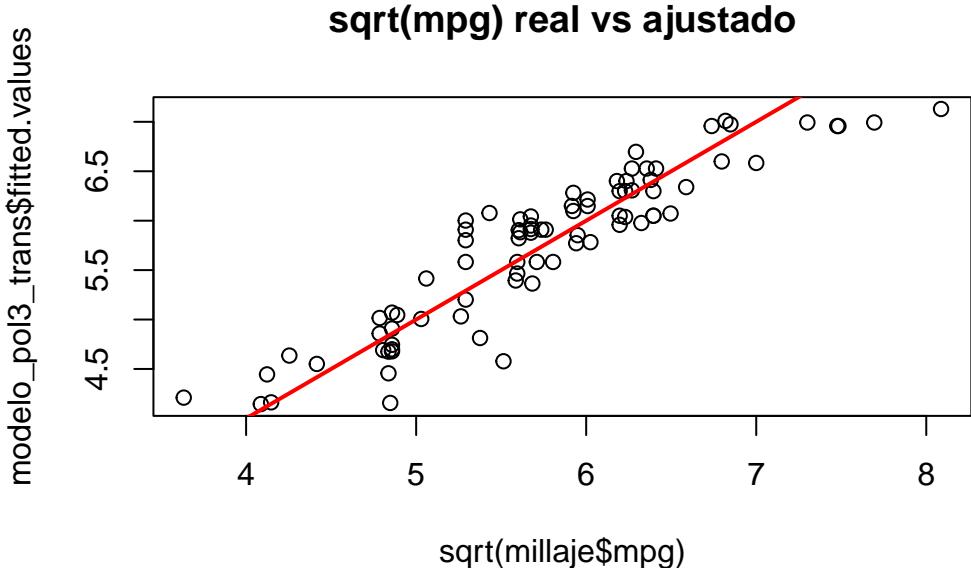
Shapiro-Wilk normality test

```
data: modelo_pol3_trans$residuals
W = 0.97571, p-value = 0.1217
```

```
plot(modelo_pol3_trans$residuals, modelo_pol3_trans$fitted.values,
     main = "Residuos vs ajustados (sqrt(mpg))")
```



```
plot(sqrt(millaje$mpg), modelo_pol3_trans$fitted.values,
      main = "sqrt(mpg) real vs ajustado")
lines(c(4, 8), c(4, 8), col = "red", lwd = 2)
```



4.10.3. Transformación $1/\sqrt{\text{mpg}}$

```
modelo_pol4_trans <- lm(1/sqrt(mpg) ~ vol + hp + I(hp^2), data = millaje)
summary(modelo_pol4_trans)
```

Call:
lm(formula = 1/sqrt(mpg) ~ vol + hp + I(hp^2), data = millaje)

Residuals:

Min	1Q	Median	3Q	Max
-0.032371	-0.007178	0.001601	0.005842	0.044607

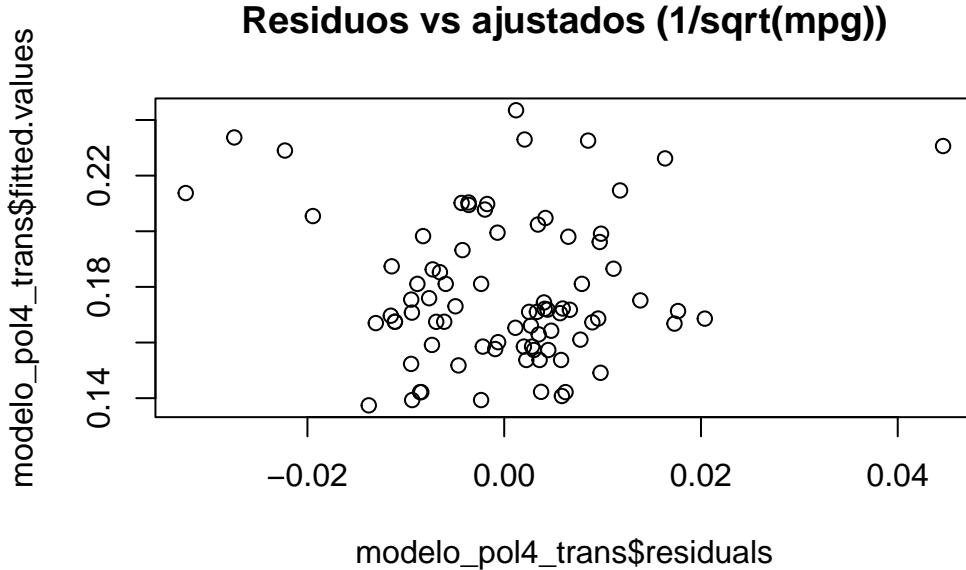
Coefficients:

	Estimate	Std. Error	t value	Pr(> t)
(Intercept)	8.354e-02	7.154e-03	11.677	< 2e-16 ***
vol	1.823e-04	6.486e-05	2.811	0.006249 **
hp	8.284e-04	1.107e-04	7.485	9.28e-11 ***
I(hp^2)	-1.219e-06	3.253e-07	-3.747	0.000341 ***

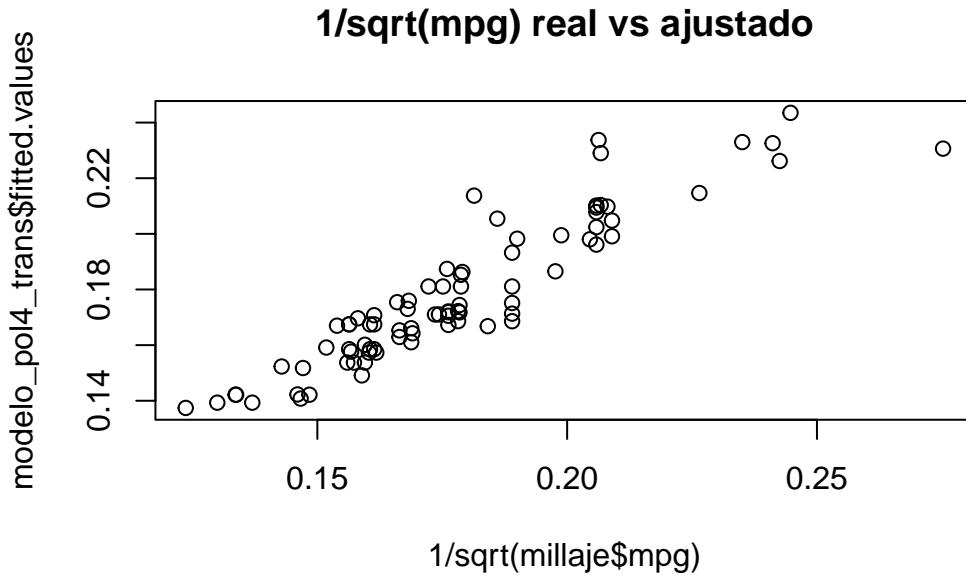
Signif. codes: 0 '***' 0.001 '**' 0.01 '*' 0.05 '.' 0.1 ' ' 1

Residual standard error: 0.01105 on 78 degrees of freedom
Multiple R-squared: 0.8501, Adjusted R-squared: 0.8444
F-statistic: 147.5 on 3 and 78 DF, p-value: < 2.2e-16

```
plot(modelo_pol4_trans$residuals, modelo_pol4_trans$fitted.values,
      main = "Residuos vs ajustados (1/sqrt(mpg))")
```



```
plot(1/sqrt(millaje$mpg), modelo_pol4_trans$fitted.values,
     main = "1/sqrt(mpg) real vs ajustado")
```



```
shapiro.test(modelo_pol4_trans$residuals)
```

Shapiro-Wilk normality test

```
data: modelo_pol4_trans$residuals  
W = 0.94789, p-value = 0.002249
```

4.10.4. Transformaciones más complejas

```
modelo_pol2_tran_2 <- lm(log(1 + mpg) ~ vol + hp + log(1 + hp) + I(hp^2),  
                           data = millaje)  
summary(modelo_pol2_tran_2)
```

Call:

```
lm(formula = log(1 + mpg) ~ vol + hp + log(1 + hp) + I(hp^2),  
   data = millaje)
```

Residuals:

Min	1Q	Median	3Q	Max
-0.35624	-0.06687	-0.00430	0.07828	0.29355

Coefficients:

	Estimate	Std. Error	t value	Pr(> t)
(Intercept)	7.340e+00	1.236e+00	5.937	7.87e-08 ***
vol	-2.076e-03	6.602e-04	-3.144	0.00237 **
hp	2.231e-03	5.630e-03	0.396	0.69297
log(1 + hp)	-8.215e-01	3.675e-01	-2.236	0.02827 *
I(hp^2)	-2.564e-06	9.486e-06	-0.270	0.78768

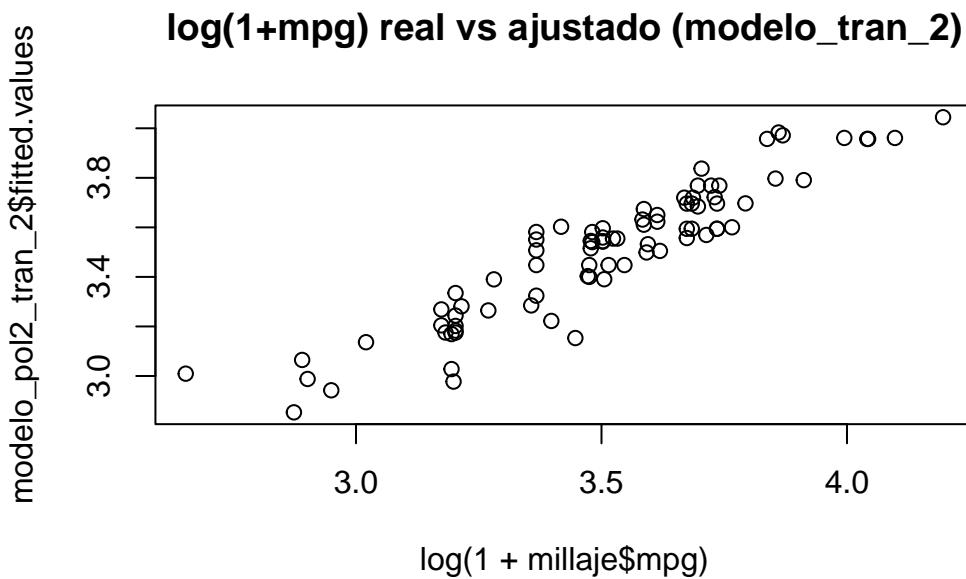
Signif. codes: 0 '***' 0.001 '**' 0.01 '*' 0.05 '.' 0.1 ' ' 1

Residual standard error: 0.1111 on 77 degrees of freedom

Multiple R-squared: 0.8645, Adjusted R-squared: 0.8574

F-statistic: 122.8 on 4 and 77 DF, p-value: < 2.2e-16

```
plot(log(1 + millaje$mpg), modelo_pol2_tran_2$fitted.values,  
     main = "log(1+mpg) real vs ajustado (modelo_tran_2)")
```



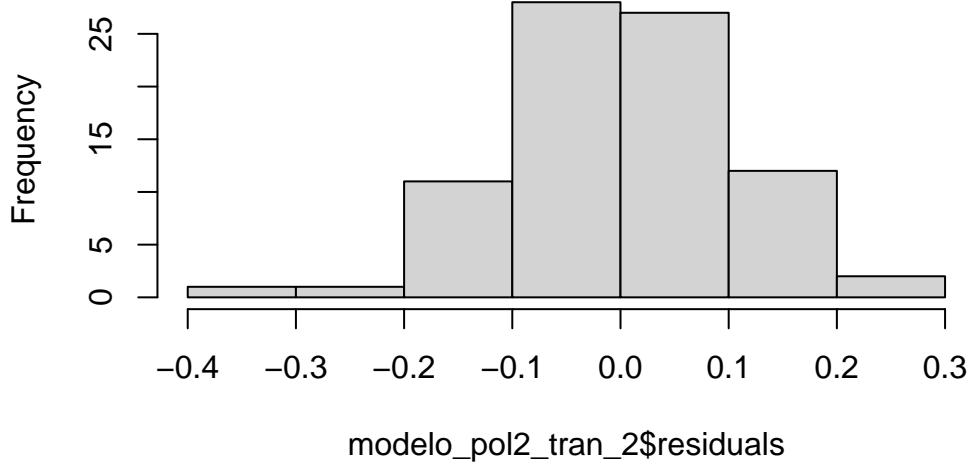
```
shapiro.test(modelo_pol2_tran_2$residuals)
```

Shapiro-Wilk normality test

```
data: modelo_pol2_tran_2$residuals
W = 0.98972, p-value = 0.7645
```

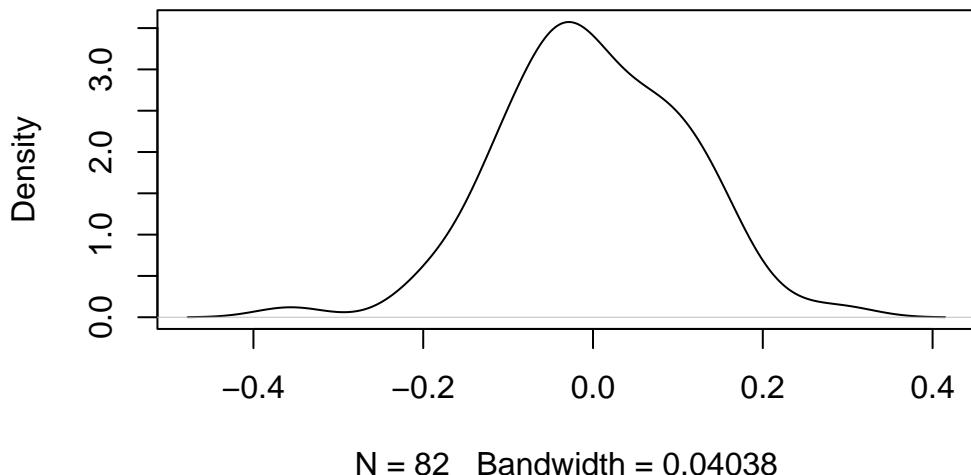
```
hist(modelo_pol2_tran_2$residuals, main = "Histograma residuos modelo_tran_2")
```

Histograma residuos modelo_tran_2

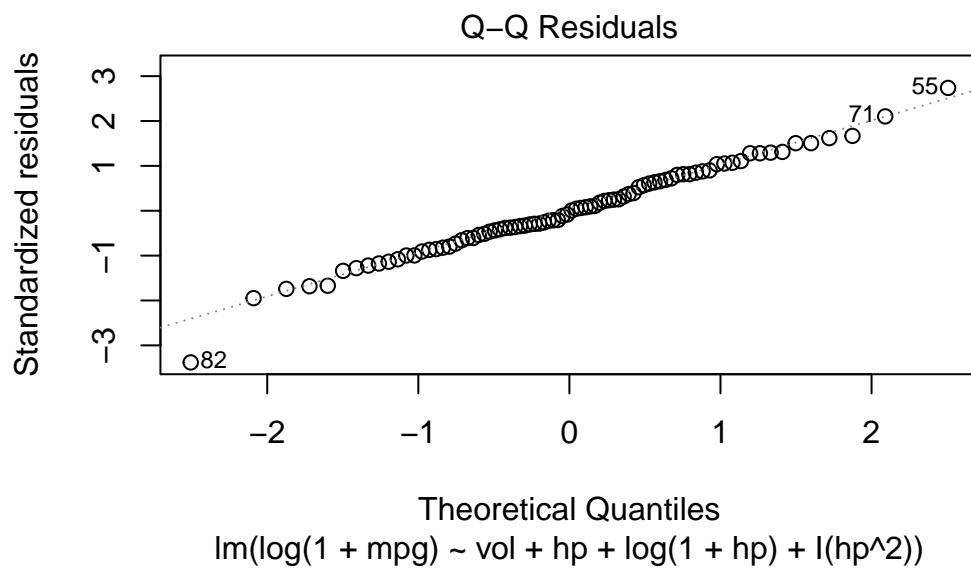
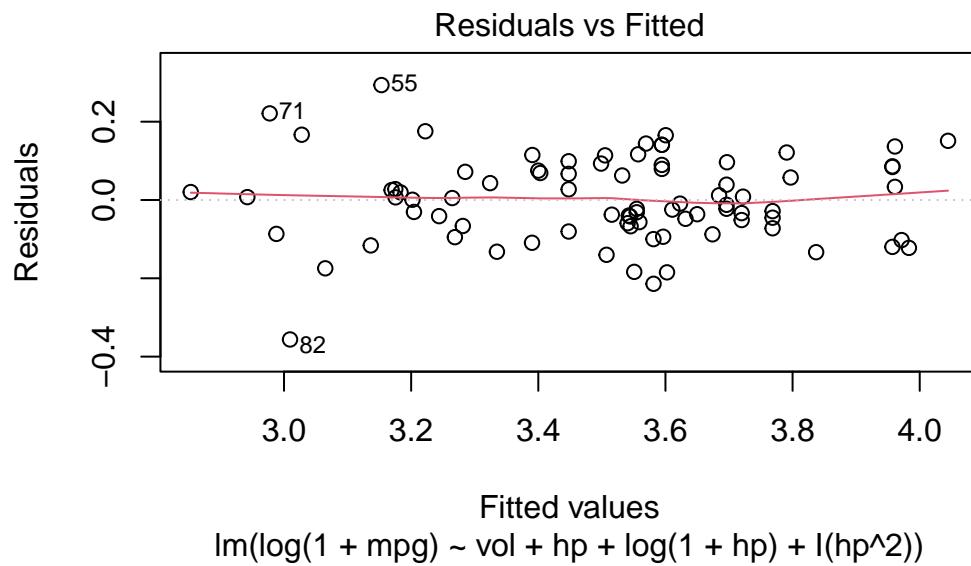


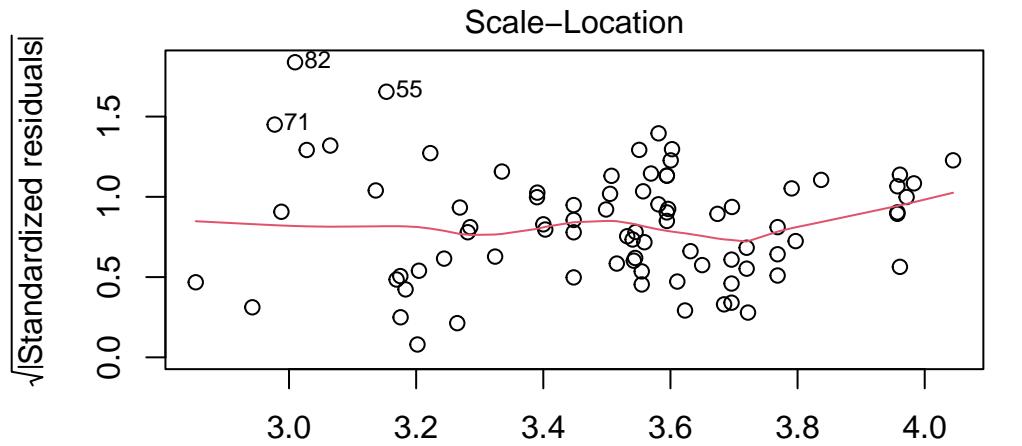
```
plot(density(modelo_pol2_tran_2$residuals),  
     main = "Densidad residuos modelo_tran_2")
```

Densidad residuos modelo_tran_2

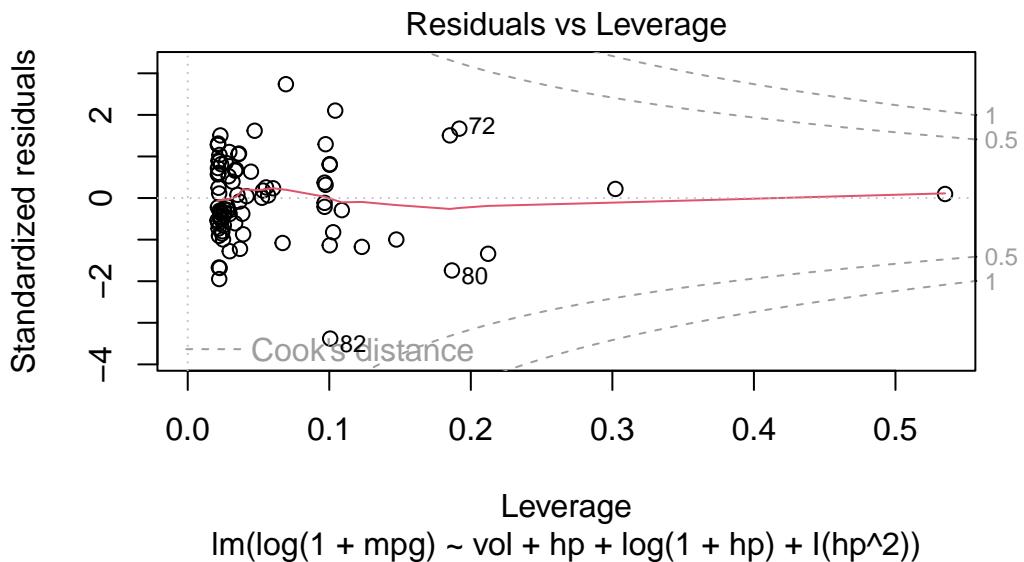


```
plot(modelo_pol2_tran_2)
```





Fitted values
 $\text{lm}(\log(1 + \text{mpg}) \sim \text{vol} + \text{hp} + \log(1 + \text{hp}) + \text{l}(\text{hp}^2))$



Otro modelo más flexible:

```

modelo_pol2_tran_3 <- lm(log(1 + mpg) ~ hp + I(1/hp) + I(1/(hp^2)) +
                           log(1 + hp) + I(hp^2),
                           data = millaje)
summary(modelo_pol2_tran_3)

```

Call:

```
lm(formula = log(1 + mpg) ~ hp + I(1/hp) + I(1/(hp^2)) + log(1 +
  hp) + I(hp^2), data = millaje)
```

Residuals:

Min	1Q	Median	3Q	Max
-0.33860	-0.07127	-0.01969	0.07723	0.30307

Coefficients:

	Estimate	Std. Error	t value	Pr(> t)
(Intercept)	-2.034e+01	7.517e+01	-0.271	0.787
hp	-3.355e-02	8.029e-02	-0.418	0.677
I(1/hp)	4.093e+02	1.224e+03	0.334	0.739
I(1/(hp^2))	-5.165e+03	1.705e+04	-0.303	0.763
log(1 + hp)	5.049e+00	1.558e+01	0.324	0.747
I(hp^2)	3.600e-05	7.142e-05	0.504	0.616

Residual standard error: 0.1187 on 76 degrees of freedom

Multiple R-squared: 0.8475, Adjusted R-squared: 0.8374

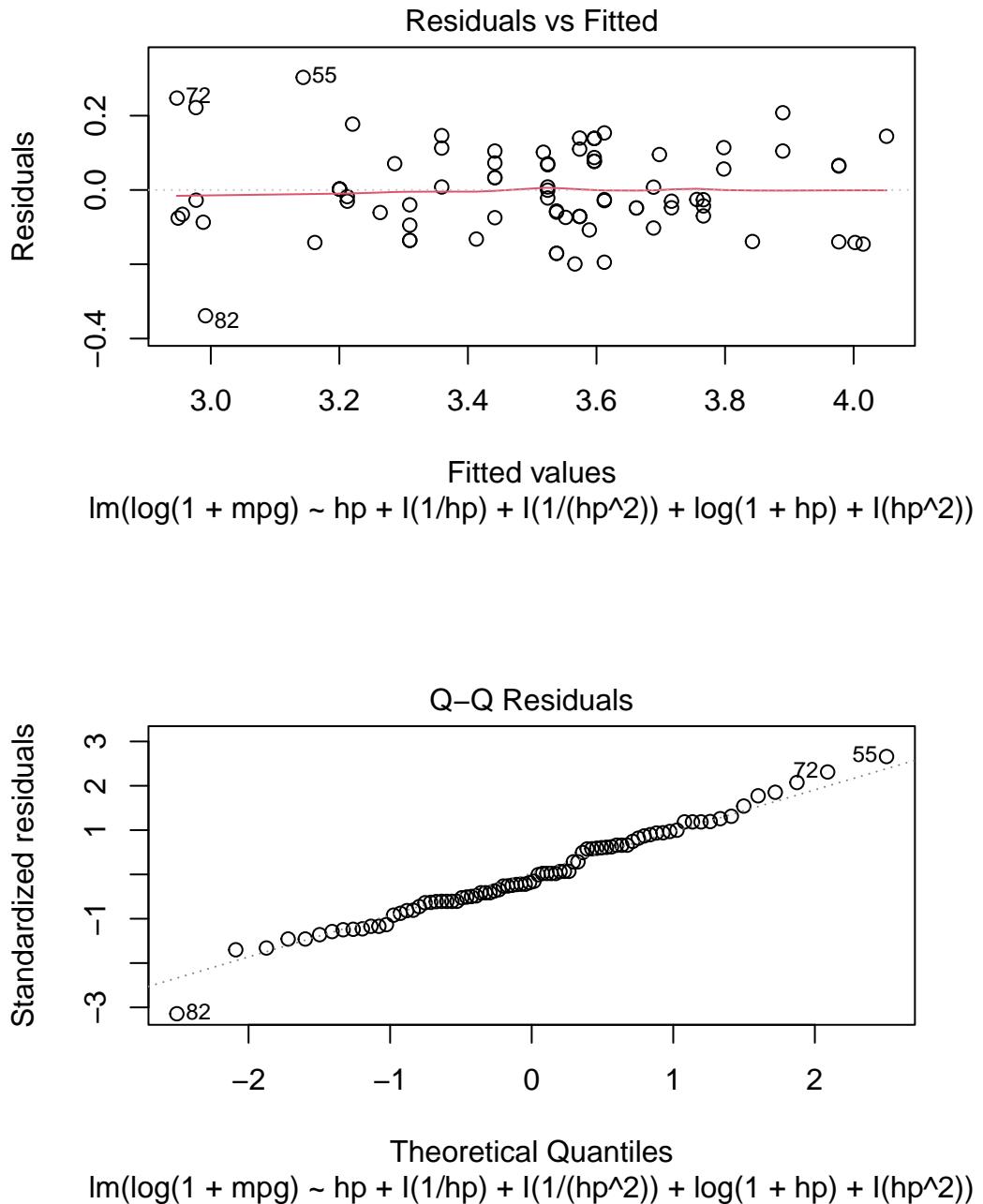
F-statistic: 84.45 on 5 and 76 DF, p-value: < 2.2e-16

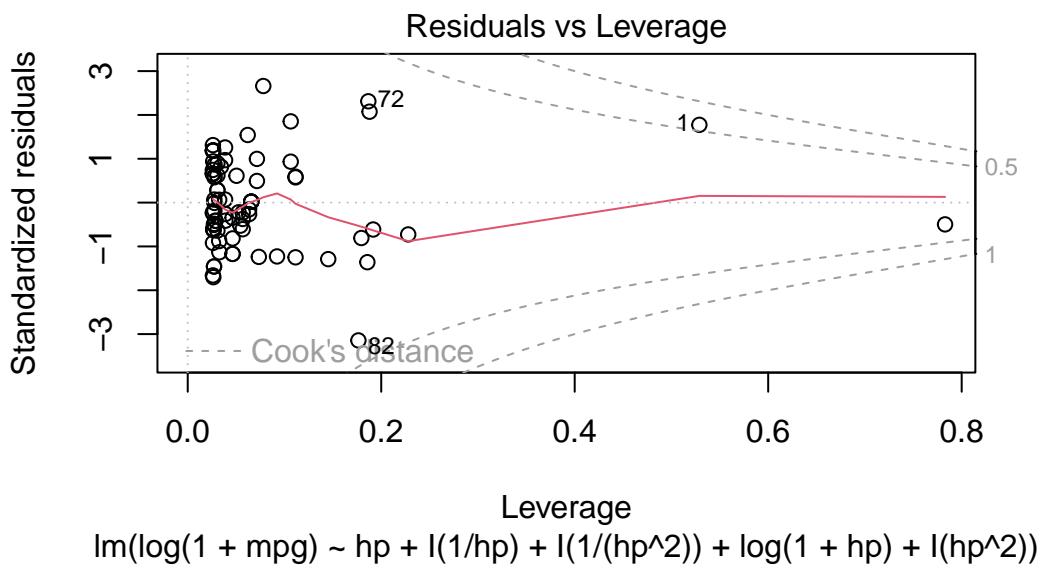
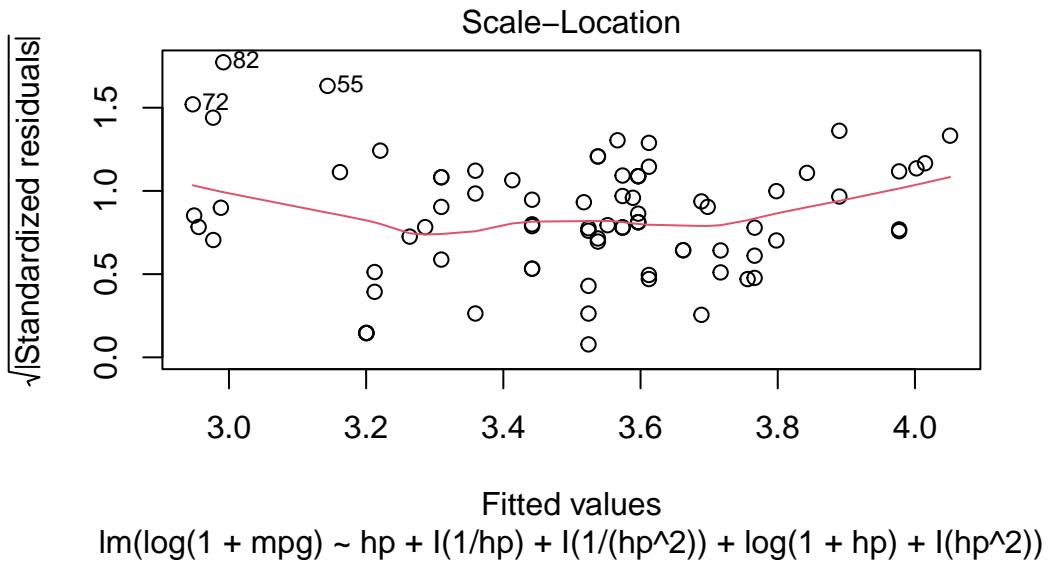
```
shapiro.test(modelo_pol2_tran_3$residuals)
```

Shapiro-Wilk normality test

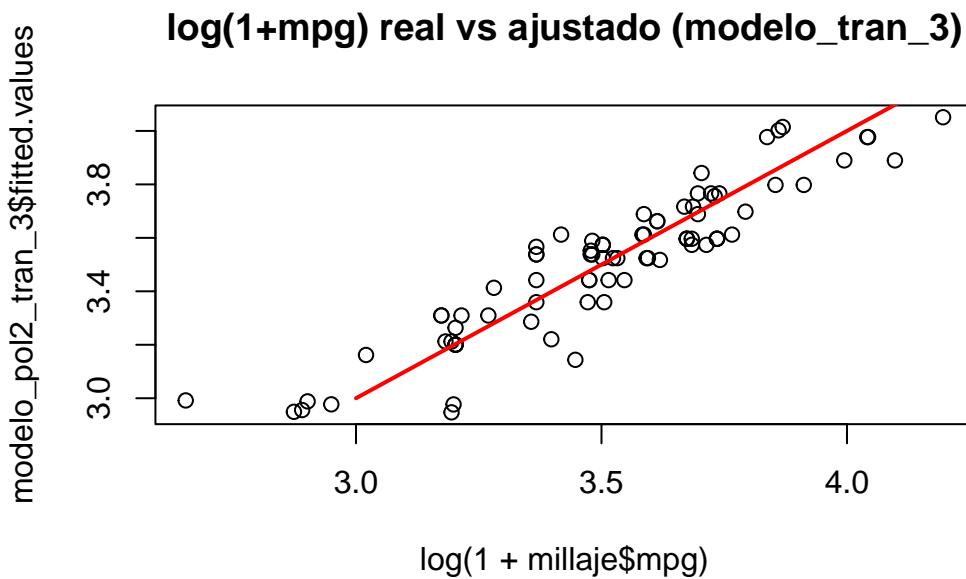
```
data: modelo_pol2_tran_3$residuals
W = 0.98744, p-value = 0.6104
```

```
plot(modelo_pol2_tran_3)
```





```
plot(log(1 + millaje$mpg), modelo_pol2_tran_3$fitted.values,
     main = "log(1+mpg) real vs ajustado (modelo_tran_3)")
lines(c(3, 4.5), c(3, 4.5), col = "red", lwd = 2)
```



4.10.5. Modelos sin constante y selección

```
modelo_pol2_tran_4 <- lm(log(1 + mpg) ~ hp + I(1/hp) + I(1/(hp^2)) +
                           log(1 + hp) + I(hp^2) - 1,
                           data = millaje)
summary(modelo_pol2_tran_4)
```

Call:
`lm(formula = log(1 + mpg) ~ hp + I(1/hp) + I(1/(hp^2)) + log(1 +
hp) + I(hp^2) - 1, data = millaje)`

Residuals:

Min	1Q	Median	3Q	Max
-0.34452	-0.07355	-0.01464	0.07509	0.30562

Coefficients:

	Estimate	Std. Error	t value	Pr(> t)
hp	-1.202e-02	1.098e-02	-1.094	0.2772
I(1/hp)	7.934e+01	1.074e+02	0.738	0.4625
I(1/(hp^2))	-6.299e+02	3.147e+03	-0.200	0.8419

```

log(1 + hp)  8.319e-01  3.658e-01   2.274   0.0258 *
I(hp^2)      1.725e-05  1.732e-05   0.996   0.3223
---
Signif. codes:  0 '***' 0.001 '**' 0.01 '*' 0.05 '.' 0.1 ' ' 1

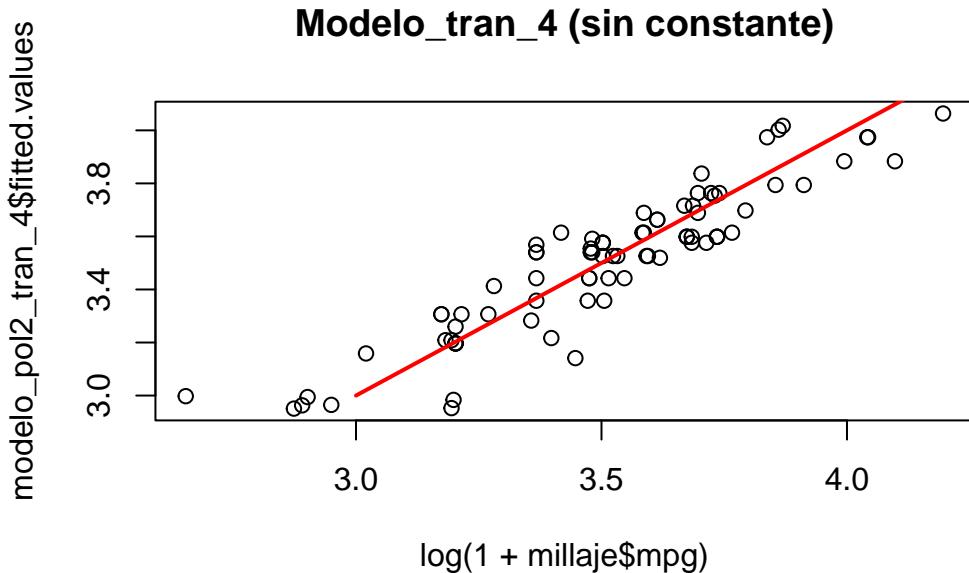
Residual standard error: 0.1179 on 77 degrees of freedom
Multiple R-squared:  0.9989,    Adjusted R-squared:  0.9989
F-statistic: 1.459e+04 on 5 and 77 DF,  p-value: < 2.2e-16

```

```

plot(log(1 + millaje$mpg), modelo_pol2_tran_4$fitted.values,
     main = "Modelo_tran_4 (sin constante)")
lines(c(3, 4.5), c(3, 4.5), col = "red", lwd = 2)

```



```

modelo_pol2_tran_5 <- lm(log(1 + mpg) ~ hp + I(1/hp) + log(1 + hp) + I(hp^2) - 1,
                           data = millaje)
summary(modelo_pol2_tran_5)

```

```

Call:
lm(formula = log(1 + mpg) ~ hp + I(1/hp) + log(1 + hp) + I(hp^2) -
    1, data = millaje)

```

```

Residuals:
    Min      1Q  Median      3Q     Max
-0.33926 -0.07379 -0.01700  0.07535  0.30724

Coefficients:
            Estimate Std. Error t value Pr(>|t|)
hp        -1.410e-02  3.554e-03 -3.967 0.000161 ***
I(1/hp)   5.795e+01  1.116e+01  5.194 1.6e-06 ***
log(1 + hp) 9.030e-01  8.687e-02 10.394 < 2e-16 ***
I(hp^2)    2.041e-05  7.119e-06  2.867 0.005328 **
---
Signif. codes:  0 '***' 0.001 '**' 0.01 '*' 0.05 '.' 0.1 ' ' 1

Residual standard error: 0.1172 on 78 degrees of freedom
Multiple R-squared:  0.9989,    Adjusted R-squared:  0.9989
F-statistic: 1.846e+04 on 4 and 78 DF,  p-value: < 2.2e-16

```

```
shapiro.test(modelo_pol2_tran_5$residuals)
```

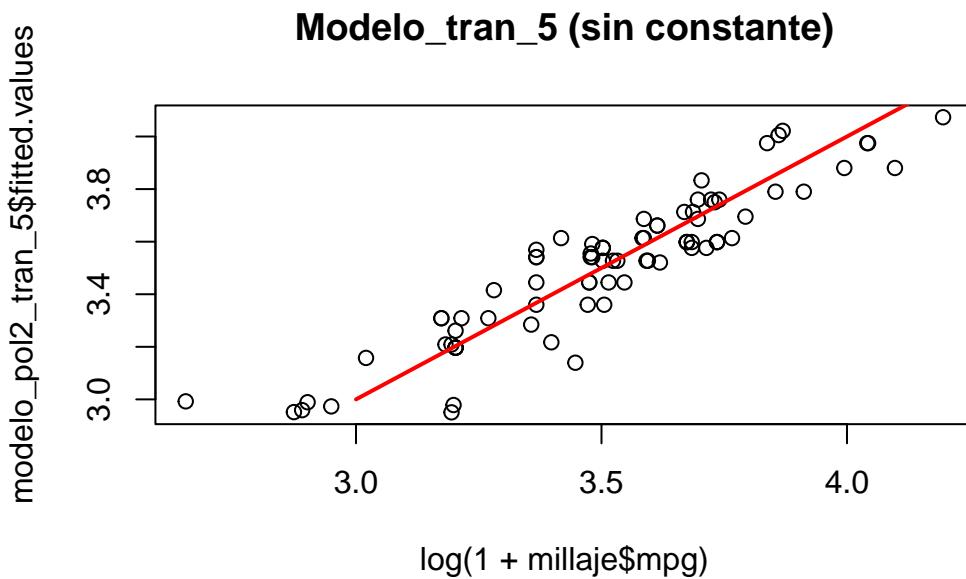
```

Shapiro-Wilk normality test

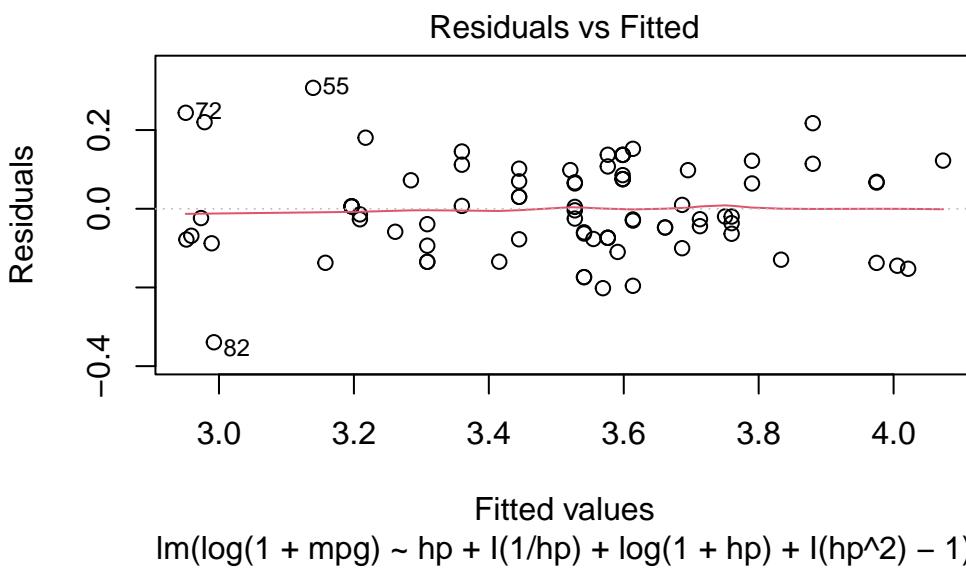
data: modelo_pol2_tran_5$residuals
W = 0.98884, p-value = 0.7058

plot(log(1 + millaje$mpg), modelo_pol2_tran_5$fitted.values,
     main = "Modelo_tran_5 (sin constante)")
lines(c(3, 4.5), c(3, 4.5), col = "red", lwd = 2)

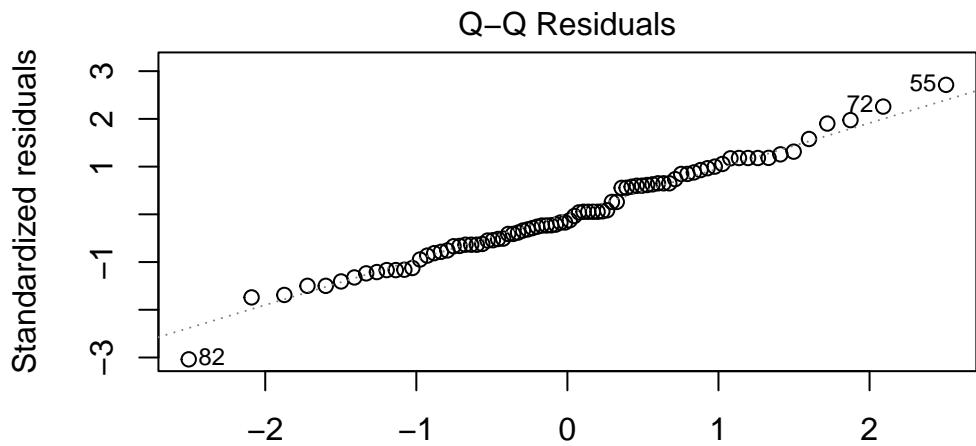
```



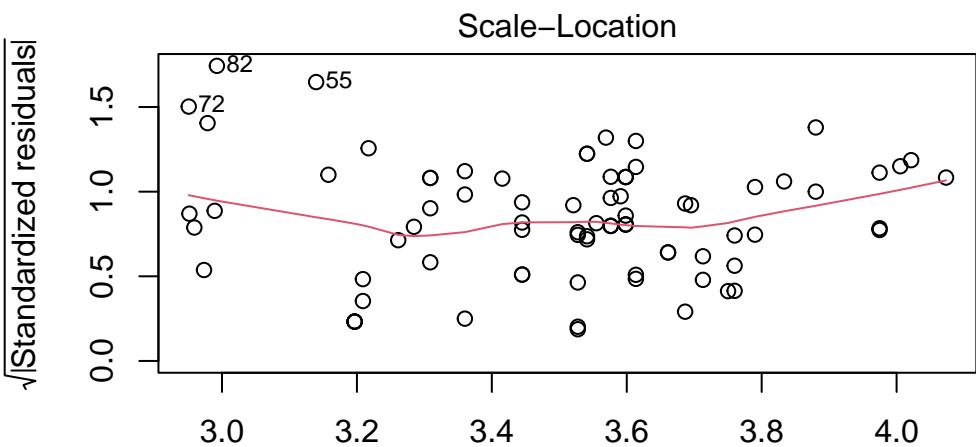
```
plot(modelo_pol2_tran_5)
```



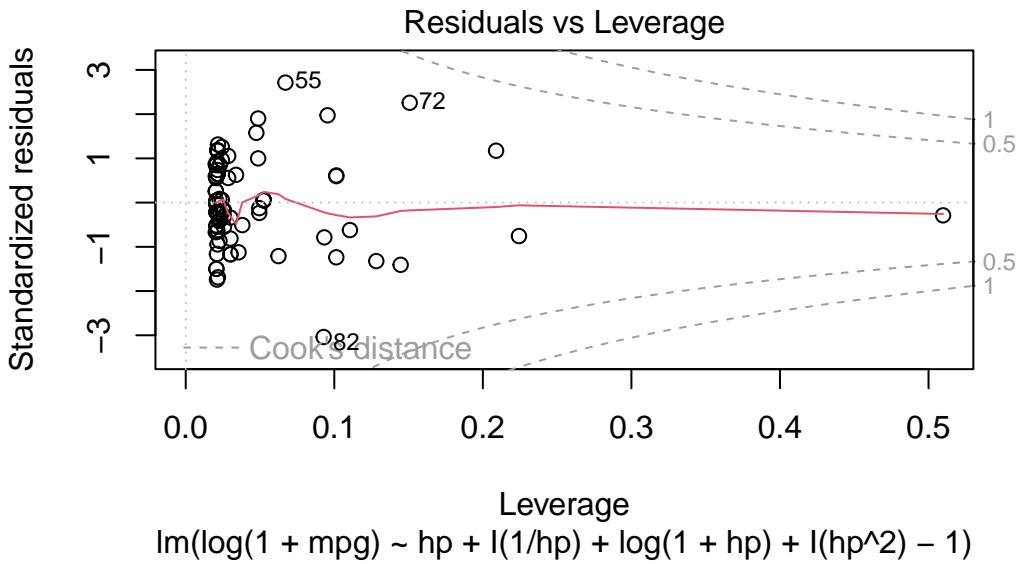
Fitted values
 $\text{lm}(\log(1 + \text{mpg}) \sim \text{hp} + \text{l}(\text{hp}) + \log(1 + \text{hp}) + \text{l}(\text{hp}^2) - 1)$



Theoretical Quantiles
 $\text{lm}(\log(1 + \text{mpg}) \sim \text{hp} + \text{l}(1/\text{hp}) + \log(1 + \text{hp}) + \text{l}(\text{hp}^2) - 1)$



Fitted values
 $\text{lm}(\log(1 + \text{mpg}) \sim \text{hp} + \text{l}(1/\text{hp}) + \log(1 + \text{hp}) + \text{l}(\text{hp}^2) - 1)$



4.10.6. Un modelo candidato “bueno”

El script sugiere como uno de los mejores:

```
modelo_pol2_tran_6 <- lm(log(1 + mpg) ~ log(1 + hp) - 1, data = millaje)
summary(modelo_pol2_tran_6)
```

```
Call:
lm(formula = log(1 + mpg) ~ log(1 + hp) - 1, data = millaje)

Residuals:
    Min      1Q  Median      3Q     Max 
-1.3860 -0.3480  0.1168  0.3870  1.3059 

Coefficients:
            Estimate Std. Error t value Pr(>|t|)    
log(1 + hp)  0.73870   0.01383  53.42   <2e-16 ***  
---
Signif. codes:  0 '***' 0.001 '**' 0.01 '*' 0.05 '.' 0.1 ' ' 1

Residual standard error: 0.5883 on 81 degrees of freedom
```

```
Multiple R-squared:  0.9724,    Adjusted R-squared:  0.9721
F-statistic:  2854 on 1 and 81 DF,  p-value: < 2.2e-16
```

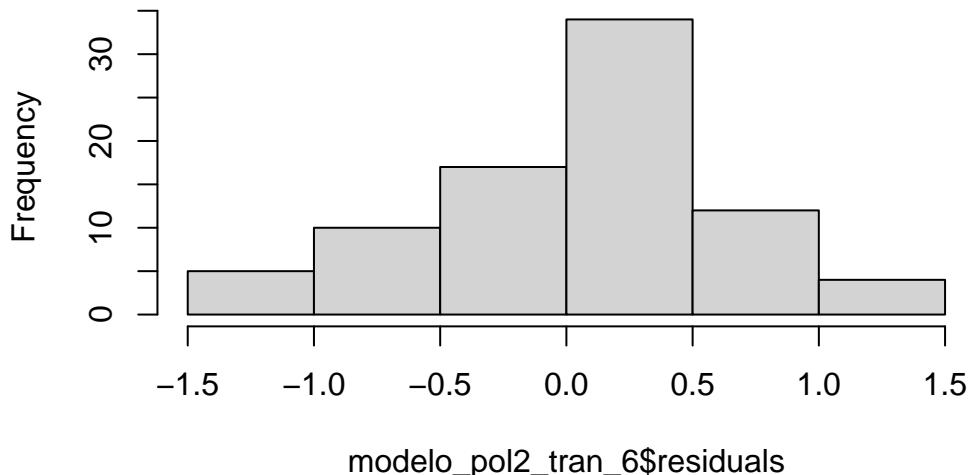
```
shapiro.test(modelo_pol2_tran_6$residuals)
```

```
Shapiro-Wilk normality test

data: modelo_pol2_tran_6$residuals
W = 0.97148, p-value = 0.06443
```

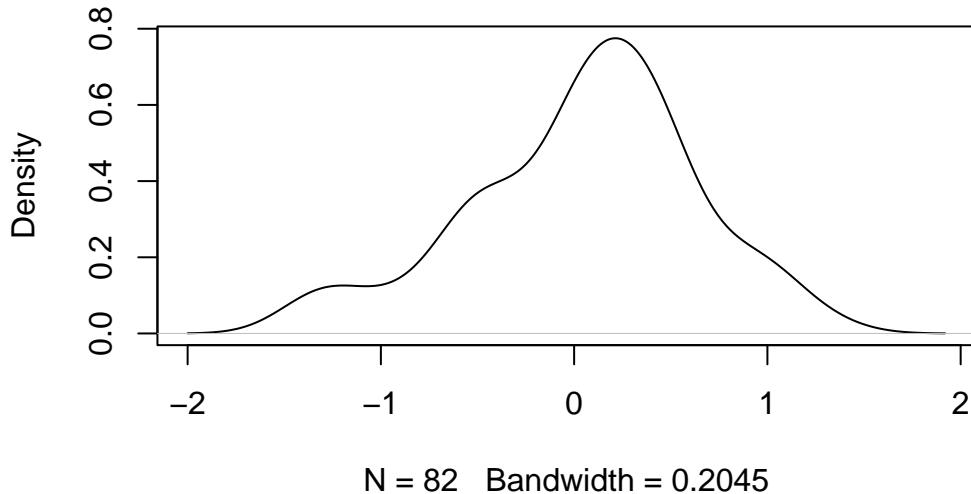
```
hist(modelo_pol2_tran_6$residuals,
     main = "Histograma residuos modelo_tran_6")
```

Histograma residuos modelo_tran_6

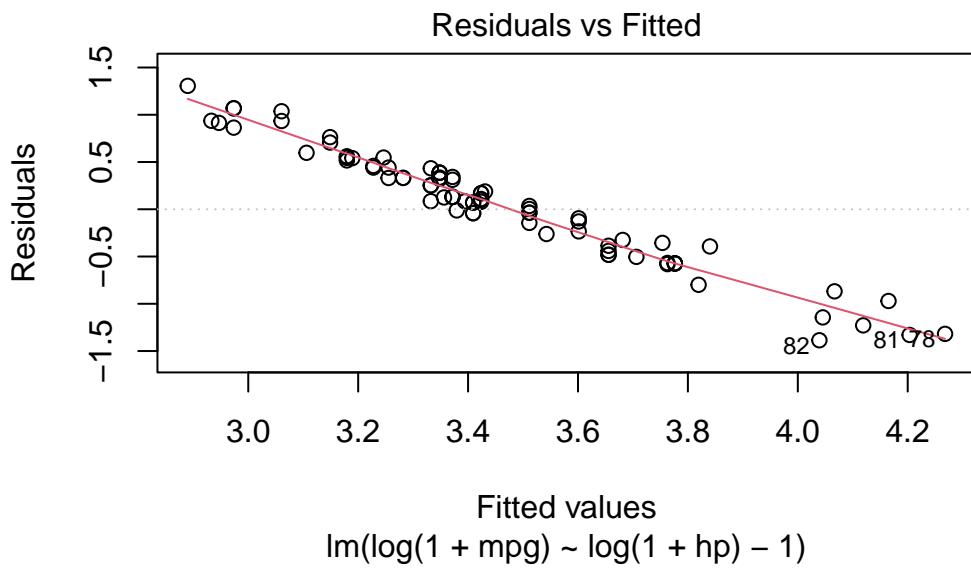


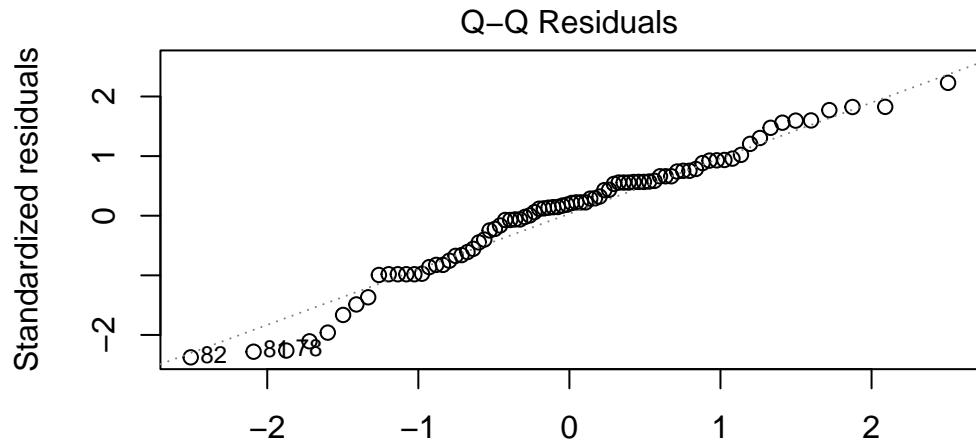
```
plot(density(modelo_pol2_tran_6$residuals),
      main = "Densidad residuos modelo_tran_6")
```

Densidad residuos modelo_tran_6

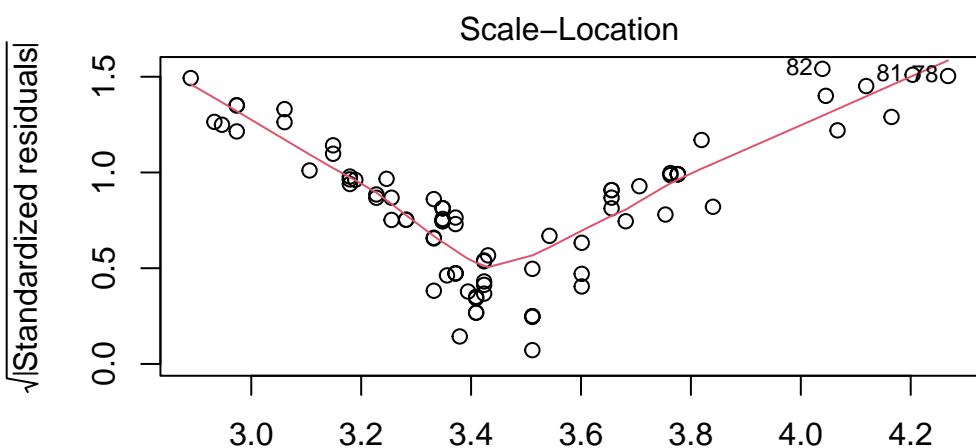


```
plot(modelo_pol2_tran_6)
```

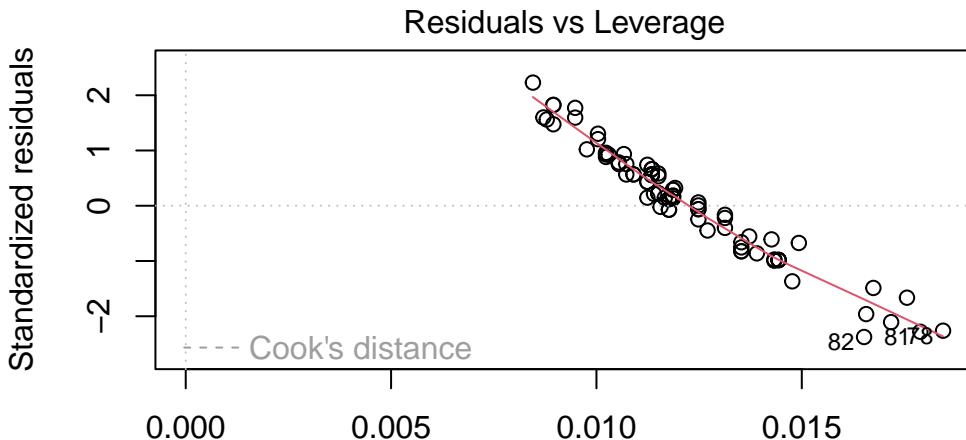




Theoretical Quantiles
 $\text{Im}(\log(1 + \text{mpg}) - \log(1 + \text{hp}) - 1)$



Fitted values
lm(log(1 + mpg) ~ log(1 + hp) - 1)



```
modelo_pol2_tran_7 <- lm(log(1 + mpg) ~ vol + log(1 + hp) - 1, data = millaje)
summary(modelo_pol2_tran_7)
```

Call:
 $\text{lm}(\text{formula} = \log(1 + \text{mpg}) \sim \text{vol} + \log(1 + \text{hp}) - 1, \text{data} = \text{millaje})$

Residuals:

Min	1Q	Median	3Q	Max
-1.3617	-0.3668	0.1028	0.4405	1.2853

Coefficients:

	Estimate	Std. Error	t value	Pr(> t)
vol	0.003047	0.002943	1.035	0.304
$\log(1 + \text{hp})$	0.674633	0.063404	10.640	<2e-16 ***

Signif. codes: 0 '***' 0.001 '**' 0.01 '*' 0.05 '.' 0.1 ' ' 1

Residual standard error: 0.588 on 80 degrees of freedom
 Multiple R-squared: 0.9728, Adjusted R-squared: 0.9721
 F-statistic: 1429 on 2 and 80 DF, p-value: < 2.2e-16

Nota

En la práctica, al elegir entre varios modelos transformados, debes considerar:

- Supuestos sobre los **residuos** (normalidad, homocedasticidad).
- Interpretabilidad económica de los coeficientes.
- Capacidad predictiva (idealmente evaluada fuera de muestra).
- Parsimonia: preferir el modelo más simple que explique bien los datos.

5. Cierre del laboratorio

En este laboratorio trabajaste con:

- Regresión múltiple con **eliminación de variables irrelevantes**.
- Inclusión de **interacciones** y términos **cuadráticos**.
- Visualizaciones 3D de superficies de regresión.
- Modelos polinomiales de distintos grados.
- Comparación de modelos vía **ANOVA**.
- Uso de **transformaciones** (log, raíz, recíprocos) para mejorar los supuestos.

Todo esto forma parte del “arsenal” que usarás en cursos posteriores de econometría y en aplicaciones reales para ajustar modelos más realistas y robustos