O Princípio das Casas de Pombos

Matemática Discreta

Prof. MSc. Samy Sá

Universidade Federal do Ceará
Campus de Quixadá

30 de abril de 2014

Universidade Federal do Ceará
Computer Science Department
Samy Sá (samy@ufc.br)

Outline

Universidade Federal do Ceará
Computer Science Department
Samy Sá (samy@ufc.br)

Outline

Universidade Federal do Ceará
Computer Science Department
Samy Sá (samy@ufc.br)

Introdução

Suponha que 20 pombos voam para 19 casas de pombos para descansar. Por que há mais pombos que casas, alguma delas terá dois ou mais pombos.

- Também conhecido como Princípio das Gavetas de Dirichlet (Século XIX).
- O princípio é simples de enunciado, mas permite mostrar alguns resultados bem interessantes.

Universidade Federal do Ceará
Computer Science Department
Samy Sá (samy@ufc.br)

Introdução

Teorema (Princípio das Casas de Pombos)

Se k é um inteiro positivo e $k + 1$ ou mais objetos são colocados em k caixas, então ao menos um caixa conterá ao menos dois dos objetos.

Samy Sá (samy@ufc.br)

Introdução

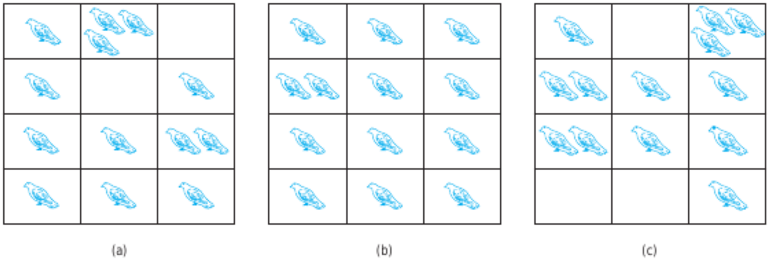

Figura: Há mais pombos que casas.

Universidade Federal do Ceará
Computer Science Department
Samy Sá (samy@ufc.br)

Introdução

Teorema (Princípio das Casas de Pombos)

Se k é um inteiro positivo e $k + 1$ ou mais objetos são colocados em k caixas, então ao menos um caixa conterá ao menos dois dos objetos.

Prova

Por contradição. Suponha que nenhuma caixa tenha dois ou mais objetos, i.e., cada caixa tem no máximo um objeto. Logo, teríamos no máximo k objetos, mas a isso é uma contradição, pois existem ao menos $k + 1$ objetos.

Universidade Federal do Ceará
Computer Science Department
Samy Sá (samy@ufc.br)

Introdução

Corolário

Uma função f de um conjunto com $k + 1$ ou mais elementos para outro com k elementos não é injetora.

Prova

Considere cada elemento do contradomínio como uma caixa, então temos k caixas. Para distribuir os elementos do domínio nessas caixas, pelo princípio das casas de pombos, ao menos uma delas terá dois ou mais elementos. Isso significa que ao menos um elemento do contradomínio é imagem de dois elementos ou mais elementos do domínio e, portanto, a função não será injetora.

Universidade Federal do Ceará
Computer Science Department
Samy Sá (samy@ufc.br)

Exemplos

- Em um grupo com 367 pessoas, há ao menos duas que fazem aniversário no mesmo dia, pois há apenas 366 datas disponíveis.
- Em um grupo com 27 palavras em inglês, ao menos duas delas começam com a mesma letra, pois há apenas 26 letras no alfabeto inglês.
- Se uma prova recebe notas de 0 a 100, quantos estudantes precisamos ter em uma turma para garantir que ao menos dois estudantes recebram a mesma nota?

Universidade Federal do Ceará
Computer Science Department
Samy Sá (samy@ufc.br)

Exemplos

Exemplo

Mostre que para qualquer inteiro n existe um múltiplo de n que tem apenas 0's e 1's na sua composição. Dica: Considere $n+1$ *números formados apenas com* 1*'s.*

Universidade Federal do Ceará
Computer Science Department
Samy Sá (samy@ufc.br)

Outline

Universidade Federal do Ceará
Computer Science Department
Samy Sá (samy@ufc.br)

O Princípio das Casas de Pombos Generalizado

Teorema (Princípio das Casas de Pombos Generalizado)

Se N objetos são colocados em k caixas, então há pelo menos uma caixa com no mínimo $\lceil N/k \rceil$ objetos.

Prova

A prova deste é similar à do original.

Samy Sá (samy@ufc.br)

O Princípio das Casas de Pombos Generalizado

Exemplo

Se um prova recebe notas A,B,C,D,F, quantos estudantes são necessários em uma turma para garantir que ao menos 6 deles recebam a mesma nota?

Solução: O mínimo é N tal que $\lceil N/5 \rceil = 6$. Portanto, $N = 26$.

Universidade Federal do Ceará
Computer Science Department
Samy Sá (samy@ufc.br)

O Princípio das Casas de Pombos Generalizado

- Quantas cartas precisam ser tiradas de um deck de 52 cartas para garantir que ao menos três têm o mesmo naipe?
- Quantas precisariam ser selecionadas para garantir que temos 3 cartas de copas?