

# Finite Elemente Methoden

**Skript zur Vorlesung im Wintersemester 2014/2015**

**Christian Wieners**

**Institut für Angewandte und Numerische Mathematik, KIT**

Version vom 29. Oktober 2014

# Inhaltsverzeichnis

<b>1</b>	<b>PDE-Modelle</b>	<b>1</b>
1.1	Diffusion (als Prototyp = Modellproblem) . . . . .	1
1.2	Diffusions-Konvektions-Reaktionssysteme . . . . .	4
<b>2</b>	<b>Einführung</b>	<b>7</b>
2.1	PDE-Modelle . . . . .	7
2.2	Diffusion (als Prototyp = Modellproblem) . . . . .	7
2.3	Randbedingungen . . . . .	9
2.4	Modell-Problem (die Poisson-Gleichung) . . . . .	10

Diese Vorlesung ist eine Einführung in die numerische Verfahren zur Lösung von partiellen Differentialgleichungen. Hier beschränken wir uns im Wesentlichen auf elliptische Randwertaufgaben in zwei Raumdimensionen, das Modellproblem und die Stokes-Gleichungen. Neben der Konstruktion der Verfahren wird im Wesentlichen die Konvergenzanalyse betrachtet. Das Skript soll auch als Grundlage für vertiefende Vorlesungen zur numerischen Behandlung von weiteren partiellen Differentialgleichungen dienen.

Der gesamte Stoff wurde aus Standard-Lehrbüchern zusammengestellt; die wesentlichen Quellen sind unten angegeben.

Ich danke Herrn Ramin Shirazi-Nejad für die mühsame  $\text{\LaTeX}$ -Arbeit.

## Literatur

Knabner/Angermann: Numerik partieller Differentialgleichungen, Springer 2000

Braess: Finite Elemente, Springer 2013

Ciarlet: The finite element method for elliptic problems, North-Holland

Deuflhard/Bornemann: Numerische Mathematik III, de Gruyter 2002

Brenner/Scott: The Mathematical Theory of Finite Element Methods, Springer 2008

Ern/Guermond: Theory and Practice of Finite Elements, Springer 2004

Hanke ????

# 1 PDE-Modelle

**Ziel:** Analyse von Diskretisierungs- und Lösungsmethoden für PDEs (partial differential equations).

## 1.1 Diffusion (als Prototyp = Modellproblem)

$\Omega \subset \mathbb{R}^D$  ( $D = 1, 2, 3$ ) ein Gebiet (offen, zusammenhängend) oft beschränkt.

Sei

$u : \overline{\Omega} \rightarrow \mathbb{R}$	Konzentration von einem Stoff/ Wärmemenge
$\sigma : \overline{\Omega} \rightarrow \mathbb{R}^D$	Fluss
$f : \Omega \rightarrow \mathbb{R}$	Quellen und Senken

1) Bilanzgleichung in Gleichgewicht:

für jedes Teilvolumen  $\omega \subset \Omega$  mit genügend glatten Rand gilt:

$$\int_{\partial\omega} \sigma \cdot n_\omega \, da = \int_\omega f \, dx \quad \text{mit } n_\omega : \partial\omega \rightarrow \mathbb{R}^D$$

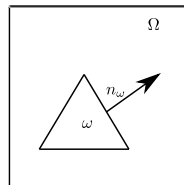


Abbildung 1: Äußere Normalvektor

2) Konstitutivgleichung für den Fluss:

$$\sigma = -\nabla u \quad (\text{einfachster Fall}) \quad \text{Gradient: } \nabla u = \begin{pmatrix} \partial_1 u \\ \partial_2 u \\ \vdots \end{pmatrix} = (Du)^T$$

### (1.1) Satz

Sei  $\Omega \subset \mathbb{R}^D$  offen, und seien  $\sigma \in \mathbf{C}^1(\Omega, \mathbb{R}^D)$ ,  $f \in \mathbf{C}(\Omega)$  mit

$$\int_{\partial K} \sigma \cdot n_K \, da = \int_K f \, dx \quad \forall K \subset \Omega \quad \text{Simplex (2D Dreieck)}.$$

Dann gilt:

$$\operatorname{div} \sigma = f$$

*Beweis.* Satz von Gauß:  $\int_K \sigma \cdot n_K \, da = \int_K \operatorname{div} \sigma \, dx$

$$\implies \int_K (\operatorname{div} \sigma - f) \, dx = 0 \quad \forall K \subset \Omega$$

*Annahme:* Es existiert ein  $x_0 \in \Omega$  mit  $\operatorname{div} \sigma(x_0) \neq f(x_0)$

$\implies$  Es existiert eine offene Umgebung  $U$  mit  $x_0 \in U$  und o.E.  $\operatorname{div} \sigma(x) - f(x) > 0$  ( $x \in U$ )

wähle  $K \subset U \implies \int_K (\operatorname{div} \sigma - f) \, dx > 0 \quad \nexists$

□

$$\implies f = \operatorname{div} \sigma = -\operatorname{div} \nabla u = -\Delta u \quad , \text{wobei } \Delta = \sum \partial_d^2 \text{ (Laplace-Operator)}$$

## Spezielle Lösungen

$\Delta u = 0$  Laplace-Gleichungen (Die Lösungen heißen harmonische Funktionen)

A) Lineare Polynome

$$\mathbb{P}_1(K) = \{a + bx = a + b_1x_1 + b_2x_2 + \dots : a \in \mathbb{R}, b \in \mathbb{R}^D\}$$

B) In 2D: Real und Imaginärteil holomorpher Funktionen. In  $\mathbb{C} \setminus \{0\}$  z.B:

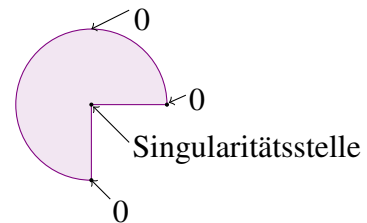
$$u(z) = \operatorname{Re}(z^\alpha) \quad \text{mit } \alpha \in \mathbb{R}, \quad z = r \exp(i\varphi), \quad z^\alpha = r^\alpha \exp(i\alpha\varphi)$$

Es gilt: Holomorphe Funktionen sind durch die Randwerte eindeutig bestimmt!

## Beispiel

$$S = \{z = r \exp(i\varphi) \in \mathbb{C} : 0 < r < 1, 0 < \varphi < \frac{3}{2}\pi\}$$

$$u_0 = \operatorname{Re}(z^{\frac{2}{3}} - z^{-\frac{2}{3}})$$



Holomorph in S  $\implies \Delta u_0 = 0$

Falls  $\nabla u_0 \notin L_2(S)$ ,  $\Delta u = 0$  und  $\nabla u \in L_2$  gilt

$\implies u$  ist eindeutig durch die Randwerte bestimmt.

## Spezielle Lösungen der Poisson-Gleichung ( $-\Delta f = 0$ )

$$\text{def. Fundementallösungen} \quad \phi(x) = \begin{cases} -\frac{1}{2\pi} \log |x| & D = 2 \\ -\frac{1}{4\pi} \frac{1}{|x|} & D = 3 \end{cases}$$

$$\nabla \phi(x) = \begin{cases} -\frac{1}{2\pi} \frac{1}{|x|^2} x & D = 2 \\ -\frac{1}{4\pi} \frac{1}{|x|^3} x & D = 1 \end{cases}$$

$$\text{radiale Koordinaten} \quad \Delta \phi(x) = \begin{cases} \frac{1}{r} \partial_r (r \partial_r \phi(r)) & 2D \\ \frac{1}{r^2} \partial_r^2 (r \phi(r)) & 3D \end{cases} \quad \Delta \phi = 0 \text{ in } \mathbb{R}^D \setminus \{0\}$$

$$\text{Def: } u(x) = \int_{\Omega} \phi(x-y) f(y) dy$$

$$\begin{aligned} -\Delta x \int_{B_R(x)} \phi(x-y) dy &= -\int_{B_R(x)} \Delta x \phi(x-y) dy = -\int_{|x-y|=R} \Delta x \phi(x-y) \frac{x-y_0}{|x-y_0|} da \\ &= \frac{1}{|\partial B_1(x)|} \int_{|x-y_0|=R} \frac{x-y}{|x-y|^D} \frac{x-y_0}{x-y_0} da \xrightarrow{R \rightarrow 0} 1 \end{aligned}$$

$$\implies -\Delta u(x) = f(x)$$

## Ein Beispiel für ein Finites Element

Sei  $\Omega \subset \mathbb{R}^2$  ein beschränktes Polygonebiet und  $\overline{\Omega} = \cup \overline{K}$  eine Zerlegung in Dreiecke.

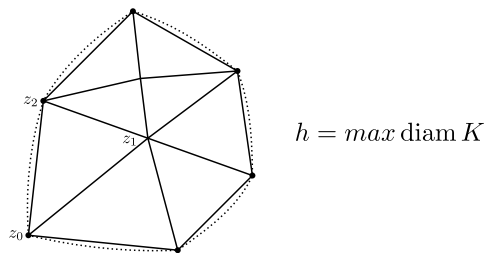


Abbildung 2:  $\overline{\Omega}$  Zerlegung in Dreiecke

Finites Element  $(K, V_K, \Lambda_K)$  mit K-Zelle. Hier ist  $\overline{K} = \text{conv}\{z_0, z_1, z_2\}$

$$V : K = \mathbb{P}_1(K)$$

Ansatzraum

$$\Lambda_K = \{\lambda_0, \lambda_1, \lambda_2\} \subset V_K' \subset \mathbf{C}(K)$$

Freiheitsgrade mit  $\langle \lambda_k, \phi \rangle = \phi(z_K)$

def:  $V_h = \{v_h \in \mathbf{C}(\overline{\Omega}) : v_K \in V_K\}$

## Aufgaben

- 1) Def. eindeutige Approximation  $u_h \in V_h$  zu  $u$ .
- 2) Wie gut lässt sich  $u$  in  $V_h$  approximieren?
- 3) Wie groß ist der Fehler? Bezüglich welchem Maß?
- 4) Wie groß ist der Lösungsaufwand?

## Herausforderungen

- A) Abstrakte Approximations und Lösungsidee- Theorie, die möglichst viele Anwendungen hat.
- B) Große Vielfalt von Methoden, um für konkrete Anwendungen eine optimale Methode zu finden.

## Wiederholung: 1. PDE Modelle 1.1 Elliptische Modellprobleme

Laplace  $\Delta u = 0$  ; Poisson  $-\Delta u = f$  in  $\Omega \subset \mathbb{R}^D \rightarrow$  Randwerte erforderlich! Bsp. in 2 D

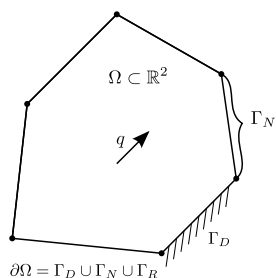


Abbildung 3: Digraph.

-Lineare Elemente erfüllen Laplace

## 1.2 Diffusions-Konvektions-Reaktionssysteme

gesucht:	$u$	:	$\overline{\Omega} \times I \rightarrow \mathbb{R}$	$\Omega \subset \mathbb{R}^D$ beschränktes Gebiet	$I = [0, T]$ Zeitintervall
Daten:	$\kappa$	:	$\overline{\Omega} \rightarrow \mathbb{R}^{D \times D}$	Diffusionstensor	
	$q$	:	$\overline{\Omega} \rightarrow \mathbb{R}^{D \times D}$	Flussvektor	
	$r$	:	$\Omega \rightarrow \mathbb{R}$	Reaktionsrate	
	$f$	:	$\Omega \rightarrow \mathbb{R}$	Quellen und Senken	
	$u_D$	:	$\Gamma_D \times I \rightarrow \mathbb{R}$	Dirichlet Randwerte	
	$u_N$	:	$\Gamma_N \times I \rightarrow \mathbb{R}$	Neumann-Randbedingung	,wobei $\Gamma_N \cup \Gamma_R \cup \Gamma_D = \partial\Omega$
	$u_R$	:	$\Gamma_R \times I \rightarrow \mathbb{R}$	Robin-Randbedingung	
	$\alpha$	:	$\Gamma_R \rightarrow \mathbb{R}$	Randkapazität	

### Konstitutionsgleichung

$$\text{Fluss: } \sigma = -\kappa \nabla u$$

### Bilanzgleichung

$$\omega \subset \Omega \text{ (hinreichend regulär)} \quad \partial_t \int_{\omega} u \, dx = \underbrace{- \int_{\partial\omega} \sigma \cdot n_{\omega} \, da}_{\int_{\omega} \operatorname{div} \sigma \, dx} + \int_{\omega} f \, dx + \int_{\omega} ru \, dx$$

### Diffusions-Konvektions-Reaktionssystem:

$$\begin{aligned} \partial_t u = -\operatorname{div} \sigma + f + ru &\implies \partial_t u - \operatorname{div} \kappa \nabla u + \operatorname{div}(qu) - ru = f \\ &\partial_t u - \operatorname{div} \kappa \nabla u + q \nabla u + \underbrace{(\operatorname{div} q - r)u}_{\tilde{r}} = f \end{aligned}$$

Randwerte:

$$\begin{aligned} u &= u_D && \text{auf } \Gamma_D \times I \\ \sigma \cdot n &= g_N && \text{auf } \Gamma_N \times I \\ \sigma \cdot n + \alpha u &= g_R && \text{auf } \Gamma_R \times I \end{aligned}$$

**Spezialfälle:**

A) stationär

$$-\operatorname{div}(\kappa \nabla) + 1 \cdot \nabla u + \tilde{r}u = f \quad (\text{unabhängig von } t)$$

B)  $\kappa = I_D \quad q = 0, r = 0: -\Delta u = f$

$$x = I_D 1 = 0, r = 0 \quad -\Delta u = f$$

Poisson-Gleichung  
Wärmeleitung

$$\begin{aligned} &\underbrace{\partial_t u = \Delta u}_{\text{spezielle Lösung in } \mathbb{R}^D:} \quad u(x, t) = (4\pi t)^{-D/2} \int_{\mathbb{R}^D} \exp\left(-\frac{|x-y|^2}{4t}\right) u_0(y) dy \text{ mit } u(x, 0) = u_0(x) \end{aligned}$$

$\Omega = (0, L)^2$  Einheitsquadrat der Kantenlänge L

$$w_{n,k}(x, y) = \sin\left(x : n \frac{\pi}{L}\right) \sin\left(y : k \frac{\pi}{L}\right) \Rightarrow w_{n,k}(x, y) = - \underbrace{\left( \left(n \frac{\pi}{L}\right)^2 - \left(k \frac{\pi}{L}\right)^2 \right)}_{\lambda_{n,k}} w_{n,k}(x, y)$$

$$\begin{aligned} \Rightarrow -\Delta u &= f \text{ mit } f = \sum_{n,k \in \mathbb{N}} \alpha_{n,k} w_{n,k} \text{ mit } \alpha_{n,k} = \frac{(w_{n,k}, f)_0}{\|w_{n,k}\|_0} \\ u_{n,k}(x, y, t) &= \exp(-\lambda_{n,k} t) w_{n,k}(x, y) \Rightarrow \partial_t u_{n,k} = -\lambda_{n,k} u_{n,k} = \Delta u_{n,k} \end{aligned}$$

$$u = \sum \beta_{n,k} u_{n,k}, \quad \beta_{n,k} = \frac{(u_0, w_{n,k})_0}{\|w_{n,k}\|_0} \Rightarrow \partial_t u = \Delta u \text{ mit } u = 0 \text{ auf } \partial\Omega \text{ und } u(0) = u_0 \text{ in } \Omega$$

C) Allgemeine Diffusion: Richtung  $d_1, d_2$  der stärksten und schwächsten Diffusion  
GRAFIK2

$$\begin{aligned} |d_1| &= |d_2| = 1 && , d_1 \text{ senkrecht zu } d_2 \\ \text{in 3D} &&& d_3 = d_2 \times d_1 \end{aligned}$$

Diffusionskoeffizienten  $\kappa_k > 0$

$$\sigma = -\sum \kappa_k (\nabla u \cdot d_k) d_k = -x \nabla u \text{ mit } x = \sum \kappa_k d_k d_k^T \text{ symmetrisch positiv definit}$$

betrachte  $\varphi: \hat{\Omega} \rightarrow \Omega$  linear affine Transformation:  $\varphi(\hat{x}) = x_0 + F \hat{x}$  mit  $F \in \mathbb{R}^{D \times D}, \det F > 0, F = D_\varphi$

def.  $\hat{u}(\hat{x}) = u(x)$  mit  $x = \varphi(\hat{x})$

$$D_{\hat{x}} u(\varphi(\hat{x})) = D_x u(x) D_{\hat{x}} \varphi(\hat{x}) = D_x u(x) F \Rightarrow \underbrace{\nabla_{\hat{x}} u(\varphi(\hat{x}))}_{\nabla_{\hat{x}} \hat{u}(\hat{x})} = \left( D_{\hat{x}} u(\varphi(\hat{x})) \right) = F^T \nabla_x u(x)$$

def.  $\hat{\sigma}(\hat{x}) = \sigma(x) = \sigma(\varphi(\hat{x}))$

$$\Rightarrow D_{\hat{x}} \sigma(\varphi(\hat{x})) = D_x \sigma(x) F$$

$$\Rightarrow \operatorname{div}_x \sigma(x) = \operatorname{trace} D_x \sigma(x) = \operatorname{trace}(D_{\hat{x}} \hat{\sigma}(\hat{x}) F^{-1}) = \operatorname{trace}(F^{-1} D_{\hat{x}} \hat{\sigma}(\hat{x})) = \operatorname{trace}(d_{\hat{x}} F^{-1} \hat{\sigma}(\hat{x})) =$$



$$\begin{aligned} & \operatorname{div}(F^{-1})\hat{\sigma}(\hat{x}) \\ & \hat{\kappa}(\hat{x}) = \kappa(x) \Rightarrow \operatorname{div}_{\hat{x}} F^{-1}(\hat{\kappa} F^{-1} \nabla_{\hat{x}} \hat{u}(\hat{x})) = \operatorname{div}_x \kappa \nabla_x u(x) \\ & \text{wähle } FF^T = \kappa \Rightarrow \Delta_{\hat{x}} \hat{u}(\hat{x}) = \operatorname{div}_x \kappa \nabla_x u(x) \end{aligned}$$

D) Reaktion \*\*\*

E) Transport  $\partial_t u + \operatorname{div}(qu) = f$

spezielle Lösung:  $q \in \mathbb{R}^D$   $u(x, t) = a(|q|^2 t - q \cdot x) |q|^2$   $a \in C^1(\mathbb{R})$

$\Rightarrow \partial_t u = a'(|q|^2 t - q \cdot x) q$   $\operatorname{div}(qu) = q \cdot \nabla u = |q|^2 a'$

$\operatorname{div} q = 0$  Charakteristik  $\gamma: [0, T] \rightarrow \Omega$  mit  $\dot{\gamma}(t) = q(\gamma(t))$

$\rightarrow \partial_t u(\gamma(t), t) = \text{const}$

## 2 Einführung

**Ziel:** Analyse von Diskretisierungs- und Lösungsmethoden für PDEs partial differential equations.

### 2.1 PDE-Modelle

### 2.2 Diffusion (als Prototyp = Modellproblem)

$\Omega \in \mathbb{R}^D$  Partielle Differentialgleichungen (PDE) sind Gleichungen, die partielle Ableitungen einer unbekannten Funktion  $u$  in mehreren Variablen enthalten. Im Folgenden nehmen wir an, dass alle Größen hinreichend glatt sind.

#### Bezeichnungen

$u = u(x, t)$	<i>Zustandsgröße</i>
$x = \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_d \end{pmatrix} \in \Omega \subset \mathbb{R}^d$	<i>Ortsvariable</i>
$t \in [0, T]$	<i>Zeitvariable</i>
$\partial_t = \frac{\partial}{\partial t}$	<i>partielle Ableitung nach der Zeit</i>

Sei  $S(u)$  eine (Volumen-)Dichte oder Konzentration. Für jedes Kontroll-Volumen  $V \subset \Omega$  beschreibt

$$\partial_t \int_V S(u(x, t)) dx$$

die zeitliche Änderung von  $S(u)$  in  $V$ .

Die Änderung entsteht durch:

- 1) Quellen und Senken  $Q = Q(x, t, u(x, t))$ :  
Falls  $Q > 0$ , dann wird  $S(u)$  erzeugt.  
Falls  $Q < 0$ , dann wird  $S(u)$  verringert.
- 2) Fluss  $J(x, t)$  durch den Rand von  $\partial V$ :  
 $J = \begin{pmatrix} J_1 \\ \vdots \\ J_d \end{pmatrix}$ ,  $J_i$  Fluss-Dichte in  $x_i$ -Richtung.  
 $Jv = \sum_{i=1}^d v_i J_i$  Fluss über den Rand.  
(dabei ist  $v: \partial V \rightarrow \mathbb{R}^d$  mit  $|v| = 1$  die äußere Einheitsnormale)

Die (Massen-) Erhaltung ergibt, falls das Volumen  $V$  nicht von der Zeit abhängt

$$\int_V \partial_t S(u(x, t)) dx = - \int_{\partial V} J(x, t) v da + \int_V Q(x, t, u(x, t)) dx.$$

Sie sagt aus das weder Masse erzeugt noch erschaffen werden kann. Die zeitlichen Änderungen im Volumen  $V$  sind Folgen des (Masse-) Transports über den Rand  $\partial V$ .

### Satz von Gauß

Sei  $V \subset \mathbb{R}^d$  beschränkt mit stückweise glattem Rand. Sei  $F \in C^1(V, \mathbb{R}^d)$  ein Vektorfeld. Dann gilt

$$\int_V \operatorname{div} F(x) \, dx = \int_{\partial V} F(x) \nu(x) \, da,$$

mit der Divergenz  $\operatorname{div} F = \nabla \cdot F = \sum_{i=1}^d \partial_i F_i$ ,  $\nabla = \begin{pmatrix} \partial_1 \\ \vdots \\ \partial_d \end{pmatrix}$  und  $\partial_i = \frac{\partial}{\partial x_i}$ .

### Anwendung

Es gilt also für alle  $V \subset \Omega$

$$\int_V \partial_t S(u(x, t)) + \operatorname{div} J(x, t) - Q(x, t, u(x, t)) \, dx = 0.$$

Da  $V \subset \Omega$  beliebig folgt daraus die Erhaltungsgleichung in differentieller Form

$$\partial_t S(u(x, t)) + \operatorname{div} J(x, t) - Q(x, t, u(x, t)) = 0, \quad \forall x \in \Omega, \, t \in [0, T].$$

Die Erhaltungsgleichung muss durch (phenomenologische) *konstitutive Gesetze* geschlossen werden, die eine Beziehung zwischen den Zustandsgrößen  $u$  und den Fluss  $J$  postulieren.

### Beispiel

$\Omega$  sei mit einer Flüssigkeit gefüllt und  $S(u) = u$  die Konzentration einer gelösten Substanz.  
Szenario I

Flüssigkeit ruht, die Konzentration strebt ins Gleichgewicht von hoher zu niedriger Konzentration:

$$J^{(1)} = -K \nabla u, \quad K > 0 \quad \left[ \frac{m^2}{s} \right] \quad (\text{Materialparameter})$$

und wir erhalten die Diffusionsgleichung

$$\partial_t u - \nabla \cdot (K \nabla u) = Q.$$

### Szenario II

Flüssigkeit bewegt sich mit der Geschwindigkeit  $c: \Omega \rightarrow \mathbb{R}^d$ :

$$J^{(2)} = cu$$

sodass die Transportgleichung gegeben ist durch

$$\partial_t u + \nabla \cdot (cu) = 0.$$

Zusammen ergibt sich die Konvektions-Diffusions-Gleichung

$$\partial_t u - \nabla \cdot (K \nabla u - cu) = Q.$$

## Entdimensionalisierung

Fixiere Referenzgrößen  $x_{ref}$ ,  $u_{ref}$  und  $t_{ref}$ . Reskaliere dazu

$$x \mapsto \frac{x_i}{x_{ref}}, \quad u \mapsto \frac{u_i}{u_{ref}}, \quad t \mapsto \frac{t_i}{t_{ref}}.$$

Somit erhält man keine Einheiten. Die typische Größenordnung ist 1.

## 2.3 Randbedingungen

Betrachte  $\partial_t S(x, u(x, t)) + \nabla \cdot (C(x, u(x, t)) - K(x, \nabla u(x, t))) = Q(x, t, u(x, t))$  im Raum-Zeit-Zylinder  $(x, t) \in \Omega \times (0, T) \subset \mathbb{R}^d \times \mathbb{R}$ .

Im Wesentlichen unterscheiden wir drei Randbedingungen, wozu wir den Rand in drei disjunkte Teile unterteilen:  $\partial\Omega = \Gamma_1 \cup \Gamma_2 \cup \Gamma_3$ :

1) Fluss Randbedingungen auf  $\Gamma_1$  (Neumann RB)

$$-(C(u) - K(\nabla u)) \cdot \nu = g_1$$

2) Gemischte Randbedingungen auf  $\Gamma_2$  (Robin RB)

$$-(C(u) - K(\nabla u)) \cdot \nu + \alpha u = g_2$$

3) Dirichlet Randbedingungen auf  $\Gamma_3$  (wesentliche RB)

$$u = g_3$$

Es liegen homogene Randbedingungen vor falls  $g_i = 0$ .

### Spezialfälle

Wir erhalten:

1) den Sturm Liouville Operator für  $d = 1$  im Raum.

2) eine stationäre Gleichung, falls keine Zeitableitung vorliegt.

3) die lineare Gleichung  $Q(x, u) = f(x) - \underbrace{q(x)u(x)}_{\text{Reaktionsterm}}$  mit  $C(u) = cu$ ,  $K(\nabla u) = K\nabla u$ .

4) die Poisson-Gleichung  $-\Delta u = f$  für  $c \equiv 0$ ,  $K \equiv 1$ ,  $q \equiv 0$ .

5) die Laplace-Gleichung  $-\Delta u = 0$  für  $f \equiv 0$ .

## 2.4 Modell-Problem (die Poisson-Gleichung)

### (2.1) Definition

Sei  $\Omega \subset \mathbb{R}^d$  beschränkt mit stückweise glattem Rand. Sei  $f \in C(\Omega)$ ,  $g \in C(\partial\Omega)$ . Dann heißt  $u \in C^2(\Omega) \cap C(\overline{\Omega})$  mit

$$\begin{aligned} -\Delta u(x) &= f(x), & x \in \Omega & \quad (\text{in } \Omega) \\ u(x) &= g(x), & x \in \partial\Omega & \quad (\text{auf } \partial\Omega) \end{aligned}$$

eine (klassische) Lösung der Poisson-Gleichung (mit Dirichlet Randbedingungen).

### Beispiel

Mit Hilfe von Fundamentallösungen kann eine Lösung der Poisson-Gleichung konstruiert werden. Hierbei ist  $K(x, y) = \Psi(|x - y|)$  die Fundamentallösung, wobei

$$\Psi(r) = \begin{cases} \frac{r^{2-d}}{(2-d)\omega_d}, & d > 2 \\ \frac{\log r}{2\pi}, & d = 2 \end{cases},$$

und  $\omega_d$  das Volumen der Einheitssphäre ist. Sie erfüllt  $\Delta_x K(x, y) = 0$  für  $x \neq y$ . Falls  $u \in C^2(\overline{\Omega})$  ist, dann ist eine Lösung der Poisson-Gleichung gegeben durch

$$u(y) = \int_{\partial\Omega} (\partial_\nu K(x, y)g(x) - K(x, y)h(x)) \, da_x - \int_{\Omega} K(x, y)f(x) \, dx$$

mit der äußeren Einheitsnormalen  $\nu: \partial\Omega \rightarrow \mathbb{R}^d$ ,  $|\nu| = 1$ ,  $h(x) = \partial_\nu u(x)$ , wobei die Normalenableitung  $\partial_\nu = \nu \cdot \nabla = \sum_{i=1}^d \nu_i \partial_i$  und  $g(x) = u(x)$ ,  $f(x) = -\Delta u(x)$ .

**Problem:** Wenn  $f$  und  $g$  vorgegeben sind, muss  $h$  bestimmt werden!

### Bezeichnungen

Eine Funktion  $u \in C^2(\Omega)$  heißt harmonisch, falls  $\Delta u = 0$  in  $\Omega$  gilt.

### Bemerkung

Wenn  $\Delta u \leq 0$ , dann ist  $u(y) \leq \frac{1}{R^d \omega_d} \int_{|x-y|=R} u(x) \, da$ .

### (2.2) Maximumsprinzip

Sei  $u \in C^2(\Omega) \cap C(\overline{\Omega})$  mit  $\Delta u \leq 0$ . Dann gilt

$$\sup_{x \in \Omega} u(x) = \sup_{x \in \partial\Omega} u(x).$$

*Beweis.* Ohne Beweis! □

### (2.3) Folgerung

Das Poisson-Problem (2.1) hat höchstens eine Lösung.

*Beweis.* Seien  $u$  und  $v$  Lösungen von

$$\begin{aligned} -\Delta u(x) &= f(x), & -\Delta v(x) &= f(x) & \text{in } \Omega \\ u(x) &= g(x), & v(x) &= g(x) & \text{auf } \partial\Omega. \end{aligned}$$

Dann löst  $w(x) = u(x) - v(x)$

$$\begin{aligned} -\Delta w(x) &= 0 && \text{in } \Omega \\ w(x) &= 0 && \text{auf } \partial\Omega. \end{aligned}$$

Mit (2.2) folgt

$$\sup_{x \in \Omega} w(x) = \sup_{x \in \partial\Omega} w(x) = 0 \quad \text{und} \quad \inf_{x \in \Omega} w(x) = 0.$$

Also  $w(x) \equiv 0$ . □

#### (2.4) Definition

$\Omega \subset \mathbb{R}^d$  ist ein Lipschitz-Gebiet, wenn

- a)  $\Omega$  ist offen in  $\mathbb{R}^d$ ,
- b)  $\Omega$  ist zusammenhängend,
- c)  $\partial\Omega$  ist eine Lipschitz-Mannigfaltigkeit, d.h. für alle  $y \in \partial\Omega$  existiert eine lokale Karte  $\Psi \in C^{0,1}(V, \mathbb{R}^d)$  mit  $V \subset \mathbb{R}^{d-1}$  offen und  $y \in \Psi(V) \subset \partial\Omega$ .

#### Beispiel

Das Einheitsquadrat  $\Omega = (0,1)^2$  ist ein Lipschitz-Gebiet. Offensichtlich ist  $\Omega$  offen und zusammenhängend. Für die Lipschitz-Mannigfaltigkeit  $\partial\Omega$  ist beispielsweise für  $y = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}$  die Abbildung  $\Psi(t) = \begin{pmatrix} t+|t| \\ -t+|t| \end{pmatrix}$  für  $t \in V = (-\frac{1}{2}, \frac{1}{2})$  eine lokale Karte mit  $y = \Psi(0)$ .

#### (2.5) Satz

In einem Lipschitz-Gebiet hat das Poisson-Problem (2.1) mit Dirichlet Randbedingungen eine eindeutige Lösung.

*Beweis.* Ohne Beweis! □