

# Laboratorio 5 – Sesgo por variable omitida y multicolinealidad

## Table of contents

Cargar los datos . . . . .	2
Propiedades de las variables omitidas (Omitted Variable Bias) . . . . .	2
1) Regresión de $IQ$ sobre $educ$ (para obtener $\tilde{\delta}_1$ ) . . . . .	3
2) Regresión de $\log(wage)$ sobre $educ$ (para obtener $\tilde{\beta}_1$ ) . . . . .	3
3) Regresión completa de $\log(wage)$ sobre $educ$ y $IQ$ (para obtener $\hat{\beta}_1$ y $\hat{\beta}_2$ ) . .	4
Multicolinealidad . . . . .	7
1) Cargar el set de datos y estimar $math4$ sobre $pctsgle$ . . . . .	7
2) Correlación entre $lmedinc$ y $free$ . . . . .	7
3) Modelo con $pctsgle$ , $lmedinc$ y $free$ . . . . .	8
4) Cálculo de VIF (Variance Inflation Factors) . . . . .	9
5) ¿Es la multicolinealidad un problema? . . . . .	9

El propósito de este laboratorio es **comprender mejor el sesgo por variable omitida y la multicolinealidad**. ## Para empezar

Abre un nuevo script de R y carga los paquetes

```
# Instalar paquetes solo si faltan (estilo ECO/EPG)
pkgs <- c("tidyverse", "broom", "wooldridge", "car")
to_install <- pkgs[!pkgs %in% rownames(installed.packages())]
if (length(to_install) > 0) {
  install.packages(to_install, repos = "http://cran.us.r-project.org")
}

library(tidyverse)
library(broom)
library(wooldridge)
library(car)      # para vif()
```

Nota: en el enunciado original se pedía instalar `car` “en la consola”. Aquí lo dejamos **compatible y automático**, instalándolo solo si falta.

## Cargar los datos

Usaremos un nuevo set de datos sobre salarios, llamado `wage2`.

```
df <- as_tibble(wage2)
```

Revisa qué contiene el set de datos con:

```
glimpse(df)
```

```
Rows: 935
Columns: 17
$ wage    <int> 769, 808, 825, 650, 562, 1400, 600, 1081, 1154, 1000, 930, 921~
$ hours   <int> 40, 50, 40, 40, 40, 40, 40, 40, 45, 40, 43, 38, 45, 38, 40, 50~
$ IQ      <int> 93, 119, 108, 96, 74, 116, 91, 114, 111, 95, 132, 102, 125, 11~
$ KWW     <int> 35, 41, 46, 32, 27, 43, 24, 50, 37, 44, 44, 45, 40, 24, 47, 37~
$ educ    <int> 12, 18, 14, 12, 11, 16, 10, 18, 15, 12, 18, 14, 15, 16, 16, 10~
$ exper   <int> 11, 11, 11, 13, 14, 14, 13, 8, 13, 16, 8, 9, 4, 7, 9, 17, 6, 1~
$ tenure  <int> 2, 16, 9, 7, 5, 2, 0, 14, 1, 16, 13, 11, 3, 2, 9, 2, 9, 10, 7,~
$ age     <int> 31, 37, 33, 32, 34, 35, 30, 38, 36, 36, 38, 33, 30, 28, 34, 35~
$ married <int> 1, 1, 1, 1, 1, 1, 0, 1, 1, 1, 1, 1, 0, 1, 1, 1, 1, 1, 1, 1,~
$ black   <int> 0, 0, 0, 0, 0, 1, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0,~
$ south   <int> 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0,~
$ urban   <int> 1, 1, 1, 1, 1, 1, 1, 1, 0, 1, 0, 0, 0, 1, 1, 1, 1, 1, 1, 1,~
$ sibs    <int> 1, 1, 1, 4, 10, 1, 1, 2, 2, 1, 1, 1, 2, 3, 1, 1, 3, 2, 3, 3, 0~
$ brthord <int> 2, NA, 2, 3, 6, 2, 2, 3, 3, 1, 1, 2, NA, 1, 1, 2, 3, 3, 1, 2, ~
$ meduc   <int> 8, 14, 14, 12, 6, 8, 8, 8, 14, 12, 13, 16, 12, 10, 12, 6, 12, ~
$ feduc   <int> 8, 14, 14, 12, 11, NA, 8, NA, 5, 11, 14, NA, 12, 10, 12, 8, 10~
$ lwage   <dbl> 6.645091, 6.694562, 6.715384, 6.476973, 6.331502, 7.244227, 6.~
```

## Propiedades de las variables omitidas (Omitted Variable Bias)

Considera el siguiente modelo de regresión:

$$\log(wage) = \beta_0 + \beta_1 educ + \beta_2 IQ + u$$

donde `wage` es la **tasa salarial por hora** (en centavos, no en dólares).

Queremos verificar la propiedad mostrada en Wooldridge:

$$\tilde{\beta}_1 = \hat{\beta}_1 + \hat{\beta}_2 \tilde{\delta}_1$$

donde:

- $\tilde{\beta}_1$  proviene de la regresión de  $\log(wage)$  sobre `educ` (modelo “corto”).
- $\tilde{\delta}_1$  proviene de la regresión de `IQ` sobre `educ`.
- $\hat{\beta}_1$  y  $\hat{\beta}_2$  provienen del modelo “completo” (con `educ` e `IQ`).

### 1) Regresión de `IQ` sobre `educ` (para obtener $\tilde{\delta}_1$ )

```
est1 <- lm(IQ ~ educ, data = df)
```

**\*\* Modelo 1: `IQ ~ educ` \*\***

*Coefficientes estimados:*

*Estadísticas del modelo:*

Estadístico	Valor
R <sup>2</sup>	0.2659
R <sup>2</sup> ajustado	0.2652
Error estándar residual	12.9036
Estadístico F	338.02
N	935

### 2) Regresión de $\log(wage)$ sobre `educ` (para obtener $\tilde{\beta}_1$ )

Primero crea la variable  $\log(wage)$  (si no recuerdas `mutate()`, revisa los labs anteriores):

```
df <- df %>% mutate(logwage = log(wage))
```

Ahora estima el modelo “corto”:

```
est2 <- lm(logwage ~ educ, data = df)
```

**\*\* Modelo 2:  $\log(\text{wage}) \sim \text{educ}$  \*\***

*Coefficientes estimados:*

*Estadísticas del modelo:*

Estadístico	Valor
R <sup>2</sup>	0.0974
R <sup>2</sup> ajustado	0.0964
Error estándar residual	0.4003
Estadístico F	100.70
N	935

### 3) Regresión completa de $\log(\text{wage})$ sobre $\text{educ}$ y $\text{IQ}$ (para obtener $\hat{\beta}_1$ y $\hat{\beta}_2$ )

```
est3 <- lm(logwage ~ educ + IQ, data = df)
```

**\*\* Modelo 3:  $\log(\text{wage}) \sim \text{educ} + \text{IQ}$  \*\***

*Coefficientes estimados:*

*Estadísticas del modelo:*

Estadístico	Valor
R <sup>2</sup>	0.1297
R <sup>2</sup> ajustado	0.1278
Error estándar residual	0.3933
Estadístico F	69.42
N	935

Verifica que se cumple la identidad:

$$\tilde{\beta}_1 = \hat{\beta}_1 + \hat{\beta}_2 \tilde{\delta}_1$$

```
# Extraer coeficientes
beta1_tilde <- coef(est2)["educ"]
beta1_hat <- coef(est3)["educ"]
beta2_hat <- coef(est3)["IQ"]
delta1_tilde <- coef(est1)["educ"]
```

```
# Mostrar los valores
cat("Coeficientes extraídos:\n")
```

Coeficientes extraídos:

```
cat("-----\n")
```

```
-----

cat(sprintf("  (modelo corto):      %.6f\n", beta1_tilde))
```

~ (modelo corto): 0.059839

```
cat(sprintf("  (modelo completo):  %.6f\n", beta1_hat))
```

^ (modelo completo): 0.039120

```
cat(sprintf("  (modelo completo):  %.6f\n", beta2_hat))
```

^ (modelo completo): 0.005863

```
cat(sprintf("  (IQ sobre educ):      %.6f\n", delta1_tilde))
```

~ (IQ sobre educ): 3.533829

```
cat("\n")
```

```
# Verificar la identidad
lado_izq <- beta1_tilde
lado_der <- beta1_hat + beta2_hat * delta1_tilde

cat("Verificación de la identidad:\n")
```

Verificación de la identidad:

```
cat("-----\n")
```

```
cat(sprintf("Lado izquierdo ( ~ ):          %.6f\n", lado_izq))
```

Lado izquierdo ( ~ ): 0.059839

```
cat(sprintf("Lado derecho ( ^ + ^ ~ ):      %.6f\n", lado_der))
```

Lado derecho ( ^ + ^ ~ ): 0.059839

```
cat(sprintf("Diferencia:                    %.10f\n", abs(lado_izq - lado_der)))
```

Diferencia: 0.0000000000

```
cat(sprintf("¿Son iguales? %s\n", ifelse(abs(lado_izq - lado_der) < 1e-10, "SÍ", "NO")))
```

¿Son iguales? SÍ

**Pregunta:** ¿ $\tilde{\beta}_1$  es mayor o menor que  $\hat{\beta}_1$ ? ¿Qué significa esto en términos de **sesgo por variable omitida**?

---

**Tabla comparativa de los tres modelos:**

Modelo	Especificación	R <sup>2</sup>	Coef. educ	Coef. IQ	N
Modelo 1	IQ ~ educ	0.2659	3.533829	—	935
Modelo 2	log(wage) ~ educ	0.0974	0.059839	—	935
Modelo 3	log(wage) ~ educ + IQ	0.1297	0.039120	0.005863	935

---

## Multicolinealidad

Ahora veamos cómo calcular diagnósticos de multicolinealidad. Recuerda de Wooldridge que la multicolinealidad puede interpretarse mejor como “un problema de tamaño muestral pequeño”.

Usaremos el set de datos `meapsingle` del paquete `wooldridge`. Nos interesa la variable `pctsgle`, que entrega el porcentaje de familias monoparentales que residen en el mismo ZIP code que la escuela. La variable resultado es `math4`, que corresponde al porcentaje de estudiantes que aprobaron el test estatal de matemáticas de 4° grado.

### 1) Cargar el set de datos y estimar *math4* sobre *pctsgle*

```
df <- as_tibble(meapsingle)
est_a <- lm(math4 ~ pctsgle, data = df)
```

**\*\* Modelo A:  $\text{math4} \sim \text{pctsgle}$  \*\***

*Coefficientes estimados:*

*Estadísticas del modelo:*

Estadístico	Valor
$R^2$	0.3795
$R^2$ ajustado	0.3768
Error estándar residual	12.4798
Estadístico F	138.85
N	229

**Pregunta:** Interpreta el coeficiente de pendiente de esta regresión. ¿El efecto parece grande?

### 2) Correlación entre *lmedinc* y *free*

Ahora considera el mismo modelo, pero agregando *lmedinc* y *free* como regresores adicionales.

- *lmedinc* es el log del ingreso mediano del hogar del ZIP code.
- *free* es el porcentaje de estudiantes que califican para almuerzo gratis o con descuento.

¿Crees que podría haber una correlación fuerte entre *lmedinc* y *free*? Calcula la correlación:

```
correlacion <- cor(df$lmedinc, df$free)
cat(sprintf("Correlación entre lmedinc y free: %.4f\n", correlacion))
```

Correlación entre lmedinc y free: -0.7470

#### Preguntas:

- ¿El signo de la correlación es el esperado?
- ¿Está lo suficientemente cerca de 1 en valor absoluto como para violar la suposición de “no colinealidad perfecta”?

### 3) Modelo con *pctsgle*, *lmedinc* y *free*

```
est_b <- lm(math4 ~ pctsgle + lmedinc + free, data = df)
```

**\*\* Modelo B: math4 ~ pctsgle + lmedinc + free \*\***

*Coefficientes estimados:*

*Estadísticas del modelo:*

Estadístico	Valor
R <sup>2</sup>	0.4598
R <sup>2</sup> ajustado	0.4526
Error estándar residual	11.6958
Estadístico F	63.85
N	229

#### Comparación de coeficiente de *pctsgle*:

Modelo	Coef. <i>pctsgle</i>	Error estándar	Estadístico t	R <sup>2</sup>
Modelo A (simple)	-0.832881	0.070682	-11.784	0.3795
Modelo B (múltiple)	-0.199645	0.158716	-1.258	0.4598

**Pregunta:** Comenta el valor del coeficiente de *pctsgle* comparado con la primera regresión. ¿Qué puedes decir de *lmedinc* y *free* como variables de confusión (confounders)?



#### 4) Cálculo de VIF (Variance Inflation Factors)

Un diagnóstico común para multicolinealidad es el **VIF**. Podemos usar la función `vif()` del paquete `car` para esto. Calcula los VIF del modelo anterior:

```
vif_values <- vif(est_b)
```

#### Factores de Inflación de Varianza (VIF):

	Variable	VIF	R <sup>2</sup> implícito	Interpretación
pctsgle	pctsgle	5.741	0.8258	Multicolinealidad moderada
lmedinc	lmedinc	4.119	0.7572	Multicolinealidad baja
free	free	3.188	0.6863	Multicolinealidad baja

VIFs de 10 o más suelen considerarse problemáticos, porque:

$$VIF_j = \frac{1}{1 - R_j^2}$$

lo que implica  $R_j^2 > 0.9$ . Ver p. 86 de Wooldridge.

**Interpretación:** Si  $VIF_j = 10$ , entonces:

$$R_j^2 = 1 - \frac{1}{10} = 0.9$$

Esto significa que el 90% de la variación en  $x_j$  puede ser explicada linealmente por las demás variables explicativas, indicando una colinealidad alta.

#### 5) ¿Es la multicolinealidad un problema?

La multicolinealidad suele ser un problema principalmente en sets de datos con **muestra pequeña**. A medida que el tamaño muestral aumenta,  $R_j^2$  podría disminuir. Además, la variación total en  $x_j$  (i.e.,  $SST_j$ ) aumenta con el tamaño muestral. Por esto, la multicolinealidad generalmente no es un problema que preocupe demasiado en muestras grandes.

La fórmula de la varianza del estimador MCO es:

$$\text{Var}(\hat{\beta}_j) = \frac{\sigma^2}{SST_j \cdot (1 - R_j^2)} = \frac{\sigma^2}{SST_j} \cdot VIF_j$$

donde:

- $\sigma^2$  es la varianza del error
- $SST_j = \sum_{i=1}^n (x_{ij} - \bar{x}_j)^2$  es la suma de cuadrados total de  $x_j$
- $R_j^2$  es el  $R^2$  de la regresión auxiliar de  $x_j$  sobre todas las demás variables explicativas

Observa que incluso con un  $VIF_j$  alto, si  $SST_j$  es suficientemente grande (muestra grande), la varianza del estimador puede seguir siendo razonablemente pequeña.