

Matemática Discreta

Lista de Exercícios 08

Permutações e Combinações

- Liste todas as permutações de $\{a, b, c\}$.
- Quantas permutações de $\{a, b, c, d, e, f, g\}$ terminam com a ?
- Encontre o valor para cada uma das quantidades abaixo.
 - $P(6, 3)$
 - $P(6, 5)$
 - $P(8, 1)$
 - $P(8, 5)$
 - $P(8, 8)$
 - $P(10, 9)$
- Encontre o número de 5-permutações de um conjunto com nove elementos.
- Quantas possibilidades há para as posições de primeiro, segundo e terceiro lugares em uma corrida de cavalos com 12 cavalos, se todas as ordens de término são possíveis?
- Quantas cadeias de bits de extensão 10 contêm
 - exatamente quatro 1s?
 - no máximo quatro 1s?
 - pelo menos quatro 1s?
 - um número igual de 0s e 1s?
- Um grupo contém n homens e n mulheres. Há quantas maneiras possíveis de organizar essas pessoas em uma fila se os homens e as mulheres devem ficar alternados?
- De quantas maneiras um conjunto com cinco letras pode ser selecionado a partir do alfabeto da língua inglesa?
- Um conjunto com 100 elementos pode ter quantos subconjuntos com mais de dois elementos?
- Uma moeda é jogada 10 vezes, e em cada lançamento tem-se cara ou coroa. Quantos resultados são possíveis
 - no total?
 - com exatamente duas caras?
 - com no máximo três coroas?
 - com o mesmo número de caras e coroas?
- Quantas permutações das letras ABCDEFG contêm
 - a sequência BCD?
 - a sequência CFGA?
 - a sequência BA e GF?
 - a sequência ABC e DE?
 - a sequência ABC e CDE?
 - a sequência CBA e BED?
- Há quantas maneiras possíveis para que oito homens e cinco mulheres fiquem em uma fila, de modo que não haja duas mulheres uma ao lado da outra? [Dica: Primeiro posicione os homens e depois considere as posições possíveis para as mulheres.]
- Cem bilhetes, numerados de 1, 2, 3, ..., 100, são vendidos a 100 pessoas diferentes para uma atração. Quatro prêmios diferentes são disputados, inclusive o grande prêmio. Há quantas maneiras possíveis de ganhar os prêmios, se
 - não há restrições?
 - a pessoa com o bilhete 47 ganhar o grande prêmio?
 - a pessoa com o bilhete 47 ganhar um dos prêmios?
 - a pessoa com o bilhete 47 não ganha nenhum prêmio?
 - as pessoas com os bilhetes 19 e 47 ganharem prêmios?
 - as pessoas com os bilhetes 19, 47 e 73 ganharem prêmios?
 - as pessoas com os bilhetes 19, 47, 73 e 97 ganharem prêmios?
 - nenhuma das pessoas como os bilhetes 19, 47, 73 e 97 ganharem prêmios?
 - o vencedor do grande prêmio for uma pessoa com o bilhete 19, 47, 73 ou 97?
 - as pessoas com os bilhetes 19 e 47 ganharem prêmios, mas as pessoas com os bilhetes 73 e 97 não ganharem?
- Um clube tem 25 membros.
 - Quantas maneiras de escolher quatro membros do clube para servir no comitê executivo são possíveis?
 - Quantas maneiras de escolher um presidente, vice-presidente, secretário e tesoureiro do clube, em que nenhuma pessoa pode ter mais que uma função, são possíveis?
- Quantas 4-permutações de números inteiros positivos, não excedentes a 100, contêm três números inteiros consecutivos $k, k + 1, k + 2$, na ordem correta

- em que esses números inteiros consecutivos podem talvez ser separados por outros inteiros na permutação?
 - em que eles estão em posições consecutivas na permutação?
- O alfabeto da língua inglesa contém 21 consoantes e cinco vogais. Quantas sequências de seis letras minúsculas do alfabeto contêm
 - exatamente uma vogal?
 - exatamente duas vogais?
 - pelo menos uma vogal?
 - pelo menos duas vogais?
 - Suponha que um departamento tenha 10 homens e 15 mulheres. Quantas maneiras de formar um comitê com seis membros são possíveis, se ele deve ter o mesmo número de homens e mulheres?
 - Quantas cadeias de bits contêm exatamente oito 0s e dez 1s, se todo 0 deve ser seguido imediatamente por um 1?
 - Quantas cadeias de bits de extensão 10 contêm pelo menos três 1s e três 0s?
 - Quantas placas de identificação de carro são possíveis considerando-se que elas são compostas por três letras seguidas de três dígitos, sendo que nenhuma letra ou dígito aparece duas vezes?
 - Há quantas maneiras possíveis de terminar um corrida de cavalos com três cavalos, se podem ocorrer empates? (Nota: Dois ou três cavalos podem empatar.)

Respostas:

- $abc, acb, bac, bca, cab, cba$
- 720
- 120
 - 720
 - 8
 - 6720
 - 40 320
 - 3 628 800
- 15 120
- 1320
- 210
 - 386
 - 848
 - 252
- $2(n!)^2$
- 65 780
- $2^{100} - 5051$
- | | | | |
|----------|--------|---------|---------|
| (a) 1024 | (b) 45 | (c) 176 | (d) 252 |
|----------|--------|---------|---------|
- | | | |
|---------|---------|-------|
| (a) 120 | (c) 120 | (e) 6 |
| (b) 24 | (d) 24 | (f) 0 |
- Como temos 8 homens, existem 9 posições que podem ser ocupadas por uma mulher. Portanto, temos $C(9, 5)$ posições para 5 mulheres. Além disso, para cada uma destas posições, temos $8!$ maneiras de permutar os homens e $5!$ maneiras de permutar as mulheres. Assim, o total de possibilidades vale $C(9, 5) \cdot 8! \cdot 5! = 609638400$.
- | | |
|--|--|
| (a) $P(100, 4) = 94109400$ | (f) $P(4, 3) \cdot P(97, 1) = 2328$ |
| (b) $P(99, 3) = 941094$ | (g) $P(4, 4) = 24$ |
| (c) $P(4, 1) \cdot P(99, 3) = 3764376$ | (h) $P(96, 4) = 79727040$ |
| (d) $P(99, 4) = 90345024$ | (i) $P(4, 1) \cdot P(99, 3) = 3764376$ |
| (e) $P(4, 2) \cdot P(98, 2) = 114072$ | (j) $P(4, 2) \cdot P(96, 2) = 109440$ |
- | | |
|------------------------|-------------------------|
| (a) $C(25, 4) = 12650$ | (b) $P(25, 4) = 303600$ |
|------------------------|-------------------------|
- Temos 98 opções para o 1o valor da sequência de 3 números consecutivos. Temos 97 possibilidades para o inteiro fora desta sequência, e 4 posições possíveis para ele. Isto totaliza $98 \cdot 97 \cdot 4$ possibilidades. Porém, estamos contando 2 vezes quando temos 4 números consecutivos. Portanto, como temos 97 possibilidades de 4 números consecutivos, o total vale $98 \cdot 97 \cdot 4 - 97 = 37927$.
 - Temos 98 opções para o 1o valor da sequência de 3 números consecutivos. Temos 97 possibilidades para o inteiro fora desta sequência, e 2 posições possíveis para ele. Isto totaliza $98 \cdot 97 \cdot 2$ possibilidades. Porém, estamos contando 2 vezes quando temos 4 números consecutivos. Portanto, como temos 97 possibilidades de 4 números consecutivos, o total vale $98 \cdot 97 \cdot 2 - 97 = 18915$.
- Temos 6 posições para a vogal, e 5 vogais possíveis. Para as 5 consoantes restantes temos 21^5 possibilidades, pois as consoantes podem se repetir na sequência. Total: $6 \cdot 5 \cdot 21^5 = 122523030$.
 - Temos $C(6, 2)$ posições para as duas vogais, e 5^2 vogais possíveis (podemos ter vogais repetidas). Para as 4 consoantes restantes temos 21^4 possibilidades. Total: $C(6, 2) \cdot 5^2 \cdot 21^4 = 72930375$.
 - $(21 + 5)^6 - 21^6 = 223149655$
 - $(21 + 5)^6 - 21^6 - 6 \cdot 5 \cdot 21^5 = 100626625$
- $C(10, 3) \cdot C(15, 3) = 54600$
- 45
- $2^{10} - 2(1 + 10 + C(10, 2)) = 912$
- $P(26, 3) \cdot P(10, 3) = 11232000$
- $P(3, 3)$ possibilidades sem empate. $C(3, 2)$ possibilidades com empate na 1a posição. $C(3, 2)$ possibilidades com empate na 2a posição. 1 possibilidade com empate nas 3 posições. Total: $P(3, 3) + 2C(3, 2) + 1 = 13$.

Questões adicionais:

- Quantas permutações diferentes são possíveis a partir do conjunto $\{a, b, c, d, e, f, g\}$?
- Considere $S = \{1, 2, 3, 4, 5\}$.
 - Liste todas as 3-permutações de S .
 - Liste todas as 3-combinações de S .
- Encontre o valor para cada uma das quantidades abaixo.

- (a) $C(5, 1)$ (c) $C(8, 4)$ (e) $C(8, 0)$
 (b) $C(5, 3)$ (d) $C(8, 8)$ (f) $C(12, 6)$
4. Em quantas ordens diferentes cinco atletas podem terminar uma corrida sem empates?
 5. Há seis candidatos diferentes para governador de um estado. De quantas maneiras diferentes os nomes dos candidatos podem ser impressos na célula de voto?
 6. Quantas cadeias de bits de extensão 12 contêm
 - (a) exatamente três 1s?
 - (b) no máximo três 1s?
 - (c) pelo menos três 1s?
 - (d) um número igual de 0s e 1s?
 7. De quantas maneiras um conjunto de dois números inteiros positivos, menores que 100, podem ser escolhidos?
 8. Um conjunto de 10 elementos podem ter quantos subconjuntos com um número ímpar de elementos?
 9. Uma moeda é jogada oito vezes, e em cada lançamento tem-se cara ou coroa. Quantos resultados são possíveis
 - (a) no total?
 - (b) com exatamente três caras?
 - (c) com pelo menos três caras?
 - (d) com o mesmo número de caras e coroa?
 10. Quantas cadeias de bits de extensão 10 têm
 - (a) exatamente três 0s?
 - (b) mais 0s que 1s?
 - (c) pelo menos sete 1s?
 - (d) pelo menos três 1s?
 11. Quantas permutações das letras ABCDEFGH contêm
 - (a) a sequência ED?
 - (b) a sequência CDE?
 - (c) a sequência BA e FGH?
 - (d) a sequência AB, DE e GH?
 - (e) a sequência CAB e BED?
 - (f) a sequência BCA e ABF?
 12. Há quantas maneiras possíveis para que 10 mulheres e seis homens fiquem em uma fila, de forma que não haja dois homens um ao lado do outro? [Dica: Primeiro posicione as mulheres e depois considere as posições possíveis para os homens.]
 13. Treze pessoas de um time de softball aparecem para um jogo.
 - (a) Quantas maneiras de escolher 10 jogadores para entrar em campo são possíveis?
 - (b) Quantas maneiras de designar as 10 posições são possíveis, selecionando-se os jogadores a partir das 13 pessoas que apareceram?
 - (c) Das 13 pessoas que apareceram, três são mulheres. Há quantas maneiras possíveis de escolher os 10 jogadores se pelo menos um desses jogadores deve ser uma mulher?
 14. Um professor escreve 40 questões do tipo falso/verdadeiro de matemática discreta. Das proposições dessas questões, 17 são verdadeiras. Se as questões podem ser organizadas em qualquer ordem, quantos cadernos de respostas diferentes são possíveis?
 15. Há sete mulheres e nove homens em uma faculdade no departamento de matemática.
 - (a) Quantas maneiras de selecionar um comitê de cinco membros do departamento são possíveis, se pelo menos uma mulher deve estar no comitê?
 - (b) Quantas maneiras de selecionar um comitê de cinco membros do departamento são possíveis, se pelo menos uma mulher e um homem devem estar no comitê?
 16. Quantas sequências de seis letras minúsculas do alfabeto da língua inglesa contêm
 - (a) a letra a ?
 - (b) as letras a e b ?
 - (c) as letras a e b em posições consecutivas, com a precedendo b , com todas as letras distintas?
 - (d) as letras a e b , em que a está à esquerda de b em uma sequência, com todas as letras distintas?
 17. Suponha que um departamento tenha 10 homens e 15 mulheres. Quantas maneiras de formar um comitê com seis membros são possíveis, se ele deve ter mais mulheres que homens?
 18. Quantas cadeias de bits contêm exatamente cinco 0s e quatorze 1s, se todo 0 deve ser seguido imediatamente por dois 1s?
 19. Quantas maneiras de selecionar 12 países na ONU para servir em um conselho são possíveis, se 3 são selecionados a partir de um bloco de 45, 5 são selecionados a partir de um bloco de 57 e os outros, a partir de 69 países restantes?
 20. Há quantas maneiras de seis pessoas sentarem-se em uma mesa circular, onde os assentos são considerados os mesmos se eles podem ser obtidos por uma rotação da mesa?