Matemática Discreta
Lista de Exercícios 01

Técnicas de Demonstração (parte I)

1. Use uma demonstração direta para mostrar que a soma de dois números inteiros ímpares é par.
2. Mostre que o quadrado de um número par é um número par, usando a demonstração direta.
3. Demonstre que se $m+n$ e $n+p$ são números inteiros pares, em que m, n e p são números inteiros, então $m+p$ é par. Que tipo de demonstração você utilizou?
4. Use uma demonstração direta para mostrar que todo número inteiro ímpar é a diferença de dois quadrados.
5. Use uma demonstração por contradição para provar que a soma de um número irracional e um racional é irracional.
6. Demonstre ou contrarie que o produto de dois números irracionais é irracional.
7. Demonstre que se x é irracional, então $1/x$ é irracional.
8. Use uma demonstração por contraposição para mostrar que se $x+y \geq 2$, em que x e y são números reais, então $x \geq 1$ ou $y \geq 1$.
9. Mostre que se n é um número inteiro e n^3+5 é impar, então n é par, usando:

   (a) uma demonstração por contraposição.
   (b) uma demonstração por contradição.

10. Demonstre a proposição $P(0)$, em que $P(n)$ é a proposição "Se n é um número inteiro positivo maior que 1, então $n^2 > n$". Qual tipo de demonstração você utilizou?
11. Assuma $P(n)$ como a proposição "Se a e b são números reais positivos, então $(a+b)^n \geq a^n + b^n$". Comprove que $P(1)$ é verdadeira. Qual tipo de demonstração você utilizou?
12. Mostre que pelo menos 10 de quaisquer 64 dias escolhidos devem cair no mesmo dia da semana.
13. Use uma demonstração por contradição para mostrar que não há um número racional r para que $r^3+r+1=0$. [Dica: Assuma que $r=a/b$ seja uma raiz, em que a e b são números inteiros e a/b é o menor termo. Obtenha uma equação que envolva números inteiros, multiplicando-os por b^3. Então, veja se a e b são pares ou ímpares.]
14. Demonstre que se n é um número inteiro positivo, então n é ímpar se e somente se $5n+6$ for ímpar.
15. Demonstre ou contrarie que se m e n são números inteiros, tal que $mn=1$, então ou $m=1$ e $n=1$ ou $m=-1$ e $n=-1$.
16. Mostre que essas proposições sobre o número inteiro x são equivalentes: (i) $3x+2$ é par, (ii) $x+5$ é ímpar, (iii) x^2 é par.
17. Mostre que essas proposições sobre o número real x são equivalentes: (i) x é irracional, (ii) $3x+2$ é irracional, e (iii) $x/2$ é irracional.
18. Os passos abaixo para encontrar as soluções de $\sqrt{x+3}$ = 3 - x são corretos?

   (1) $\sqrt{x+3}$ = 3 - x é dado;
   (2) x + 3 = x^2 - 6x + 9, obtido tirando a raiz quadrada dos dois lados de (1);
   (3) 0=x^2-7x+6, obtido pela subtração de $x+3$ dos dois lados de (2);
   (4) $0=(x-1)(x-6)$, obtido pela fatoração do lado direito de (3);
   (5) x = 1 ou x = 6, tirado de (4) porque ab=0 implica que a=0 ou b=0.

19. Comprove que pelo menos um dos números reais a_1, a_2,..., a_n é maior que ou igual ao valor da média desses números. Que tipo de demonstração você utilizou?
20. Comprove que se n é um número inteiro, estas quatro proposições são equivalentes: (i) n é par, (ii) $n+1$ é ímpar, (iii) $3n+1$ é ímpar, (iv) $3n$ é par.

Questões adicionais:

1. Use uma demonstração direta para mostrar que a soma de dois números inteiros pares é par.
2. Mostre que o inverso aditivo, ou negativo, de um número par é um número par, usando a demonstração direta.
3. Use uma demonstração direta para mostrar que o produto de dois números ímpares é ímpar.
4. Demonstre que se n é um quadrado perfeirto, então $n+2$ não é um quadrado perfeito.
5. Use uma demonstração direta para mostrar que o produto de dois números racionais é racional.
6. Demonstre ou contrarie que o produto de um número racional diferente de zero e um número irracional é irracional.
7. Demonstre que se x é racional e $x \neq 0$, então $1/x$ é racional.
8. Demonstre que se m e n são números inteiros e mn é par, então m é par ou n é par.
9. Demonstre que se n é um número inteiro e $3n+2$ é par, então n é par, usando:

   (a) uma demonstração por contraposição.
   (b) uma demonstração por contradição.

10. Demonstre a proposição $P(1)$, em que $P(n)$ é a proposição "Se n é um número inteiro positivo, então $n^2 \geq n$". Qual tipo de demonstração você utilizou?
11. Mostre que se você pegar 3 meias de uma gaveta, com apenas meias azuis e pretas, você deve pegar ou um par de meias azuis ou um par de meias pretas.
12. Mostre que pelo menos 3 de quaisquer 25 dias escolhidos devem cair no mesmo mês do ano.
13. Demonstre que se n é um número inteiro positivo, então n é par se e somente se $7n+4$ for par.
14. Demonstre que se $m^2=n^2$ se e somente se $m=n$ ou $m=-n$.
15. Mostre que essas três proposições são equivalentes , em que a e b são números reais:(i) a é menor que (b), (ii) a média de a e b é maior que a, e (iii) a média de a e b é menor que b.
16. Mostre que essas proposições sobre o número real x são equivalentes: (i) x é racional, (ii) $x/2$ é racional, e (iii) $3x-1$ é racional.
17. Esta é a razão para encontrar as soluções da equação $\sqrt{2x^2-1}$=x correta? (1) $\sqrt{2x^2-1}$=x é dado; (2) $2x^2$-1 = x^2, obtido pelo quadrado dos dois lados de (1); (3) x^2-1 = 0, obtido pela subtração de x^2 dos dois lados de (2); (4) $(x-1)(x+1)=0$, obtido pela fatoração do lado esquerdo de x^2 - 1; (5) x = 1 ou x = -1, confirmado, pois $ab=0$ implica que $a=0$ ou $b=0$.
18. Comprove que as proposições P_1, P_2, P_3 e P_4 podem ser equivalentes mostrando que $P_1 \leftrightarrow P_4$, $P_2 \leftrightarrow P_3$ e $P_1 \leftrightarrow P_3$.
19. Encontre um contra-exemplo para a proposição: todo número inteiro positivo pode ser escrito como a soma dos quadrados de três números inteiros.
20. Comprove que estas quatro proposições sobre o número inteiro n são equivalentes: (i) n^2 é ímpar, (ii) $1-n$ é par, (iii) n^3 é ímpar, (iv) n^2+1 é par.