

# Somas Aninhadas

Leitura Complementar 03  
Notas de Aula de Matemática Discreta

Samy Sá

Universidade Federal do Ceará  
Campus de Quixadá  
Quixadá, Brasil  
samy@ufc.br

Requisitos: Funções (LP 02), Sequências e Somas (S05)  
Texto produzido em 06/03/2014.

## 1 Somas Aninhadas

Comentamos que somas ou somatórios comuns são normalmente implementados em computador por meio de laços *for*. Mais que isso, formalizamos sequências como sendo um tipo de função. Uma vez que as somas envolvem termos de alguma sequência, as somas que estudamos também são funções, mais elaboradas e compostas. Nesse sentido, podemos implementar a soma

$$\sum_{n=j}^k a_n,$$

dos termos de uma sequência qualquer, onde  $a_n$  é o  $n$ -ésimo termos de uma sequência qualquer, com o seguinte trecho de código escrito na linguagem C:

### Implementação 1 (*Função Somatório*)

```
float somatorio(int j, int k)
{
    float s = 0;
    for ( n = j; n < k; n++ ) {
        s += n;
    }
    return s;
}
```

Em vários contextos, encontraremos somas duplas, triplas, ou de outras aridades, de maneira muito similar ao que acontece com os laços aninhados em programas. De maneira similar, essas somas são chamadas de somas aninhadas e envolverão duas ou mais variáveis. Por exemplo, considere o código a seguir:

## Implementação 2 (*Função Soma Aninhada*)

```
float aninhada(int k, int l)
{
    float s = 0;
    for ( i = 1; i < k; i ++ ) {
        for ( j = 1; j < l; j ++ ) {
            s += i * j;
        }
    }
    return s;
}
```

O código acima contém dois laços aninhados de forma que a operação  $s += i * j$  será executada  $kl$  vezes. Para cada valor que a variável  $i$  assume, o segundo laço **for** será executado uma vez de forma que  $j$  assumirá todos os valores de 1 até  $l$ . Esse código implementa a soma

$$\sum_{i=1}^k \sum_{j=1}^l ij,$$

a qual seria desenvolvida de maneira similar à execução dos laços aninhados:

$$\begin{aligned} \sum_{i=1}^k \sum_{j=1}^l ij &= \sum_{i=1}^k (i.1 + i.2 + \dots + i.l) \\ &= 1.1 + 1.2 + \dots + 1.l + 2.1 + 2.2 + \dots + 2.l + \dots + k.1 + k.2 + \dots + k.l \end{aligned}$$

Alternativamente, pela distributividade da multiplicação sobre a soma, podemos avaliar a soma como segue:

$$\begin{aligned} \sum_{i=1}^k \sum_{j=1}^l ij &= \sum_{i=1}^k i \sum_{j=1}^l j \\ &= \sum_{i=1}^k i.(1 + 2 + \dots + l) \\ &= 1.(1 + 2 + \dots + l) + 2.(1 + 2 + \dots + l) + \dots + k.(1 + 2 + \dots + l) \end{aligned}$$

As operações com somas triplas, quádruplas, etc. são sempre similares, pois a resolução de uma soma aninhada envolve resolver a soma mais interna e seguir resolvendo as demais uma a uma até a mais externa.

## 2 Exercícios - Sequências e Somas

**Exercício 1:** Encontre os termos  $a_0, a_1, a_4, a_5$  da sequência  $\{a_n\}$ , onde  $a_n = 2 \cdot (-3)^n + 5^n$ .

**Exercício 2:** Qual o termo  $a_8$  da sequência  $\{a_n\}$  se  $a_n$  for

- a)  $2^{n-1}$ ?      c)  $7$ ?  
b)  $1 + (-1)^n$ ?      d)  $-(-2)^n$ ?

**Exercício 3:** Encontre ao menos 3 sequências diferentes geradas por fórmulas simples em que  $a_0 = 1, a_1 = 2, a_2 = 4$ .

**Exercício 4:** Encontre os primeiros 6 termos das sequências definidas por cada relação de recorrência e condições iniciais abaixo:

- a)  $a_n = 6a_{n-1}, a_0 = 2$       c)  $a_n = a_{n-1} + 3a_{n-2}, a_0 = 1, a_1 = 2$   
b)  $a_n = a_{n-1}^2, a_1 = 2$       d)  $a_n = na_{n-1} + n^2a_{n-2}, a_0 = 1, a_1 = 1$   
e)  $a_n = a_{n-1} + a_{n-3}, a_0 = 1, a_1 = 2, a_2 = 0$

**Exercício 5:** Mostre que a sequência  $\{a_n\}$  é a solução da relação de recorrência  $a_n = -3a_{n-1} + 4a_{n-2}$  se...

- a)  $a_n = 0$       c)  $a_n = 1$   
b)  $a_n = (-4)^n$       d)  $a_n = 2(-4)^n + 3$

**Exercício 6:** Uma pessoa deposita R\$1000,00 em uma conta bancária que rende 9% de juros compostos ao ano.

- a) Construa uma relação de recorrência para o montante acumulado ao longo de  $n$  anos, ou seja, de forma que o termo  $a_n$  seja o total acumulado ao fim do ano  $n$ .  
b) Encontre uma fórmula explícita que substitua a relação de recorrência.  
c) Quanto dinheiro essa conta terá ao fim de 100 anos?  
d) Escreva um programa na sua linguagem favorita para verificar se os resultados obtidos nos itens a) e b) conferem com seu resultado esperado do item c). Teste para entradas como  $n = 1$  e  $n = 2$  como evidência a mais para correção de suas respostas.

**Exercício 7:** Quais são os valores das seguintes somas? Obs.: Você pode recorrer às fórmulas fechadas para somas que destacamos nos slides.

- |                                   |                                  |  |
|-----------------------------------|----------------------------------|--|
| a) $\sum_{j=1}^5 (j+1)$           | e) $\sum_{j=0}^8 3 \cdot 2^j$    | i) $\sum_{i=1}^3 \sum_{j=1}^2 i-j$     |
| b) $\sum_{j=1}^{10} 3$            | f) $\sum_{j=2}^8 (-3)^j$         | j) $\sum_{i=1}^3 \sum_{j=0}^2 j$       |
| c) $\sum_{j=0}^8 (-2)^j$          | g) $\sum_{j=1}^8 2^j$            | k) $\sum_{i=0}^2 \sum_{j=0}^3 (3i+2j)$ |
| d) $\sum_{j=0}^8 (2^{j+1} - 2^j)$ | h) $\sum_{j=0}^8 2 \cdot (-3)^j$ | l) $\sum_{i=0}^2 \sum_{j=0}^3 i^2 j$   |