Cardinalidade de Conjuntos

Matemática Discreta

Prof. MSc. Samy Sá

Universidade Federal do Ceará
Campus de Quixadá

9 de março de 2014

Universidade Federal do Ceará
Computer Science Department
Samy Sá (samy@ufc.br)

Outline

Universidade Federal do Ceará
Computer Science Department
Samy Sá (samy@ufc.br)

Outline

Universidade Federal do Ceará
Computer Science Department
Samy Sá (samy@ufc.br)

Introdução

A cardinalidade de um conjunto refere-se seu número de elementos.

- Para conjuntos finitos, é fácil calcular...
- Para conjuntos infinitos, observam-se algumas peculiaridades.

Universidade Federal do Ceará
Computer Science Department
Samy Sá (samy@ufc.br)

Introdução

A cardinalidade de um conjunto refere-se seu número de elementos.

- Para conjuntos finitos, é fácil calcular...
- Para conjuntos infinitos, observam-se algumas peculiaridades.

Definição

Seja S um conjunto. Se existem exatamente n elementos distintos em S, onde $n \in \mathbb{Z}_+$, dizemos que S é um conjunto finito e que n é a cardinalidade de S. A cardinalidade de S é denotada por $|S|$.

Universidade Federal do Ceará
Computer Science Department
Samy Sá (samy@ufc.br)

Introdução

Mas e quando S é infinito?!

- Nesse caso, falamos em conjuntos contáveis ou incontáveis.
- Os conjuntos contáveis têm **mesma cardinalidade** que $\mathbb{Z}_+$.

Universidade Federal do Ceará
Computer Science Department
Samy Sá (samy@ufc.br)

Outline

Universidade Federal do Ceará
Computer Science Department
Samy Sá (samy@ufc.br)

Cardinalidade de Conjuntos Infinitos

Para conjuntos infinitos, a cardinalidade é comparativa, invés de absoluta.

Definição

Os conjuntos A e B têm ***mesma cardinalidade*** *se e somente se existe uma função bijetora de A para B. Quando A e B têm mesma cardinalidade, escrevemos* $|A| = |B|$.

Universidade Federal do Ceará
Computer Science Department
Samy Sá (samy@ufc.br)

Cardinalidade de Conjuntos Infinitos

Para conjuntos infinitos, a cardinalidade é comparativa, invés de absoluta.

Definição

Os conjuntos A e B têm ***mesma cardinalidade*** *se e somente se existe uma função bijetora de A para B. Quando A e B têm mesma cardinalidade, escrevemos* $|A| = |B|$.

Constatação:

Essa definição é baseada no Teorema de Bijeções que encontramos na leitura preparatória L04 (Funções).

Universidade Federal do Ceará
Computer Science Department
Samy Sá (samy@ufc.br)

Outline

Universidade Federal do Ceará
Computer Science Department
Samy Sá (samy@ufc.br)

Cardinalidade de Conjuntos Infinitos

Definição

Os conjuntos A e B têm ***mesma cardinalidade*** *se e somente se existe uma função bijetora de A para B. Quando A e B têm mesma cardinalidade, escrevemos $|A| = |B|$.*

Constatação:

Seja S um conjunto, se houver uma bijeção de S para $\mathbb{Z}_+$, então S será contável.

Universidade Federal do Ceará
Computer Science Department
Samy Sá (samy@ufc.br)

Cardinalidade de Conjuntos Infinitos

Definição

*Os conjuntos A e B têm **mesma cardinalidade** se e somente se existe uma função bijetora de A para B. Quando A e B têm mesma cardinalidade, escrevemos* $|A| = |B|$.

Constatação:

Seja S um conjunto, se houver uma bijeção de S para $\mathbb{Z}_+$*, então S será contável.*

Constatação:

O conjunto dos inteiros negativos $\mathbb{Z}_-$ *é infinito contável, pois* $f(n) = -n$ *é um bijeção de* $\mathbb{Z}_+$ *em* $\mathbb{Z}_-$.

Universidade Federal do Ceará
Computer Science Department
Samy Sá (samy@ufc.br)

Cardinalidade de Conjuntos Infinitos

Também podemos definir de forma relativa quando um conjunto tem MENOS elementos que outro.

Definição

Se existe uma função injetora de A para B, então, necessariamente, $|A| \leq |B|$*. Além disso, se existe uma injeção de A para B, mas A e B tiverem cardinalidades diferentes, escrevemos* $|A| < |B|$*.*

Outline

Universidade Federal do Ceará
Computer Science Department
Samy Sá (samy@ufc.br)

Conjuntos Contáveis

- Denotamos a cardinalidade de $\mathbb{Z}_+$ e demais conjuntos contáveis por $\aleph_0$[1].
- Para mostrar que um conjunto qualquer infinito é contável, devemos prover uma bijeção com $\mathbb{Z}_+$.

[1] Lê-se $\aleph$ como "aleph", a primeira letra do alfabeto hebreu.

Universidade Federal do Ceará
Computer Science Department
Samy Sá (samy@ufc.br)

Conjuntos Contáveis

Exemplo

Mostre que o conjunto dos inteiros ímpares $\mathbb{Z}^{\mathbb{I}}$ é contável.
***Solução**: Devemos exibir uma função bijetora $f : \mathbb{Z}^{+} \to \mathbb{Z}^{\mathbb{I}}$.*
Considere a função

$$f(n) = 2n - 1$$

de $\mathbb{Z}^{+}$ para o conjunto dos inteiros ímpares.

Universidade Federal do Ceará
Computer Science Department
Samy Sá (samy@ufc.br)

Conjuntos Contáveis

Exemplo

Mostre que o conjunto dos inteiros ímpares $\mathbb{Z}^{\mathbb{I}}$ é contável.
***Solução**: Devemos exibir uma função bijetora $f : \mathbb{Z}^+ \to \mathbb{Z}^{\mathbb{I}}$.*
Considere a função

$$f(n) = 2n - 1$$

de $\mathbb{Z}^+$ para o conjunto dos inteiros ímpares. Para mostrar que f é uma bijeção, devemos mostrar que f é (i) injetora e (ii) sobrejetora.

Conjuntos Contáveis

Exemplo

Mostre que o conjunto dos inteiros ímpares $\mathbb{Z}^{\mathbb{I}}$ é contável.
***Solução** (CONT.):*

(i) *f é injetora.*

Suponha que $f(n) = f(m)$. Então temos que $2n - 1 = 2m - 1$. Desenvolvendo a igualdade, percebemos que $n = m$ e f é injetora.

Universidade Federal do Ceará
Computer Science Department
Samy Sá (samy@ufc.br)

Conjuntos Contáveis

Exemplo

Mostre que o conjunto dos inteiros ímpares $\mathbb{Z}^{\mathbb{I}}$ é contável.

***Solução** (CONT.):*

(i) *f é injetora.*

Suponha que $f(n) = f(m)$. Então temos que $2n - 1 = 2m - 1$. Desenvolvendo a igualdade, percebemos que $n = m$ e f é injetora.

(ii) *f é sobrejetora.*

Suponha que t é um inteiro positivo ímpar. Logo, existe um número par $2k$, para algum k, tal que t é $2k - 1$. Observe que $2k - 1$ é $f(k)$, ou seja, t é imagem de algum k inteiro não negativo para qualquer t e f é sobrejetora.

Universidade Federal do Ceará
Computer Science Department
Samy Sá (samy@ufc.br)

Outline

Universidade Federal do Ceará
Computer Science Department
Samy Sá (samy@ufc.br)

Hilbert's Grand Hotel

O Grande Hotel é um modelo teórico que mostra um paradoxo.

- Suponha que o Grand Hotel (GH) tem $\aleph_0$ quartos...

Universidade Federal do Ceará
Computer Science Department
Samy Sá (samy@ufc.br)

Hilbert's Grand Hotel

O Grande Hotel é um modelo teórico que mostra um paradoxo.

- Suponha que o Grand Hotel (GH) tem $\aleph_0$ quartos...

PERGUNTA:

1. *Como acomodar mais um hóspede?*

Universidade Federal do Ceará
Computer Science Department
Samy Sá (samy@ufc.br)

Hilbert's Grand Hotel

O Grande Hotel é um modelo teórico que mostra um paradoxo.

- Suponha que o Grand Hotel (GH) tem $\aleph_0$ quartos...

PERGUNTA:

1. *Como acomodar mais um hóspede?*

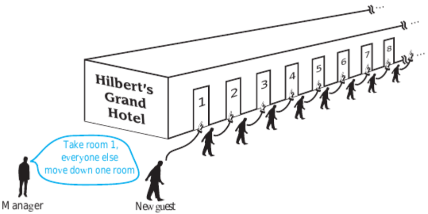

Figura: O Grande Hotel de Hilbert e seus $\aleph_0$ quartos.

Universidade Federal do Ceará
Computer Science Department
Samy Sá (samy@ufc.br)

Hilbert's Grand Hotel

O Grande Hotel é um modelo teórico que mostra um paradoxo.

- Suponha que o Grand Hotel (GH) tem $\aleph_0$ quartos...

PERGUNTA:

2. *Como acomodar mais n hóspedes, onde $n \in \mathbb{Z}_+$?*

Universidade Federal do Ceará
Computer Science Department
Samy Sá (samy@ufc.br)

Hilbert's Grand Hotel

O Grande Hotel é um modelo teórico que mostra um paradoxo.

- Suponha que o Grand Hotel (GH) tem $\aleph_0$ quartos...

PERGUNTA:

3. *Como acomodar mais um número contável* $\aleph_0$ *de hóspedes?*

Universidade Federal do Ceará
Computer Science Department
Samy Sá (samy@ufc.br)

Hilbert's Grand Hotel

O Grande Hotel é um modelo teórico que mostra um paradoxo.

- Suponha que o Grand Hotel (GH) tem $\aleph_0$ quartos...

PERGUNTA:

3. *Como acomodar mais um número contável $\aleph_0$ de hóspedes?*

Constatação:

Isso sugere que o conjunto dos Inteiros ($\mathbb{Z}$) é infinito contável, pois $\mathbb{Z}_-$ é contável.

Universidade Federal do Ceará
Computer Science Department
Samy Sá (samy@ufc.br)

Hilbert's Grand Hotel

Exercício:

Mostre que o conjunto dos Inteiros ($\mathbb{Z}$) é infinito contável, ou seja, mostre uma bijeção de $\mathbb{Z}$ para $\mathbb{Z}_+$.

Universidade Federal do Ceará
Computer Science Department
Samy Sá (samy@ufc.br)

Outline

Universidade Federal do Ceará
Computer Science Department
Samy Sá (samy@ufc.br)

Conjuntos Incontáveis

Um conjunto qualquer será incontável se ele não for contável.

Conjuntos Incontáveis

Um conjunto qualquer será incontável se ele não for contável.

Exemplo

Mostre que o conjunto dos Reais $\mathbb{R}$ é incontável.
***Solução**: Devemos mostrar que é impossível construir uma bijeça õ entre os dois. Para tal, podemos supor que o $\mathbb{R}$ é contável e buscar uma contradição.*

Universidade Federal do Ceará
Computer Science Department
Samy Sá (samy@ufc.br)

Diagonalização de Cantor

Exemplo

Solução *(CONT.): Suponha que* $\mathbb{R}$ *é contável. Logo, o subconjunto dos reais entre* 0 *e* 1 *deve ser contável.*

Universidade Federal do Ceará
Computer Science Department
Samy Sá (samy@ufc.br)

Diagonalização de Cantor

Exemplo

Solução *(CONT.): Suponha que $\mathbb{R}$ é contável. Logo, o subconjunto dos reais entre 0 e 1 deve ser contável. Por essa suposição, podemos listálos em alguma ordem*

$$
\begin{aligned}
r_1 &= 0.d_{11}d_{12}d_{13}d_{14}\ldots \\
r_1 &= 0.d_{21}d_{22}d_{23}d_{24}\ldots \\
r_1 &= 0.d_{31}d_{32}d_{33}d_{34}\ldots \\
r_1 &= 0.d_{41}d_{42}d_{43}d_{44}\ldots \\
&\vdots
\end{aligned}
$$

onde d_{ij} é o j-ésimo dígito decimal do i-ésimo número real listado e cada $d_{ij} \in \{0, 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9\}$.

Universidade Federal do Ceará
Computer Science Department
Samy Sá (samy@ufc.br)

Diagonalização de Cantor

Exemplo

Solução *(CONT.): Suponha que* $\mathbb{R}$ *é contável. Logo, o subconjunto dos reais entre* 0 *e* 1 *deve ser contável. Por essa suposição, podemos listálos em alguma ordem*

$$\begin{aligned} r_1 &= 0.d_{11}d_{12}d_{13}d_{14}\ldots \\ r_1 &= 0.d_{21}d_{22}d_{23}d_{24}\ldots \\ r_1 &= 0.d_{31}d_{32}d_{33}d_{34}\ldots \\ r_1 &= 0.d_{41}d_{42}d_{43}d_{44}\ldots \\ &\vdots \end{aligned}$$

onde d_{ij} *é o j-ésimo dígito decimal do i-ésimo número real listado e cada* $d_{ij} \in \{0, 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9\}$. *Por exemplo, se* $r_1 = 0.23794102...$*, então* $d_{11} = 2$, $d_{12} = 3$, $d_{13} = 7$, $d_{14} = 9$*, etc.*

Universidade Federal do Ceará
Computer Science Department
Samy Sá (samy@ufc.br)

Diagonalização de Cantor

Exemplo

Solução *(CONT.): Considere então o número real*

$$r = 0.d_1 d_2 d_3 d_4 \ldots,$$

onde $d_i = 4$ *se* $d_{ii} \neq 4$ *e* $d_i = 5$ *se* $d_{ii} = 4$.

Universidade Federal do Ceará
Computer Science Department
Samy Sá (samy@ufc.br)

Diagonalização de Cantor

Exemplo

Solução *(CONT.): Considere então o número real*

$$r = 0.d_1d_2d_3d_4...,$$

onde $d_i = 4$ *se* $d_{ii} \neq 4$ *e* $d_i = 5$ *se* $d_{ii} = 4$.
A expansão decimal de r *difere de cada outro número real entre* 0 *e* 1 *na i-ésima posição, mas* r *também pertence ao conjunto.*

Universidade Federal do Ceará
Computer Science Department
Samy Sá (samy@ufc.br)

Diagonalização de Cantor

Exemplo

Solução *(CONT.): Considere então o número real*

$$r = 0.d_1 d_2 d_3 d_4 \ldots,$$

onde $d_i = 4$ *se* $d_{ii} \neq 4$ *e* $d_i = 5$ *se* $d_{ii} = 4$.
A expansão decimal de r *difere de cada outro número real entre* 0 *e* 1 *na i-ésima posição, mas* r *também pertence ao conjunto.*
Logo, a suposição de que os reais entre 0 *e* 1 *poderiam ser listados deve ser falsa, uma contradição.*

Universidade Federal do Ceará
Computer Science Department
Samy Sá (samy@ufc.br)

Diagonalização de Cantor

Exemplo

Solução *(CONT.): Considere então o número real*

$$r = 0.d_1 d_2 d_3 d_4 ...,$$

onde $d_i = 4$ *se* $d_{ii} \neq 4$ *e* $d_i = 5$ *se* $d_{ii} = 4$*.*
A expansão decimal de r *difere de cada outro número real entre* 0 *e* 1 *na i-ésima posição, mas* r *também pertence ao conjunto. Logo, a suposição de que os reais entre* 0 *e* 1 *poderiam ser listados deve ser falsa, uma contradição. Concluímos que o conjunto dos reais entre* 0 *e* 1 *é incontável e, consequentemente, o conjunto dos reais também o será.* ■

Universidade Federal do Ceará
Computer Science Department
Samy Sá (samy@ufc.br)

Outline

Universidade Federal do Ceará
Computer Science Department
Samy Sá (samy@ufc.br)

Resultados de Cardinalidade de Conjuntos

Teorema

Se A e B são conjuntos contáveis, então $A \cup B$ também é contável.

Prova

Deixada como exercício.

Samy Sá (samy@ufc.br)

Resultados de Cardinalidade de Conjuntos

Teorema

(Schröder-Bernstein) Se A e B são conjuntos tais que $|A| \leq |B|$ e $|B| \leq |A|$, então $|A| = |B|$.

Universidade Federal do Ceará
Computer Science Department
Samy Sá (samy@ufc.br)

Resultados de Cardinalidade de Conjuntos

Teorema

(Schröder-Bernstein) Se A e B são conjuntos tais que $|A| \leq |B|$ e $|B| \leq |A|$, então $|A| = |B|$. Em outras palavras, se há injeções de A para B e de B para A, então também é possível construir uma bijeção entre A e B.

Prova

Deixada como exercício.

Funções Incomputáveis

Existem funções que não podem ser implementadas por computadores.

Universidade Federal do Ceará
Computer Science Department
Samy Sá (samy@ufc.br)

Funções Incomputáveis

Existem funções que não podem ser implementadas por computadores.

- Dado um conjunto contável qualquer S, o número de funções $f : S \to S$ é incontável.

Universidade Federal do Ceará
Computer Science Department
Samy Sá (samy@ufc.br)

Funções Incomputáveis

Existem funções que não podem ser implementadas por computadores.

- Dado um conjunto contável qualquer S, o número de funções $f : S \rightarrow S$ é incontável.
- O número de funções que podem ser escritas como programas de computador, porém, é contável, pois:
  1. Cada programa possível pode ser visto com uma string.

Universidade Federal do Ceará
Computer Science Department
Samy Sá (samy@ufc.br)

Funções Incomputáveis

Existem funções que não podem ser implementadas por computadores.

- Dado um conjunto contável qualquer S, o número de funções $f : S \to S$ é incontável.
- O número de funções que podem ser escritas como programas de computador, porém, é contável, pois:
  1. Cada programa possível pode ser visto com uma string.
  2. Podemos atribuir um número natural a cada string destas.

Universidade Federal do Ceará
Computer Science Department
Samy Sá (samy@ufc.br)

Funções Incomputáveis

Existem funções que não podem ser implementadas por computadores.

- Dado um conjunto contável qualquer S, o número de funções $f : S \to S$ é incontável.
- O número de funções que podem ser escritas como programas de computador, porém, é contável, pois:
  1. Cada programa possível pode ser visto com uma string.
  2. Podemos atribuir um número natural a cada string destas.
  3. Isso forma uma bijeção do conjunto de programas viáveis para os naturais.

Universidade Federal do Ceará
Computer Science Department
Samy Sá (samy@ufc.br)

Hipótese do Continuum

Pode-se mostrar que... $|\wp(\mathbb{Z}_+)| = |\mathbb{R}|$.

Universidade Federal do Ceará
Computer Science Department
Samy Sá (samy@ufc.br)

Hipótese do Continuum

Pode-se mostrar que... $|\wp(\mathbb{Z}_+)| = |\mathbb{R}|$.

- Seja S qualquer, $|S| < |\wp(S)|$ (Teorema por Cantor)
- Logo, $|\mathbb{Z}_+| < |\wp(\mathbb{Z}_+)|$
- Dado que $|\wp(S)| = 2^{|S|}$, temos $\aleph_0 < 2^{\aleph_0}$.

Universidade Federal do Ceará
Computer Science Department
Samy Sá (samy@ufc.br)

Hipótese do Continuum

Pode-se mostrar que... $|\wp(\mathbb{Z}_+)| = |\mathbb{R}|$.

- Seja S qualquer, $|S| < |\wp(S)|$ (Teorema por Cantor)
- Logo, $|\mathbb{Z}_+| < |\wp(\mathbb{Z}_+)|$
- Dado que $|\wp(S)| = 2^{|S|}$, temos $\aleph_0 < 2^{\aleph_0}$.

Definição

A Hipótese do Continuum sugere que não existe nenhum número cardinal entre $\aleph_0$ e $2^{\aleph_0}$. Por essa razão, define-se $2^{\aleph_0} = \aleph_1$.

Universidade Federal do Ceará
Computer Science Department
Samy Sá (samy@ufc.br)

Outline

Universidade Federal do Ceará
Computer Science Department
Samy Sá (samy@ufc.br)

Exercícios

1. Determine se os conjuntos são finitos, infinitos contáveis ou incontáveis.
   a) Os inteiros maiores que 10.
   b) Os inteiros ímpares negativos.
   c) Os números reais entre 0 e 2.
   d) O conjunto $A \times \mathbb{Z}_+$, onde $A = \{2, 3\}$.
   e) Os inteiros múltiplos de 10.
2. Mostre que o conjunto dos Inteiros ($\mathbb{Z}$) é infinito contável, ou seja, mostre uma bijeção de $\mathbb{Z}$ para $\mathbb{Z}_+$.
3. Mostre que se A e B são conjuntos contáveis, então $A \cup B$ também é contável.
4. Prove o teorema de Schröder-Bernstein.
5. Mostre que $|(0, 1)| = |(0, 1]|$. Dica: Utilize o teorema de Schröder-Bernstein.