Matemática Discreta
Lista de Exercícios 02

Técnicas de Demonstração: por exaustão/casos, existência, unicidade, contra-exemplos

1. Demonstre que $n^2 + 1 \geq 2^n$ quando n é um inteiro positivo com $1 \leq n \leq 4$.
2. Demonstre que se x e y são números reais, então max(x, y) + min(x, y) = $x + y$. [*Dica*: Use uma demonstração por casos, com os dois casos correspondentes a $x \geq y$ e $x < y$, respectivamente.]
3. Demonstre a **desigualdade triangular**, que afirma que se x e y são números reais, então $|x| + |y| \geq |x + y|$ (em que $|x|$ representa o valor absoluto de x, que é igual a x se $x \geq 0$ e igual a $-x$ se $x < 0$).
4. Demonstre que há 100 números inteiros positivos consecutivos que não são raízes quadradas perfeitas. Sua desmonstração é construtiva ou não construtiva?
5. Demonstre que há um par de números inteiros consecutivos, tal que um desses números inteiros é um quadrado perfeito e o outro, um cubo perfeito.
6. Demonstre ou contrarie que há um número racional x e um número irracional y, tal que x^y é irracional.
7. Mostre que cada uma destas proposições pode ser usada para expressar o fato de que há um único elemento x, tal que $P(x)$ seja verdadeira.

   (a) $\exists x \forall y (P(y) \leftrightarrow x = y)$

   (b) $\exists x P(x) \wedge \forall x \forall y (P(x) \wedge P(y) \rightarrow x = y)$

   (c) $\exists x (P(x) \wedge \forall y (P(y) \rightarrow x = y))$

8. Suponha que a e b sejam números inteiros ímpares, com $a \neq b$. Mostre que há um único número inteiro c, tal que $|a - c| = |b - c|$.
9. Mostre que se n é um número inteiro ímpar, então há um único número inteiro k, tal que n é a soma de $k - 2$ e $k + 3$
10. Demonstre que dado um número real x, existem números únicos n e ϵ, tal que $x = n - \epsilon$, n é um número inteiro e $0 \leq \epsilon < 1$.
11. A **média harmônica** de dois números reais x e y é igual a $2xy/(x + y)$. A **média geométrica** de dois números reais x e y é igual a $\sqrt{xy}$. Para qualquer par de reais positivos distintos x e y, uma destas médias é sempre maior que a outra? Formule uma conjectura e demonstre-a.
12. Escreva os números $1, 2, \ldots, 2n$ em uma lousa, onde n é um número inteiro ímpar. Escolha dois números quaisquer, j e k, escreva $|j - k|$ na lousa e apague j e k. Continue este processo até que apenas um número inteiro esteja escrito na lousa. Demonstre que este número inteiro que restou deve ser ímpar.
13. Fomule uma conjectura sobre os dígitos decimais que aparecem como dígito final da quarta potência de um número inteiro. Demonstre sua conjectura, usando uma demonstração por casos.
14. Demonstre que não há um número inteiro positivo n tal que $n^2 + n^3 = 100$.
15. Comprove que não existem soluções para os números inteiros positivos x e y na equação $x^4 + y^4 = 625$.
16. Demonstre que se $n = abc$, em que a, b e c são números inteiros positivos, então $a \leq \sqrt[3]{n}$, $b \leq \sqrt[3]{n}$ ou $c \leq \sqrt[3]{n}$.
17. Mostre que se x é racional e y é irracional, então $x + y$ é irracional.
18. Mostre que se x é racional não nulo e y é irracional, então xy é irracional.
19. Demonstre que entre dois números racionais distintos há um número irracional.
20. Demonstre ou contrarie que você pode usar dominós para ladrilhar o tabuleiro de xadrez padrão com os dois cantos adjacentes removidos (ou seja, os cantos que não são opostos).
21. Demonstre que você pode usar dominós para ladrilhar um tabuleiro de xadrez retangular com um número par de quadrados.
22. Use uma demonstração por exaustão para mostrar que não existe um ladrilhamento que use dominós de um tabuleiro de xadrez 4 por 4 com lados opostos removidos. [Dica: Primeiro mostre que você pode assumir que os quadrados à esquerda superior e à direita inferior foram removidos. Numere os quadrados do tabuleiro original de 1 a 16, começando na primeira fila, da esquerda para a direita, então começando na esquerda da segunda fila e indo para a direita, e assim por diante. Remova os quadrados 1 e 16. Para começar a demonstração, note que o quadrado 2 está coberto pelo dominó na horizontal, que cobre os quadrados 2 e 3, ou verticalmente, que cobre os quadrados 2 e 6. Considere cada um desses casos separadamente e trabalhe com todos os subcasos que aparecem.]
23. Mostre que existem dois quadrados brancos e dois pretos de um tabuleiro de xadrez padrão, que quando removidos, torna impossível ladrilhar os quadrados restantes com dominós.

Respostas:

1. $1^2 + 1 = 2 \geq 2 = 2^1$; $2^2 + 1 + 5 \geq 4 = 2^2$; $3^2 + 1 = 10 \geq 8 = 2^3$; $4^2 + 1 = 17 \geq 16 = 2^4$.
2. Se $x < y$, então max(x,y) + min(x,y) = $y + x = x + y$. Se $x \geq y$, então max(x,y) + min(x,y) = $x + y$. Como estes são os dois únicos casos, a igualdade é sempre válida.
3. Existem 4 casos. *Caso 1*: $x \geq 0$ e $y \geq 0$. Então, $|x| + |y| = x + y = |x + y|$. *Caso 2*: $x < 0$ e $y < 0$. Então, $|x| + |y| = -x + (-y) = -(x + y) = |x + y|$, pois $x + y < 0$. *Caso 3*: $x \geq 0$ e $y < 0$. Então, $|x| + |y| = x + (-y)$. Se $x \geq -y$, então $|x + y| = x + y$. Mas, como $y < 0$, $-y > y$, de modo que $|x| + |y| = x + (-y) > x + y = |x + y|$. Se $x < -y$, então $|x + y| = -(x + y) = -x + (-y)$. Mas, como $x \geq 0$, $x \geq -x$, de modo que $|x| + |y| = x + (-y) \geq -x + (-y) = |x + y|$. *Caso 4*: $x < 0$ e $y \geq 0$. Idêntico ao Caso 3, com os papéis de x e y trocados.
4. 10.001, 10.002, ..., 10.100 não são quadrados perfeitos, pois $100^2 = 10.000$ e $101^2 = 10.201$; construtivo.
5. $8 = 2^3$ e $9 = 3^2$
6. Sejam $x = 2$ e $y = \sqrt{2}$. Se $x^y = 2^{\sqrt{2}}$ for irracional, teremos acabado. Se não, então sejam $x = 2^{\sqrt{2}}$ e $y = \sqrt{2}/4$. Então $x^y = (2^{\sqrt{2}})^{\sqrt{2}/4} = 2^{1/2} = \sqrt{2}$.
7. (a) Esta afirmação garante a existência de x com determinada propriedade. Se firzermos $x = y$, então vemos que $P(x)$ é verdadeira. Se y for qualquer coisa diferente de x, então $P(x)$ não é verdadeira. Logo, x é o único elemento que torna P verdadeira.

   (b) A primeira cláusula aqui diz que existe um elemento que torna P verdadeira. A segunda cláusula diz que sempre que dois elementos tornarem P verdadeira, eles devem, na realidade, ser o mesmo elemento. Juntos, elas dizem que P é satisfeita por exatamente um elemento.

   (c) Esta afirmação garante a existência de um x que torna P verdadeira e tem a propriedade adicional que sempre que encontremos um elemento que torna P verdadeira, este elemento é x. Em outras palavras, x é o único elemento que torna P verdadeira.
8. A equação $|a - c| = |b - c|$ é equivalente à disjunção de duas equações: $a - c = b - c$ ou $a - c = -b + c$. A primeira destas é equivalente a $a = b$, o que contraria a hipótese feita neste problema, de modo que a equação original é equivalente a $a - c = -b + c$. Somando $b + c$ a ambos os lados e dividindo por 2, vemos que esta equação é equivalente a $c = (a + b)/2$. Logo, existe uma única solução. Além disso, este c é um inteiro, pois a soma de inteiros ímpares a e b é par.
9. Nos foi pedido que isolássemos k em $n = (k-2)+(k+3)$. Usando as regras usuais, reversíveis, da álgebra, vemos que esta equação é equivalente a $k = (n - 1)/2$. Em outras palavras, este é o único valor de k que torna nossa equação verdadeira. Como n é ímpar, $n - 1$ é par, de modo que k é um inteiro.
10. Se x for ele próprio um inteiro, então podemos tomar $n = x$ e $\epsilon = 0$. Nenhuma outra solução é possível neste caso, pois, se o inteiro n for maior que x, então n é pelo menos $x + 1$, o que toraria $\epsilon \geq 1$. Se x não é inteiro, então, arredonde-o para $\lceil x \rceil$, e chame este inteiro de n. Seja $\epsilon = n - x$. Claramente, $0 \leq \epsilon < 1$; este é o único ϵ que funcionará com este n, e n não pode ser maior, pois ϵ é restrito a ser menor que 1.
11. A média geométrica de dois números reais positivos distintos x e y é sempre maior que a média harmônica. Sabemos que $x^2 - 2xy + y^2 = (x - y)^2 > 0$. Somando os dois lados com $4xy$, obtemos $x^2 + 2xy + y^2 = (x + y)^2 > 4xy$. Multiplicando os dois lados por $xy/(x + y)^2$, obtemos $xy > (2xy)^2/(x + y)^2$ (pois x e y são positivos). Finalmente, tirando a raiz quadrada dos dois lados, concluímos que $\sqrt{xy} > 2xy/(x + y)$. [Estes passos podem ser obtidos fazendo a demonstração de tráz para frente.]
12. Removendo um número par e um número ímpar, ganhamos um número ímpar (ou seja, esta operação diminui em um a quantidade de números pares). Removendo dois pares, ou dois ímpares, ganhamos um número par (ou seja, perdemos um número par, ou perdemos dois ímpares para ganhar um par). Portanto, após cada operação perdemos dois ímpares ou nenhum ímpar. Como a quantidade inicial de números ímpares é ímpar, em algum momento teremos apenas um número ímpar (e possivelmente outros números pares). Como a operação entre um par e um ímpar apenas diminui a quantidade de números pares, restará no final apenas um número ímpar.
13. Sem perda de generalidade, podemos supor que n é não negativo, pois a quarta potência de um inteiro e a quarta potência de seu oposto são a mesma coisa. Podemos escrever um inteiro positivo n como $10a + b$, com a e b inteiros não negativos, e $0 \leq b \leq 9$. Neste caso, o b representa o último dígito de n. Logo, $n^4 = (10a + b)^4 = 10(1000a^4 + 400a^3b + 60a^2b^2 + 4ab^3) + b^4$. Concluímos que o último dígito de n^4 deve sair de b^4. Testando todos os casos para b (inteiros entre 0 e 9), obtemos que o último dígito de n^4 será sempre 0, 1, 5 ou 6.
14. Como $n^3 > 100$ para todo $n > 4$, precisamos apenas observar que $n = 1$, $n = 2$, $n = 3$ e $n = 4$ não satisfazem $n^2 + n^3 = 100$.
15. Como $5^4 = 625$, ambos, x e y, devem ser menores que 5 (pois ambos são não nulos). Basta testar os valores 1, 16, 81 e 256 para x^2 e y^2 para verificar que nenhuma combinação produzirá $x^2 + y^2 = 625$.
16. Por contrapositiva: mostrar que se $a > \sqrt[3]{n}$, $b > \sqrt[3]{n}$ e $c > \sqrt[3]{n}$, então $n \neq abc$. Por hipótese, $abc > \sqrt[3]{n}\sqrt[3]{n}\sqrt[3]{n} = n$. Como $abc > n$, temos que $n \neq abc$.
17. Por absurdo, assuma que x é racional, y é irracional, e $x + y$ é racional. Como x é racional, então existem inteiros p e q, com $q \neq 0$, tal que $x = p/q$. Como $x + y$ é racional, então existem inteiros r e s, com $s \neq 0$, tal que $x + y = r/s$. Portanto, $x + y = r/s = p/q + y$, o que permite concluir que $y = (rq - ps)/sq$ é racional, pois $rq - ps$ e sq são inteiros, e $sq \neq 0$ (absurdo, pois por hipótese y é irracional).
18. Por absurdo, assuma que x é racional, y é irracional, e xy é racional. Como x é racional, então existem inteiros p e q, com $q \neq 0$, tal que $x = p/q$. Como x é não nulo, podemos concluir que p é não nulo. Como xy é racional, então existem inteiros r e s, com $s \neq 0$, tal que $xy = r/s$. Portanto, $xy = r/s = py/q$, o que permite concluir que $y = rq/sp$ é racional, pois rq e sp são inteiros, e $sp \neq 0$ (absurdo, pois por hipótese y é irracional).
19. Sejam a e b números racionais arbitrários tal que $a < b$. Como $0 < \sqrt{2} < 2$, temos que $0 < \sqrt{2}/2 < 1$. Portanto, $a + (b - a)\sqrt{2}/2$ é um número entre a e b. Como a soma e o produto envolvendo um racional não nulo e um irracional produz um número irracional (exercícios anteriores), concluímos que $a + (b - a)\sqrt{2}/2$ é irracional.
20. Sem perda de generalidade, suponha que os cantos superiores direito e esquerdo do tabuleiro sejam removidos. Coloque três dominós horizontalmente para encher a parte restante da primeira linha e encha cada uma das outras sete linhas com quatro dominós horizontais.

21. Como existe um número par de quadrados no total, ou há um número par de quadrados em cada linha ou existe um número par de quadrados em cada coluna. No primeiro caso, ladrilhe o tabuleiro de maneira óbvia, colocando dominós horizontalmente, e no último caso, ladrilhe o tabuleiro de maneira óbvia, colocando dominós verticalmente.
22. Podemos girar o tabuleiro se necessário para fazer os quadrados removidos serem o 1 e o 16. O quadrado 2 deve ser coberto por um dominó. Se aquele dominó for colocado para cobrir os quadrados 2 e 6, então a seguinte colocação de dominós é forçada em sequência: 5-9, 13-14, 10-11, em cujo ponto não há maneira de cobrir o quadrado 15. Caso contrário, o quadrado 2 deve ser coberto por um dominó colocado em 2-3. Então, a seguinte colocação de dominós é forçada: 4-8, 11-12, 6-7, 5-9, 10-14, e novamente não há maneira de cobrir o quadrado 15.
23. Remova dois quadrados pretos adjacentes a um canto branco, e remova dois quadrados brancos distintos dos cantos. Então, nenhum dominó pode cobrir aquele canto branco.