Sequências e Somas - Parte I

Matemática Discreta

Prof. MSc. Samy Sá

Universidade Federal do Ceará
Campus de Quixadá

26 de fevereiro de 2014

Universidade Federal do Ceará
Computer Science Department
Samy Sá (samy@ufc.br)

Outline

Universidade Federal do Ceará
Computer Science Department
Samy Sá (samy@ufc.br)

Outline

Universidade Federal do Ceará
Computer Science Department
Samy Sá (samy@ufc.br)

Prévia: Funções

Definição

Função

Sejam S e T dois conjuntos não vazios, uma função de S para T é uma associação que leva cada elemento de S a exatamente um elemento de T. Escrevemos $f(a) = b$ se b é o único elemento de T associado pela função f ao elemento a de S. Se f é uma função de S para T, escrevemos $f : S \rightarrow T$.

Universidade Federal do Ceará
Computer Science Department
Samy Sá (samy@ufc.br)

Prévia: Funções

Exemplo

Dados os conjuntos:

- $S = \{$ *Aldo, Bia, Carla, Dario,Edu* $\}$, *clientes de uma locadora; e*
- $T = \{$ *Ação, Comédia, Drama, Romance, Terror* $\}$, *dos gêneros de filmes disponíveis,*

Universidade Federal do Ceará
Computer Science Department
Samy Sá (samy@ufc.br)

Prévia: Funções

Exemplo

Dados os conjuntos:

- $S = \{$ *Aldo, Bia, Carla, Dario,Edu* $\}$*, clientes de uma locadora; e*
- $T = \{$ *Ação, Comédia, Drama, Romance, Terror* $\}$*, dos gêneros de filmes disponíveis,*

Podemos ter a seguinte função $f : S \to T$ *para indicar o gênero favorito de cada cliente da locadora:*

$$f = \{(\textit{Aldo, Comédia}), (\textit{Bia, Ação}), (\textit{Carla, Drama}), (\textit{Dario, Terror}), (\textit{Edu, Drama})\}.$$

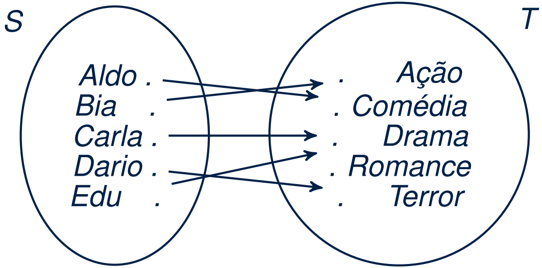
Universidade Federal do Ceará
Computer Science Department
Samy Sá (samy@ufc.br)

Prévia: Funções

Exemplo

$f = \{(\textit{Aldo, Comédia}), (\textit{Bia, Ação}), (\textit{Carla, Drama}), (\textit{Dario, Terror}), (\textit{Edu, Drama})\}.$

Podemos representá-la com um gráfico:



Samy Sá (samy@ufc.br)

Prévia: Funções

Exemplo (Não-Função)

Não-Função

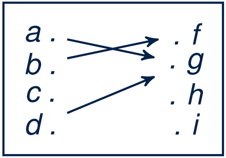


Figura: Uma correspondência de elementos que não é função.

Universidade Federal do Ceará
Computer Science Department
Samy Sá (samy@ufc.br)

Funções Injetoras e Sobrejetoras

Definição

Função Injetora

*Uma função é dita **um para um** ou uma **injeção** se e somente se $f(a) = f(b)$ implica que $a = b$ para quaisquer a, b do domínio de f. Uma função é dita injetora se ela é um para um.*

Funções Injetoras e Sobrejetoras

Definição

Função Injetora

Uma função é dita ***um para um*** *ou uma* ***injeção*** *se e somente se $f(a) = f(b)$ implica que $a = b$ para quaisquer a, b do domínio de f. Uma função é dita injetora se ela é um para um.*

Definição

Função Sobrejetora

Uma função $f : S \to T$ é uma ***sobrejeção*** *se e somente se todo elemento de T é imagem de ao menos um elemento de S. Uma função é dita sobrejetora se ela é uma sobrejeção.*

Funções Injetoras e Sobrejetoras

Uma **função** $f : S \to T$ satisfaz condições no seu domínio S:

1.S Todo elemento do **domínio** tem ao menos uma imagem.

2.S Nenhum elemento do **domínio** pode ter duas imagens.

Universidade Federal do Ceará
Computer Science Department
Samy Sá (samy@ufc.br)

Funções Injetoras e Sobrejetoras

Uma **função** $f : S \to T$ satisfaz condições no seu domínio S:

1.S Todo elemento do **domínio** tem ao menos uma imagem.

2.S Nenhum elemento do **domínio** pode ter duas imagens.

Para ser **sobrejetora**, a condição no contra-domínio T:

1.T Todo elemento do **contra-domínio** tem uma imagem inversa.

Universidade Federal do Ceará
Computer Science Department
Samy Sá (samy@ufc.br)

Funções Injetoras e Sobrejetoras

Uma **função** $f : S \to T$ satisfaz condições no seu domínio S:

1.S Todo elemento do **domínio** tem ao menos uma imagem.

2.S Nenhum elemento do **domínio** pode ter duas imagens.

Para ser **sobrejetora**, a condição no contra-domínio T:

1.T Todo elemento do **contra-domínio** tem uma imagem inversa.

Para ser **injetora**, a condição no contra-domínio T:

2.T Nenhum elemento do **contra-domínio** pode ter duas imagens inversas.

Universidade Federal do Ceará
Computer Science Department
Samy Sá (samy@ufc.br)

Prévia: Funções

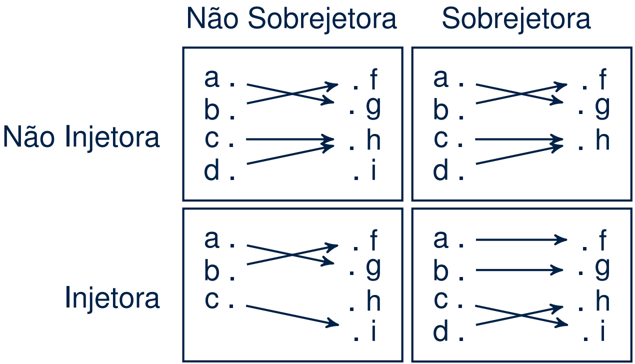


Figura: Diferentes tipos de funções

Universidade Federal do Ceará
Computer Science Department
Samy Sá (samy@ufc.br)

Outline

Samy Sá (samy@ufc.br)

Sequências

Sequências são listas ordenadas de elementos.

- Importantíssimas em matemática discreta, estruturas de dados e na especificação de diversos algoritmos.
- Buscaremos fórmulas para especificar sequências e somas dos seus termos.
- Sequências são funções (**!**)

Universidade Federal do Ceará
Computer Science Department
Samy Sá (samy@ufc.br)

Sequências

Sequências são listas ordenadas de elementos.

- Importantíssimas em matemática discreta, estruturas de dados e na especificação de diversos algoritmos.
- Buscaremos fórmulas para especificar sequências e somas dos seus termos.
- Sequências são funções (**!**)

IMPORTANTE!!!

Lembre-se sempre de que a ordem dos elementos importa nessas listas!

Universidade Federal do Ceará
Computer Science Department
Samy Sá (samy@ufc.br)

Sequências

Definição

Sequência

Uma sequência é uma função de um subconjunto dos inteiros I para algum outro conjunto S. Normalmente temos $I = \{0, 1, 2, ...\}$ ou $I = \{1, 2, 3, ...\}$. Em cada caso, usamos a notação a_n para nos referirmos à imagem do inteiro n. Chamamos cada a_n de um termo da sequência.

Universidade Federal do Ceará
Computer Science Department
Samy Sá (samy@ufc.br)

Sequências

Definição

Sequência

Uma sequência é uma função de um subconjunto dos inteiros I para algum outro conjunto S. Normalmente temos $I = \{0, 1, 2, ...\}$ ou $I = \{1, 2, 3, ...\}$. Em cada caso, usamos a notação a_n para nos referirmos à imagem do inteiro n. Chamamos cada a_n de um termo da sequência.

Constatação:

Uma sequência terá assinatura $f : I \rightarrow S$, onde $I \subseteq \mathbb{Z}$.

Universidade Federal do Ceará
Computer Science Department
Samy Sá (samy@ufc.br)

Sequências

Escreveremos $\{a_n\}$ para nos referirmos a uma sequência cujos termos serão definidos em função de n.

Exemplo

Cosidere a sequência $\{a_n\}$*, onde* $a_n = \frac{1}{n}$*.*

Universidade Federal do Ceará
Computer Science Department
Samy Sá (samy@ufc.br)

Sequências

Escreveremos $\{a_n\}$ para nos referirmos a uma sequência cujos termos serão definidos em função de n.

Exemplo

Cosidere a sequência $\{a_n\}$*, onde* $a_n = \frac{1}{n}$.

- *A lista dos termos será* $a_1, a_2, a_3, a_4, ...$

Universidade Federal do Ceará
Computer Science Department
Samy Sá (samy@ufc.br)

Sequências

Escreveremos $\{a_n\}$ para nos referirmos a uma sequência cujos termos serão definidos em função de n.

Exemplo

Cosidere a sequência $\{a_n\}$*, onde* $a_n = \frac{1}{n}$*.*

- *A lista dos termos será* $a_1, a_2, a_3, a_4, ...$
- *Os valores dos termos serão* $1, \frac{1}{2}, \frac{1}{3}, \frac{1}{4}, ...$

Universidade Federal do Ceará
Computer Science Department
Samy Sá (samy@ufc.br)

Outline

Universidade Federal do Ceará
Computer Science Department
Samy Sá (samy@ufc.br)

Progressões Aritméticas

Definição

Progressão Aritmética

Uma progressão aritmética (PA) é uma sequência da forma

$$a_0, a_0 + d, a_0 + 2d, a_0 + 3d, ..., a_0 + nd, ...,$$

onde o termo inicial a_0 e a diferença comum ou (razão aritmética) d são números reais.

Universidade Federal do Ceará
Computer Science Department
Samy Sá (samy@ufc.br)

Progressões Aritméticas

Definição

Progressão Aritmética

Uma progressão aritmética (PA) é uma sequência da forma

$$a_0, a_0 + d, a_0 + 2d, a_0 + 3d, ..., a_0 + nd, ...,$$

onde o termo inicial a_0 e a diferença comum ou (razão aritmética) d são números reais.

Constatação:

Uma progressão aritmética é caracterizada pela função $f(x) = dx + a$. Dizemos que a PA é a análoga discreta de $f(x)$.

Universidade Federal do Ceará
Computer Science Department
Samy Sá (samy@ufc.br)

Progressões Aritméticas

Exemplo

A sequência $\{s_n\}$ *com* $s_n = -1 + 4n$ *é uma progressão aritmética.*

PERGUNTA:

- *Qual o primeiro termo da lista?*

Universidade Federal do Ceará
Computer Science Department
Samy Sá (samy@ufc.br)

Progressões Aritméticas

Exemplo

A sequência $\{s_n\}$ *com* $s_n = -1 + 4n$ *é uma progressão aritmética.*

PERGUNTA:

- *Qual o primeiro termo da lista?* $s_0 = -1 + 4.0 = -1$
- *Qual a razão aritmética da PA?*

Universidade Federal do Ceará
Computer Science Department
Samy Sá (samy@ufc.br)

Progressões Aritméticas

Exemplo

A sequência $\{s_n\}$ *com* $s_n = -1 + 4n$ *é uma progressão aritmética.*

PERGUNTA:

- *Qual o primeiro termo da lista?* $s_0 = -1 + 4.0 = -1$
- *Qual a razão aritmética da PA?* $d = 4$

Universidade Federal do Ceará
Computer Science Department
Samy Sá (samy@ufc.br)

Progressões Aritméticas

Exemplo

A sequência $\{s_n\}$ *com* $s_n = -1 + 4n$ *é uma progressão aritmética.*

PERGUNTA:

- *Qual o primeiro termo da lista?* $s_0 = -1 + 4.0 = -1$
- *Qual a razão aritmética da PA?* $d = 4$

- *A lista começa com* $-1, 3, 7, 11, 15, ...$ *(é infinita e crescente)*

Universidade Federal do Ceará
Computer Science Department
Samy Sá (samy@ufc.br)

Progressões Aritméticas

Exemplo

A sequência $\{t_n\}$ *com* $t_n = -3n + 7$ *é uma progressão aritmética.*

PERGUNTA:

- *Qual o primeiro termo da lista?*

Universidade Federal do Ceará
Computer Science Department
Samy Sá (samy@ufc.br)

Progressões Aritméticas

Exemplo

A sequência $\{t_n\}$ *com* $t_n = -3n + 7$ *é uma progressão aritmética.*

PERGUNTA:

- *Qual o primeiro termo da lista?* $t_0 = -3.0 + 7 = 7$
- *Qual a razão aritmética da PA?*

Universidade Federal do Ceará
Computer Science Department
Samy Sá (samy@ufc.br)

Progressões Aritméticas

Exemplo

A sequência $\{t_n\}$ *com* $t_n = -3n + 7$ *é uma progressão aritmética.*

PERGUNTA:

- *Qual o primeiro termo da lista?* $t_0 = -3.0 + 7 = 7$
- *Qual a razão aritmética da PA?* $d = -3$

Universidade Federal do Ceará
Computer Science Department
Samy Sá (samy@ufc.br)

Progressões Aritméticas

Exemplo

A sequência $\{t_n\}$ *com* $t_n = -3n + 7$ *é uma progressão aritmética.*

PERGUNTA:

- *Qual o primeiro termo da lista?* $t_0 = -3.0 + 7 = 7$
- *Qual a razão aritmética da PA?* $d = -3$

- *A lista começa com* $7, 4, 1, -2, ...$ *(é infinita e decrescente)*

Universidade Federal do Ceará
Computer Science Department
Samy Sá (samy@ufc.br)

Outline

Universidade Federal do Ceará
Computer Science Department
Samy Sá (samy@ufc.br)

Progressões Geométicas

Definição

Progressão Geomética

Uma progressão geomética (PG) é uma sequência da forma

$$a_0, a_0.r, a_0.r^2, a_0.r^3, ..., a_0.r^n, ...,$$

onde o termo inicial a_0 e o multiplicador comum (ou razão geomética) r são números reais.

Universidade Federal do Ceará
Computer Science Department
Samy Sá (samy@ufc.br)

Progressões Geométicas

Definição

Progressão Geomética

Uma progressão geomética (PG) é uma sequência da forma

$$a_0, a_0.r, a_0.r^2, a_0.r^3, ..., a_0.r^n, ...,$$

onde o termo inicial a_0 e o multiplicador comum (ou razão geomética) r são números reais.

Constatação:

Uma progressão geomética é caracterizada pela função $f(x) = ar^x$. Dizemos que a PG é a análoga discreta desta $f(x)$.

Universidade Federal do Ceará
Computer Science Department
Samy Sá (samy@ufc.br)

Progressões Geométicas

Exemplo

A sequência $\{c_n\}$ *com* $c_n = 2.5^n$ *é uma progressão geomética.*

PERGUNTA:

- *Qual o primeiro termo da lista?*

Universidade Federal do Ceará
Computer Science Department
Samy Sá (samy@ufc.br)

Progressões Geométicas

Exemplo

A sequência $\{c_n\}$ *com* $c_n = 2.5^n$ *é uma progressão geomética.*

PERGUNTA:

- *Qual o primeiro termo da lista?* $c_0 = 2.5^0 = 2.1 = 2$
- *Qual a razão aritmética da PG?*

Universidade Federal do Ceará
Computer Science Department
Samy Sá (samy@ufc.br)

Progressões Geométicas

Exemplo

A sequência $\{c_n\}$ *com* $c_n = 2.5^n$ *é uma progressão geomética.*

PERGUNTA:

- *Qual o primeiro termo da lista?* $c_0 = 2.5^0 = 2.1 = 2$
- *Qual a razão aritmética da PG?* $r = 5$

Universidade Federal do Ceará
Computer Science Department
Samy Sá (samy@ufc.br)

Progressões Geométicas

Exemplo

A sequência $\{c_n\}$ *com* $c_n = 2.5^n$ *é uma progressão geomética.*

PERGUNTA:

- *Qual o primeiro termo da lista?* $c_0 = 2.5^0 = 2.1 = 2$
- *Qual a razão aritmética da PG?* $r = 5$

- *A lista começa com* $2, 10, 50, 250, 1250, ...$ *(é infinita e crescente)*

Progressões Geométicas

Exemplo

A sequência $\{d_n\}$ *com* $d_n = 6.\frac{1}{3}^n$ *é uma progressão geomética.*

PERGUNTA:

- *Qual o primeiro termo da lista?*

Universidade Federal do Ceará
Computer Science Department
Samy Sá (samy@ufc.br)

Progressões Geométicas

Exemplo

A sequência $\{d_n\}$ *com* $d_n = 6.\frac{1}{3}^n$ *é uma progressão geomética.*

PERGUNTA:

- *Qual o primeiro termo da lista?* $d_0 = 6.\frac{1}{3}^0 = 6.1 = 6$
- *Qual a razão aritmética da PG?*

Progressões Geométicas

Exemplo

A sequência $\{d_n\}$ *com* $d_n = 6.\frac{1}{3}^n$ *é uma progressão geomética.*

PERGUNTA:

- *Qual o primeiro termo da lista?* $d_0 = 6.\frac{1}{3}^0 = 6.1 = 6$
- *Qual a razão aritmética da PG?* $r = \frac{1}{3}$

Universidade Federal do Ceará
Computer Science Department
Samy Sá (samy@ufc.br)

Progressões Geométicas

Exemplo

A sequência $\{d_n\}$ *com* $d_n = 6.\frac{1}{3}^n$ *é uma progressão geomética.*

PERGUNTA:

- *Qual o primeiro termo da lista?* $d_0 = 6.\frac{1}{3}^0 = 6.1 = 6$
- *Qual a razão aritmética da PG?* $r = \frac{1}{3}$

- *A lista começa com* $6, 2, \frac{2}{3}, \frac{2}{9}, \frac{2}{27}, ...$ *(é infinita e decrescente)*

Universidade Federal do Ceará
Computer Science Department
Samy Sá (samy@ufc.br)

Progressões Geométicas

Exemplo

A sequência $\{e_n\}$ *com* $e_n = -1^n$ *é uma progressão geomética.*

PERGUNTA:

- *Qual o primeiro termo da lista?*

Universidade Federal do Ceará
Computer Science Department
Samy Sá (samy@ufc.br)

Progressões Geométicas

Exemplo

A sequência $\{e_n\}$ *com* $e_n = -1^n$ *é uma progressão geomética.*

PERGUNTA:

- *Qual o primeiro termo da lista?* $e_0 = -1^0 = 1$
- *Qual a razão geomética da PG?*

Universidade Federal do Ceará
Computer Science Department
Samy Sá (samy@ufc.br)

Progressões Geométicas

Exemplo

A sequência $\{e_n\}$ *com* $e_n = -1^n$ *é uma progressão geomética.*

PERGUNTA:

- *Qual o primeiro termo da lista?* $e_0 = -1^0 = 1$
- *Qual a razão geomética da PG?* $r = -1$

Samy Sá (samy@ufc.br)

Progressões Geométicas

Exemplo

A sequência $\{e_n\}$ *com* $e_n = -1^n$ *é uma progressão geomética.*

PERGUNTA:

- *Qual o primeiro termo da lista?* $e_0 = -1^0 = 1$
- *Qual a razão geomética da PG?* $r = -1$

- *A lista começa com* $1, -1, 1, -1, 1, ...$ *(é infinita e não monótona)*

Universidade Federal do Ceará
Computer Science Department
Samy Sá (samy@ufc.br)

Outline

Universidade Federal do Ceará
Computer Science Department
Samy Sá (samy@ufc.br)

Relações de Recorrência

Motivação: Pode não ser simples determinar uma fórmula fechada para uma sequência...

Exemplo

Considere a sequência: $3, 5, 2, -3, -5, -2, ...$

PERGUNTA:

- *Qual seria o próximo termo da sequência?*

Universidade Federal do Ceará
Computer Science Department
Samy Sá (samy@ufc.br)

Relações de Recorrência

Motivação: Pode não ser simples determinar uma fórmula fechada para uma sequência...

Exemplo

Considere a sequência: $3, 5, 2, -3, -5, -2, ...$

PERGUNTA:

- *Qual seria o próximo termo da sequência?* $-2 - -5 = 3.$
- *Qual seria o termo seguinte?*

Universidade Federal do Ceará
Computer Science Department
Samy Sá (samy@ufc.br)

Relações de Recorrência

Motivação: Pode não ser simples determinar uma fórmula fechada para uma sequência...

Exemplo

Considere a sequência: $3, 5, 2, -3, -5, -2, ...$

PERGUNTA:

- *Qual seria o próximo termo da sequência?* $-2 - -5 = 3$.
- *Qual seria o termo seguinte?* $3 - -2 = 5$.
- *Uma fórmula fechada para esta sequência?*

Samy Sá (samy@ufc.br)

Relações de Recorrência

Motivação: Pode não ser simples determinar uma fórmula fechada para uma sequência...

Exemplo

Considere a sequência: $3, 5, 2, -3, -5, -2, ...$

PERGUNTA:

- *Qual seria o próximo termo da sequência?* $-2 - -5 = 3.$
- *Qual seria o termo seguinte?* $3 - -2 = 5.$
- *Uma fórmula fechada para esta sequência?*

Constatação:

Parece impossível definir a sequência com uma fórmula fechada.

Universidade Federal do Ceará
Computer Science Department
Samy Sá (samy@ufc.br)

Relações de Recorrência

Definição

Relação de Recorrência

Uma relação de recorrência para a sequência $\{a_n\}$ é uma equação que expressa cada a_n em função de um ou mais termos que o antecedem, ou seja, em termos de $a_0, a_1, ..., a_{n-1}$, para $n \geq k$, onde k é um inteiro não negativo. Dizemos que sequência resolve uma solução da relação de recorrência se seus termos satisfazem a relação de recorrência.

Universidade Federal do Ceará
Computer Science Department
Samy Sá (samy@ufc.br)

Relações de Recorrência

Exemplo

Seja $\{a_n\}$ *a sequência que satisfaz a relação de recorrência* $a_n = a_{n-1} + 3$ *para* $n = 1, 2, 3, ...,$ *e suponha que* $a_0 = 2$*.*

PERGUNTA:

- *Quais são os termos* a_1, a_2, a_3*?*

Universidade Federal do Ceará
Computer Science Department
Samy Sá (samy@ufc.br)

Relações de Recorrência

Exemplo

Seja $\{a_n\}$ *a sequência que satisfaz a relação de recorrência* $a_n = a_{n-1} + 3$ *para* $n = 1, 2, 3, ...,$ *e suponha que* $a_0 = 2$*.*

PERGUNTA:

- *Quais são os termos* a_1, a_2, a_3*?*
  - $a_1 = a_0 + 3 = 2 + 3 = 5$

Universidade Federal do Ceará
Computer Science Department
Samy Sá (samy@ufc.br)

Relações de Recorrência

Exemplo

Seja $\{a_n\}$ *a sequência que satisfaz a relação de recorrência* $a_n = a_{n-1} + 3$ *para* $n = 1, 2, 3, ...,$ *e suponha que* $a_0 = 2$.

PERGUNTA:

- *Quais são os termos* a_1, a_2, a_3*?*
  - $a_1 = a_0 + 3 = 2 + 3 = 5$
  - $a_2 = a_1 + 3 = 5 + 3 = 8$

Universidade Federal do Ceará
Computer Science Department
Samy Sá (samy@ufc.br)

Relações de Recorrência

Exemplo

Seja $\{a_n\}$ *a sequência que satisfaz a relação de recorrência* $a_n = a_{n-1} + 3$ *para* $n = 1, 2, 3, ...,$ *e suponha que* $a_0 = 2$.

PERGUNTA:

- *Quais são os termos* a_1, a_2, a_3*?*
  - $a_1 = a_0 + 3 = 2 + 3 = 5$
  - $a_2 = a_1 + 3 = 5 + 3 = 8$
  - $a_3 = a_2 + 3 = 8 + 3 = 11$

Universidade Federal do Ceará
Computer Science Department
Samy Sá (samy@ufc.br)

Relações de Recorrência

Exemplo

Seja $\{a_n\}$ a sequência que satisfaz a relação de recorrência $a_n = a_{n-1} + 3$ para $n = 1, 2, 3, ...$, e suponha que $a_0 = 2$.

PERGUNTA:

- *Quais são os termos a_1, a_2, a_3?*
  - $a_1 = a_0 + 3 = 2 + 3 = 5$
  - $a_2 = a_1 + 3 = 5 + 3 = 8$
  - $a_3 = a_2 + 3 = 8 + 3 = 11$

Constatação:

Foi necessário calcular algum termo anterior antes de cada a_n.

Universidade Federal do Ceará
Computer Science Department
Samy Sá (samy@ufc.br)

Relações de Recorrência

Exemplo

Seja $\{a_n\}$ *a sequência que satisfaz a relação de recorrência* $a_n = a_{n-1} - a_{n-2}$ *para* $n = 2, 3, 4, ...,$ *e suponha que* $a_0 = 3$ *e* $a_1 = 5$*.*

PERGUNTA:

- *Quais são os termos* a_2, a_3, a_4*?*

Universidade Federal do Ceará
Computer Science Department
Samy Sá (samy@ufc.br)

Relações de Recorrência

Exemplo

Seja $\{a_n\}$ *a sequência que satisfaz a relação de recorrência* $a_n = a_{n-1} - a_{n-2}$ *para* $n = 2, 3, 4, ...,$ *e suponha que* $a_0 = 3$ *e* $a_1 = 5$*.*

PERGUNTA:

- *Quais são os termos* a_2, a_3, a_4*?*
  - $a_2 = a_1 - a_0 = 5 - 3 = 2$

Universidade Federal do Ceará
Computer Science Department
Samy Sá (samy@ufc.br)

Relações de Recorrência

Exemplo

Seja $\{a_n\}$ *a sequência que satisfaz a relação de recorrência* $a_n = a_{n-1} - a_{n-2}$ *para* $n = 2, 3, 4, ...,$ *e suponha que* $a_0 = 3$ *e* $a_1 = 5$.

PERGUNTA:

- *Quais são os termos* a_2, a_3, a_4*?*
  - $a_2 = a_1 - a_0 = 5 - 3 = 2$
  - $a_3 = a_2 - a_1 = 2 - 5 = -3$

Universidade Federal do Ceará
Computer Science Department
Samy Sá (samy@ufc.br)

Relações de Recorrência

Exemplo

Seja $\{a_n\}$ *a sequência que satisfaz a relação de recorrência* $a_n = a_{n-1} - a_{n-2}$ *para* $n = 2, 3, 4, ...,$ *e suponha que* $a_0 = 3$ *e* $a_1 = 5$.

PERGUNTA:

- *Quais são os termos* a_2, a_3, a_4*?*
  - $a_2 = a_1 - a_0 = 5 - 3 = 2$
  - $a_3 = a_2 - a_1 = 2 - 5 = -3$
  - $a_4 = a_3 - a_2 = -3 - 2 = -5$

Universidade Federal do Ceará
Computer Science Department
Samy Sá (samy@ufc.br)

Relações de Recorrência

Exemplo

Seja $\{a_n\}$ *a sequência que satisfaz a relação de recorrência* $a_n = a_{n-1} - a_{n-2}$ *para* $n = 2, 3, 4, ...,$ *e suponha que* $a_0 = 3$ *e* $a_1 = 5$.

PERGUNTA:

- *Quais são os termos* a_2, a_3, a_4*?*
  - $a_2 = a_1 - a_0 = 5 - 3 = 2$
  - $a_3 = a_2 - a_1 = 2 - 5 = -3$
  - $a_4 = a_3 - a_2 = -3 - 2 = -5$

Constatação:

É a sequência $3, 5, 2, -3, -5, -2, 3, 5, ...$ *(motivação).*

Universidade Federal do Ceará
Computer Science Department
Samy Sá (samy@ufc.br)

Sequência de Fibonacci

Definição

Sequência de Fibonacci

A sequência de Fibonacci $f_0, f_1, f_2, ...$ é definida pela relação de recorrência com condições iniciais $f_0 = 0$, $f_1 = 1$ e $f_n = f_{n-1} + f_{n-2}$ para $n = 2, 3, 4, ...$

PERGUNTA:

- *Quais são os números f_2, f_3, f_4, f_5, f_6 de Fibonacci?*

Universidade Federal do Ceará
Computer Science Department
Samy Sá (samy@ufc.br)

Sequência de Fibonacci

Definição

Sequência de Fibonacci

A sequência de Fibonacci $f_0, f_1, f_2, \ldots$ é definida pela relação de recorrência com condições iniciais $f_0 = 0$, $f_1 = 1$ e $f_n = f_{n-1} + f_{n-2}$ para $n = 2, 3, 4, \ldots$

PERGUNTA:

- *Quais são os números f_2, f_3, f_4, f_5, f_6 de Fibonacci?*
  - $f_2 = f_1 + f_0 = 1 + 0 = 1$

Universidade Federal do Ceará
Computer Science Department
Samy Sá (samy@ufc.br)

Sequência de Fibonacci

Definição

Sequência de Fibonacci

A sequência de Fibonacci $f_0, f_1, f_2, ...$ é definida pela relação de recorrência com condições iniciais $f_0 = 0$, $f_1 = 1$ e $f_n = f_{n-1} + f_{n-2}$ para $n = 2, 3, 4, ...$

PERGUNTA:

- *Quais são os números f_2, f_3, f_4, f_5, f_6 de Fibonacci?*
  - $f_2 = f_1 + f_0 = 1 + 0 = 1$
  - $f_3 = f_2 + f_1 = 1 + 1 = 2$

Universidade Federal do Ceará
Computer Science Department
Samy Sá (samy@ufc.br)

Sequência de Fibonacci

Definição

Sequência de Fibonacci

A sequência de Fibonacci $f_0, f_1, f_2, ...$ é definida pela relação de recorrência com condições iniciais $f_0 = 0$, $f_1 = 1$ e $f_n = f_{n-1} + f_{n-2}$ para $n = 2, 3, 4, ...$

PERGUNTA:

- *Quais são os números f_2, f_3, f_4, f_5, f_6 de Fibonacci?*
  - $f_2 = f_1 + f_0 = 1 + 0 = 1$
  - $f_3 = f_2 + f_1 = 1 + 1 = 2$
  - $f_4 = f_3 + f_2 = 2 + 1 = 3$

Universidade Federal do Ceará
Computer Science Department
Samy Sá (samy@ufc.br)

Sequência de Fibonacci

Definição

Sequência de Fibonacci

A sequência de Fibonacci $f_0, f_1, f_2, \ldots$ é definida pela relação de recorrência com condições iniciais $f_0 = 0$, $f_1 = 1$ e $f_n = f_{n-1} + f_{n-2}$ para $n = 2, 3, 4, \ldots$

PERGUNTA:

- *Quais são os números f_2, f_3, f_4, f_5, f_6 de Fibonacci?*
    - $f_2 = f_1 + f_0 = 1 + 0 = 1$
    - $f_3 = f_2 + f_1 = 1 + 1 = 2$
    - $f_4 = f_3 + f_2 = 2 + 1 = 3$
    - $f_5 = f_4 + f_3 = 3 + 2 = 5$

Universidade Federal do Ceará
Computer Science Department
Samy Sá (samy@ufc.br)

Sequência de Fibonacci

Definição

Sequência de Fibonacci

A sequência de Fibonacci $f_0, f_1, f_2, ...$ é definida pela relação de recorrência com condições iniciais $f_0 = 0$, $f_1 = 1$ e $f_n = f_{n-1} + f_{n-2}$ para $n = 2, 3, 4, ...$

PERGUNTA:

- *Quais são os números f_2, f_3, f_4, f_5, f_6 de Fibonacci?*
  - $f_2 = f_1 + f_0 = 1 + 0 = 1$
  - $f_3 = f_2 + f_1 = 1 + 1 = 2$
  - $f_4 = f_3 + f_2 = 2 + 1 = 3$
  - $f_5 = f_4 + f_3 = 3 + 2 = 5$
  - $f_6 = f_5 + f_4 = 5 + 3 = 8$

Universidade Federal do Ceará
Computer Science Department
Samy Sá (samy@ufc.br)

Outline

Universidade Federal do Ceará
Computer Science Department
Samy Sá (samy@ufc.br)

Sequências Importantes

n^o termo	primeiros 10 termos
n^2	$1, 4, 9, 16, 35, 36, 49, 64, 81, 100, ...$
n^3	$1, 8, 27, 64, 125, 216, 343, 512, 729, 1000...$
n^4	$1, 16, 81, 256, 625, 1296, 2401, 4096, 6561, 10000, ...$
2^n	$2, 4, 8, 16, 32, 64, 128, 256, 512, 1024, ...$
3^n	$3, 9, 27, 81, 243, 729, 2187, 6561, 19683, 59049, ...$
$n!$	$1, 2, 6, 24, 120, 720, 5040, 40320, 362880, 3628800, ...$
f_n	$1, 1, 2, 3, 5, 8, 13, 21, 34, 55, 89, ...$

Tabela: Algumas sequências importantes.

Universidade Federal do Ceará
Computer Science Department
Samy Sá (samy@ufc.br)

Outline

Universidade Federal do Ceará
Computer Science Department
Samy Sá (samy@ufc.br)

Somatórios

Envolve a soma de elementos de uma sequência $\{a_n\}$.

- Pode ser qualquer parte da sequência e saltar elementos.
- Utiliza uma variável chamada **índice** para navegar os termos a serem somados.

Universidade Federal do Ceará
Computer Science Department
Samy Sá (samy@ufc.br)

Somatórios

Envolve a soma de elementos de uma sequência $\{a_n\}$.

- Pode ser qualquer parte da sequência e saltar elementos.
- Utiliza uma variável chamada **índice** para navegar os termos a serem somados.

Exemplo

A soma dos termos $a_m, a_{m+1}, ..., a_n$ pode ser expressa como

$$\sum_{j=m}^{n} a_j, \quad \textstyle\sum_{j=m}^{n} a_j, \quad \textit{or} \quad \textstyle\sum_{m \leq j \leq n} a_j$$

Universidade Federal do Ceará
Computer Science Department
Samy Sá (samy@ufc.br)

Somatórios

A notação envolve os seguintes elementos:

- **j**, a variável de índice
- **m**, o limite inferior do índice
- **n**, o limite superior do índice
- A função que define os elementos da sequência

Exemplo

$$\sum_{j=m}^{n} a_j$$

Universidade Federal do Ceará
Computer Science Department
Samy Sá (samy@ufc.br)

Somatórios

Exemplo

$$\sum_{j=1}^{100} \frac{1}{j}$$

Universidade Federal do Ceará
Computer Science Department
Samy Sá (samy@ufc.br)

Somatórios

Exemplo

$$\sum_{j=1}^{100} \frac{1}{j}$$

Constatação:

O somatório envolve os termos $a_1, a_2, a_3, ..., a_{100}$ *da sequência* $\{a_j\}$ *t.q.* $a_j = \frac{1}{j}$.

Universidade Federal do Ceará
Computer Science Department
Samy Sá (samy@ufc.br)

Somatórios

Exemplo

$$\sum_{j=1}^{100} \frac{1}{j}$$

Constatação:

O somatório envolve os termos $a_1, a_2, a_3, ..., a_{100}$ *da sequência* $\{a_j\}$ *t.q.* $a_j = \frac{1}{j}$.

Constatação:

O resultado será a soma $\frac{1}{1} + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + ... + \frac{1}{100}$.

Universidade Federal do Ceará
Computer Science Department
Samy Sá (samy@ufc.br)

Somatórios

Exemplo

$$\sum_{j=1}^{5} j^2$$

Universidade Federal do Ceará
Computer Science Department
Samy Sá (samy@ufc.br)

Somatórios

Exemplo

$$\sum_{j=1}^{5} j^2$$

Constatação:

O somatório envolve os termos a_1, a_2, a_3, a_4, a_5 *da sequência* $\{a_j\}$ *t.q.* $a_j = j^2$.

Somatórios

Exemplo

$$\sum_{j=1}^{5} j^2$$

Constatação:

O somatório envolve os termos a_1, a_2, a_3, a_4, a_5 *da sequência* $\{a_j\}$ *t.q.* $a_j = j^2$.

Constatação:

O resultado será a soma
$1^2 + 2^2 + 3^2 + 4^2 + 5^2 = 1 + 4 + 9 + 16 + 25 = 55.$

Universidade Federal do Ceará
Computer Science Department
Samy Sá (samy@ufc.br)

Somatórios

Exemplo

$$\sum_{k=4}^{8} (-1)^k$$

Universidade Federal do Ceará
Computer Science Department
Samy Sá (samy@ufc.br)

Somatórios

Exemplo

$$\sum_{k=4}^{8} (-1)^k$$

Constatação:

O somatório envolve os termos $a_4, a_5, ..., a_8$ *da sequência* $\{a_k\}$ *t.q.* $a_k = (-1)^k$.

Universidade Federal do Ceará
Computer Science Department
Samy Sá (samy@ufc.br)

Somatórios

Exemplo

$$\sum_{k=4}^{8}(-1)^k$$

Constatação:

O somatório envolve os termos $a_4, a_5, ..., a_8$ *da sequência* $\{a_k\}$ *t.q.* $a_k = (-1)^k$.

Constatação:

O resultado será a soma $(-1)^4 + (-1)^5 + (-1)^6 + (-1)^7 + (-1)^8 = 1 + -1 + 1 + -1 + 1 = 1$.

Universidade Federal do Ceará
Computer Science Department
Samy Sá (samy@ufc.br)

Outline

Universidade Federal do Ceará
Computer Science Department
Samy Sá (samy@ufc.br)

Propriedades do Somatório

As regras comuns da aritmética se aplicam a somatórios.

$$\textit{Comutatividade} \quad \sum_{j=m}^{n} a_j + b_j = \sum_{j=m}^{n} a_j + \sum_{j=m}^{n} b_j$$

Universidade Federal do Ceará
Computer Science Department
Samy Sá (samy@ufc.br)

Propriedades do Somatório

As regras comuns da aritmética se aplicam a somatórios.

$$\textit{Comutatividade} \quad \sum_{j=m}^{n} a_j + b_j = \sum_{j=m}^{n} a_j + \sum_{j=m}^{n} b_j$$

$$\textit{Associatividade} \quad \sum_{j=m}^{n} a_j = \sum_{j=m}^{l} a_j + \sum_{j=l+1}^{n} a_j$$

Universidade Federal do Ceará
Computer Science Department
Samy Sá (samy@ufc.br)

Propriedades do Somatório

As regras comuns da aritmética se aplicam a somatórios.

$$\textit{Comutatividade} \quad \sum_{j=m}^{n} a_j + b_j = \sum_{j=m}^{n} a_j + \sum_{j=m}^{n} b_j$$

$$\textit{Associatividade} \quad \sum_{j=m}^{n} a_j = \sum_{j=m}^{l} a_j + \sum_{j=l+1}^{n} a_j$$

$$\textit{Distributividade} \quad \sum_{j=m}^{n} k a_j = k \sum_{j=m}^{n} a_j$$

Universidade Federal do Ceará
Computer Science Department
Samy Sá (samy@ufc.br)

Propriedades do Somatório

Vamos analizar a igualdade...

$$\sum_{j=m}^{n} a_j + b_j =$$

Universidade Federal do Ceará
Computer Science Department
Samy Sá (samy@ufc.br)

Propriedades do Somatório

Vamos analizar a igualdade...

$$\sum_{j=m}^{n} a_j + b_j = (a_m + b_m) + (a_{m+1} + b_{m+1}) + ...(a_n + b_n)$$

Universidade Federal do Ceará
Computer Science Department
Samy Sá (samy@ufc.br)

Propriedades do Somatório

Vamos analizar a igualdade...

$$\sum_{j=m}^{n} a_j + b_j = (a_m + b_m) + (a_{m+1} + b_{m+1}) + ...(a_n + b_n)$$

$$\sum_{j=m}^{n} a_j + b_j = (a_m + a_{m+1} + ... + a_n) + (b_m + b_{m+1} + ... + b_n)$$

Universidade Federal do Ceará
Computer Science Department
Samy Sá (samy@ufc.br)

Propriedades do Somatório

Vamos analizar a igualdade...

$$\sum_{j=m}^{n} a_j + b_j = (a_m + b_m) + (a_{m+1} + b_{m+1}) + ...(a_n + b_n)$$

$$\sum_{j=m}^{n} a_j + b_j = (a_m + a_{m+1} + ... + a_n) + (b_m + b_{m+1} + ... + b_n)$$

$$\sum_{j=m}^{n} a_j + b_j = \sum_{j=m}^{n} a_j + \sum_{j=m}^{n} b_j$$

Universidade Federal do Ceará
Computer Science Department
Samy Sá (samy@ufc.br)

Propriedades do Somatório

Vamos analizar a igualdade...

$$\sum_{j=m}^{n} a_j =$$

Universidade Federal do Ceará
Computer Science Department
Samy Sá (samy@ufc.br)

Propriedades do Somatório

Vamos analizar a igualdade...

$$\sum_{j=m}^{n} a_j = a_m + a_{m+1} + ... + a_n$$

Universidade Federal do Ceará
Computer Science Department
Samy Sá (samy@ufc.br)

Propriedades do Somatório

Vamos analizar a igualdade...

$$\sum_{j=m}^{n} a_j = a_m + a_{m+1} + ... + a_n$$

$$\sum_{j=m}^{n} a_j = a_m + a_{m+1} + ... + a_l + a_{l+1} + ... + a_n$$

Universidade Federal do Ceará
Computer Science Department
Samy Sá (samy@ufc.br)

Propriedades do Somatório

Vamos analizar a igualdade...

$$\sum_{j=m}^{n} a_j = a_m + a_{m+1} + ... + a_n$$

$$\sum_{j=m}^{n} a_j = a_m + a_{m+1} + ... + a_l + a_{l+1} + ... + a_n$$

$$\sum_{j=m}^{n} a_j = (a_m + a_{m+1} + ... + a_l) + (a_{l+1} + ... + a_n)$$

Universidade Federal do Ceará
Computer Science Department
Samy Sá (samy@ufc.br)

Propriedades do Somatório

Vamos analizar a igualdade...

$$\sum_{j=m}^{n} a_j = a_m + a_{m+1} + ... + a_n$$

$$\sum_{j=m}^{n} a_j = a_m + a_{m+1} + ... + a_l + a_{l+1} + ... + a_n$$

$$\sum_{j=m}^{n} a_j = (a_m + a_{m+1} + ... + a_l) + (a_{l+1} + ... + a_n)$$

$$\sum_{j=m}^{n} a_j = \sum_{j=m}^{l} a_j + \sum_{j=l+1}^{n} a_j$$

Universidade Federal do Ceará
Computer Science Department
Samy Sá (samy@ufc.br)

Propriedades do Somatório

Vamos analizar a igualdade...

$$\sum_{j=m}^{n} k.a_j =$$

Universidade Federal do Ceará
Computer Science Department
Samy Sá (samy@ufc.br)

Propriedades do Somatório

Vamos analizar a igualdade...

$$\sum_{j=m}^{n} k.a_j = k.a_m + k.a_{m+1} + ... + k.a_n$$

Universidade Federal do Ceará
Computer Science Department
Samy Sá (samy@ufc.br)

Propriedades do Somatório

Vamos analizar a igualdade...

$$\sum_{j=m}^{n} k.a_j = k.a_m + k.a_{m+1} + ... + k.a_n$$

$$\sum_{j=m}^{n} a_j = k.(a_m + a_{m+1} + ... + a_n)$$

Universidade Federal do Ceará
Computer Science Department
Samy Sá (samy@ufc.br)

Propriedades do Somatório

Vamos analizar a igualdade...

$$\sum_{j=m}^{n} k.a_j = k.a_m + k.a_{m+1} + ... + k.a_n$$

$$\sum_{j=m}^{n} a_j = k.(a_m + a_{m+1} + ... + a_n)$$

$$\sum_{j=m}^{n} a_j = k\sum_{j=m}^{n} a_j$$

Universidade Federal do Ceará
Computer Science Department
Samy Sá (samy@ufc.br)

Outline

Universidade Federal do Ceará
Computer Science Department
Samy Sá (samy@ufc.br)

Mudanças de Índice

Às vezes pode ser importante mudarmos o índice de um somatório.

Exemplo

Considere a soma $\sum_{j=1}^{10} j + \sum_{k=3}^{12}(1-k)$

Podemos reescrever a soma mudando o índice de uma delas:

$$\sum_{j=1}^{10} j + \sum_{k=3}^{12}(1-k) = \sum_{j=1}^{10} j + \sum_{i=1}^{10}(1-i-2)$$

Universidade Federal do Ceará
Computer Science Department
Samy Sá (samy@ufc.br)

Mudanças de Índice

Às vezes pode ser importante mudarmos o índice de um somatório.

Exemplo

Considere a soma $\sum_{j=1}^{10} j + \sum_{k=3}^{12}(1-k)$

Podemos reescrever a soma mudando o índice de uma delas:

$$\sum_{j=1}^{10} j + \sum_{k=3}^{12}(1-k) = \sum_{j=1}^{10} j + \sum_{i=1}^{10}(1-i-2) = \sum_{j=1}^{10} j + (1-j-2)$$

Universidade Federal do Ceará
Computer Science Department
Samy Sá (samy@ufc.br)

Mudanças de Índice

Às vezes pode ser importante mudarmos o índice de um somatório.

Exemplo

Considere a soma $\sum_{j=1}^{10} j + \sum_{k=3}^{12}(1-k)$

Podemos reescrever a soma mudando o índice de uma delas:

$$\sum_{j=1}^{10} j + \sum_{k=3}^{12}(1-k) = \sum_{j=1}^{10} j + \sum_{i=1}^{10}(1-i-2) = \sum_{j=1}^{10} j + (1-j-2)$$

$$= \sum_{j=1}^{10} -1 = -1 + -1 + ... + -1 = -10.$$

Universidade Federal do Ceará
Computer Science Department
Samy Sá (samy@ufc.br)

Mudanças de Índice

Para realizar uma mudança do índice j para um novo índice k:

1. Encontramos uma função tal que $f(j) = k$.

Samy Sá (samy@ufc.br)

Mudanças de Índice

Para realizar uma mudança do índice j para um novo índice k:

1. Encontramos uma função tal que $f(j) = k$.
2. Isolamos j na equação cima e obtemos uma função sobre k.

Universidade Federal do Ceará
Computer Science Department
Samy Sá (samy@ufc.br)

Mudanças de Índice

Para realizar uma mudança do índice j para um novo índice k:

1. Encontramos uma função tal que $f(j) = k$.
2. Isolamos j na equação cima e obtemos uma função sobre k.
3. Substituimos as ocorrências de j da soma original pela expressão obtida.

Universidade Federal do Ceará
Computer Science Department
Samy Sá (samy@ufc.br)

Mudanças de Índice

Para realizar uma mudança do índice j para um novo índice k:

1. Encontramos uma função tal que $f(j) = k$.
2. Isolamos j na equação cima e obtemos uma função sobre k.
3. Substituimos as ocorrências de j da soma original pela expressão obtida.

Exemplo

Seja a soma $\sum_{j=1}^{5} j^2$*, desejamos indexá-la com inteiros de* 0 *a* 4*.*

Universidade Federal do Ceará
Computer Science Department
Samy Sá (samy@ufc.br)

Mudanças de Índice

Para realizar uma mudança do índice j para um novo índice k:

1. Encontramos uma função tal que $f(j) = k$.
2. Isolamos j na equação cima e obtemos uma função sobre k.
3. Substituimos as ocorrências de j da soma original pela expressão obtida.

Exemplo

Seja a soma $\sum_{j=1}^{5} j^2$*, desejamos indexá-la com inteiros de* 0 *a* 4*.*

1. *Encontramos* $f(j) = j - 1 = k$*.*

Mudanças de Índice

Para realizar uma mudança do índice j para um novo índice k:

1. Encontramos uma função tal que $f(j) = k$.
2. Isolamos j na equação cima e obtemos uma função sobre k.
3. Substituimos as ocorrências de j da soma original pela expressão obtida.

Exemplo

Seja a soma $\sum_{j=1}^{5} j^2$*, desejamos indexá-la com inteiros de* 0 *a* 4*.*

1. *Encontramos* $f(j) = j - 1 = k$*.*
2. *Obtemos* $j = k + 1$*.*

Universidade Federal do Ceará
Computer Science Department
Samy Sá (samy@ufc.br)

Mudanças de Índice

Para realizar uma mudança do índice j para um novo índice k:

1. Encontramos uma função tal que $f(j) = k$.
2. Isolamos j na equação cima e obtemos uma função sobre k.
3. Substituimos as ocorrências de j da soma original pela expressão obtida.

Exemplo

Seja a soma $\sum_{j=1}^{5} j^2$, *desejamos indexá-la com inteiros de* 0 *a* 4.

1. *Encontramos* $f(j) = j - 1 = k$.
2. *Obtemos* $j = k + 1$.
3. *Substituimos* j *por* $k + 1$ *na soma.* $\sum_{j=1}^{5} j^2 = \sum_{k=0}^{4} (k+1)^2$.

Samy Sá (samy@ufc.br)

Outline

Universidade Federal do Ceará
Computer Science Department
Samy Sá (samy@ufc.br)

Algumas Somas Importantes

Soma	Forma fechada
$\sum_{k=0}^{n} ar^k \quad (r \neq 0)$	$\frac{ar^{n+1}-a}{r-1}, r \neq 1$
$\sum_{k=0}^{n} a + dk$	$\frac{(a+d.0)+(a+d.n))(n+1)}{2}$
$\sum_{k=1}^{n} k$	$\frac{n(n+1)}{2}$
$\sum_{k=1}^{n} k^2$	$\frac{n(n+1)(2n+1)}{6}$
$\sum_{k=1}^{n} k^3$	$\frac{n^2(n+1)^2}{4}$

Tabela: Algumas somas importantes.

Universidade Federal do Ceará
Computer Science Department
Samy Sá (samy@ufc.br)

Algumas Somas Importantes

Com base nas somas acima, podemos concluir outras regras...

Exemplo

- $\sum_{k=m}^{n} ar^k = \sum_{k=1}^{n} ar^k - \sum_{k=1}^{m-1} ar^k = \frac{ar^{n+1}-a}{r-1} - \frac{ar^m-a}{r-1} = \frac{ar^{n+1}-ar^m}{r-1}, r \neq 1$
- $\sum_{k=m}^{n} k = \sum_{k=1}^{n} k - \sum_{k=1}^{m-1} k = \frac{n(n+1)}{2} - \frac{(m-1)((m-1)+1)}{2} = \frac{n(n+1)-m(m-1)}{2}$

Universidade Federal do Ceará
Computer Science Department
Samy Sá (samy@ufc.br)

Outline

Universidade Federal do Ceará
Computer Science Department
Samy Sá (samy@ufc.br)

Exercícios

1. Encontre o valor de cada uma das somas:

a) $\sum_{j=0}^{8}(1+(-1)^j)$

b) $\sum_{j=0}^{8}(2.3^j+3.2^j)$

c) $\sum_{j=0}^{8}(3^j-2^j)$

2. Mostre que $\sum_{j=1}^{n}(a_j-a_{j-1}) = a_n - a_0$

Universidade Federal do Ceará
Computer Science Department
Samy Sá (samy@ufc.br)

Exercícios

3. Encontre o valor de cada uma das somas:

a) $\sum_{k=100}^{200} k$

b) $\sum_{k=30}^{70} j^2$

4. Faça a mudança de índice para j começando de 1:

a) $\sum_{k=100}^{200} k$

b) $\sum_{k=30}^{70} j^2$

Universidade Federal do Ceará
Computer Science Department
Samy Sá (samy@ufc.br)

Outline

Universidade Federal do Ceará
Computer Science Department
Samy Sá (samy@ufc.br)

Avisos e Tarefas...

- LC sobre somas infinitas e somas aninhadas (após carnaval)
- LP do próximo tópico - Tema a definir (após carnaval)
- Teste 02 em 10/03.