Matemática Discreta
Lista de Exercícios 05

Indução Matemática

1. Considere $P(n)$ como a proposição de que $1^2+2^2+\ldots+n^2 = n(n+1)(2n+1)/6$ para todo número inteiro positivo n.

   (a) Qual é a proposição $P(1)$?

   (b) Mostre que P(1) é verdadeira, completando o passo base da demonstração.

   (c) Qual é a hipótese indutiva?

   (d) O que você precisa para demonstrar o passo de indução?

   (e) Complete o passo de indução.

   (f) Explique por que esses passos mostram que esta fórmula é verdadeira sempre que n for um número inteiro positivo.

2. Demonstre que $1^2 + 3^2 + 5^2 + \ldots + (2n+1)^2 = (n+1)(2n+1)(2n+3)/3$ sempre que n for um número inteiro não negativo.
3. Demonstre que $3 + 3 \cdot 5 + 3 \cdot 5^2 + \ldots + 3 \cdot 5^n = 3(5^{n+1} - 1)/4$ sempre que n for um número inteiro não negativo.
4. (a) Encontre uma fórmula para a soma dos primeiros n números inteiros positivos e pares.

   (b) Demonstre a fórmula que você conjecturou no item (a).
5. (a) Encontre uma fórmula para $\frac{1}{2} + \frac{1}{4} + \frac{1}{8} + \ldots + \frac{1}{2^n}$ examinando os valores dessa expressão para pequenos valores de n.

   (b) Demonstre a fórmula que você conjecturou no item (a).
6. Demonstre que $1^2 - 2^2 + 3^2 - \ldots + (-1)^{n-1}n^2 = (-1)^{n-1}n(n+1)/2$ sempre que n for um número inteiro positivo.
7. Demonstre que, para todo número inteiro positivo n, $1 \cdot 2 + 2 \cdot 3 + \ldots + n(n+1) = n(n+1)(n+2)/3$.
8. Demonstre que $\sum_{j=1}^{n} j^4 = n(n+1)(2n+1)(3n^2+3n-1)/30$ sempre que n for um número inteiro positivo.
9. Considere $P(n)$ como a proposição de que $1 + \frac{1}{4} + \frac{1}{9} + \ldots + \frac{1}{n^2} < 2 - \frac{1}{n}$, em que n é um número inteiro maior que 1.

   (a) Qual é a proposição $P(2)$?

   (b) Mostre que $P(2)$ é verdadeira, completando o passo base da demonstração.

   (c) Qual é a hipótese indutiva?

   (d) O que você precisa para demonstrar o passo de indução?

   (e) Complete o passo de indução.

   (f) Explique por que esses passos mostram que a inequação é verdadeira sempre que n for um número inteiro maior que 1.

10. Demonstre que $2^n > n^2$ se n for um número inteiro maior que 4.
11. Para quais números inteiros não negativos n é $2n + 3 \leq 2^n$? Demonstre sua resposta.
12. Seja $H_n = 1 + 1/2 + 1/3 + \cdots + 1/n$ o n-ésimo número harmônico. Demonstre que $H_{2^n} \leq 1 + n$ sempre que n for um número inteiro não negativo.
13. Demonstre que 2 divide $n^2 + n$ sempre que n for um número inteiro positivo.
14. Demonstre que 5 divide $n^5 - n$ sempre que n for um número inteiro não negativo.
15. Demonstre que $n^2 - 1$ é divisível por 8 sempre que n for um número inteiro positivo e ímpar.
16. Demonstre que, se n for um número inteiro positivo, então 133 divide $11^{n+1} + 12^{2n-1}$.
17. Demonstre que, se $A_1, A_2, \ldots, A_n$ e $B_1, B_2, \ldots, B_n$ forem conjuntos, tal que $A_j \subseteq B_j$ para $j = 1, 2, \ldots, n$, então $\bigcap_{j=1}^{n} A_j \subseteq \bigcap_{j=1}^{n} B_j$.
18. Demonstre que, se A_1, A_2, ..., A_n e B forem conjuntos, então $(A_1 \cup A_2 \cup \ldots \cup A_n) \cap B = (A_1 \cap B) \cup (A_2 \cap B) \cup \ldots \cup (A_n \cap B)$.
19. Demonstre que, se $A_1, A_2, \ldots, A_n$ forem subconjuntos de um conjunto universo U, então $\overline{\bigcup_{k=1}^{n} A_k} = \bigcup_{k=1}^{n} \overline{A_k}$
20. Demonstre que um conjunto com n elementos tem $n\,(n-1)/2$ subconjuntos com dois elementos sempre que n for um número inteiro maior ou igual a 2.
21. O que está errado na "prova"abaixo de que todos os cavalos são da mesma cor?
    Considere $P(n)$ como a proposição de que todos os cavalos em um conjunto de n cavalos são da mesma cor.
    Passo Base: Certamente, $P(1)$ é verdadeira.
    Passo de Indução: Assuma que $P(k)$ seja verdadeira, assim, todos os cavalos em qualquer conjunto de k cavalos são da mesma cor. Considere quaisquer $k+1$ cavalos; numere-os como $1, 2, 3, \ldots, k, k+1$. Agora, os primeiros k desses cavalos devem ter a mesma cor, e os últimos k cavalos devem ser também da mesma cor. Como o conjunto dos primeiros k cavalos e o cojunto dos últimos k cavalos são sobrepostos (interseção não vazia), todos os $k+1$ cavalos devem ser da mesma cor. Isso mostra que $P(k+1)$ é verdadeira e termina a demonstração por indução.
22. O que está errado nesta "demonstração"?
    Teorema: Para todo número inteiro positivo n, se x e y forem números inteiros positivos com $\max(x, y) = n$, então $x = y$.
    Passo base: Suponha que $n = 1$. Se $\max(x, y)$=1 e x e y forem números inteiros positivos, temos x=1 e y=1.
    Passo de indução: Considere k como um número inteiro positivo. Assuma que sempre que $\max(x, y) = k$ e x e y forem números inteiros positivos, então $x = y$. Agora considere $\max(x, y) = k + 1$, em que x e y são números inteiros positivos. Então, $\max(x-1, y-1) = k$, assim, pela hipótese indutiva, $x - 1 = y - 1$. Temos que $x = y$, completando o passo de indução .
23. Suponha que m seja um inteiro positivo. Use a indução matemática para demonstrar que se a e b forem números inteiros com $a \equiv b (\mathbf{mod}\ m)$, então $a^k \equiv b^k (\mathbf{mod}\ m)$ sempre que k for um número inteiro não negativo.

Questões adicionais:

1. Considere $P(n)$ como a proposição de que $1^3 + 2^3 + \ldots + n^3 = (n(n+1)/2)^2$ para o número inteiro positivo n.

   (a) Qual é a proposição $P(1)$?

   (b) Mostre que $P(1)$ é verdadeira, completando o passo base da demonstração.

   (c) Qual é a hipótese indutiva?

   (d) O que você precisa demonstrar no passo de indução?

   (e) Complete o passo de indução.

   (f) Explique por que esses passos mostram que esta fórmula é verdadeira sempre que n for um número inteiro positivo.

2. Demonstre que $1 \cdot 1! + 2 \cdot 2! + \ldots + n \cdot n! = (n+1)! - 1$ sempre que n for um número inteiro positivo.
3. Demonstre que $2 - 2 \cdot 7 + 2 \cdot 7^2 - \ldots + 2(-7)^n = (1 - (-7)^{n+1})/4$ sempre que n for um número inteiro não negativo.
4. (a) Encontre uma fórmula para $\frac{1}{1\cdot 2} + \frac{1}{2\cdot 3} + \ldots + \frac{1}{n(n+1)}$ examinando os valores dessa expressão para pequenos valores de n.

   (b) Demonstre a fórmula que você conjecturou no item (a).
5. Demonstre que $\sum_{j=0}^{n}(-\frac{1}{2})^j = \frac{2^{n+1}+(-1)^n}{3\cdot 2^n}$ sempre que n for um número inteiro não negativo.
6. Demonstre que $\sum_{k=1}^{n} k2^k = (n-1)2^{n+1} + 2$. Para todo número inteiro positivo n.
7. Demonstre que, para todo número inteiro positivo n, $1 \cdot 2 \cdot 3 + 2 \cdot 3 \cdot 4 + \ldots + n(n+1)(n+2) = n(n+1)(n+2)(n+3)/4$.
8. Considere $P(n)$ como a proposição de que $n! < n^n$, em que n é um número inteiro maior que 1.

   (a) Qual é a proposição $P(2)$?

   (b) Mostre que $P(2)$ é verdadeira, completando o passo base da demonstração.

   (c) Qual é a hipótese indutiva?

   (d) O que você precisa para demonstrar o passo de indução?

   (e) Complete o passo de indução.

   (f) Explique por que esses passos mostram que a inequação é verdadeira sempre que n for um número inteiro maior que 1.

9. Demonstre que $3^n < n!$ se n for um número inteiro maior que 6.
10. Para quais números inteiros não negativos n é $n^2 \leq n!$? Demonstre sua resposta.
11. Demonstre que $1/(2n) \leq [1 \cdot 3 \cdot 5 \cdot \cdots \cdot (2n-1)]/(2 \cdot 4 \cdot \cdots \cdot 2n)$ sempre que n for um número inteiro positivo.
12. Suponha que a e b sejam números reais com $0 < b < a$. Demonstre que se n for um número inteiro positivo,então $a^n - b^n \leq na^{n-1}(a-b)$.
13. Demonstre que $n^2 - 7n + 12$ é não negativo sempre que n for um número inteiro com $n \geq 3$.

    No exercício abaixo, H_n indica o n-ésimo número harmônico.

14. Demonstre que $H_1 + H_2 + \ldots + H_n = (n+1)H_n - n$.
15. Demonstre que 3 divide $n^3 + 2n$ sempre que n for um número inteiro positivo.
16. Demonstre que 6 divide $n^3 - n$ sempre que n for um número inteiro não negativo.
17. Demonstre que 21 divide $4^{n+1} + 5^{2n-1}$ sempre que n for um número inteiro positivo.
18. Demonstre que, se $A_1, A_2, \ldots, A_n$ e $B_1, B_2, \ldots, B_n$ forem conjuntos, tal que $A_j \subseteq B_j$ para $j = 1, 2, \ldots, n$, então $\bigcup_{j=1}^{n} A_j \subseteq \bigcup_{j=1}^{n} B_j$
19. Demonstre que, se A_1, A_2, ..., A_n e B forem conjuntos, então $(A_1 \cap A_2 \cap \ldots \cap A_n) \cup B =$ $(A_1 \cup B) \cap (A_2 \cup B) \cap \ldots \cap (A_n \cup B)$.
20. Demonstre que, se A_1, A_2, ..., A_n e B forem conjuntos, então $(A_1 - B) \cap (A_2 - B) \cap \ldots \cap (A_n - B)$ $= (A_1 \cap A_2 \cap \ldots \cap A_n) - B$.
21. Demonstre que, se A_1, A_2, ..., A_n e B forem conjuntos, então $(A_1 - B) \cup (A_2 - B) \cup \ldots \cup (A_n - B)$ $= (A_1 \cup A_2 \cup \ldots \cup A_n) - B$.
22. Demonstre que um conjunto com n elementos tem $n\,(n-1)(n-2)/6$ subconjuntos com três elementos sempre que n for um número inteiro maior que ou igual a 3.
23. O que está errado nesta "demonstração"?
    Teorema: Para todo número inteiro positivo n, $\sum_{i=1}^{n} i = (n+1/2)^2/2$.
    Então, $\sum_{i=1}^{n+1} i = (\sum_{i=1}^{n} i) + (n+1)$. Pela hipótese indutiva, $\sum_{i=1}^{n+1} i = (n+1/2)^2/2 + n + 1 = (n^2 + n + 1/4)/2 + n + 1 = (n^2 + 3n + 9/4)/2 = (n+3/2)^2/2 = [(n+1)+1/2]^2/2$, completando o passo de indução.
24. Use a indução matemática para mostrar que um conjunto de $n+1$ números inteiros positivos, não excedentes a $2n$, há pelo menos um número inteiro que divide outro número inteiro do conjunto.
25. Use a indução matemática para mostrar que $\neg(p_1 \vee p_2 \vee \ldots \vee p_n)$ é equivalente a $\neg p_1 \wedge \neg p_2 \wedge \ldots \wedge \neg p_n$ sempre que $p_1, p_2, \ldots, p_n$ forem proposições.
26. Mostre que n retas separam o plano em $(n^2 + n + 2)/2$ regiões, considerando que nenhuma dessas duas retas são paralelas e que nenhuma dessas três retas passam por um ponto comum.
27. Use a indução matemática para demonstrar o Lema 2 da seção 3.6, que estabelece que se P é um número primo e $p|a_1a_2 \ldots a_n$, e que a_i é um número inteiro para $i = 1, 2, 3, \ldots, n$, então $p|a_i$ para algum número inteiro i.

28. Use a propriedade da boa ordenação para mostrar que a seguinte forma de indução matemática é um método de demonstração válido: $P(n)$ é verdadeira para todos os números inteiros positivos n.

    Passo Base: $P(1)$ e $P(2)$ são verdadeiras **Passo Indutivo**: Para cada número inteiro positivo k, se $P(k)$ e $P(k+1)$ forem verdadeiras, então $P(k+2)$ é verdadeira.

29. Um convidado em uma festa é uma **celebridade** se essa pessoa for conhecida por todos os outros convidados, mas não conhecer nenhum deles. Existe no máximo uma celebridade em uma festa, pois, se tiverem duas, elas deveriam conhecer uma a outra. Determinada festa não pode ter celebridades. Sua tarefa é encontrar a celebridade, se ela existir, levantando apenas um tipo de questão-perguntado aos convidados se eles conhecem um segundo convidado. Todos devem responder a questão sem mentir, ou seja, se Alice e Bob forem duas pessoas na festa, você pode perguntar a Alice se ela conhece Bob, e ela deve dizer a verdade. Use a indução matemática para mostrar que se existirem n pessoas na festa, então você pode encontrar a celebridade, se houver uma, com $3(n-1)$ perguntas. [Dica: Primeiro faça um questão para eliminar uma pessoa como celebridade. Então, use a hipótese indutiva para indentificar uma celebridade em potencial. Por fim, faça mais duas questões para determinar se aquela pessoa é realmente uma celebridade.]

30. Use a indução matemática para demonstrar que $G(n) \leq 2n-4$ para $n \geq 4$. [Dica: No passo de indução, coloque uma nova pessoa que liga para determinada pessoa no começo e no final.]

31. * Mostre que é possível organizar os números $1, 2, \ldots, n$ em uma linha para que a média de dois desses números nunca apareça entre eles. [Dica: Mostre que é suficiente demonstrar esse fato quando n é uma potência de 2. Então, use a indução matemática para demonstrar o resultado quando n for uma potência de 2.]

    Ás vezes não podemos usar a indução matemática para demonstrar um resultado que acreditamos ser verdadeiro, mas podemos usá-la para demonstrar um resultado mais forte. Como a hipótese indutiva de um resultado mais forte fornece mais do que trabalhar com ele, esse processo é chamado de **carga indutiva**. Podemos usar a carga indutiva no Exercício 35.

32. Suponha que queiramos demonstrar que
    $1/2 * 3/4 \ldots (2n-1)/2n < 1/\sqrt{3n}$
    para todos os números inteiros positivos n.

    (a) Mostre que, se tentarmos demonstrar esta inequação usando a indução matemátia, o passo base será válido, mas o de indução não.

    (b) Mostre que a indução matemátia pode ser utilizada para demonstrar a inequação forte

        $\frac{1}{2} * \frac{3}{4} \ldots \frac{2n-1}{2n} < \frac{1}{\sqrt{3n+1}}$
        para todos os números inteiros maiores que 1, que, junto com a verificação do caso em que n=1, estabelece a inequação mais fraca que originalmente tentamos demonstrar usando a indução matemática.

33. Ladrilhe com trinominós à direita um tabuleiro de damas 4x4 com quadrado removido na parte superior esquerda.

34. Demonstre ou negue que todos os tabuleiros de damas nos tamanhos a seguir podem ser completamente preenchidos com trinominós à direita sempre que n for um número inteiro positivo.

    (a) 3×2^n

    (b) 6×2^n

    (c) $3^n \times 3^n$

    (d) $6^n \times 6^n$

35. Mostre que um tabuleiro de damas $n \times n$ com um quadrado removido pode ser completamente preenchido com triominós, se $n > 5$, n for ímpar entãonão há divisão de 3 (Não divide) n.

36. Encontre um tabuleiro de damas 5×5 com esse quadrado removido que não pode ser ladrilhado com trinominós. Demonstre que esse preenchimento não existe para esse tipo de tabuleiro.