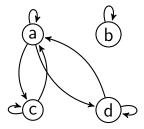
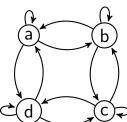
Matemática Discreta Lista de Exercícios 12

Relações de Equivalência

- 1. Quais destas relações em $\{0,1,2,3\}$ são relações de equivalência? Quais propriedades estão faltando nas que não são relações de equivalência?
 - (a) $\{(0,0),(1,1),(2,2),(3,3)\}$
 - (b) $\{(0,0),(0,2),(2,0),(2,2),(2,3),(3,2),(3,3)\}$
 - (c) $\{(0,0),(1,1),(1,2),(2,1),(2,2),(3,3)\}$
 - (d) $\{(0,0),(1,1),(1,3),(2,2),(2,3),(3,1),(3,2),(3,3)\}$
 - (e) $\{(0,0),(0,1),(0,2),(1,0),(1,1),(1,2),(2,0),(2,2),(3,3)\}$
- 2. Quais destas relações no conjuto de todas as funções de Z para Z são relações de equivalência? Quais propriedades estão faltando nas que não são relações de equivalência?
 - (a) $\{(f,g)|f(1)=g(1)\}$
 - (b) $\{(f,g)|f(0)=g(0) \text{ ou } f(1)=g(1)\}$
 - $\text{(c)} \ \ \{(f,g)|f(x)-g(x)=1 \text{ para } x \in \mathbf{Z}\}$
 - (d) $\{(f,g)|f(0)=g(1) \text{ e } f(1)=g(0)\}$
- Defina três relações de equivalência no conjunto de prédios de um campus universitário. Determine as classes de equivalência para cada uma dessas relações de equivalência.
- 4. Mostre que a relação de equivalência lógica no conjunto de todas as proposições compostas é uma relação de equivalência. Quais são as classes de equivalência de V e F?
- 5. Suponha que A seja um conjunto não vazio e que f seja uma função que tem A como seu domínio. Seja R a relação em A que consiste em todos os pares ordenados (x,y) tal que f(x)=f(y).
 - (a) Mostre que R é uma relação de equivalência em A.
 - (b) Quais são as classes de equivalência de R?
- 6. Mostre que a relação R, que consiste em todos os pares (x,y) tal que x e y são sequências de bits de comprimento maior que ou igual a 3, que coincidem em seus primeiros 3 bits, é uma relação de equivalência no conjunto de todas as sequências de bits de comprimento maior que ou igual a 3.
- 7. Seja R a relação no conjunto de pares ordenados de inteiros positivos tal que $((a,b),(c,d))\in R$ se e somente se a+d=b+c. Mostre que R é uma relação de equivalência.
- 8. Determine se as relações abaixo são de equivalência.





- 9. Mostre que a relação R no conjunto de todas as sequências de bits tal que s R t se e somente se s e t contiverem o mesmo número de 1s é uma relação de equivalência.
- 10. Quais são as classes de equivalência da sequência de bits 011 para a relação de equivalência do anterior?
- 11. Qual é a classe de congruência $[n]_5$ (ou seja, a classe de equivalência de n relativa à congruência módulo 5) quando n for
 - (a) 2?

(c) 6?

(b) 3?

- (d) -3?
- 12. Dê uma descrição de cada classe de congruência módulo 6.
 - (a) Qual é a classe de equivalência de (1, 2) na relação de equivalência do exercício 7?
 - (b) Dê uma interpretação das classes de equivalência para a relação de equivalência R do execício 7. [Dica: Observe a diferença a-b correspondente a (a,b).]
- 14. Quais destas coleções de subconjuntos são partições de $\{1,2,3,4,5,6\}$?
 - (a) {1,2}, {2,3,4}, {4,5,6}
- (c) $\{2,4,6\},\{1,3,5\}$
- (b) {1}, {2, 3, 6}, {4}, {5}
- (d) {1, 4, 5}, {2, 6}
- 15. Quais destas coleções de subconjuntos são partições no conjunto de sequências de bits de comprimento 8?
 - (a) o conjunto das sequências de bits que começam com 1, o conjunto das sequências de bits que começam com 00 e o conjunto das sequências de bits que começam com 01

- (b) o conjunto das sequências de bits que contêm a sequência 00, o conjunto das sequências de bits que contêm a sequência 01, o conjunto das sequências de bits que contêm a sequência 10 e o conjunto das sequências de bits que contêm a sequência 11
- (c) o conjunto das sequências de bits que terminam com 00, o conjunto das sequências de bits que terminam com 01, o conjunto das sequências de bits que terminam com 10 e o conjunto das sequências de bits que termimam com 11
- (d) o conjunto das sequências de bits que terminam com 111, o conjunto das sequências de bits que terminam com 011 e o conjunto das sequências de bits que termimam com 00
- (e) o conjunto das sequências de bits que têm 3k uns, em que k é um inteiro não negativo; o conjunto das sequências de bits que têm 3k+1 uns, em que k é um inteiro não negativo; e o conjunto das sequências de bits que têm 3k+2 uns, em que k é um inteiro não negativo
- 16. Quais destas relações são partições do conjunto Z x Z de pares ordenados de inteiros?
 - (a) o conjunto dos pares (x,y), no qual x ou y é impar; o conjunto dos pares (x,y); no qual x é par; e o conjunto dos pares (x,y), no qual y é par
 - (b) o conjunto dos pares (x,y), no qual x e y são ambos impares; o conjunto dos pares (x,y), no qual exatamente um entre x e y é impar; e o conjunto dos pares (x,y), no qual x e y são ambos pares
 - (c) o conjunto dos pares (x, y), no qual x é positivo; o conjunto dos pares (x, y), no qual y é positivo; e o conjunto dos pares (x, y), no qual x e y são ambos negativos
 - (d) o conjunto dos pares (x,y), no qual $3\mid x$ e $3\mid y$; o conjunto dos pares (x,y), no qual $3\mid x$ e $3\not\mid y$; o conjunto dos pares (x,y), no qual $3\not\mid x$ e $3\mid y$; e o conjunto dos pares (x,y), no qual $3\not\mid x$ e $3\not\mid y$
 - (e) o conjunto dos pares (x,y), no qual x>0 e y>0; o conjunto dos pares (x,y), no qual x>0 e $y\leq 0$; o conjunto dos pares (x,y), no qual $x\leq 0$ e y>0; e o conjunto dos pares (x,y), no qual $x\leq 0$ e $y\leq 0$
 - (f) o conjunto dos pares (x,y), no qual $x \neq 0$ e $y \neq 0$; o conjunto dos pares (x,y), no qual x=0 e $y \neq 0$; e o conjunto dos pares (x,y), no qual $x \neq 0$ e y = 0
- 17. Liste os pares ordenados nas relações de equivalência produzidas por estas partições de $\{0,1,2,3,4,5\}$.
 - (a) $\{0\}, \{1, 2\}, \{3, 4, 5\}$
- (c) $\{0, 1, 2\}, \{3, 4, 5\}$
- (b) {0,1}, {2,3}, {4,5}
- (d) {0}, {1}, {2}, {3}, {4}, {5}
- $\mbox{\bf Def.: Uma partição P_1 \'e denominada um {\bf refinamento}$ da partição P_2 se todo conjunto em P_1 for um subconjunto de um dos conjuntos em P_2.}$
- 18. Mostre que a partição formada a partir das classes de congruência módulo 6 é um refinamento da partição obtida a partir das classes de congruência módulo 3.
- 19. Mostre que a partição do conjunto de sequências de bits de comprimento 16, formada pelas classes de equivalência de sequências de bits que coincidem nos últimos 8 bits, é um refinamento da partição formada a partir das classes de equivalência de sequências de bits que coincidem nos últimos 4 bits
- 20. Encontre a menor relação de equivalência no conjunto $\{a,b,c,d,e\}$ que contenha a relação $\{(a,b),(a,c),(d,e)\}.$
- 21. Seja $R = \{(x, y) \mid x y \text{ \'e um inteiro}\}.$
 - (a) Qual é a classe de equivalência de 1 para essa relação de equivalência.
 - (b) Qual é a classe de equivalência de 1/2 para essa relação de equivalência.
- Determine o número de relações de equivalência diferentes em um conjunto com três elementos, listando-as.
- 23. Suponha que formemos uma partição P a partir de uma relação de equivalência R. Qual é a relação R' que resulta se formamos uma relação de equivalência a partir de P?
- Invente um algoritmo para encontrar a menor relação de equivalência que contenha uma dada relação.