# Indução Forte e Boa Ordenação

## Matemática Discreta

Prof. MSc. Samy Sá

Universidade Federal do Ceará
Campus de Quixadá

9 de abril de 2014

Universidade Federal do Ceará
Computer Science Department
Samy Sá (samy@ufc.br)

# Outline

Universidade Federal do Ceará
Computer Science Department
Samy Sá (samy@ufc.br)

# Outline

Introdução

Indução Forte

Princípio da Boa Ordenação

Exercícios

Universidade Federal do Ceará
Computer Science Department
Samy Sá (samy@ufc.br)

# Introdução

Em algumas situações não é possível utilizar indução matemática, pois as instâncias do problema não dependem diretemanente do caso do seu antecessor.

# Introdução

Em algumas situações não é possível utilizar indução matemática, pois as instâncias do problema não dependem diretemanente do caso do seu antecessor.

- O passo base da Indução Forte é identico ao da Indução Matemática

Universidade Federal do Ceará
Computer Science Department
Samy Sá (samy@ufc.br)

# Introdução

Em algumas situações não é possível utilizar indução matemática, pois as instâncias do problema não dependem diretemanente do caso do seu antecessor.

- O passo base da Indução Forte é identico ao da Indução Matemática
- A hipótese é bem diferente: Invés de "suponha $P(k)$ para algum $k$ inteiro", temos "suponha $P(j)$ para todo $j$ menor ou igual a algum $k$ inteiro".

Universidade Federal do Ceará
Computer Science Department
Samy Sá (samy@ufc.br)

# Introdução

Em algumas situações não é possível utilizar indução matemática, pois as instâncias do problema não dependem diretemanente do caso do seu antecessor.

- O passo base da Indução Forte é identico ao da Indução Matemática
- A hipótese é bem diferente: Invés de "suponha $P(k)$ para algum $k$ inteiro", temos "suponha $P(j)$ para todo $j$ menor ou igual a algum $k$ inteiro".
- Em ambos os casos, mostramos que $P(k+1)$ é consequência.

Universidade Federal do Ceará
Computer Science Department
Samy Sá (samy@ufc.br)

# Outline

Universidade Federal do Ceará
Computer Science Department
Samy Sá (samy@ufc.br)

# Indução Forte

Provas usando indução forte têm dois passos...

- Primeiro, mostramos que a propriedade $P(k)$ é válida para $k = 1$.

Universidade Federal do Ceará
Computer Science Department
Samy Sá (samy@ufc.br)

# Indução Forte

Provas usando indução forte têm dois passos...

- Primeiro, mostramos que a propriedade $P(k)$ é válida para $k = 1$.
- Em seguida, mostramos que $(\forall k)(\forall j)((j \leq k \wedge P(j)) \rightarrow P(k+1))$.

Universidade Federal do Ceará
Computer Science Department
Samy Sá (samy@ufc.br)

# Indução Forte

Provas usando indução forte têm dois passos...

- Primeiro, mostramos que a propriedade $P(k)$ é válida para $k = 1$.
- Em seguida, mostramos que $(\forall k)(\forall j)((j \leq k \wedge P(j)) \rightarrow P(k+1))$.

**Constatação:**

*Se valem $P(1)$ e $(\forall k)(\forall j)((j \leq k \wedge P(j)) \rightarrow P(k+1))$, então a propriedade deve ser válida para todos os inteiros positivos.*

Universidade Federal do Ceará
Computer Science Department
Samy Sá (samy@ufc.br)

# Indução Forte e a Escada Infinita

A indução forte nos diz que podemos subir a escada inteira se...

1. Alcançamos o primeiro degrau;
2. Se para cada inteiro $k$, se conseguirmos alcançar os primeiro $k$ degraus, então alcançaremos o degrau $k + 1$.

Universidade Federal do Ceará
Computer Science Department
Samy Sá (samy@ufc.br)

# Indução Forte - Exemplo

**Exemplo**

*Mostre que se $n$ é um inteiro maior que $1$, então $n$ pode ser escrito como um produto de números primos.*

Universidade Federal do Ceará
Computer Science Department
Samy Sá (samy@ufc.br)

# Indução Forte - Exemplo

### Exemplo

*Mostre que se $n$ é um inteiro maior que $1$, então $n$ pode ser escrito como um produto de números primos.*

- Observe que não é trivial utilizar indução matemática, pois o caso $k + 1$ não depende diretamente do caso $k$.

Universidade Federal do Ceará
Computer Science Department
Samy Sá (samy@ufc.br)

# Indução Forte - Exemplo

## Prova

**B** *Seja $n = 2$, este é um produto envolvendo apenas um número primo. (**OK**)*

Universidade Federal do Ceará
Computer Science Department
Samy Sá (samy@ufc.br)

# Indução Forte - Exemplo

## Prova

**B** *Seja $n = 2$, este é um produto envolvendo apenas um número primo. (**OK**)*

**P** *Seja $k$ um inteiro qualquer maior que $1$, suponha que todo inteiro $j$ maior que $1$ e menor ou igual que $k$ possa ser escrito como um produto de números primos (**hipótese de indução**).*

Universidade Federal do Ceará
Computer Science Department
Samy Sá (samy@ufc.br)

# Indução Forte - Exemplo

## Prova

**B** *Seja $n = 2$, este é um produto envolvendo apenas um número primo. (**OK**)*

**P** *Seja $k$ um inteiro qualquer maior que $1$, suponha que todo inteiro $j$ maior que $1$ e menor ou igual que $k$ possa ser escrito como um produto de números primos (**hipótese de indução**). Avaliaremos o caso $k + 1$ (**objetivo**).*

Universidade Federal do Ceará
Computer Science Department
Samy Sá (samy@ufc.br)

# Indução Forte - Exemplo

## Prova

**B** *Seja $n = 2$, este é um produto envolvendo apenas um número primo. (**OK**)*

**P** *Seja $k$ um inteiro qualquer maior que $1$, suponha que todo inteiro $j$ maior que $1$ e menor ou igual que $k$ possa ser escrito como um produto de números primos (**hipótese de indução**). Avaliaremos o caso $k + 1$ (**objetivo**). Nesse caso, temos que $k + 1$ é um número primo ou tem um divisor $d$ tal que $1 < d < k + 1$.*

Universidade Federal do Ceará
Computer Science Department
Samy Sá (samy@ufc.br)

# Indução Forte - Exemplo

## Prova

**B** *Seja $n = 2$, este é um produto envolvendo apenas um número primo. (**OK**)*

**P** *Seja $k$ um inteiro qualquer maior que $1$, suponha que todo inteiro $j$ maior que $1$ e menor ou igual que $k$ possa ser escrito como um produto de números primos (**hipótese de indução**). Avaliaremos o caso $k + 1$ (**objetivo**). Nesse caso, temos que $k + 1$ é um número primo ou tem um divisor $d$ tal que $1 < d < k + 1$. Seja $k + 1 = dq$, onde $q$ é o resultado da divisão de $k + 1$ por $d$, pela hipótese de indução, $d$ e $q$ podem ser escritos como produtos de números primos.*

Universidade Federal do Ceará
Computer Science Department
Samy Sá (samy@ufc.br)

# Indução Forte - Exemplo

## Prova

**B** *Seja $n = 2$, este é um produto envolvendo apenas um número primo. (**OK**)*

**P** *Seja $k$ um inteiro qualquer maior que $1$, suponha que todo inteiro $j$ maior que $1$ e menor ou igual que $k$ possa ser escrito como um produto de números primos (**hipótese de indução**). Avaliaremos o caso $k + 1$ (**objetivo**). Nesse caso, temos que $k + 1$ é um número primo ou tem um divisor $d$ tal que $1 < d < k + 1$. Seja $k + 1 = dq$, onde $q$ é o resultado da divisão de $k + 1$ por $d$, pela hipótese de indução, $d$ e $q$ podem ser escritos como produtos de números primos. Logo, $k + 1$ também pode ser escrito como produto de números primos.*

Samy Sá (samy@ufc.br)

# Outline

Introdução

Indução Forte

**Princípio da Boa Ordenação**

Exercícios

Universidade Federal do Ceará
Computer Science Department
Samy Sá (samy@ufc.br)

# Princípio da Boa Ordenação

**Definição**

*(Princípio da Boa Ordenação) Todo conjunto não vazio de inteiros não negativos tem um menor elemento.*

Universidade Federal do Ceará
Computer Science Department
Samy Sá (samy@ufc.br)

# Princípio da Boa Ordenação

**Definição**

*(Princípio da Boa Ordenação) Todo conjunto não vazio de inteiros não negativos tem um menor elemento.*

**Constatação:**

*O princípio da boa ordenação garante que sempre há um elemento de BASE para as provas por indução matemática/forte.*

Universidade Federal do Ceará
Computer Science Department
Samy Sá (samy@ufc.br)

# Princípio da Boa Ordenação - Exemplo

**Exemplo**

*Prove o algoritmo de divisão, ou seja, que se $a$ é inteiro e $d$ é um inteiro positivo, então existem inteiros $q, r$ únicos com $0 \leq r < d$ e $a = dq + r$.*

Samy Sá (samy@ufc.br)

# Princípio da Boa Ordenação - Exemplo

**Exemplo**

*Prove o algoritmo de divisão, ou seja, que se* $a$ *é inteiro e* $d$ *é um inteiro positivo, então existem inteiros* $q, r$ *únicos com* $0 \leq r < d$ *e* $a = dq + r$*.*

**Prova**

*Considere* $S$*, o conjunto dos inteiros na forma* $a - dq$*.*

Universidade Federal do Ceará
Computer Science Department
Samy Sá (samy@ufc.br)

# Princípio da Boa Ordenação - Exemplo

### Exemplo

*Prove o algoritmo de divisão, ou seja, que se $a$ é inteiro e $d$ é um inteiro positivo, então existem inteiros $q, r$ únicos com $0 \leq r < d$ e $a = dq + r$.*

### Prova

*Considere $S$, o conjunto dos inteiros na forma $a - dq$. Esse conjunto é não vazio, pois $-dq$ pode ser tão grande ou pequeno quanto desejarmos (basta escolher $q$ de acordo).*

Universidade Federal do Ceará
Computer Science Department
Samy Sá (samy@ufc.br)

# Princípio da Boa Ordenação - Exemplo

## Exemplo

*Prove o algoritmo de divisão, ou seja, que se* $a$ *é inteiro e* $d$ *é um inteiro positivo, então existem inteiros* $q, r$ *únicos com* $0 \leq r < d$ *e* $a = dq + r$*.*

## Prova

*Considere* $S$*, o conjunto dos inteiros na forma* $a - dq$*. Esse conjunto é não vazio, pois* $-dq$ *pode ser tão grande ou pequeno quanto desejarmos (basta escolher* $q$ *de acordo). Pela propriedade de boa ordem,* $S$ *tem um menor elemento* $r = a - dq_0$*, inteiro não negativo.*

Universidade Federal do Ceará
Computer Science Department
Samy Sá (samy@ufc.br)

# Princípio da Boa Ordenação - Exemplo

## Exemplo

*Prove o algoritmo de divisão, ou seja, que se $a$ é inteiro e $d$ é um inteiro positivo, então existem inteiros $q, r$ únicos com $0 \leq r < d$ e $a = dq + r$.*

## Prova

*Considere $S$, o conjunto dos inteiros na forma $a - dq$. Esse conjunto é não vazio, pois $-dq$ pode ser tão grande ou pequeno quanto desejarmos (basta escolher $q$ de acordo). Pela propriedade de boa ordem, $S$ tem um menor elemento $r = a - dq_0$, inteiro não negativo. Além disso, $r < d$, pois do contrário existiria um elemento de $S$ menor que $r$, a dizer, $a - d(q_0 + 1) = a - dq_0 - d = r - d \geq 0$.*

Universidade Federal do Ceará
Computer Science Department
Samy Sá (samy@ufc.br)

# Princípio da Boa Ordenação - Exemplo

## Exemplo

*Prove o algoritmo de divisão, ou seja, que se $a$ é inteiro e $d$ é um inteiro positivo, então existem inteiros $q, r$ únicos com $0 \leq r < d$ e $a = dq + r$.*

## Prova

*Considere $S$, o conjunto dos inteiros na forma $a - dq$. Esse conjunto é não vazio, pois $-dq$ pode ser tão grande ou pequeno quanto desejarmos (basta escolher $q$ de acordo). Pela propriedade de boa ordem, $S$ tem um menor elemento $r = a - dq_0$, inteiro não negativo. Além disso, $r < d$, pois do contrário existiria um elemento de $S$ menor que $r$, a dizer, $a - d(q_0 + 1) = a - dq_0 - d = r - d \geq 0$. Consequentemente, existem inteiros $q$ e $r$ com $0 \leq r < d$.*

Universidade Federal do Ceará
Computer Science Department
Samy Sá (samy@ufc.br)

# Princípio da Boa Ordenação - Exemplo

**Exemplo**

*Prove o algoritmo de divisão, ou seja, que se a é inteiro e d é um inteiro positivo, então existem inteiros $q, r$ únicos com $0 \leq r < d$ e $a = dq + r$.*

**Prova**

*(CONTINUADA) ... Consequentemente, existem inteiros q e r com $0 \leq r < d$.*

Universidade Federal do Ceará
Computer Science Department
Samy Sá (samy@ufc.br)

# Princípio da Boa Ordenação - Exemplo

**Exemplo**

*Prove o algoritmo de divisão, ou seja, que se a é inteiro e d é um inteiro positivo, então existem inteiros* $q, r$ *únicos com* $0 \leq r < d$ *e* $a = dq + r$.

**Prova**

*(CONTINUADA) ... Consequentemente, existem inteiros q e r com* $0 \leq r < d$. *Devemos agora mostrar que r e q são únicos.*

Universidade Federal do Ceará
Computer Science Department
Samy Sá (samy@ufc.br)

# Princípio da Boa Ordenação - Exemplo

### Exemplo

*Prove o algoritmo de divisão, ou seja, que se $a$ é inteiro e $d$ é um inteiro positivo, então existem inteiros $q, r$ únicos com $0 \leq r < d$ e $a = dq + r$.*

### Prova

*(CONTINUADA) ... Consequentemente, existem inteiros $q$ e $r$ com $0 \leq r < d$. Devemos agora mostrar que $r$ e $q$ são únicos. Suponha que não sejam únicos, portanto $a = dq + r = dq' + r'$ com $0 \leq r < d$ e $0 \leq r' < d$.*

Universidade Federal do Ceará
Computer Science Department
Samy Sá (samy@ufc.br)

# Princípio da Boa Ordenação - Exemplo

### Exemplo

*Prove o algoritmo de divisão, ou seja, que se a é inteiro e d é um inteiro positivo, então existem inteiros* $q, r$ *únicos com* $0 \leq r < d$ *e* $a = dq + r$.

### Prova

*(CONTINUADA) ... Consequentemente, existem inteiros q e r com* $0 \leq r < d$. *Devemos agora mostrar que r e q são únicos. Suponha que não sejam únicos, portanto* $a = dq + r = dq' + r'$ *com* $0 \leq r < d$ *e* $0 \leq r' < d$. *Então* $d(q - q') = r' - r$.

Universidade Federal do Ceará
Computer Science Department
Samy Sá (samy@ufc.br)

# Princípio da Boa Ordenação - Exemplo

### Exemplo

*Prove o algoritmo de divisão, ou seja, que se a é inteiro e d é um inteiro positivo, então existem inteiros $q, r$ únicos com $0 \leq r < d$ e $a = dq + r$.*

### Prova

*(CONTINUADA) ... Consequentemente, existem inteiros q e r com $0 \leq r < d$. Devemos agora mostrar que r e q são únicos. Suponha que não sejam únicos, portanto $a = dq + r = dq' + r'$ com $0 \leq r < d$ e $0 \leq r' < d$. Então $d(q - q') = r' - r$. Por consequência, d divide $r - r'$.*

Universidade Federal do Ceará
Computer Science Department
Samy Sá (samy@ufc.br)

# Princípio da Boa Ordenação - Exemplo

### Exemplo

*Prove o algoritmo de divisão, ou seja, que se $a$ é inteiro e $d$ é um inteiro positivo, então existem inteiros $q, r$ únicos com $0 \leq r < d$ e $a = dq + r$.*

### Prova

*(CONTINUADA) ... Consequentemente, existem inteiros $q$ e $r$ com $0 \leq r < d$. Devemos agora mostrar que $r$ e $q$ são únicos. Suponha que não sejam únicos, portanto $a = dq + r = dq' + r'$ com $0 \leq r < d$ e $0 \leq r' < d$. Então $d(q - q') = r' - r$. Por consequência, $d$ divide $r - r'$. Porque $-d < r' - r < d$, temos que $r' - r = 0$ e $r = r'$.*

# Princípio da Boa Ordenação - Exemplo

### Exemplo

*Prove o algoritmo de divisão, ou seja, que se a é inteiro e d é um inteiro positivo, então existem inteiros $q, r$ únicos com $0 \leq r < d$ e $a = dq + r$.*

### Prova

*(CONTINUADA) ... Consequentemente, existem inteiros q e r com $0 \leq r < d$. Devemos agora mostrar que r e q são únicos. Suponha que não sejam únicos, portanto $a = dq + r = dq' + r'$ com $0 \leq r < d$ e $0 \leq r' < d$. Então $d(q - q') = r' - r$. Por consequência, d divide $r - r'$. Porque $-d < r' - r < d$, temos que $r' - r = 0$ e $r = r'$. Consequentemente, $q = q'$.*

Universidade Federal do Ceará
Computer Science Department
Samy Sá (samy@ufc.br)

# Outline

Universidade Federal do Ceará
Computer Science Department
Samy Sá (samy@ufc.br)

# Exercícios

1. Mostre os seguintes teoremas usando indução forte.
    - **a)** Utilizando apenas moedas de 3 e 5 centavos em qualquer quantidade, é possível dar troco de qualquer valor a partir de 8 centavos.
    - **b)** Assuma que uma barra de chocolate consiste de *n* quadrados em um padrão retangular. A barra pode ser quebrada ao longo da linha vertical ou horizontal. Assumindo que apenas uma quebra pode ser feita por vez, determine quantas quebras são necessárias para reduzir a barra a quadrados unitários e prove por indução forte.