

# **Capítulo\_6\_Componentes\_Principales**

Econometría para la Gestión (ECO\_EPG) - FEN UAH

## **Tabla de contenidos**

<b>1</b>	<b>1. Material descargable</b>	<b>2</b>
1.1	Normalización y matriz de correlación . . . . .	2
<b>2</b>	<b>Configuración inicial en R</b>	<b>3</b>
2.1	Carga de librerías . . . . .	3
2.2	Ruta de trabajo (opcional) . . . . .	3
<b>3</b>	<b>Ejemplo 1: PCA con datos de autos (mtcars)</b>	<b>4</b>
3.1	Selección y exploración de variables . . . . .	4
3.2	Matriz de correlación . . . . .	5
3.3	Test de Bartlett y KMO . . . . .	7
3.4	Normalización de las variables . . . . .	8
3.5	PCA con prcomp . . . . .	9
3.6	Valores propios y varianza explicada . . . . .	9
3.6.1	Gráfico de sedimentación (scree plot) . . . . .	10
3.7	Cargas (loadings) e interpretación . . . . .	11
3.8	Coordenadas de los individuos (scores) . . . . .	11
3.9	Biplot: individuos y variables . . . . .	12
<b>4</b>	<b>Ejemplo 2: PCA con datos simulados de indicadores regionales</b>	<b>14</b>
4.1	Creación de datos simulados . . . . .	14
4.2	Exploración inicial . . . . .	15
4.3	Matriz de correlación . . . . .	15
4.4	Bartlett y KMO . . . . .	17
4.5	PCA sobre indicadores regionales . . . . .	18
4.5.1	Varianza explicada . . . . .	18
4.6	Interpretación de las componentes . . . . .	19
4.7	Coordenadas de las regiones en el espacio de componentes . . . . .	20
4.7.1	Gráfico de las regiones en PC1–PC2 . . . . .	20
4.8	Biplot con variables e individuos . . . . .	21

## 1. 1. Material descargable

Descargar PDF de contenidos teóricos

e acuerdo al PDF teórico, el **Análisis de Componentes Principales (PCA)** es un método estadístico que:

- Busca **simplificar la complejidad** de un espacio de muchas variables (dimensiones) conservando la mayor parte posible de la información.
- Supone que tenemos  $n$  individuos y  $p$  variables ( $X_1, \dots, X_p$ ).
- Intenta encontrar un número menor de factores subyacentes  $z < p$  (las **componentes principales**) que expliquen aproximadamente lo mismo que las  $p$  variables originales.
- Pertenece a los métodos de **aprendizaje no supervisado (unsupervised learning)**: no hay una variable respuesta, sólo queremos entender la estructura interna de las variables explicativas.

Intuitivamente, el PCA:

- Busca la **dirección de máxima variabilidad** de los datos (primera componente).
- Luego busca una segunda dirección ortogonal a la primera que explique la máxima varianza restante, y así sucesivamente.
- Permite mirar los datos tanto desde el punto de vista de los **individuos** (observaciones) como de las **variables** (cómo se relacionan entre sí).

### 1.1. Normalización y matriz de correlación

Cuando las variables están en diferentes unidades, el primer paso es **normalizar** cada variable:

$$y_{ik} = \frac{x_{ik} - \bar{x}_k}{s_k}$$

donde  $\bar{x}_k$  es la media de la variable  $X_k$  y  $s_k$  su desviación estándar.

Con los datos normalizados construimos la **matriz de correlaciones  $R$** , que en notación matricial puede escribirse como:

$$[ R = Y^T Y ]$$

De esta matriz calculamos sus **valores propios** ( $\lambda_i$ ) y **vectores propios**, que corresponden a:

- Los **ejes preferenciales de información** (direcciones en las que hay más varianza).
- La proporción de varianza explicada por cada componente:

$$\text{contribución}_i = \frac{\lambda_i}{\sum_j \lambda_j}$$


---

## 2. Configuración inicial en R

### 2.1. Carga de librerías

En este laboratorio usaremos algunas librerías para facilitar el análisis:

```
library(tidyverse)          # Manipulación de datos
library(psych)              # KMO, Bartlett, análisis psicométrico
library(corrplot)           # Gráficos de matrices de correlación
library(PerformanceAnalytics) # chart.Correlation
```

### 2.2. Ruta de trabajo (opcional)

Mantenemos la misma lógica de ruta de datos que en los laboratorios anteriores de ECO\_EPG:

```
ruta_datos <- "C:/Users/manue/Desktop/lab-econometria/labs_epg/data_epg"
```

```
# Puedes revisar el contenido de la carpeta
list.files(ruta_datos)
```

```
[1] "annos_mantenimiento.xlsx" "auto_peso_consumo.xlsx"
[3] "costos.xlsx"               "data_PCA_Decathlon.csv"
[5] "data_PCA_ExpertWine.csv"   "Ejemplo1.xlsx"
[7] "Ejemplo2.xlsx"             "millaje.txt"
[9] "orange.csv"                "tabla_ejemplo_R.xlsx"
```

En este laboratorio usaremos principalmente **datasets incluidos en R**, de manera que puedas ejecutar el código incluso si no has descargado archivos adicionales.

---

### 3. Ejemplo 1: PCA con datos de autos (`mtcars`)

En este primer ejemplo aplicaremos PCA al dataset `mtcars` (incluido en R), que contiene información de distintos modelos de autos:

- `mpg`: millas por galón (consumo).
- `hp`: caballos de fuerza.
- `wt`: peso del auto.
- `qsec`: tiempo en 1/4 de milla.
- Entre otras variables.

La idea es **resumir** varias características técnicas de los autos en unas pocas **componentes principales**.

#### 3.1. Selección y exploración de variables

```
data(mtcars)

# Seleccionamos algunas variables numéricas de interés
datos_auto <- mtcars %>%
  select(mpg, hp, wt, qsec, disp, drat)

summary(datos_auto)
```

	mpg	hp	wt	qsec
Min.	:10.40	Min. : 52.0	Min. :1.513	Min. :14.50
1st Qu.	:15.43	1st Qu.: 96.5	1st Qu.:2.581	1st Qu.:16.89
Median	:19.20	Median :123.0	Median :3.325	Median :17.71
Mean	:20.09	Mean :146.7	Mean :3.217	Mean :17.85
3rd Qu.	:22.80	3rd Qu.:180.0	3rd Qu.:3.610	3rd Qu.:18.90

```

Max.    :33.90   Max.    :335.0   Max.    :5.424   Max.    :22.90
  disp           drat
Min.    : 71.1   Min.    :2.760
1st Qu.:120.8   1st Qu.:3.080
Median  :196.3   Median  :3.695
Mean    :230.7   Mean    :3.597
3rd Qu.:326.0   3rd Qu.:3.920
Max.    :472.0   Max.    :4.930

```

### 💡 Tip

Siempre es importante ver el **rango** y la **escala** de las variables:

- `mpg` está en millas por galón.
- `hp` en caballos de fuerza.
- `wt` en miles de libras.
- `qsec` en segundos.

Si no normalizamos, las variables con mayor escala dominarán el análisis.

## 3.2. Matriz de correlación

Antes de hacer PCA miramos la relación entre variables:

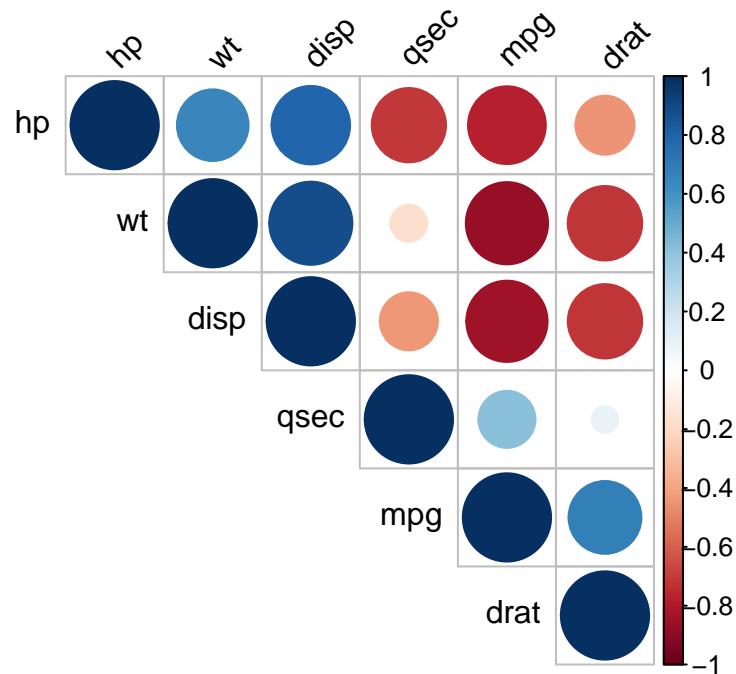
```

cor_auto <- cor(datos_auto)
round(cor_auto, 2)

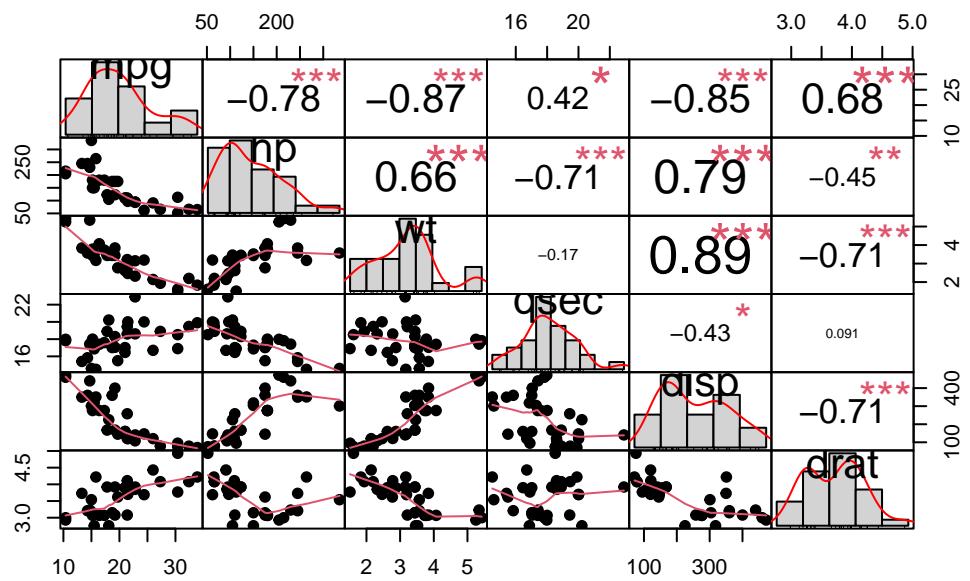
```

	mpg	hp	wt	qsec	disp	drat
mpg	1.00	-0.78	-0.87	0.42	-0.85	0.68
hp	-0.78	1.00	0.66	-0.71	0.79	-0.45
wt	-0.87	0.66	1.00	-0.17	0.89	-0.71
qsec	0.42	-0.71	-0.17	1.00	-0.43	0.09
disp	-0.85	0.79	0.89	-0.43	1.00	-0.71
drat	0.68	-0.45	-0.71	0.09	-0.71	1.00

```
corrplot(cor_auto,
         type  = "upper",
         order = "hclust",
         tl.col = "black",
         tl.srt = 45)
```



```
chart.Correlation(datos_auto,
                  histogram = TRUE,
                  pch       = 19)
```



### 3.3. Test de Bartlett y KMO

Aplicamos los tests que se mencionan en el PDF teórico:

- **Bartlett**: contrasta si la matriz de correlación es esférica.
- **KMO**: evalúa la adecuación del muestreo para análisis factorial/PCA.

```
psych::cortest.bartlett(cor_auto, n = nrow(datos_auto))
```

```
$chisq
[1] 181.2473
```

```
$p.value
[1] 1.332068e-30
```

```
$df
[1] 15
```

```
KMO(cor_auto)
```

```

Kaiser-Meyer-Olkin factor adequacy
Call: KMO(r = cor_auto)
Overall MSA = 0.76
MSA for each item =
  mpg   hp   wt qsec disp drat
0.83 0.83 0.70 0.52 0.78 0.85

```

**i** Nota

- Si el **p-value** de Bartlett es pequeño, la matriz de correlación es **distinta** de la identidad, lo que favorece el uso de PCA.
- Un **KMO** cercano a 1 indica que las variables comparten suficiente varianza común como para aplicar análisis factorial o PCA.

### 3.4. Normalización de las variables

Normalizamos las variables para que todas queden en escala comparable:

```

datos_auto_norm <- scale(datos_auto)

head(datos_auto_norm)

```

	mpg	hp	wt	qsec	disp
Mazda RX4	0.1508848	-0.5350928	-0.610399567	-0.7771651	-0.57061982
Mazda RX4 Wag	0.1508848	-0.5350928	-0.349785269	-0.4637808	-0.57061982
Datsun 710	0.4495434	-0.7830405	-0.917004624	0.4260068	-0.99018209
Hornet 4 Drive	0.2172534	-0.5350928	-0.002299538	0.8904872	0.22009369
Hornet Sportabout	-0.2307345	0.4129422	0.227654255	-0.4637808	1.04308123
Valiant	-0.3302874	-0.6080186	0.248094592	1.3269868	-0.04616698
		drat			
Mazda RX4		0.5675137			
Mazda RX4 Wag		0.5675137			
Datsun 710		0.4739996			
Hornet 4 Drive		-0.9661175			
Hornet Sportabout		-0.8351978			
Valiant		-1.5646078			

### 3.5. PCA con prcomp

Usamos la función base `prcomp`, que trabaja sobre la matriz de datos:

```
pca_auto <- prcomp(datos_auto,
                      center = TRUE, # restar la media
                      scale. = TRUE) # dividir por la desviación estándar

summary(pca_auto)
```

Importance of components:

	PC1	PC2	PC3	PC4	PC5	PC6
Standard deviation	2.0463	1.0715	0.57737	0.39289	0.3533	0.22799
Proportion of Variance	0.6979	0.1913	0.05556	0.02573	0.0208	0.00866
Cumulative Proportion	0.6979	0.8892	0.94481	0.97054	0.9913	1.00000

El `summary` muestra:

- La **desviación estándar** de cada componente.
- La **proporción de varianza** explicada por cada componente.
- La **varianza acumulada** (muy útil para decidir cuántas componentes retener).

### 3.6. Valores propios y varianza explicada

Los **valores propios** se obtienen elevando al cuadrado las desviaciones estándar de las componentes:

```
eigenvalues <- pca_auto$sdev^2
eigenvalues
```

```
[1] 4.18739648 1.14811212 0.33335666 0.15436054 0.12479601 0.05197818
```

```
prop_var <- eigenvalues / sum(eigenvalues)
prop_var
```

```
[1] 0.697899413 0.191352020 0.055559444 0.025726757 0.020799335 0.008663031
```

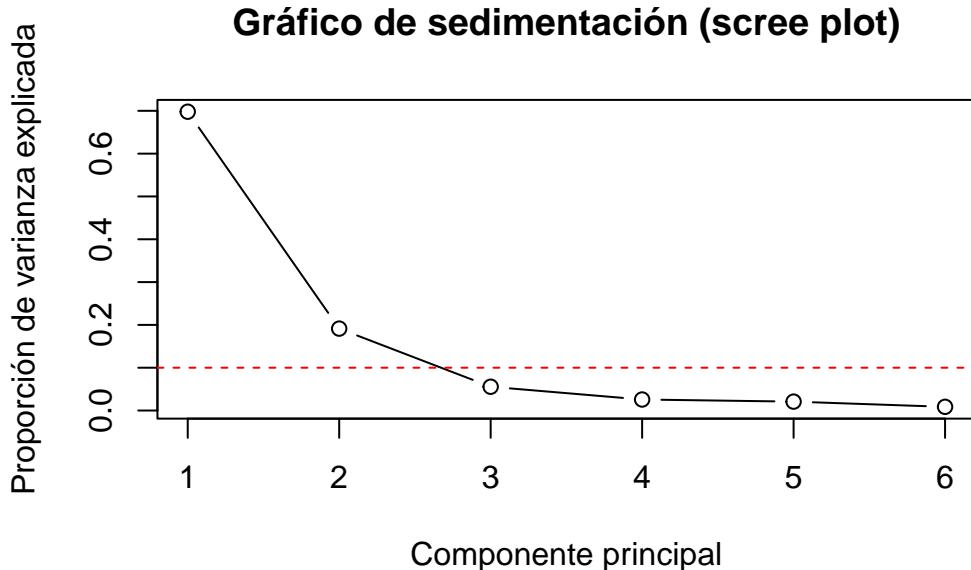
```
acum_var <- cumsum(prop_var)
acum_var
```

```
[1] 0.6978994 0.8892514 0.9448109 0.9705376 0.9913370 1.0000000
```

### 3.6.1. Gráfico de sedimentación (scree plot)

```
plot(prop_var,
      type = "b",
      xlab = "Componente principal",
      ylab = "Proporción de varianza explicada",
      main = "Gráfico de sedimentación (scree plot)")

abline(h = 0.1, lty = 2, col = "red")
```



Tip

Ideas típicas para decidir el número de componentes:

- Mantener las componentes que explican en conjunto, por ejemplo, **70 %-80 %** de

la varianza.

- Detenerse cuando el scree plot muestra un “**codo**” evidente.
- Mantener sólo las componentes con valor propio mayor que 1 (criterio de Kaiser) cuando se trabaja sobre matriz de correlación.

### 3.7. Cargas (loadings) e interpretación

Las **cargas** son las correlaciones entre las variables originales y las componentes:

```
pca_auto$rotation
```

	PC1	PC2	PC3	PC4	PC5	PC6
mpg	-0.4586835	-0.05867609	-0.19479235	-0.78205878	0.1111533	0.35249327
hp	0.4258534	-0.36147576	0.14613554	-0.12301873	0.8057408	0.04771555
wt	0.4386179	0.29953457	0.41776208	-0.10438337	-0.2301541	0.69246040
qsec	-0.2528320	0.76284877	0.34059066	-0.04268124	0.4218755	-0.24152663
disp	0.4660354	0.06065296	0.09688406	-0.60001871	-0.2946297	-0.56825752
drat	-0.3670963	-0.43652537	0.80049152	-0.02259258	-0.1437714	-0.11277675

- Valores altos (en valor absoluto) indican que la variable tiene una gran influencia en esa componente.
- El **signo** indica dirección de la relación (positiva o negativa).

### 3.8. Coordenadas de los individuos (scores)

```
head(pca_auto$x)
```

	PC1	PC2	PC3	PC4	PC5
Mazda RX4	-0.8425806	-0.873469391	-0.2282783	0.3742725	-0.51522641
Mazda RX4 Wag	-0.8075041	-0.556341552	-0.0126678	0.3336931	-0.44299870
Datsun 710	-1.6850448	0.040006569	-0.1564937	0.4057157	0.03340433
Hornet 4 Drive	-0.0964443	1.294377904	-0.5702297	-0.2520788	0.04326023
Hornet Sportabout	1.2915096	0.006516693	-0.5250741	-0.4813192	-0.12822104
Valiant	0.2187309	2.005957905	-0.7258399	0.3136170	0.21465335

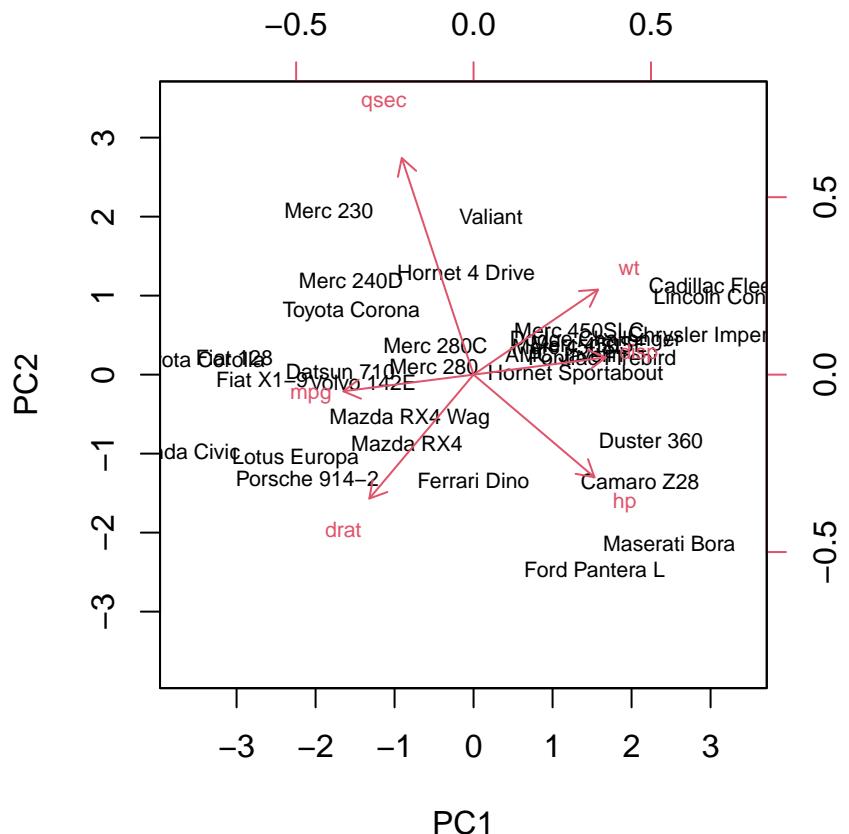
PC6

Mazda RX4	0.05293884
Mazda RX4 Wag	0.15771326
Datsun 710	-0.10756126
Hornet 4 Drive	-0.18173489
Hornet Sportabout	-0.29051949
Valiant	-0.09145688

Cada fila corresponde a un auto, y cada columna a su coordenada en una componente principal (por ejemplo, PC1, PC2).

### 3.9. Biplot: individuos y variables

```
biplot(pca_auto,
       scale = 0,
       cex    = 0.7)
```



### Nota

- Los **puntos** son los autos (individuos).
- Las **flechas** representan las variables originales.
- La dirección y longitud de cada flecha muestran cómo cada variable contribuye a las primeras componentes.

## 4. Ejemplo 2: PCA con datos simulados de indicadores regionales

Ahora construiremos un segundo ejemplo, inventando un conjunto de datos que se parezca a una situación típica en economía o gestión: indicadores para distintas **regiones**.

Supongamos que medimos para cada región:

- `ingreso_pc`: ingreso per cápita.
- `desempleo`: tasa de desempleo.
- `escolaridad`: años promedio de estudio.
- `pobreza`: porcentaje de población bajo la línea de pobreza.
- `gini`: índice de desigualdad (0–1).

La idea es usar PCA para encontrar **patrones conjuntos** entre estos indicadores.

### 4.1. Creación de datos simulados

```
set.seed(123)

n_regiones <- 16

datos_regiones <- tibble(
  region      = paste("Region", 1:n_regiones),
  ingreso_pc  = round(rnorm(n_regiones, mean = 800000, sd = 150000)),
  desempleo   = round(rnorm(n_regiones, mean = 8, sd = 2), 1),
  escolaridad = round(rnorm(n_regiones, mean = 11, sd = 1.5), 1),
  pobreza     = round(rnorm(n_regiones, mean = 15, sd = 5), 1),
  gini        = round(rnorm(n_regiones, mean = 0.45, sd = 0.05), 2)
)

datos_regiones

# A tibble: 16 x 6
  region    ingreso_pc desempleo escolaridad pobreza   gini
  <chr>       <dbl>     <dbl>      <dbl>     <dbl> <dbl>
1 Region 1    715929      9        12.3     18.9   0.4 
2 Region 2    765473     4.1        12.3     14.6   0.47
```

3 Region 3	1033806	9.4	12.2	16.3	0.47
4 Region 4	810576	7.1	12	14.9	0.45
5 Region 5	819393	5.9	11.8	14.8	0.5
6 Region 6	1057260	7.6	10.9	21.8	0.55
7 Region 7	869137	5.9	10.5	13.9	0.43
8 Region 8	610241	6.5	10.4	22.6	0.33
9 Region 9	696972	6.7	10	7.3	0.5
10 Region 10	733151	4.6	10.7	17.9	0.41
11 Region 11	983612	9.7	9.1	15.6	0.42
12 Region 12	853972	8.3	14.3	16.1	0.5
13 Region 13	860116	5.7	12.8	16.9	0.44
14 Region 14	816602	10.5	9.3	12.5	0.39
15 Region 15	716624	8.9	10.4	13.3	0.46
16 Region 16	1068037	7.4	10.3	9.9	0.44

## 4.2. Exploración inicial

```
summary(select(datos_regiones, -region))
```

ingreso_pc	desempleo	escolaridad	pobreza
Min. : 610241	Min. : 4.100	Min. : 9.10	Min. : 7.30
1st Qu.: 729019	1st Qu.: 5.900	1st Qu.:10.38	1st Qu.:13.75
Median : 817998	Median : 7.250	Median :10.80	Median :15.25
Mean : 838181	Mean : 7.331	Mean :11.21	Mean :15.46
3rd Qu.: 897756	3rd Qu.: 8.925	3rd Qu.:12.22	3rd Qu.:17.15
Max. :1068037	Max. :10.500	Max. :14.30	Max. :22.60
gini			
Min. :0.3300			
1st Qu.:0.4175			
Median :0.4450			
Mean :0.4475			
3rd Qu.:0.4775			
Max. :0.5500			

## 4.3. Matriz de correlación

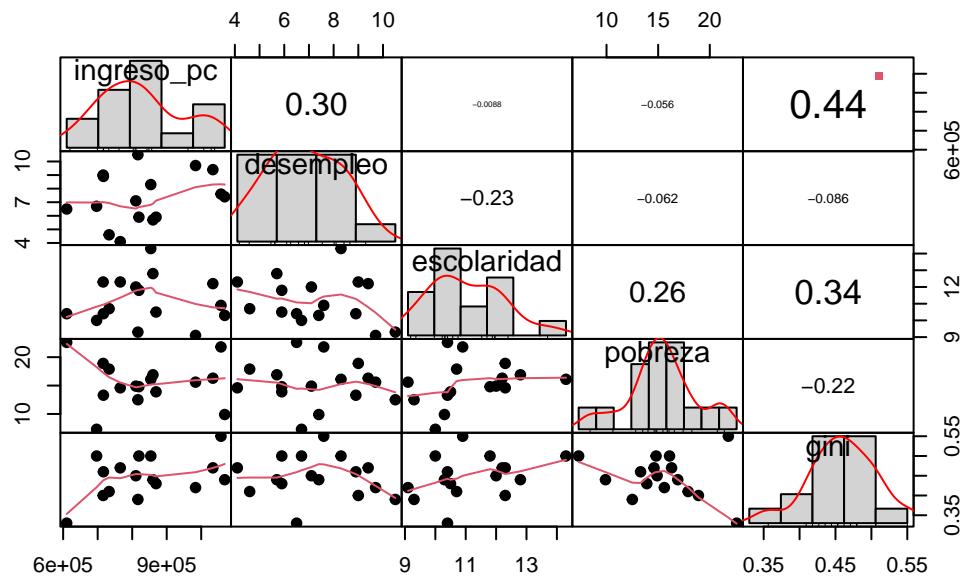
```
vars_reg <- select(datos_regiones, -region)
cor_reg <- cor(vars_reg)
round(cor_reg, 2)
```

	ingreso_pc	desempleo	escolaridad	pobreza	gini
ingreso_pc	1.00	0.30	-0.01	-0.06	0.44
desempleo	0.30	1.00	-0.23	-0.06	-0.09
escolaridad	-0.01	-0.23	1.00	0.26	0.34
pobreza	-0.06	-0.06	0.26	1.00	-0.22
gini	0.44	-0.09	0.34	-0.22	1.00

```
corrplot(cor_reg,
         type = "upper",
         order = "hclust",
         tl.col = "black",
         tl.srt = 45)
```



```
chart.Correlation(vars_reg, histogram = TRUE, pch = 19)
```



#### 4.4. Bartlett y KMO

```
psych::cortest.bartlett(cor_reg, n = nrow(datos_regiones))
```

```
$chisq
[1] 9.531286
```

```
$p.value
[1] 0.4825305
```

```
$df
[1] 10
```

```
KMO(cor_reg)
```

```
Kaiser-Meyer-Olkin factor adequacy
Call: KMO(r = cor_reg)
Overall MSA =  0.38
MSA for each item =
  ingreso_pc   desempleo  escolaridad      pobreza       gini
        0.40        0.46        0.39        0.30        0.38
```

## 4.5. PCA sobre indicadores regionales

```
pca_reg <- prcomp(vars_reg,
                     center = TRUE,
                     scale. = TRUE)

summary(pca_reg)
```

Importance of components:

	PC1	PC2	PC3	PC4	PC5
Standard deviation	1.2525	1.2071	1.0262	0.7718	0.57039
Proportion of Variance	0.3138	0.2914	0.2106	0.1191	0.06507
Cumulative Proportion	0.3138	0.6052	0.8158	0.9349	1.00000

### 4.5.1. Varianza explicada

```
eig_reg <- pca_reg$sdev^2
prop_reg <- eig_reg / sum(eig_reg)
acum_reg <- cumsum(prop_reg)

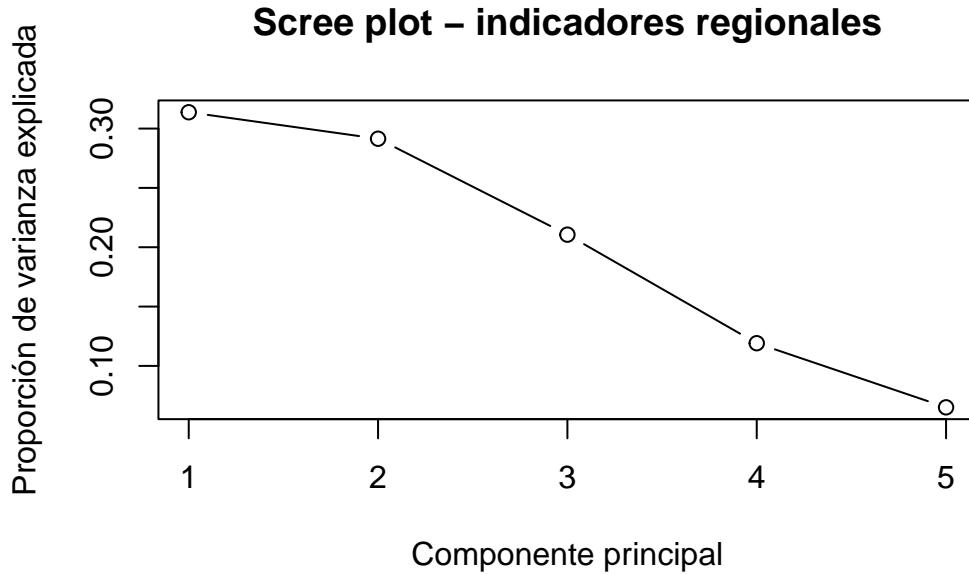
prop_reg
```

```
[1] 0.31375635 0.29143673 0.21061115 0.11912759 0.06506818
```

```
acum_reg
```

```
[1] 0.3137564 0.6051931 0.8158042 0.9349318 1.0000000
```

```
plot(prop_reg,
      type = "b",
      xlab = "Componente principal",
      ylab = "Proporción de varianza explicada",
      main = "Scree plot - indicadores regionales")
```



#### 4.6. Interpretación de las componentes

```
pca_reg$rotation
```

	PC1	PC2	PC3	PC4	PC5
ingreso_pc	0.6287024	0.2048168	0.3221309	0.471827456	-0.4862035
desempleo	0.1577429	0.5621811	0.5069584	-0.605120552	0.1894515
escolaridad	0.2260606	-0.6701855	0.1702061	-0.549672409	-0.4106557
pobreza	-0.2399983	-0.3756731	0.7540961	0.330237323	0.3515011
gini	0.6864021	-0.2274283	-0.2039456	0.003394633	0.6599418

**i** Nota

- Una componente con alta carga positiva en `ingreso_pc` y `escolaridad` y carga negativa en `pobreza` podría interpretarse como un **índice de desarrollo socioeconómico**.
- Otra componente con alta carga en `desempleo` y `gini` podría interpretarse como un patrón de **inestabilidad laboral y desigualdad**.

## 4.7. Coordenadas de las regiones en el espacio de componentes

```
scores_reg <- as_tibble(pca_reg$x) %>%
  mutate(region = datos_regiones$region)
```

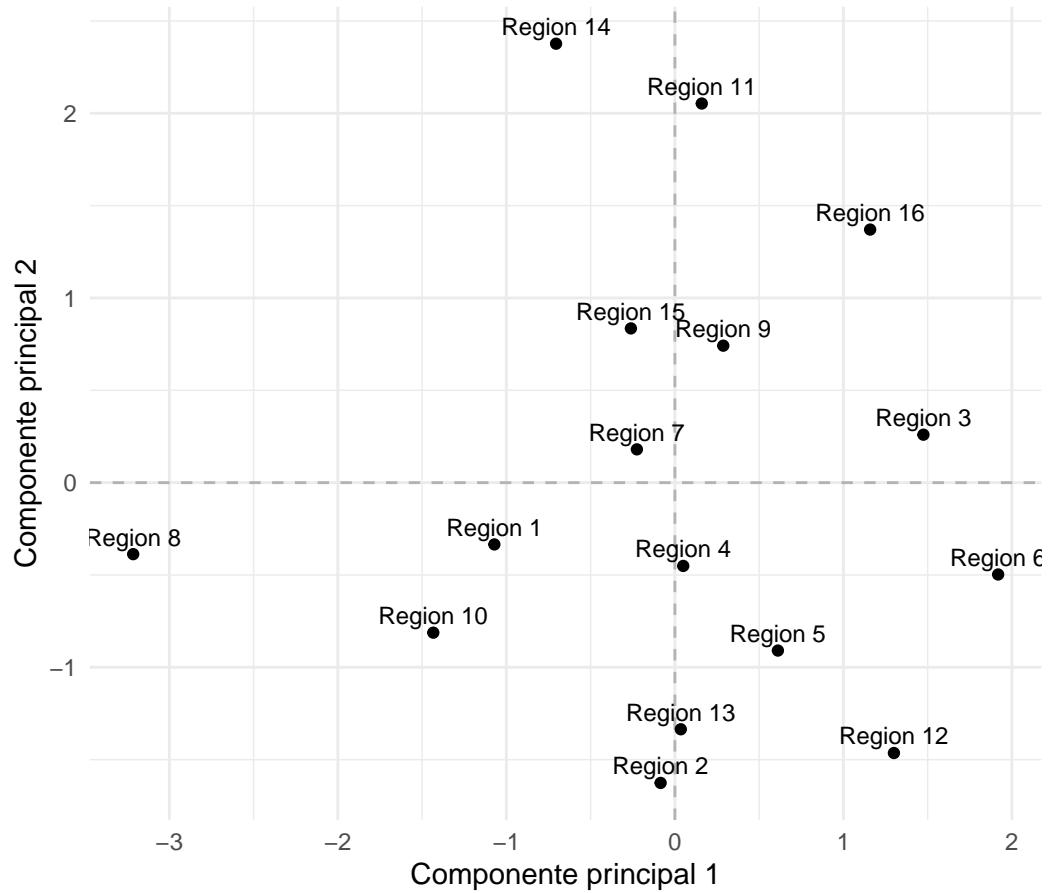
```
scores_reg
```

```
# A tibble: 16 x 6
  PC1    PC2    PC3    PC4    PC5 region
  <dbl>  <dbl>  <dbl>  <dbl>  <dbl> <chr>
1 -1.07  -0.335  1.15  -1.11  -0.00143 Region 1
2 -0.0845 -1.63   -1.17   0.296  -0.190  Region 2
3  1.47   0.260   1.22  -0.319  -0.420  Region 3
4  0.0496 -0.451  -0.148 -0.381  -0.179  Region 4
5  0.611  -0.909  -0.691  0.113   0.342  Region 5
6  1.92   -0.497   1.39   1.33   1.19   Region 6
7 -0.225   0.180  -0.638  0.718  -0.406  Region 7
8 -3.21   -0.387   0.977  0.403   0.141  Region 8
9  0.287   0.742  -2.44  -0.493   0.712  Region 9
10 -1.43   -0.812  -0.434  0.931  -0.00298 Region 10
11  0.160   2.05   0.863   0.575   0.0168 Region 11
12  1.30   -1.46   0.602  -1.43  -0.158  Region 12
13  0.0352 -1.34   0.111   0.0974 -0.678  Region 13
14 -0.705   2.38   0.227  -0.605  -0.0228 Region 14
15 -0.261   0.835  -0.424  -0.792   0.791  Region 15
16  1.16   1.37   -0.600   0.656  -1.14   Region 16
```

### 4.7.1. Gráfico de las regiones en PC1–PC2

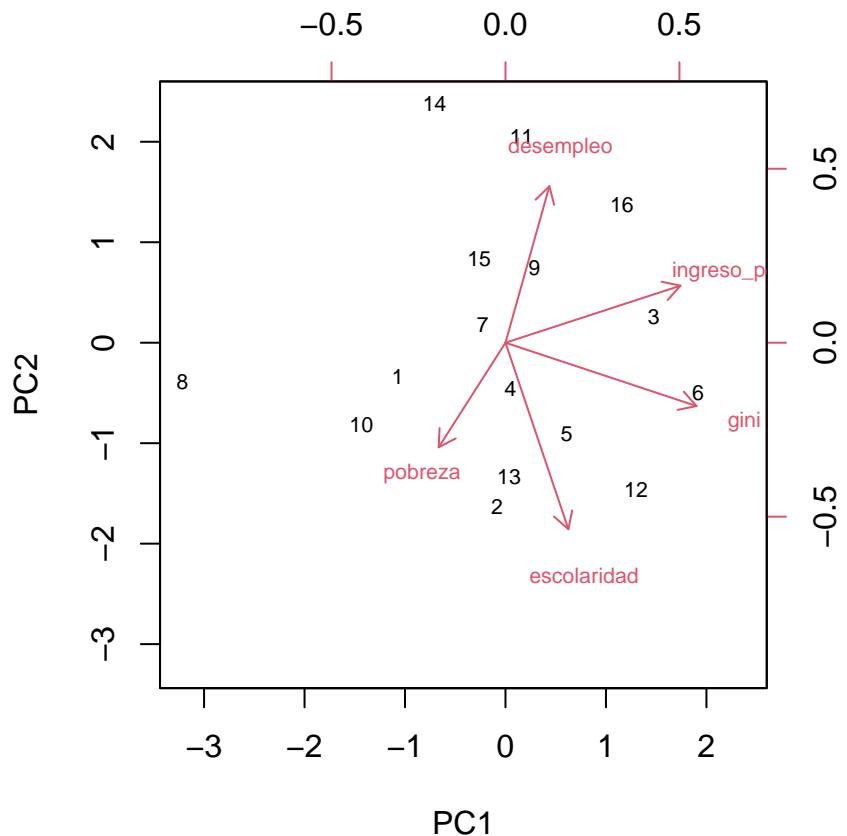
```
ggplot(scores_reg, aes(x = PC1, y = PC2, label = region)) +
  geom_hline(yintercept = 0, linetype = "dashed", color = "grey70") +
  geom_vline(xintercept = 0, linetype = "dashed", color = "grey70") +
  geom_point() +
  geom_text(vjust = -0.5, size = 3) +
  labs(title = "Regiones en el espacio de las dos primeras componentes",
       x = "Componente principal 1",
       y = "Componente principal 2") +
  theme_minimal()
```

## Regiones en el espacio de las dos primeras componentes



### 4.8. Biplot con variables e individuos

```
biplot(pca_reg,
       scale = 0,
       cex    = 0.7)
```



## 5. Cierre del laboratorio

En este laboratorio trabajaste, apoyado en el PDF del **Capítulo 6: Componentes Principales**, los siguientes aspectos:

- La **motivación** del PCA como técnica de reducción de dimensión y exploración de datos multivariados.
- La importancia de **normalizar** las variables cuando están en distintas escalas.

- La construcción de la **matriz de correlaciones** y el uso de **Bartlett** y **KMO** para evaluar si el PCA (o análisis factorial) es razonable.
- El cálculo e interpretación de **valores propios**, **varianza explicada** y **scree plot**.
- La lectura de las **cargas (loadings)** de las variables y de las **coordenadas (scores)** de los individuos.
- La interpretación conjunta de individuos y variables a través de **biplots**.

Estos elementos son la base para aplicar PCA en contextos reales de economía y gestión, donde a menudo trabajamos con muchos indicadores simultáneamente y necesitamos **resumir la información** de forma clara y robusta.