A Prova Direta e Sua Variações

Semana 02 - Leitura Introdutória

Notas de Aula de Matemática Discreta

Samy Sá

Universidade Federal do Ceará
Campus de Quixadá
Quixadá, Brasil
samy@ufc.br

Requisitos: Teoria dos Conjuntos (Básico), Noções de Lógica Proposicional
Texto produzido em 14/02/2014.

1 Demonstração de Condicionais

O tipo mais comum de enunciados de teoremas envolve uma generalização sobre um condicional, ou seja, enunciados que podem ser reescritos na forma

$$(\forall x)[P(x) \to Q(x)].$$

Se faz então essencial compreender a natureza dos condicionais e as formas que temos de demonstrá-los verdadeiros. Relembre a tabela verdade do condicional.

p	q	$p \to q$
F	F	V
F	V	V
V	F	F
V	V	V

Vemos que um condicional é falso somente quando p for verdadeiro q for falso. Demonstrar que o condicional é verdadeiro envolve, portanto, demonstrar que esse condicional não pode ser falsificado. Em outras palavras, envolve mostrar que o caso em que p é verdadeiro q é falso é *impossível*. De fato, essa constatação é a base para as principais técnicas de prova que estudaremos.

1.1 Prova Direta

A prova direta é talvez a técnica mais utilizada, pois segue diretamente a definição do condicional. Por causa disso, os argumentos de prova direta são com frequência mais claros e fáceis de reproduzir. Dado um condicional $p \to q$ que desejemos provar, a técnica envolve os seguintes passos:

1. Assuma que p é **VERDADE**.
2. Desenvolva passos visando concluir q como consequência.

3. Conclua que se p é verdade, então q também é, ou seja, que o condicional original é **VERDADE**.

Exemplo 1 *Produza uma prova direta de que "Se $n^2 + 3$ é um inteiro par, então n é um inteiro ímpar."*

Solução*: Observe que o enunciado pode ser reescrito: $(\forall n)[P(n) \rightarrow Q(n)]$, onde $P(n)$ significa "n^2+3 é um inteiro par" e $Q(n)$ significa "n é um inteiro ímpar". Para fazer uma demonstração direta, devemos assumir que $n^2 + 3$ é um inteiro par e buscar uma forma de concluir n é um inteiro ímpar.*

Suponha que $n^2 + 3$ é um inteiro par. Pela definição de números pares, existe um inteiro k tal que $n^2 + 3 = 2k$. A partir disso, temos que $n^2 = 2k - 3 = 2k - 4 + 1 = 2(k - 2) + 1$, ou seja, n^2 é um número ímpar. Anteriormente, havíamos mostrado que "Se n é inteiro, então n é ímpar se e somente se n^2 é ímpar." Podemos utilizar esse teorema como parte da nossa prova atual para concluir a demonstração: Como n^2 é ímpar, n também é ímpar. Concluímos, portanto, que se $n^2 + 3$ é um inteiro par, então n é um inteiro ímpar. $\blacksquare$

Essa estratégia segue diretamente da tabela de verdade do condicional, pois se o tal condicional for falso, teríamos evidências de que partindo de p verdadeiro, q poderia ser falso. Se conseguirmos concluir que q é verdadeiro a partir de p, então o condicional precisa estar em um dos casos da tabela verdade que o faz verdadeiro.

1.2 Prova por Contraposição

O método de prova por contraposição são consiste apenas de uma variação da prova direta. Dependendo do enunciado e das ferramentas que tivermos disponíveis (tais como teoremas já provados e contexto), um argumento por contraposição pode ser mais simples de compreender. Cabe avaliar em cada caso qual caminho produziria a sequência de passos mais simples e clara.

Essa técnica baseia-se na equivalência lógica:

$$p \rightarrow q \equiv \neg q \rightarrow \neg p,$$

a qual sugere que provar o condicional $p \rightarrow q$ é precisamente o mesmo que provar sua contrapositiva $\neg q \rightarrow \neg p$. Observe ainda que, de maneira similar, $\neg q \rightarrow \neg p \equiv \neg\neg p \rightarrow \neg\neg q$. Veja que a equivalência é correta também nesse caso, e que as ocorrência de dupla negação nesta última fórmula podem ser descartadas pela aplicação da equivalência lógica correspondente.

Em suma, realizar uma prova por contraposição consiste essencialmente em produzir uma prova direta para a afirmação contrapositiva do que queremos provar.

Dado um condicional $p \rightarrow q$ que desejemos provar, a técnica de prova por contraposição, portanto, envolve os seguintes passos:

1. Assuma que q é **FALSO**, ou, alternativamente, que $\neg q$ é **VERDADE**.
2. Desenvolva passos visando concluir $\neg p$ como consequência, ou seja, que p também é **FALSO**.
3. Conclua que se p é verdade, então q também é, ou seja, que $p \rightarrow q$ é **VERDADE**.

Exemplo 2 *Produza uma prova por contraposição de que "Se $n^2 + 3$ é um inteiro par, então n é um inteiro ímpar."*

Solução: *Sabemos que o enunciado pode ser reescrito: $(\forall n)[P(n) \rightarrow Q(n)]$, onde $P(n)$ significa "$n^2 + 3$ é um inteiro par" e $Q(n)$ significa "n é um inteiro ímpar". A contrapositiva do enunciado seria $(\forall n)[\neg Q(n) \rightarrow \neg P(n)]$ e, portanto, para fazer uma demonstração por contraposição, devemos assumir que n não é um inteiro ímpar e buscar uma forma de concluir $n^2 + 3$ não é um inteiro par.*

Suponha que n não é um inteiro ímpar (então n é par). Logo, existe um inteiro k tal que $n = 2k$. Elevando os dois lados da equação ao quadrado, temos $n^2 = (2k)^2 = 4k^2$. Desejamos obter uma expressão para $n^2 + 3$, então nos resta somar 3 aos dois lados da equação. Obtemos $n^2 + 3 = 4k^2 + 3 = 4k^2 + 2 + 1 = 2(2k^2 + 1) + 1$, um número ímpar. Concluímos que se n é par, então $n^2 + 3$ será um número ímpar. Pela contrapositiva, temos provado o enunciado original. ■

1.3 Prova por Contradição (ou Redução ao Absurdo)

Às vezes fica difícil construir um argumento para $p \rightarrow q$ que siga diretamente de p para q ou pelo caminho da contrapositiva. Nesses casos, comumente utilizamos um artifício baseado na tabela verdade do condicional: Só existe um único caso em que um condicional comum poderia falhar, o caso quando p é verdadeiro e q é falso. A técnica de prova por contradição envolve assumir que esse é o caso, ou seja, que a proposição que queremos provar na verdade é falsa. A partir daí, busca-se encontrar uma consequência que é matemática absurda, que deveria ser impossível. Lembre-se que na lógica uma contradição é uma afirmação completamente falta, que não nenhuma maneira de ser feita verdadeira. Os exemplos mais comuns de contradição são fórmulas do tipo $p \wedge \neg p$, e isso com frequência se mostrará nas demonstrações por redução ao absurdo (RAA) como essa técnica também é conhecida.

Dado um condicional $p \rightarrow q$ que desejemos provar, a técnica de prova por contradição envolve os seguintes passos:

1. Suponha que o condicional $p \rightarrow q$ é **FALSO**.
2. Logo, p deve ser verdade e q deve ser falso.
3. Mostre uma contradição que surge como consequência.
4. Conclua que que a suposição original estava errada, ou seja, o condicional original é **VERDADEIRO**.

Observe que uma prova por contradiça õ é essencialemnte uma outra variação da prova direta. A diferença principal está na suposição do começo e na conclusão que buscamos com o desenvolvimento da prova, uma contradição nesse caso.

Exemplo 3 *Produza uma prova por contradição de que "Se $n^2 + 3$ é um inteiro par, então n é um inteiro ímpar."*

Solução: *Sabemos que o enunciado pode ser reescrito: $(\forall n)[P(n) \rightarrow Q(n)]$, onde $P(n)$ significa "$n^2 + 3$ é um inteiro par" e $Q(n)$ significa "n é um inteiro ímpar". Para fazer uma demonstração por contradição, devemos começar assumindo que $n^2 + 3$ é um inteiro par e que n não é um inteiro ímpar (é par), para então buscar uma conclusão contraditória.*

Suponha que $n^2 + 3$ *é um inteiro par. Suponha que* n *também é par. Logo, existe um inteiro* k *tal que* $n = 2k$. *Elevando os dois lados da equação ao quadrado, temos* $n^2 = (2k)^2 = 4k^2$. *Em seguida, temos* $n^2 + 3 = 4k^2 + 3 = 4k^2 + 2 + 1 = 2(2k^2 + 1) + 1$, *um número ímpar. Mas pela nossa hipótese inicial,* $n^2 + 3$ *é um inteiro par, uma contradição! Logo, a hipótese de que* n *é par deve estar errada e concluímos que se* $n^2 + 3$ *for par, então* n *será ímpar.* ■

1.4 Comparativo

A tabela a seguir resume os três métodos para provar um condicional qualquer $p \to q$.

	Prova Direta	Prova por Contraposição	Prova por Contradição
Assuma...	p	$\neg q$	$p \land \neg q$
Desenvolva	$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$
Conclua...	q	$\neg p$	$\bot$
Resultado	$p \to q$	$p \to q$	$p \to q$

Os três métodos, portanto, podem ser utilizados para provar condicionais. Apesar da equivalência entre os métodos, cada um tem pontos fortes e é mais ou menos conveniente em situações distintas. Domine os três métodos para garantir uma boa capacidade de demonstrar teoremas.

2 Exercícios

Exercício 1: Prove que o produto de dois números ímpares é ímpar utilizando qualquer uma das técnicas acima.

Exercício 2: Mostre que se $x + y \geq 2$, onde x e y são números reais, então $x \geq 1$ ou $y \geq 1$.

Exercício 3: Busque demonstrar os teoremas acima pelas demais técnicas. Você consegue fazer as três demonstrações em cada caso?