Métodos de Prova de Teoremas

Matemática Discreta

Prof. MSc. Samy Sá

Universidade Federal do Ceará
Campus de Quixadá

18 de fevereiro de 2014

Universidade Federal do Ceará
Computer Science Department
Samy Sá (samy@ufc.br)

Outline

Universidade Federal do Ceará
Computer Science Department
Samy Sá (samy@ufc.br)

Primeiro Passo: Compreender o Enunciado

Na aula anterior, vimos...

- A terminologia associada a teoremas;

Universidade Federal do Ceará
Computer Science Department
Samy Sá (samy@ufc.br)

Primeiro Passo: Compreender o Enunciado

Na aula anterior, vimos...

- A terminologia associada a teoremas;
- Enunciados de generalização;

Universidade Federal do Ceará
Computer Science Department
Samy Sá (samy@ufc.br)

Primeiro Passo: Compreender o Enunciado

Na aula anterior, vimos...

- A terminologia associada a teoremas;
- Enunciados de generalização;
- Tipos de argumentos para generalizações e equivalências;
- Contra-exemplos para falsificar generalizações falhas;
- Argumentos de vacuidade.

Universidade Federal do Ceará
Computer Science Department
Samy Sá (samy@ufc.br)

Segundo Passo: Escolher uma Técnica

- Sabendo o tipo de enunciado, devemos escolher um método.

Segundo Passo: Escolher uma Técnica

- Sabendo o tipo de enunciado, devemos escolher um método.
  - Generalizações $(\forall x)[P(x) \rightarrow Q(x)]$ envolvem a prova do condicional $P(x) \rightarrow Q(x)$ ou $P(c) \rightarrow Q(c)$, onde c é qualquer.

Segundo Passo: Escolher uma Técnica

- Sabendo o tipo de enunciado, devemos escolher um método.
  - Generalizações $(\forall x)[P(x) \rightarrow Q(x)]$ envolvem a prova do condicional $P(x) \rightarrow Q(x)$ ou $P(c) \rightarrow Q(c)$, onde c é qualquer.
  - Equivalências $p \leftrightarrow q$ são dois condicionais: $p \rightarrow q$ e $q \rightarrow p$.

Segundo Passo: Escolher uma Técnica

- Sabendo o tipo de enunciado, devemos escolher um método.
  - Generalizações $(\forall x)[P(x) \rightarrow Q(x)]$ envolvem a prova do condicional $P(x) \rightarrow Q(x)$ ou $P(c) \rightarrow Q(c)$, onde c é qualquer.
  - Equivalências $p \leftrightarrow q$ são dois condicionais: $p \rightarrow q$ e $q \rightarrow p$.

Constatação:

Com frequência precisaremos mostrar a validade de condicionais.

Segundo Passo: Escolher uma Técnica

- Sabendo o tipo de enunciado, devemos escolher um método.
  - Generalizações $(\forall x)[P(x) \rightarrow Q(x)]$ envolvem a prova do condicional $P(x) \rightarrow Q(x)$ ou $P(c) \rightarrow Q(c)$, onde c é qualquer.
  - Equivalências $p \leftrightarrow q$ são dois condicionais: $p \rightarrow q$ e $q \rightarrow p$.

Constatação:

Com frequência precisaremos mostrar a validade de condicionais.

Constatação:

As principais técnicas serão baseadas em relações de causa e consequência.

Universidade Federal do Ceará
Computer Science Department
Samy Sá (samy@ufc.br)

Causa e Consequência nos Condicionais

- O condicional $p \rightarrow q$ é falso se P é verdadeiro e q é falso.
- Os casos em que p é falso não importam (vacuidade).
- Precisamos mostrar então que sempre que p é verdadeiro, q também será verdadeiro.

p	q	$p \rightarrow q$
F	F	V
F	V	V
V	F	F
V	V	V

Universidade Federal do Ceará
Computer Science Department
Samy Sá (samy@ufc.br)

Outline

Universidade Federal do Ceará
Computer Science Department
Samy Sá (samy@ufc.br)

Outline

Universidade Federal do Ceará
Computer Science Department
Samy Sá (samy@ufc.br)

Prova Direta de Condicionais

Consiste nos seguintes passos:

1. Assuma que p é **VERDADE**.
2. Desenvolva passos visando concluir q como consequência.
3. Conclua que se p é verdade, então q também é, ou seja, que o condicional original é **VERDADE**.

Universidade Federal do Ceará
Computer Science Department
Samy Sá (samy@ufc.br)

Prova Direta de Condicionais

	Prova Direta (PD)
Assuma...	p
Desenvolva	$\vdots$
Conclua...	q
Resultado	$p \rightarrow q$

Universidade Federal do Ceará
Computer Science Department
Samy Sá (samy@ufc.br)

Por que Funciona?

Observe a tabela:

p	q	$p \rightarrow q$
F	F	V
F	V	V
V	F	F
V	V	V

Universidade Federal do Ceará
Computer Science Department
Samy Sá (samy@ufc.br)

Por que Funciona?

Observe a tabela:

p	q	$p \rightarrow q$
F	F	V
F	V	V
V	F	F
V	V	V

Constatação:

Se assumimos p verdadeiro e obtemos q como consequência direta, é porque o caso de p ser verdadeiro e q ser falso é impossível. Portanto, o condicional será verdadeiro.

Universidade Federal do Ceará
Computer Science Department
Samy Sá (samy@ufc.br)

Exemplo

Teorema

"O produto de dois números ímpares é ímpar"

Samy Sá (samy@ufc.br)

Exemplo

Teorema

"O produto de dois números ímpares é ímpar"

O enunciado pode ser reescrito:

$$(\forall x \in \mathbb{Z})(\forall y \in \mathbb{Z})[x \text{ é ímpar} \wedge y \text{ é ímpar} \rightarrow xy \text{ é ímpar}].$$

Universidade Federal do Ceará
Computer Science Department
Samy Sá (samy@ufc.br)

Exemplo

Teorema

"O produto de dois números ímpares é ímpar"

O enunciado pode ser reescrito:

$$(\forall x \in \mathbb{Z})(\forall y \in \mathbb{Z})[x \text{ é ímpar} \wedge y \text{ é ímpar} \rightarrow xy \text{ é ímpar}].$$

Constatação:

Temos um condicional $p \rightarrow q$ em que

- *p é "x é ímpar $\wedge$ y é ímpar";*
- *q nos diz que "xy é ímpar".*

Universidade Federal do Ceará
Computer Science Department
Samy Sá (samy@ufc.br)

Exemplo - Prova Direta

Teorema

"O produto de dois números ímpares é ímpar" (Prova Direta)

Prova

Suponha que x e y são números ímpares.

Universidade Federal do Ceará
Computer Science Department
Samy Sá (samy@ufc.br)

Exemplo - Prova Direta

Teorema

"O produto de dois números ímpares é ímpar" (Prova Direta)

Prova

Suponha que x e y são números ímpares. Portanto, devem existir inteiros j e k tais que $x = 2j + 1$ e $y = 2k + 1$.

Universidade Federal do Ceará
Computer Science Department
Samy Sá (samy@ufc.br)

Exemplo - Prova Direta

Teorema

"O produto de dois números ímpares é ímpar" (Prova Direta)

Prova

Suponha que x e y são números ímpares. Portanto, devem existir inteiros j e k tais que $x = 2j + 1$ e $y = 2k + 1$. Temos que $xy = (2j + 1)(2k + 1) = (2j).(2k) + (2j).1 + 1.(2k) + 1.1.$

Universidade Federal do Ceará
Computer Science Department
Samy Sá (samy@ufc.br)

Exemplo - Prova Direta

Teorema

"O produto de dois números ímpares é ímpar" (Prova Direta)

Prova

Suponha que x e y são números ímpares. Portanto, devem existir inteiros j e k tais que $x = 2j + 1$ e $y = 2k + 1$. Temos que $xy = (2j + 1)(2k + 1) = (2j).(2k) + (2j).1 + 1.(2k) + 1.1$. Adiante, temos $xy = 4jk + 2j + 2k + 1 = 2(2jk + j + k) + 1$, um número ímpar.

Universidade Federal do Ceará
Computer Science Department
Samy Sá (samy@ufc.br)

Exemplo - Prova Direta

Teorema

"O produto de dois números ímpares é ímpar" (Prova Direta)

Prova

Suponha que x *e* y *são números ímpares. Portanto, devem existir inteiros* j *e* k *tais que* $x = 2j + 1$ *e* $y = 2k + 1$*. Temos que* $xy = (2j + 1)(2k + 1) = (2j).(2k) + (2j).1 + 1.(2k) + 1.1$*. Adiante, temos* $xy = 4jk + 2j + 2k + 1 = 2(2jk + j + k) + 1$*, um número ímpar. Portanto, se* x *e* y *são números ímpares, o produto* xy *também será ímpar.* ■

Universidade Federal do Ceará
Computer Science Department
Samy Sá (samy@ufc.br)

Outline

Universidade Federal do Ceará
Computer Science Department
Samy Sá (samy@ufc.br)

Prova de Condicionais por Contraposição

Consiste nos seguintes passos:

1. Assuma que q é **FALSO**, ou, alternativamente, que $\neg q$ é **VERDADE**.
2. Desenvolva passos visando concluir $\neg p$ como consequência, ou seja, que p também é **FALSO**.
3. Conclua que se p é verdade, então q também é, ou seja, que $p \rightarrow q$ é **VERDADE**.

Universidade Federal do Ceará
Computer Science Department
Samy Sá (samy@ufc.br)

Prova de Condicionais por Contraposição

	Contraposição
Assuma...	$\neg q$
Desenvolva	$\vdots$
Conclua...	$\neg p$
Resultado	$p \to q$

Universidade Federal do Ceará
Computer Science Department
Samy Sá (samy@ufc.br)

Por que Funciona?

Observe a tabela:

p	q	$p \rightarrow q$	$\neg p$	$\neg q$	$\neg q \rightarrow \neg p$
F	F	V	V	V	V
F	V	V	V	F	V
V	F	F	F	V	F
V	V	V	F	F	V

Samy Sá (samy@ufc.br)

Por que Funciona?

Observe a tabela:

p	q	$p \to q$	$\neg p$	$\neg q$	$\neg q \to \neg p$
F	F	V	V	V	V
F	V	V	V	F	V
V	F	F	F	V	F
V	V	V	F	F	V

Constatação:

O condicional $\neg q \to \neg p$ equivale a $p \to q$. Consequentemente, mostrar que $\neg q \to \neg p$ é verdade é o mesmo que mostrar $p \to q$!

Universidade Federal do Ceará
Computer Science Department
Samy Sá (samy@ufc.br)

Exemplo (Relembrando...)

Teorema

"O produto de dois números ímpares é ímpar"

O enunciado pode ser reescrito:

$$(\forall x \in \mathbb{Z})(\forall y \in \mathbb{Z})[x \text{ é ímpar} \wedge y \text{ é ímpar} \rightarrow xy \text{ é ímpar}].$$

Constatação:

Temos um condicional $p \rightarrow q$ em que

- *p é "x é ímpar $\wedge$ y é ímpar";*
- *q nos diz que "xy é ímpar".*

Universidade Federal do Ceará
Computer Science Department
Samy Sá (samy@ufc.br)

Exemplo (Avalie...)

Teorema

"O produto de dois números ímpares é ímpar"

Temos um condicional $p \to q$ em que

- p é "x é ímpar $\wedge$ y é ímpar";
- q nos diz que "xy é ímpar".

PERGUNTA:

1. *Qual é a negação de p?*

Exemplo (Avalie...)

Teorema

"O produto de dois números ímpares é ímpar"

Temos um condicional $p \rightarrow q$ em que

- p é "x é ímpar $\wedge$ y é ímpar";
- q nos diz que "xy é ímpar".

PERGUNTA:

1. *Qual é a negação de p?* $\Rightarrow$ *"x é par ou y é par"*

Universidade Federal do Ceará
Computer Science Department
Samy Sá (samy@ufc.br)

Exemplo (Avalie...)

Teorema

"O produto de dois números ímpares é ímpar"

Temos um condicional $p \rightarrow q$ em que

- p é "x é ímpar $\wedge$ y é ímpar";
- q nos diz que "xy é ímpar".

PERGUNTA:

1. *Qual é a negação de p?* $\Rightarrow$ *"x é par ou y é par"*
2. *Qual é a negação de q?*

Universidade Federal do Ceará
Computer Science Department
Samy Sá (samy@ufc.br)

Exemplo (Avalie...)

Teorema

"O produto de dois números ímpares é ímpar"

Temos um condicional $p \rightarrow q$ em que

- p é "x é ímpar $\wedge$ y é ímpar";
- q nos diz que "xy é ímpar".

PERGUNTA:

1. *Qual é a negação de p?* $\Rightarrow$ *"x é par ou y é par"*
2. *Qual é a negação de q?* $\Rightarrow$ *"xy é par"*

Universidade Federal do Ceará
Computer Science Department
Samy Sá (samy@ufc.br)

Exemplo (Avalie...)

Teorema

"O produto de dois números ímpares é ímpar"

Temos um condicional $p \rightarrow q$ em que

- p é "x é ímpar $\wedge$ y é ímpar";
- q nos diz que "xy é ímpar".

PERGUNTA:

1. *Qual é a negação de p?* $\Rightarrow$ *"x é par ou y é par"*
2. *Qual é a negação de q?* $\Rightarrow$ *"xy é par"*
3. *Que caminho devemos seguir para demonstrar esse teorema por contraposição?*

Universidade Federal do Ceará
Computer Science Department
Samy Sá (samy@ufc.br)

Exemplo (Avalie...)

Teorema

"O produto de dois números ímpares é ímpar"

Temos um condicional $p \to q$ em que

- p é "x é ímpar $\wedge$ y é ímpar";
- q nos diz que "xy é ímpar".

PERGUNTA:

1. *Qual é a negação de p?* $\Rightarrow$ *"x é par ou y é par"*
2. *Qual é a negação de q?* $\Rightarrow$ *"xy é par"*
3. *Que caminho devemos seguir para demonstrar esse teorema por contraposição?* $\Rightarrow$ *Supor que "xy é par" e concluir que "x é par ou y é par".*

Exemplo - Contraposição

Teorema

"O produto de dois números ímpares é ímpar" (por Contraposição)

Prova

Dados dois inteiros x, y, suponha que seu produto xy é par.

Universidade Federal do Ceará
Computer Science Department
Samy Sá (samy@ufc.br)

Exemplo - Contraposição

Teorema

"O produto de dois números ímpares é ímpar" (por Contraposição)

Prova

Dados dois inteiros x, y, suponha que seu produto xy é par. Logo, deve existir um inteiro k tal que $xy = 2k$.

Universidade Federal do Ceará
Computer Science Department
Samy Sá (samy@ufc.br)

Exemplo - Contraposição

Teorema

"O produto de dois números ímpares é ímpar" (por Contraposição)

Prova

Dados dois inteiros x, y*, suponha que seu produto* xy *é par. Logo, deve existir um inteiro* k *tal que* $xy = 2k$*. Independente da fatoração que fizermos de* k*, seus fatores seriam reorganizados para formar os números* x *e* y*. Portanto, o fator* 2 *deve ser também fator de* x *ou fator de* y*.*

Universidade Federal do Ceará
Computer Science Department
Samy Sá (samy@ufc.br)

Exemplo - Contraposição

Teorema

"O produto de dois números ímpares é ímpar" (por Contraposição)

Prova

Dados dois inteiros x, y*, suponha que seu produto* xy *é par. Logo, deve existir um inteiro* k *tal que* $xy = 2k$*. Independente da fatoração que fizermos de* k*, seus fatores seriam reorganizados para formar os números* x *e* y*. Portanto, o fator* 2 *deve ser também fator de* x *ou fator de* y*. Concluímos que ao menos um dos dois inteiros* x *ou* y *é par.* ■

Universidade Federal do Ceará
Computer Science Department
Samy Sá (samy@ufc.br)

Outline

Primeiros Passos de uma Demonstração

Principais Técnicas de Demonstração

- Prova Direta
- Prova por Contraposição
- Prova por Contradição - Redução ao Absurdo (RAA)

Comparativo

Exercícios

Universidade Federal do Ceará
Computer Science Department
Samy Sá (samy@ufc.br)

Prova de Condicionais por Contradição

Consiste nos seguintes passos:

1. Suponha que o condicional $p \rightarrow q$ é **FALSA**.
2. Logo, p deve ser verdade e q deve ser falso.
3. Mostre uma contradição que surge como consequência.
4. Conclua que que a suposição original estava errada, ou seja, o condicional original é **VERDADEIRO**.

Universidade Federal do Ceará
Computer Science Department
Samy Sá (samy@ufc.br)

Prova de Condicionais por Contradição

Contradição

Assuma...	$p, \neg q$
Desenvolva	$\vdots$
Conclua...	$\perp$
Resultado	$p \to q$

Universidade Federal do Ceará
Computer Science Department
Samy Sá (samy@ufc.br)

Por que Funciona?

Observe a tabela:

p	q	$p \rightarrow q$	$\neg(p \rightarrow q)$
F	F	V	F
F	V	V	F
V	F	F	V
V	V	V	F

Samy Sá (samy@ufc.br)

Por que Funciona?

Observe a tabela:

p	q	$p \to q$	$\neg(p \to q)$
F	F	V	F
F	V	V	F
V	F	F	V
V	V	V	F

Constatação:

Se $\neg(p \to q)$ não pode ser verdade, então $p \to q$ não pode ser falsa. Consequentemente, $p \to q$ é verdadeira!

Exemplo (Avalie...)

Teorema

"O produto de dois números ímpares é ímpar"

Temos um condicional $p \rightarrow q$ em que

- p é "x é ímpar $\wedge$ y é ímpar";
- q nos diz que "xy é ímpar".

PERGUNTA:

1. *Qual é a negação de q?*

Exemplo (Avalie...)

Teorema

"O produto de dois números ímpares é ímpar"

Temos um condicional $p \rightarrow q$ em que

- p é "x é ímpar $\wedge$ y é ímpar";
- q nos diz que "xy é ímpar".

PERGUNTA:

1. *Qual é a negação de q?* $\Rightarrow$ *"xy é par."*

Exemplo (Avalie...)

Teorema

"O produto de dois números ímpares é ímpar"

Temos um condicional $p \rightarrow q$ em que

- p é "x é ímpar $\wedge$ y é ímpar";
- q nos diz que "xy é ímpar".

PERGUNTA:

1. *Qual é a negação de q?* $\Rightarrow$ *"xy é par."*
2. *O que devemos supor no começo da demonstração por contradição deste teorema?*

Universidade Federal do Ceará
Computer Science Department
Samy Sá (samy@ufc.br)

Exemplo (Avalie...)

Teorema

"O produto de dois números ímpares é ímpar"

Temos um condicional $p \rightarrow q$ em que

- p é "x é ímpar $\wedge$ y é ímpar";
- q nos diz que "xy é ímpar".

PERGUNTA:

1. *Qual é a negação de q?* $\Rightarrow$ *"xy é par."*
2. *O que devemos supor no começo da demonstração por contradição deste teorema?* $\Rightarrow$ *"x é ímpar e y é ímpar, mas xy é par."*

Universidade Federal do Ceará
Computer Science Department
Samy Sá (samy@ufc.br)

Exemplo - Contradição

Teorema

"O produto de dois números ímpares é ímpar" (por Contradição)

Prova

Dados dois inteiros x, y, suponha que x, y ímpares. Suponha também que o produto xy é par.

Universidade Federal do Ceará
Computer Science Department
Samy Sá (samy@ufc.br)

Exemplo - Contradição

Teorema

"O produto de dois números ímpares é ímpar" (por Contradição)

Prova

Dados dois inteiros x, y, suponha que x, y ímpares. Suponha também que o produto xy é par. Logo, deve existir um inteiro k tal que $xy = 2k$.

Universidade Federal do Ceará
Computer Science Department
Samy Sá (samy@ufc.br)

Exemplo - Contradição

Teorema

"O produto de dois números ímpares é ímpar" (por Contradição)

Prova

Dados dois inteiros x, y, suponha que x, y ímpares. Suponha também que o produto xy é par. Logo, deve existir um inteiro k tal que $xy = 2k$. Independente da fatoração que fizermos de k, seus fatores seriam reorganizados para formar os números x e y. Portanto, o fator 2 deve ser também fator de x ou fator de y.

Universidade Federal do Ceará
Computer Science Department
Samy Sá (samy@ufc.br)

Exemplo - Contradição

Teorema

"O produto de dois números ímpares é ímpar" (por Contradição)

Prova

Dados dois inteiros x, y, suponha que x, y ímpares. Suponha também que o produto xy é par. Logo, deve existir um inteiro k tal que $xy = 2k$. Independente da fatoração que fizermos de k, seus fatores seriam reorganizados para formar os números x e y. Portanto, o fator 2 deve ser também fator de x ou fator de y. Concluímos que ao menos um dos dois inteiros x ou y é par. Mas isso é uma contradição!

Universidade Federal do Ceará
Computer Science Department
Samy Sá (samy@ufc.br)

Exemplo - Contradição

Teorema

"O produto de dois números ímpares é ímpar" (por Contradição)

Prova

Dados dois inteiros x, y, suponha que x, y ímpares. Suponha também que o produto xy é par. Logo, deve existir um inteiro k tal que $xy = 2k$. Independente da fatoração que fizermos de k, seus fatores seriam reorganizados para formar os números x e y. Portanto, o fator 2 deve ser também fator de x ou fator de y. Concluímos que ao menos um dos dois inteiros x ou y é par. Mas isso é uma contradição! Logo, como a contradição segue da suposição de que xy é par, o produto xy deve ser ímpar. ■

Universidade Federal do Ceará
Computer Science Department
Samy Sá (samy@ufc.br)

Outline

Universidade Federal do Ceará
Computer Science Department
Samy Sá (samy@ufc.br)

Comparativo

	PD	Contraposição	Contradição
Assuma...	p	$\neg q$	$p, \neg q$
Desenvolva	$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$
Conclua...	q	$\neg p$	$\perp$
Resultado	$p \to q$	$p \to q$	$p \to q$

Universidade Federal do Ceará
Computer Science Department
Samy Sá (samy@ufc.br)

Outline

Exercícios

Escolha um dos problemas:

1. A soma de dois inteiros ímpares é par.
2. Se x é um quadrado perfeito, então $x + 2$ não é um quadrado perfeito.
3. Se x é irracional, então $\frac{1}{x}$ é irracional.

Universidade Federal do Ceará
Computer Science Department
Samy Sá (samy@ufc.br)

Exercícios

Escolha um dos problemas:

1. A soma de dois inteiros ímpares é par.
2. Se x é um quadrado perfeito, então $x + 2$ não é um quadrado perfeito.
3. Se x é irracional, então $\frac{1}{x}$ é irracional.

Resolva-o por...

a) Prova Direta;

b) por Contraposição;

c) por Contradição.