Matemática Discreta
Lista de Exercícios 07

Princípios de Contagem: regra do produto/soma, inclusão-exclusão, casa dos pombos

1. Em uma universidade, há 18 graduados em matemática e 325 em ciência da computação.
   (a) Há quantas maneiras de escolher dois representantes de modo que um seja matemático e o outro um cientista da computação?
   (b) Há quantas maneiras de escolher um representante que seja ou matemático ou cientista da computação?
2. Um exame de múltipla escolha contém 10 questões. Há quatro respostas possíveis para cada questão.
   (a) De quantas maneiras um estudante pode responder às questões do exame se responder a todas as questões?
   (b) De quantas maneiras um estudante pode responder às questões do exame se ele pode deixar respostas em branco?
3. Seis companhias aéreas voam de Nova York a Denver e sete de Denver a São Francisco. Quantos pares diferentes de companhias aéreas você pode escolher para fazer a viagem de Nova York a São Francisco, com conexão em Denver, em que você escolhe uma companhia para viajar até Denver e outra para continuar o voo a São Francisco? Quantas dessas maneiras envolvem mais de uma companhia?
4. Quantas iniciais diferentes com três letras uma pessoa pode ter?
5. Quantas iniciais diferentes com três letras que comecem com a letra A são possíveis?
6. Quantas cadeias de bits de comprimento 10 que comecem e terminem com um 1 são possíveis?
7. Quantas cadeias de bits com comprimento não excedente a n, em que n é um número inteiro positivo, compostas apenas de 1s são possíveis?
8. Quantas sequências de letras minúsculas de extensão quatro ou menos são possíveis?
9. Quantas sequências de cinco caracteres ASCII contêm o caractere @ (arroba) ao menos uma vez? ($Nota$: Há 128 caracteres ASCII diferentes.)
10. Quantos números inteiros positivos entre 50 e 100
    (a) são divisíveis por 7? Quais números inteiros são esses?
    (b) são divisíveis por 11? Quais números inteiros são esses?
    (c) são divisíveis por 7 e por 11? Quais números inteiros são esses?
11. Quantos números inteiros positivos entre 100 e 999, incluindo este último,
    (a) são divisíveis por 7?
    (b) são ímpares?
    (c) têm os três dígitos iguais?
    (d) não são divisíveis por 4?
    (e) são divisíveis por 3 ou por 4?
    (f) não são divisíveis por 3 nem por 4?
    (g) são divisíveis por 3, mais não por 4?
    (h) são divisíveis por 3 e por 4?
12. Quantas sequências de três dígitos decimais
    (a) não são formados pelo mesmo dígito três vezes?
    (b) começam com um dígito ímpar?
    (c) têm exatamente dois dígitos que são o número 4?
13. Um comitê é formado por um representante de cada um dos 50 estados do Estados Unidos, no qual o representante do estado é ou gorvenador ou um dos dois senadores daquele determinado estado. Quantas maneiras há para formar esse comitê?
14. Quantas placas de identificação de veículos podem ser feitas usando-se duas letras seguidas de quatro dígitos ou dois dígitos seguidos de quatro letras?
15. Quantas placas de identificação de veículos podem ser feitas usando-se duas ou três letras seguidas de dois ou três dígitos?
16. Quantas sequências de oito letras do alfabeto da língua inglesa são possíveis
    (a) que não contenha vogais, se as letras puderem ser repetidas?
    (b) que não contenha vogais, se as letras não puderem ser repetidas?
    (c) que comecem com uma vogal, se as letras não puderem ser repetidas?
    (d) que comecem com uma vogal, se as letras não puderem ser repetidas?
    (e) que contenham pelo menos uma vogal, se as letras puderem ser repetidas?
    (f) que contenham exatamente uma vogal, se as letras puderem ser repetidas?
    (g) que comecem com X e que contenham pelo menos uma vogal, se as letras puderem ser repeditas?
    (h) que comecem e terminem com X e contenham pelo menos uma vogal, se as letras puderem ser repetidas?
17. Quantas funções injetoras são possíveis a partir de um conjunto com cinco elementos para os conjuntos com os seguintes números de elementos?
    (a) 4 (b) 5 (c) 6 (d) 7
18. Quantas funções são possíveis a partir do conjunto $\{1, 2, \ldots, n\}$, em que n é um número inteiro e positivo, para o conjunto $\{0, 1\}$
    (a) que são injetoras?
    (b) que atribuam 0 aos valores 1 e n?
    (c) que atribuam 1 a exatamente um dos números inteiros positivos menores que n?
19. Um palíndromo é uma sequência no qual o seu inverso é indêntico à sequência. Quantas cadeias de bits de extensão n são palíndromos?
20. De quantas maneiras um fotógrafo pode organizar seis pessoas em uma fila, em um casamento, incluindo a noiva e o noivo, se
    (a) a noiva deve estar ao lado do noivo?
    (b) a noiva não está ao lado do noivo?
    (c) a noiva está posicionada à esquerda do noivo?
21. Quantas cadeias de bits de comprimento 10 começam com três 0s ou terminam com dois 0s?
22. Quantos números inteiros positivos, menores ou iguais a 100, são divisíveispor 4 ou ou por 6?
23. Suponha que uma senha para um sistema computacional deva ter pelo menos 8, mas não mais de 12 caracteres, em que cada caractere na senha é uma letra minúscula, uma letra maiúscula, um dígito ou um dos seis caracteres especiais $*, >, <, !, +,$ e $=$.
    (a) Quais senhas diferentes estão disponíveis para esse sistema?
    (b) Quantas dessas senhas contêm pelo menos uma ocorrência de pelo menos um dos seis caracteres especiais?
    (c) Se demora um nanossegundo para um hacker checar se cada senha possível é a sua senha, quanto tempo demoraria para o hacker tentar todas as senhas possíveis?
24. Quantas maneiras de organizar as letras a, b, c e d, tal que a não seja seguida imediatamente pod b, são possíveis?
25. Use um diagrama de árvore para determinar o número de subconjuntos de $\{3, 7, 9, 11, 24\}$ com a proprie de que a soma dos elementos no subconjunto seja menor que 28.
26. (a) Suponha que um modelo popular de tênis de corrida esteja disponível tanto para homens quanto para mulheres. O tênis feminino vem nos tamanhos 6, 7, 8 e 9, e o masculino, nos tamanhos 8, 9, 10, 11 e 12. O modelo masculino vem nas cores branco e preto, e o feminino, em branco, vermelho e preto. Use um diagrama de árvore para determinar o número de diferentes tênis que uma loja tem de estocar para ter, pelo menos, um par disponível de todas as cores e tamanhos para mulheres e para homens.
    (b) Responda à questão do item (a) usando as regras de contagem.
27. Mostre que em qualquer conjunto de seis aulas, no qual cada encontro acontece regularmente uma vez na semana em um determinado dia da semana, deve haver dois desses encontros no mesmo dia, supondo que não haja aulas nos finais de semana.
28. Uma gaveta contém doze meias marrons e doze meias pretas, todas únicas. Um homem pega as meias aleatoriamente no escuro.
    (a) Quantas meias deverão ser pegas para se ter certeza de que pelo menos duas são da mesma cor?
    (b) Quantas meias deverão ser pegas para se ter certeza de que pelo menos duas são pretas?
29. Mostre que entre um grupo de cinco números inteiros (não necessariamente consecutivos) há dois com o mesmo resto quando divididos por 4.
30. Considere n como um número inteiro positivo. Mostre que em um conjunto de n inteiros consecutivos há exatamente um número divisível por n.
31. Qual é o número mínimo de estudantes, vindos dos 50 estados americanos, que devem ser inscritos em uma universidade para garantir que pelo menos 100 venham do mesmo estado?
32. (a) Mostre que se cinco números inteiros são selecionados a partir dos oito primeiros números inteiros positivos, deverá haver um par desses inteiros cuja a soma seja igual a nove.
    (b) A conclusão do item (a) será verdadeira se quatro inteiros, em vez de cinco, forem selecionados?
33. Quantos números devem ser selecionados a partir do conjunto $\{1, 2, 3, 4, 5, 6\}$ para garantir que pelo menos um par desses números some 7?
34. Uma companhia armazena os produtos em um depósito. O armazenamento de caixas nesse depósito é especificado por seus corredores, localização nos corredores e prateleiras. Há 50 corredores, 85 localizações horizontais em cada corredor, e 5 prateleiras por localização horizontal. Uma caixa é armazenada em cada prateleira. Qual é o menor número de protudos que a companhia pode ter para que pelo menos dois produtos sejam estocados na mesma caixa?
35. Suponha que todo estudante em uma classe de matemática discreta de 25 alunos seja um calouro, um veterano ou um aluno júnior.
    (a) Mostre que há pelo menos 9 calouros, 9 veteranos ou 9 juniores na sala.
    (b) Mostre que há pelo menos 3 calouros, 19 veteranos ou 5 juniores na sala.
36. Mostre que há pelo menos seis pessoas na Califórnia (população: 36 milhões) com as mesma três iniciais que nasceram no mesmo dia do ano (mas não necessariamente no mesmo ano). Suponha que todos tenham três iniciais.
37. Há 38 horários diferentes de aula em uma universidade. Se há 677 classes diferentes, quantas salas diferentes serão necessárias?
38. Uma rede de computadores é formada por seis computadores. Cada computador é conectado diratamente a zero ou mais outros computadores. Mostre que há pelo menos dois computadores na rede que estão diretamente conectados ao mesmo número de outros computadores. [$Dica$: É impossível ter um computador não ligado a nenhum dos outros e um computador ligado a todos os outros.]

Respostas:

1. (a) 5850 (b) 343
2. (a) 4^{10} (b) 5^{10}
3. 42
4. 26^3
5. 676
6. 2^8
7. $n+1$ (contando a sequência vazia)
8. 475255 (contando a sequência vazia)
9. 1 321 368 961
10. (a) Sete: 56, 63, 70, 77, 84, 91, 98
    (b) Cinco: 55, 66, 77, 88, 99
    (c) Um: 77
11. (a) 128 (c) 9 (e) 450 (g) 255
    (b) 450 (d) 675 (f) 450 (h) 75
12. (a) 990 (b) 500 (c) 27
13. 3^{50}
14. 52 457 600
15. 20 077 200
16. (a) 37 822 859 361 (e) 171 004 205 215
    (b) 8 204 716 800 (f) 72 043 541 640
    (c) 40 159 050 880 (g) 6 230 721 635
    (d) 12 113 640 000 (h) 223 149 655
17. (a) 0 (b) 120 (c) 720 (d) 2520
18. (a) 2 se $n=1$, 2 se $n=2$, 0 se $n \geq 3$
    (b) 2^{n-2} para $n>1$; 1 se $n=1$
    (c) $2(n-1)$
19. Se n for par, $2^{n/2}$; se n for ímpar, $2^{(n+1)/2}$
20. (a) 240 (b) 480 (c) 360
21. 352
22. 33
23. (a) 9 920 671 339 261 323 541 376 $\approx$ 9,9 $\times 10^{21}$
    (b) 6 641 514 961 387 068 437 760 $\approx$ 6,6 $\times 10^{21}$
    (c) 9 920 671, 339.261325541376 segundos, o que é cerca de 314.000 anos.
24. 18
25. 17
26. 22
27. Como há seis aulas e apenas cinco dias úteis na semana, o princípio da casa dos pombos mostra que pelo menos duas aulas devem ocorrer no mesmo dia.
28. (a) 3
    (b) 14
29. Como existe quatro restos possíveis quando um inteiro é dividido por 4, o princípio da casa dos pombos implica que dados cinco inteiros, pelo menos dois têm o mesmo resto.
30. Sejam $a, a+1, \ldots, a+n-1$ inteiros na sequência. Os inteiros $(a+i)$ **mod** $n, i = 0, 1, 2, \ldots, n-1$, são distintos, pois $0 < (a+j)-(a+k) < n$ sempre que $0 \leq k < j \leq n-1$. Como existem n valores possíveis para $(a+i)$ **mod** n e existem n inteiros diferentes no conjunto, cada um destes valores é assumido exatamente uma vez. Segue que existe exatamente um inteiro na sequência que é divisível por n.
31. 4951
32. (a) Agrupe os primeiros oito inteiros positivos em quatro subconjuntos de dois inteiros cada, de modo que os inteiros de cada subconjunto somem 9: $\{1,8\}$, $\{2,7\}$, $\{3,6\}$ e $\{4,5\}$. Se cinco inteiros forem escolhidos dos primeiros oito inteiros positivos, pelo o príncipio da casa dos pombos, pelo menos dois deles vêm do mesmo subconjunto. Dois destes inteiros têm a soma 9, como desejado.
    (b) Não. Considere $\{1,2,3,4\}$, por exemplo.
33. 4
34. 21 251
35. (a) Se existissem menos do que 9 calouros, menos do que 9 veteranos e menos do que 9 veteranos e menos do que 9 alunos juniores na classe, não haveria mais de 8 de cada um destes anos, para um total de no máximo 24 estudantes, contradizendo o fato de haver 25 estudantes no curso.
    (b) Se houver menos de 3 calouros, menos de 19 veteranos e menos do que 5 alunos juniores, então haveria no máximo 2 calouros, no máximo 18 veteranos e no máximo 4 alunos juniores, para um total de no máximo 24 estudantes. Isto contradiz o fato de haver 25 estudantes no curso.
36. Existem 6432816 possibilidades para as três iniciais e um aniversário. Assim, pelo princípio da casa dos pombos generalizado, existem pelo menos $\lceil 36000000/6432816 \rceil = 6$ pessoas que compartilham as mesmas iniciais e aniversários.
37. 18
38. Como existem seis computadores, o número de outros computadores aos quais um computador está conectado é um inteiro entre 0 e 5, inclusive. Entretanto, 0 e 5 não podem ambos ocorrer. Para ver isso, observe que, se algum computador não estiver conectado a nenhum outro, então nenhum computador está conectado aos outro cinco, e, se algum computador estiver conectado a todos os outros cinco, então nenhum computador deixará de estar conectado a algum outro. Assim, pelo princípio da casa dos pombos, como existem no máximo cinco possibilidades para o número de computadores aos quais um computador está conectado, existe pelo menos dois computadores no conjunto de computadores conectados ao mesmo número de outros computadores.

Questões adicionais:

1. Um edifício empresarial contém 27 andares, com 37 escritórios em cada andar. Quantos escritórios há no prédio?
2. Uma determinada marca de camisetas vem em 12 cores, tem modelos masculino e feminino e três tamanhos para cada sexo. Quantos tipos diferentes de camisetas são fabricados?
3. Há quatro auto-estradas principais de Boston a Detroit e seis de Detroit a Los Angeles. Quantas auto-estradas há para o percurso Boston-Los Angeles, via Detroit?
4. Quantas iniciais diferentes com três letras sem que nenhuma seja repetida uma pessoa pode ter?
5. Quantas cadeias de bits de comprimento oito são possíveis?
6. Quantas cadeias de bits de comprimento seis ou menos são possíveis?
7. Quantas cadeias de bits com comprimento n, em que n é um número inteiro positivo, que começam e terminam com 1 são possíveis?
8. Quantas sequências de quatro letras minúsculas que contenham a letra x são possíveis?
9. Quantos números inteiros positivos entre 5 e 31
    (a) são divisíveis por 3? Quais números são esses?
    (b) são divisíveis por 4? Quais números são esses?
    (c) são divisíveis por 3 e por 4? Quais números inteiros são esses?
10. Quantos números inteiros positivos menores de 1000
    (a) são divisíveis por 7?
    (b) são divisíveis por 7, mas não por 11?
    (c) são divisíveis por 7 e por 11?
    (d) são divisíveis por 7 ou por 11?
    (e) são divisíveis exatamente por 7 e por 11?
    (f) não são divisíveis nem por 7 nem por 11?
    (g) têm dígitos distintos?
    (h) têm dígitos distintos e são pares?
11. Quantos números inteiros positivos entre 1000 e 9999, incluindo este último,
    (a) são divisíveis por 9?
    (b) são pares?
    (c) têm dígitos distintos?
    (d) não são divisíveis por 3?
    (e) são divisíveis por 5 ou por 7?
    (f) não são divisíveis por 5 nem por 7?
    (g) são divisíveis por 5, mais não por 7?
    (h) são divisíveis por 5 e por 7?
12. Quntas sequências de quatro dígitos decimais
    (a) não contêm o mesmo dígito duas vezes?
    (b) termina com um dígito par?
    (c) têm exatamente três dígitos que são o número 9?
13. Quantas placas de identificação de veículos podem ser feitas usando-se três dígitos seguidos de três letras ou três letras seguidas de três dígitos?
14. Quantas placas de indentificação de veículos podem ser feitas usando-se três letras seguidas de três dígitos e quatro letras seguidas de dois dígitos?
15. Quantas sequências de oito letras do alfabeto da língua inglesa são possíveis
    (a) se as letras puderem ser repeditas?
    (b) se nenhuma letra puder ser repetida?
    (c) que comecem com X, se as letras puderem ser repetidas?
    (d) que comecem com X, se nenhuma letra puder ser repetida?
    (e) que comecem e terminem com X, se as letras puderem ser repetidas?
    (f) que comecem com as letras BO (nesta ordem), se as letras puderem ser repetidas?
    (g) que comecem e terminem com as letras BO (nesta ordem), se as letras puderem ser repetidas?
    (h) que comecem ou terminem com as letras BO (nesta ordem), se as letras puderem ser repetidas?
16. Quantas funções diferentes são possíveis a partir de um conjunto de 10 elementos para os conjuntos com os seguintes números de elementos?
    (a) 2 (b) 3 (c) 4 (d) 5
17. Quantas funções são possíveis a partir do conjunto $\{1, 2, \ldots, n\}$, em que n é um número inteiro e positivo, para o conjunto $\{0, 1\}$?
18. Quantas funções parciais(veja o preâmbulo do Exercício 73 na Seção 2.3) são possíveis a partir de um conjunto com cinco elementos para um conjunto que tenha cada um dos números de elementos abaixo?
    (a) 1 (b) 2 (c) 5 (d) 9
19. Quantos subconjuntos de um conjunto com 100 elementos têm mais de um elemento?
20. De quantas maneiras um fotógrafo pode organizar 6 pessoas de um grupo de 10, em um casamento, em que a noiva e o noivo estão entre estas 10 pessoas, se
    (a) a noiva deve estar na foto?

(b) tanto a noiva quanto o noivo devem estar na foto?

(c) um dos dois, noiva ou noivo, deve estar na foto?

21. Quantas cadeias de bits de comprimento sete começam com dois 0s ou terminam com três 1s?
22. * Quantas cadeias de bits de comprimento 10 têm cinco 0s consecutivos ou cinco 1s consecutivos?
23. Todo estudante em uma sala de matemática discreta é ou da área de ciência da computação ou de matemática ou é das duas áreas. Quantos estudantes há na sala se 38 são graduados em ciência da computação(incluindo os que são das duas áreas), 23 graduados em matemática (incluindo os da duas áreas) e 7 graduados nas duas áreas?
24. Quantas iniciais diferentes uma pessoa pode ter se ela tiver pelo menos duas, mas no máximo cinco, iniciais diferentes? Suponha que cada inicial é uma das 26 letras do alfabeto da língua ingles.
25. O nome de uma variável na linguagem de programação C é uma seguência que pode conter letras maiúsculas, minúsculas, dígitos ou negrito. Além disso, o primeiro caractere na sequência deve ser uma letra, maiúscula ou minúscula, ou um negrito. Se o nome da variável é determinado pelos seus primeiros oito caracteres, quantas variáveis diferentes podem ser nomeadas em C? (Note que o nome da variável pode conter menos que oito caracteres.)
26. Use um diagrama de árvore para encontrar o número de cadeias de bits de comprimento quatro sem três zeros consecutivos.
27. Use um diagrama de árvore para encontrar o número de maneiras para uma final de campeonato acontecer, em que o primeiro time que vencer quatro jogos de sete, vence o campeonato
28. (a) Suponha que uma loja venda seis variedades de refrigerantes: coca, guaraná, laranja, sucos, limonada e citrus. Use um diagrama de árvore para determinar o número de tipos diferentes de garrafas que a loja deve estocar para ter disponíveis todas as variedades em todos os tamanhos de garrafas, considerando-se que todas as variedades estão disponíveis em garrafas de 300 ml, apenas a limonada está disponível em garrafa de 500 ml e apenas a coca e o guaraná em garrafas de 600 ml e todos, menos a limonada e o citrus, estão disponíveis em garrafas de 1 l?

    (b) Responda a questão do item (a) usando as regras de contagem.