Relações de Equivalência
Matemática Discreta

Prof. MSc. Samy Sá

Universidade Federal do Ceará
Campus de Quixadá

29 de maio de 2014

Universidade Federal do Ceará
Computer Science Department
Samy Sá (samy@ufc.br)

Outline

Universidade Federal do Ceará
Computer Science Department
Samy Sá (samy@ufc.br)

Outline

Universidade Federal do Ceará
Computer Science Department
Samy Sá (samy@ufc.br)

Introdução

- Na aritmética modular, dois números *s* e *t* são congruentes no módulo *m* se a divisão de *s* por *m* deixa o mesmo resto que a divisão de *b* por *m*.
- Nesse tipo de aritmética, números congruentes são tratados como se fossem o mesmo número.

Introdução

- Na aritmética modular, dois números *s* e *t* são congruentes no módulo *m* se a divisão de *s* por *m* deixa o mesmo resto que a divisão de *b* por *m*.
- Nesse tipo de aritmética, números congruentes são tratados como se fossem o mesmo número.
- Por exemplo, na aritmética módulo 6, os únicos resultados que existem são 0, 1, 2, 3, 4, 5.
- Os números 4, 10, 16, por exemplo, podem substituir uns aos outros livremente nessa aritmética. São EQUIVALENTES.

Universidade Federal do Ceará
Computer Science Department
Samy Sá (samy@ufc.br)

Propriedades de Congruência Módulo m

- Observe que $a \equiv b\ (mod\ m)$ é uma relação binária: $(a, b) \in \rho$ iff $m|(a - b)$.
- Quais as propriedades dessa relação?

Universidade Federal do Ceará
Computer Science Department
Samy Sá (samy@ufc.br)

Propriedades de Congruência Módulo m

- Observe que $a \equiv b \ (mod\ m)$ é uma relação binária: $(a, b) \in \rho$ iff $m|(a - b)$.
- Quais as propriedades dessa relação?
- Concluímos que ρ é reflexiva, simétrica e transitiva.

Outline

Introdução

Relações de Equivalência

Classes de Equivalência

Partições de Conjuntos

Exercícios

Universidade Federal do Ceará
Computer Science Department
Samy Sá (samy@ufc.br)

Relações de Equivalência

Definição

Uma relação num conjunto S é chamada de relação de equivalência se esta for reflexiva, simétrica e transitiva.

Definição

Quando dois elementos s e t são associados por uma relação de equivalência, dizemos que s e t são equivalentes e escrevemos $s \sim t$ *para denotar isto.*

Universidade Federal do Ceará
Computer Science Department
Samy Sá (samy@ufc.br)

Propriedades das Relações de Equivalência

- Reflexividade, pois todo elemento deve equivaler a si mesmo.
- Simetria, pois se s, t são equivalentes e $(s, t) \in \rho$, devemos ter tambem que $(t, s) \in \rho$.
- Transitividade, pois se s equivale a t e t equivale a um certo u, então s deve também equivaler a u.

Universidade Federal do Ceará
Computer Science Department
Samy Sá (samy@ufc.br)

Relações de Equivalência - Exemplos

- Seja R a relação nos números reais tal que aRb sse $a - b$ é um inteiro.
- Seja R a relação nas strings formadas com letras do nosso alfabeto tal que $(a, b) \in R$ sse as strings a, b têm o mesmo tamanho.
- A relação $a|b$ no conjunto dos inteiros positivos.

Universidade Federal do Ceará
Computer Science Department
Samy Sá (samy@ufc.br)

Relações de Equivalência - Exemplos

- Seja R a relação nos números reais tal que aRb sse $a - b$ é um inteiro. (É DE EQUIVALÊNCIA)
- Seja R a relação nas strings formadas com letras do nosso alfabeto tal que $(a, b) \in R$ sse as strings a, b têm o mesmo tamanho. (É DE EQUIVALÊNCIA)
- A relação $a|b$ no conjunto dos inteiros positivos. (NÃO É DE EQUIVALÊNCIA - NÃO É SIMÉTRICA)

Universidade Federal do Ceará
Computer Science Department
Samy Sá (samy@ufc.br)

Outline

Universidade Federal do Ceará
Computer Science Department
Samy Sá (samy@ufc.br)

Classes de Equivalência

Definição

Seja R uma relação de equivalência em S. O conjunto de todos os elementos relacionados ao elemento s é chamado de classe de equivalência de s e é denotado $[s]_R$. Quando estiver claro pelo contexto de que relação falamos, podemos deletar o R subscrito e escrever apenas $[s]$.

Constatação:

Em outras palavras, $[s]_R = \{t | (s, t) \in R\}$.

Constatação:

Uma relação de equivalência pode induzir uma, duas ou mais classes de equivalência.

Universidade Federal do Ceará
Computer Science Department
Samy Sá (samy@ufc.br)

Classes de Equivalência - Exemplos

- Seja R a relação nos números reais tal que aRb sse $a - b$ é um inteiro.
- Seja R a relação nas strings formadas com letras do nosso alfabeto tal que $(a, b) \in R$ sse as strings a, b têm o mesmo tamanho.
- A relação R nos inteiros tal que $(a, b) \in R$ sse $a \equiv b \ (mod \ m)$.

Universidade Federal do Ceará
Computer Science Department
Samy Sá (samy@ufc.br)

Outline

Universidade Federal do Ceará
Computer Science Department
Samy Sá (samy@ufc.br)

Partições de Conjuntos

Definição

Seja S uma conjunto. Uma partição de S é uma distribuição dos seus elementos em conjuntos $S_1, S_2, ..., S_n$ *tais que para quaisquer dois* S_i, S_j, *entre estes com* $i \neq j$, $S_i \cap S_j = \emptyset$.

Universidade Federal do Ceará
Computer Science Department
Samy Sá (samy@ufc.br)

Partições de Conjuntos

Teorema

Seja R uma relação de equivalência no conjunto S. As seguintes afirmações sobre elementos s, t são equivalentes:

1. aRb
2. $[a] = [b]$
3. $[a] \cap [b] \neq \emptyset$

Prova

Comentada em sala.

Universidade Federal do Ceará
Computer Science Department
Samy Sá (samy@ufc.br)

Partições de Conjuntos

Teorema

Seja R uma relação de equivalência no conjunto S. As seguintes afirmações sobre elementos s, t são equivalentes:

1. aRb
2. $[a] = [b]$
3. $[a] \cap [b] \neq \emptyset$

Prova

Comentada em sala.

Constatação:

EXTRA: Quando $[a]_R \neq [b]_R$, então $[a]_R \cap [b]_R = \emptyset$.

Universidade Federal do Ceará
Computer Science Department
Samy Sá (samy@ufc.br)

Partições de Conjuntos

Teorema

Seja R uma relação de equivalência em S. Então R forma uma partição de S. Além disso, dada uma partição $\{S_i | i \in \mathbb{Z}\}$ *do conjunto S, existe uma relação de equivalência que tem esses* S_i*'s como suas classes de equivalência.*

Universidade Federal do Ceará
Computer Science Department
Samy Sá (samy@ufc.br)

Partições de Conjuntos - Exemplos

- Seja R a relação nos números reais tal que aRb sse $a - b$ é um inteiro.
- Seja R a relação nas strings formadas com letras do nosso alfabeto tal que $(a, b) \in R$ sse as strings a, b têm o mesmo tamanho.
- A relação R nos inteiros tal que $(a, b) \in R$ sse $a \equiv b \ (mod \ m)$.

Universidade Federal do Ceará
Computer Science Department
Samy Sá (samy@ufc.br)

Outline

Universidade Federal do Ceará
Computer Science Department
Samy Sá (samy@ufc.br)

Partições de Conjuntos

1. Seja $S = \{0, 1, 2, 3\}$, verifique se cada relaçao abaixo em S é de equivalência. Caso não seja, destaque quais propriedades lhe faltam.
   1.1 $\{(0,0),(1,1),(2,2),(3,3)\}$
   1.2 $\{(0,0),(0,2),(2,0),(2,2),(2,3),(3,2),(3,3)\}$
   1.3 $\{(0,0),(1,1),(1,2),(2,1),(2,2),(3,3)\}$
   1.4 $\{(0,0),(1,1),(1,3),(2,2),(2,3),(3,1),(3,2),(3,3)\}$
   1.5 $\{(0,0),(0,1),(0,2),(1,0),(1,1),(1,2),(2,0),(2,2),(3,3)\}$
2. Para cada relação de equivalência identificada acima, descreva a partição de S definida pela relação.