Introdução às Técnicas de Demonstração

Matemática Discreta

Prof. MSc. Samy Sá

Universidade Federal do Ceará
Campus de Quixadá

12 de fevereiro de 2014

Universidade Federal do Ceará
Computer Science Department
Samy Sá (samy@ufc.br)

Objetivos

- Introduzir o conceito de prova
- Descrever métodos para contruí-las
- Exemplificar Demonstrações

Universidade Federal do Ceará
Computer Science Department
Samy Sá (samy@ufc.br)

Outline

Provas Formais

- Passos adequadamente exibidos e identificados
- Regras utilizadas são fornecidas
- Axiomas e hipóteses utilisados são destacados

Universidade Federal do Ceará
Computer Science Department
Samy Sá (samy@ufc.br)

Provas Formais - Exemplo

Exemplo

Desejamos provar que $\neg(p \rightarrow q)) \equiv p \wedge \neg q$.

$$\neg(p \rightarrow q) \quad \equiv \quad \neg(\neg p \vee q) \qquad (\textit{Regra do Condicional})$$

Universidade Federal do Ceará
Computer Science Department
Samy Sá (samy@ufc.br)

Provas Formais - Exemplo

Exemplo

Desejamos provar que $\neg(p \to q)) \equiv p \wedge \neg q$.

$$\begin{array}{lcll} \neg(p \to q) & \equiv & \neg(\neg p \vee q) & (\textit{Regra do Condicional}) \\ & \equiv & \neg(\neg p) \wedge \neg q & (\textit{Lei de De Morgan}) \end{array}$$

Universidade Federal do Ceará
Computer Science Department
Samy Sá (samy@ufc.br)

Provas Formais - Exemplo

Exemplo

Desejamos provar que $\neg(p \rightarrow q)) \equiv p \wedge \neg q$*.*

$$\begin{array}{rcll} \neg(p \rightarrow q) & \equiv & \neg(\neg p \vee q) & (\textit{Regra do Condicional}) \\ & \equiv & \neg(\neg p) \wedge \neg q & (\textit{Lei de De Morgan}) \\ & \equiv & p \wedge \neg q & (\textit{Dupla Negacao}) \end{array}$$

Universidade Federal do Ceará
Computer Science Department
Samy Sá (samy@ufc.br)

Provas Formais - Exemplo

Exemplo

Desejamos provar que $\neg(p \rightarrow q)) \equiv p \wedge \neg q$.

$$1. \neg(p \rightarrow q)$$

Universidade Federal do Ceará
Computer Science Department
Samy Sá (samy@ufc.br)

Provas Formais - Exemplo

Exemplo

Desejamos provar que $\neg(p \rightarrow q)) \equiv p \wedge \neg q$.

1. $\neg(p \rightarrow q)$
2. $\neg(\neg p \vee q)$ *Regra do Condicional* (1)

Universidade Federal do Ceará
Computer Science Department
Samy Sá (samy@ufc.br)

Provas Formais - Exemplo

Exemplo

Desejamos provar que $\neg(p \rightarrow q)) \equiv p \wedge \neg q$*.*

$$
\begin{array}{ll}
1. \neg(p \rightarrow q) & \\
2. \neg(\neg p \vee q) & \textit{Regra do Condicional } (1) \\
3. \neg(\neg p) \wedge \neg q & \textit{Lei de De Morgan } (2)
\end{array}
$$

Universidade Federal do Ceará
Computer Science Department
Samy Sá (samy@ufc.br)

Provas Formais - Exemplo

Exemplo

Desejamos provar que $\neg(p \rightarrow q)) \equiv p \wedge \neg q$.

1.$\neg(p \rightarrow q)$	
2.$\neg(\neg p \vee q)$	*Regra do Condicional* (1)
3.$\neg(\neg p) \wedge \neg q$	*Lei de De Morgan* (2)
4.$p \wedge \neg q$	*Dupla Negacao* (3)

Provas Informais

- Normalmente são mais fáceis de seguir
- Alguns passos podem envolver mais que uma regra
- Axiomas e regras podem ser deixados implícitos

Universidade Federal do Ceará
Computer Science Department
Samy Sá (samy@ufc.br)

Provas Informais

Exemplo

Desejamos provar que $\neg(p \to q)) \equiv p \wedge \neg q$.

- *Pela regra do condicional, sabemos que* $p \to q$ *equivale a* $\neg p \vee q$.

Universidade Federal do Ceará
Computer Science Department
Samy Sá (samy@ufc.br)

Provas Informais

Exemplo

Desejamos provar que $\neg(p \rightarrow q)) \equiv p \wedge \neg q$.

- *Pela regra do condicional, sabemos que* $p \rightarrow q$ *equivale a* $\neg p \vee q$. *Logo, concluímos que* $\neg(p \rightarrow q)$ *equivale a* $\neg(\neg p \vee q)$.

Universidade Federal do Ceará
Computer Science Department
Samy Sá (samy@ufc.br)

Provas Informais

Exemplo

Desejamos provar que $\neg(p \rightarrow q)) \equiv p \wedge \neg q$.

- *Pela regra do condicional, sabemos que* $p \rightarrow q$ *equivale a* $\neg p \vee q$. *Logo, concluímos que* $\neg(p \rightarrow q)$ *equivale a* $\neg(\neg p \vee q)$. *A Lei de De Morgan nos diz que* $\neg(\neg p \vee q)$ *equivale a* $\neg(\neg p) \wedge \neg q$.

Universidade Federal do Ceará
Computer Science Department
Samy Sá (samy@ufc.br)

Provas Informais

Exemplo

Desejamos provar que $\neg(p \to q)) \equiv p \wedge \neg q$.

- *Pela regra do condicional, sabemos que* $p \to q$ *equivale a* $\neg p \vee q$. *Logo, concluímos que* $\neg(p \to q)$ *equivale a* $\neg(\neg p \vee q)$. *A Lei de De Morgan nos diz que* $\neg(\neg p \vee q)$ *equivale a* $\neg(\neg p) \wedge \neg q$. *Portanto,* $\neg(p \to q) \equiv p \wedge \neg q$.

Universidade Federal do Ceará
Computer Science Department
Samy Sá (samy@ufc.br)

Terminologia

- **Teorema**: Uma afirmação importante que podemos provar (Alt. Fato, Resultado)

Terminologia

- **Teorema**: Uma afirmação importante que podemos provar (Alt. Fato, Resultado)
- **Proposição**: Uma afirmação menos importante, mas que também podemos provar

Universidade Federal do Ceará
Computer Science Department
Samy Sá (samy@ufc.br)

Terminologia

- **Teorema**: Uma afirmação importante que podemos provar (Alt. Fato, Resultado)
- **Proposição**: Uma afirmação menos importante, mas que também podemos provar
- **Prova**: Um argumento válido que mostra a que um teorema é verdadeiro (Alt. Demonstração)

Universidade Federal do Ceará
Computer Science Department
Samy Sá (samy@ufc.br)

Terminologia

- **Teorema**: Uma afirmação importante que podemos provar (Alt. Fato, Resultado)
- **Proposição**: Uma afirmação menos importante, mas que também podemos provar
- **Prova**: Um argumento válido que mostra a que um teorema é verdadeiro (Alt. Demonstração)
- **Axioma**: Sentenças assumidas verdadeiras em função de uma prova (Alt. Postulado)

Universidade Federal do Ceará
Computer Science Department
Samy Sá (samy@ufc.br)

Terminologia

- **Lemma**: Uma proposição que seria particularmente útil para uma prova

Universidade Federal do Ceará
Computer Science Department
Samy Sá (samy@ufc.br)

Terminologia

- **Lemma**: Uma proposição que seria particularmente útil para uma prova
- **Corolário**: Uma consequência direta de um teorema

Universidade Federal do Ceará
Computer Science Department
Samy Sá (samy@ufc.br)

Terminologia

- **Lemma**: Uma proposição que seria particularmente útil para uma prova
- **Corolário**: Uma consequência direta de um teorema
- **Conjectura**: Uma afirmação que acredita-se ser verdadeira, mas que não foi demonstrada

Universidade Federal do Ceará
Computer Science Department
Samy Sá (samy@ufc.br)

Tipos de Enunciados de Teoremas

- Prova de Generalizações
- Prova por Vacuidade (ou Prova Trivial)
- Prova por Contra-Exemplo
- Prova de Equivalências

Universidade Federal do Ceará
Computer Science Department
Samy Sá (samy@ufc.br)

Outline

Universidade Federal do Ceará
Computer Science Department
Samy Sá (samy@ufc.br)

Prova de Generalizações

Uma **generalização** é uma afirmação do tipo “Paratodo x,...”

Exemplo

“Se $x > y$, onde x, y são números reais positivos, então $x^2 > y^2$.”

Universidade Federal do Ceará
Computer Science Department
Samy Sá (samy@ufc.br)

Prova de Generalizações

Uma **generalização** é uma afirmação do tipo “Paratodo x,**...**”

Exemplo

“Se $x > y$, onde x, y são números reais positivos, então $x^2 > y^2$.”

O enunciado pode ser reescrito:

$$(\forall x \in \mathbb{R}_+^*)(\forall y \in \mathbb{R}_+^*)(x > y \rightarrow x^2 > y^2)$$

Universidade Federal do Ceará
Computer Science Department
Samy Sá (samy@ufc.br)

Prova de Generalizações

Algumas características:

- Contém quantificadores universais, possivelmente implícitos
- Caracterizam elementos de um domínio
- Descrevem uma propriedade inerente ao domínio em questão

Universidade Federal do Ceará
Computer Science Department
Samy Sá (samy@ufc.br)

Prova de Generalizações

Para provar uma generalização:

1. Escolha elementos genéricos do domínio (**Instanciação**)
2. Mostre que a propriedade vale no caso específico dos elementos escolhidos (**Prova do Caso Particular**)
3. Generalize a conclusão. (**Generalização**)

Prova de Generalizações

Para provar uma generalização:

1. Escolha elementos genéricos do domínio (**Instanciação**)
2. Mostre que a propriedade vale no caso específico dos elementos escolhidos (**Prova do Caso Particular**)
3. Generalize a conclusão. (**Generalização**)

IMPORTANTE!!!

No Passo 1, deve-se escolher um elemento genérico para cada variável universalmente quantificada, ou seja, para cada variável com quantificador para todo.

Universidade Federal do Ceará
Computer Science Department
Samy Sá (samy@ufc.br)

Prova de Generalizações

Teorema

"Se $x > y$, onde x, y são números reais positivos, então $x^2 > y^2$."

Universidade Federal do Ceará
Computer Science Department
Samy Sá (samy@ufc.br)

Prova de Generalizações

Teorema

"Se $x > y$, onde x, y são números reais positivos, então $x^2 > y^2$."

Prova

1. *Sejam c, d números reais positivos* ***quaisquer*** *tais que $c > d$.*

Universidade Federal do Ceará
Computer Science Department
Samy Sá (samy@ufc.br)

Prova de Generalizações

Teorema

"Se $x > y$, onde x, y são números reais positivos, então $x^2 > y^2$."

Prova

1. *Sejam c, d números reais positivos* ***quaisquer*** *tais que $c > d$.*
2. *Mostraremos que $c^2 > d^2$.*

Universidade Federal do Ceará
Computer Science Department
Samy Sá (samy@ufc.br)

Prova de Generalizações

Teorema

"Se $x > y$, onde x, y são números reais positivos, então $x^2 > y^2$."

Prova

1. *Sejam c, d números reais positivos **quaisquer** tais que $c > d$.*
2. *Mostraremos que $c^2 > d^2$.*
   2.1 *Se multiplicarmos os dois lados da inequação por c, concluiremos que $c.c > c.d$.*

Universidade Federal do Ceará
Computer Science Department
Samy Sá (samy@ufc.br)

Prova de Generalizações

Teorema

"Se $x > y$, onde x, y são números reais positivos, então $x^2 > y^2$."

Prova

1. *Sejam c, d números reais positivos* ***quaisquer*** *tais que $c > d$.*
2. *Mostraremos que $c^2 > d^2$.*
   - 2.1 *Se multiplicarmos os dois lados da inequação por c, concluiremos que $c.c > c.d$.*
   - 2.2 *Similarmente, se multiplicarmos os dois lados da inequação original por d, concluiremos que $c.d > d.d$.*

Prova de Generalizações

Teorema

"Se $x > y$, onde x, y são números reais positivos, então $x^2 > y^2$."

Prova

1. *Sejam c, d números reais positivos* ***quaisquer*** *tais que $c > d$.*
2. *Mostraremos que $c^2 > d^2$.*
   2.1 *Se multiplicarmos os dois lados da inequação por c, concluiremos que $c.c > c.d$.*
   2.2 *Similarmente, se multiplicarmos os dois lados da inequação original por d, concluiremos que $c.d > d.d$.*
   2.3 *Juntando as conclusões, teremos $c.c > d.d$, ou seja, $c^2 > d^2$.*

Universidade Federal do Ceará
Computer Science Department
Samy Sá (samy@ufc.br)

Prova de Generalizações

Teorema

"Se $x > y$, onde x, y são números reais positivos, então $x^2 > y^2$."

Prova

1. *Sejam c, d números reais positivos* ***quaisquer*** *tais que $c > d$.*
2. *Mostraremos que $c^2 > d^2$.*
   2.1 *Se multiplicarmos os dois lados da inequação por c, concluiremos que $c.c > c.d$.*
   2.2 *Similarmente, se multiplicarmos os dois lados da inequação original por d, concluiremos que $c.d > d.d$.*
   2.3 *Juntando as conclusões, teremos $c.c > d.d$, ou seja, $c^2 > d^2$.*
3. *Uma vez que utilizamos c, d quaisquer no começo, a propriedade vale para todo $x, y \in \mathbb{R}_+^*$.*

Universidade Federal do Ceará
Computer Science Department
Samy Sá (samy@ufc.br)

Outline

Universidade Federal do Ceará
Computer Science Department
Samy Sá (samy@ufc.br)

Prova por Vacuidade (ou Prova Trivial)

Um teorema do tipo $p \rightarrow q$ em que p é sempre falso ou que q é sempre verdadeiro será automaticamente provado.

Exemplo

"Todo elemento do conjunto vazio é um número natural"

Prova por Vacuidade (ou Prova Trivial)

Um teorema do tipo $p \to q$ em que p é sempre falso ou que q é sempre verdadeiro será automaticamente provado.

Exemplo

"Todo elemento do conjunto vazio é um número natural"

O enunciado pode ser reescrito:

$$(\forall x \in \emptyset)(x \in \mathbb{N})$$

Samy Sá (samy@ufc.br)

Prova por Vacuidade (ou Prova Trivial)

Um teorema do tipo $p \to q$ em que p é sempre falso ou que q é sempre verdadeiro será automaticamente provado.

Exemplo

"Todo elemento do conjunto vazio é um número natural"

O enunciado pode ser reescrito:

$$(\forall x \in \emptyset)(x \in \mathbb{N})$$

Alternativamente, pode ser reescrito:

$$(\forall x)(x \in \emptyset \to x \in \mathbb{N})$$

Universidade Federal do Ceará
Computer Science Department
Samy Sá (samy@ufc.br)

Prova por Vacuidade (ou Prova Trivial)

Teorema

$(\forall x)(x \in \emptyset \to x \in \mathbb{N})$

Samy Sá (samy@ufc.br)

Prova por Vacuidade (ou Prova Trivial)

Teorema

$(\forall x)(x \in \emptyset \rightarrow x \in \mathbb{N})$

Prova

Utilizaremos a técnica para provar generalizações.

Universidade Federal do Ceará
Computer Science Department
Samy Sá (samy@ufc.br)

Prova por Vacuidade (ou Prova Trivial)

Teorema

$(\forall x)(x \in \emptyset \rightarrow x \in \mathbb{N})$

Prova

Utilizaremos a técnica para provar generalizações.

1. *Considere c qualquer.*

Universidade Federal do Ceará
Computer Science Department
Samy Sá (samy@ufc.br)

Prova por Vacuidade (ou Prova Trivial)

Teorema

$(\forall x)(x \in \emptyset \rightarrow x \in \mathbb{N})$

Prova

Utilizaremos a técnica para provar generalizações.

1. *Considere c qualquer.*
2. *Desejamos mostrar que* $c \in \emptyset \rightarrow c \in \mathbb{N}$.

Universidade Federal do Ceará
Computer Science Department
Samy Sá (samy@ufc.br)

Prova por Vacuidade (ou Prova Trivial)

Teorema

$(\forall x)(x \in \emptyset \to x \in \mathbb{N})$

Prova

Utilizaremos a técnica para provar generalizações.

1. *Considere c qualquer.*
2. *Desejamos mostrar que* $c \in \emptyset \to c \in \mathbb{N}$.
   2.1 *Suponha que* $c \in \emptyset$.

Universidade Federal do Ceará
Computer Science Department
Samy Sá (samy@ufc.br)

Prova por Vacuidade (ou Prova Trivial)

Teorema

$(\forall x)(x \in \emptyset \rightarrow x \in \mathbb{N})$

Prova

Utilizaremos a técnica para provar generalizações.

1. *Considere c qualquer.*
2. *Desejamos mostrar que* $c \in \emptyset \rightarrow c \in \mathbb{N}$.
   - **2.1** *Suponha que* $c \in \emptyset$.
   - **2.2** *Observe que* $c \in \emptyset$ *é **FALSO**, pois o conjunto é vazio!*

Universidade Federal do Ceará
Computer Science Department
Samy Sá (samy@ufc.br)

Prova por Vacuidade (ou Prova Trivial)

Teorema

$(\forall x)(x \in \emptyset \to x \in \mathbb{N})$

Prova

Utilizaremos a técnica para provar generalizações.

1. *Considere c qualquer.*
2. *Desejamos mostrar que* $c \in \emptyset \to c \in \mathbb{N}$*.*
   - **2.1** *Suponha que* $c \in \emptyset$*.*
   - **2.2** *Observe que* $c \in \emptyset$ *é* ***FALSO****, pois o conjunto é vazio!*
   - **2.3** *Logo, por* ***vacuidade****, a implicação* $c \in \emptyset \to c \in \mathbb{N}$ *está correta.*

Universidade Federal do Ceará
Computer Science Department
Samy Sá (samy@ufc.br)

Prova por Vacuidade (ou Prova Trivial)

Teorema

$(\forall x)(x \in \emptyset \rightarrow x \in \mathbb{N})$

Prova

Utilizaremos a técnica para provar generalizações.

1. *Considere c qualquer.*
2. *Desejamos mostrar que* $c \in \emptyset \rightarrow c \in \mathbb{N}$.
   2.1 *Suponha que* $c \in \emptyset$.
   2.2 *Observe que* $c \in \emptyset$ *é* ***FALSO****, pois o conjunto é vazio!*
   2.3 *Logo, por* ***vacuidade****, a implicação* $c \in \emptyset \rightarrow c \in \mathbb{N}$ *está correta.*
3. *Como escolhemos um c qualquer, podemos generalizar: Todos os elementos do conjunto vazio são números naturais.*

Universidade Federal do Ceará
Computer Science Department
Samy Sá (samy@ufc.br)

Outline

Universidade Federal do Ceará
Computer Science Department
Samy Sá (samy@ufc.br)

Prova por Contra-Exemplo

Uma generalização pode ser mostrada **FALSA** através de um **contra-exemplo**, i.e., um exemplo em que a propriedade falha.

Exemplo

"Se $x > y$, onde x, y são números reais, então $x^2 > y^2$"

Universidade Federal do Ceará
Computer Science Department
Samy Sá (samy@ufc.br)

Prova por Contra-Exemplo

Uma generalização pode ser mostrada **FALSA** através de um **contra-exemplo**, i.e., um exemplo em que a propriedade falha.

Exemplo

"Se $x > y$, onde x, y são números reais, então $x^2 > y^2$"

O enunciado pode ser reescrito:

$$(\forall x \in \mathbb{R})(\forall y \in \mathbb{R})(x > y \rightarrow x^2 > y^2)$$

Samy Sá (samy@ufc.br)

Prova por Contra-Exemplo

Uma generalização pode ser mostrada **FALSA** através de um **contra-exemplo**, i.e., um exemplo em que a propriedade falha.

Exemplo

"Se $x > y$, onde x, y são números reais, então $x^2 > y^2$"

O enunciado pode ser reescrito:

$$(\forall x \in \mathbb{R})(\forall y \in \mathbb{R})(x > y \rightarrow x^2 > y^2)$$

IMPORTANTE!!!

A diferença deste para o exemplo original de generalização é pequeno. Apenas mudamos de $\mathbb{R}_+^*$ para o conjunto $\mathbb{R}$, ou seja, agora valem números reais negativos e o zero.

Universidade Federal do Ceará
Computer Science Department
Samy Sá (samy@ufc.br)

Prova por Contra-Exemplo

Teorema

"Se $x > y$, onde x, y são números reais, então $x^2 > y^2$"

PERGUNTA:

Será que este teorema é verdadeiro?

Universidade Federal do Ceará
Computer Science Department
Samy Sá (samy@ufc.br)

Prova por Contra-Exemplo

Teorema

Não é verdade que "Se $x > y$, onde x, y são números reais, então $x^2 > y^2$"

Universidade Federal do Ceará
Computer Science Department
Samy Sá (samy@ufc.br)

Prova por Contra-Exemplo

Teorema

Não é verdade que "Se $x > y$, onde x, y são números reais, então $x^2 > y^2$"

Prova

1. *Para mostrar que a generalização é falsa, basta eleger um contra-exemplo.*

Samy Sá (samy@ufc.br)

Prova por Contra-Exemplo

Teorema

Não é verdade que "Se $x > y$, onde x, y são números reais, então $x^2 > y^2$"

Prova

1. *Para mostrar que a generalização é falsa, basta eleger um contra-exemplo.*
2. *Considere $x = 1$ e $y = -3$. Logo, $x^2 = 1$ e $y^2 = 9$.*

Universidade Federal do Ceará
Computer Science Department
Samy Sá (samy@ufc.br)

Prova por Contra-Exemplo

Teorema

Não é verdade que "Se $x > y$, onde x, y são números reais, então $x^2 > y^2$"

Prova

1. *Para mostrar que a generalização é falsa, basta eleger um contra-exemplo.*
2. *Considere $x = 1$ e $y = -3$. Logo, $x^2 = 1$ e $y^2 = 9$.*
3. *Observe que $x > y$, mas $x^2 < y^2$, um contra-exemplo.*

Universidade Federal do Ceará
Computer Science Department
Samy Sá (samy@ufc.br)

Outline

Universidade Federal do Ceará
Computer Science Department
Samy Sá (samy@ufc.br)

Prova de Equivalências

Uma equivalência é uma afirmação do tipo $p \leftrightarrow q$ ou do tipo "se e somente se" (sse).

Exemplo

"Se n é inteiro, então n é ímpar se e somente se n^2 é ímpar."

Universidade Federal do Ceará
Computer Science Department
Samy Sá (samy@ufc.br)

Prova de Equivalências

Uma equivalência é uma afirmação do tipo $p \leftrightarrow q$ ou do tipo "se e somente se" (sse).

Exemplo

"Se n é inteiro, então n é ímpar se e somente se n^2 é ímpar."

O enunciado pode ser reescrito:

$$(\forall n \in \mathbb{Z})(n \text{ é ímpar} \leftrightarrow n^2 \text{ é ímpar})$$

Universidade Federal do Ceará
Computer Science Department
Samy Sá (samy@ufc.br)

Prova de Equivalências

Uma equivalência é uma afirmação do tipo $p \leftrightarrow q$ ou do tipo "se e somente se" (sse).

Exemplo

"Se n é inteiro, então n é ímpar se e somente se n^2 é ímpar."

- Para demonstrar uma equivalência do tipo $p \leftrightarrow q$, devemos mostrar que $p \rightarrow q$ e que $q \rightarrow p$.

Universidade Federal do Ceará
Computer Science Department
Samy Sá (samy@ufc.br)

Prova de Equivalências

Teorema

$(\forall n \in \mathbb{Z})(n \textit{ é ímpar} \leftrightarrow n^2 \textit{ é ímpar})$

Universidade Federal do Ceará
Computer Science Department
Samy Sá (samy@ufc.br)

Prova de Equivalências

Teorema

$(\forall n \in \mathbb{Z})(n \text{ é ímpar} \leftrightarrow n^2 \text{ é ímpar})$

Prova

Usaremos o método para provar generalizações.

Universidade Federal do Ceará
Computer Science Department
Samy Sá (samy@ufc.br)

Prova de Equivalências

Teorema

$(\forall n \in \mathbb{Z})(n \text{ é ímpar} \leftrightarrow n^2 \text{ é ímpar})$

Prova

Usaremos o método para provar generalizações.

1. *Seja c um número inteiro qualquer.*

Universidade Federal do Ceará
Computer Science Department
Samy Sá (samy@ufc.br)

Prova de Equivalências

Teorema

$(\forall n \in \mathbb{Z})(n \text{ é ímpar} \leftrightarrow n^2 \text{ é ímpar})$

Prova

Usaremos o método para provar generalizações.

1. *Seja c um número inteiro qualquer.*
2. *Desejamos mostrar que c é ímpar* $\leftrightarrow$ c^2 *é ímpar. O faremos em dois passos.*

Universidade Federal do Ceará
Computer Science Department
Samy Sá (samy@ufc.br)

Prova de Equivalências

Prova

Usaremos o método para provar generalizações.

1. *Seja c um número inteiro qualquer.*
2. *Desejamos mostrar que c é ímpar $\leftrightarrow$ c^2 é ímpar.*
   2.1 *($\rightarrow$) Mostraremos que c é ímpar $\rightarrow$ c^2 é ímpar*

Universidade Federal do Ceará
Computer Science Department
Samy Sá (samy@ufc.br)

Prova de Equivalências

Prova

Usaremos o método para provar generalizações.

1. *Seja c um número inteiro qualquer.*
2. *Desejamos mostrar que c é ímpar $\leftrightarrow c^2$ é ímpar.*
   - **2.1** *($\rightarrow$) Mostraremos que c é ímpar $\rightarrow c^2$ é ímpar*
     - **2.1.1** *Como c é ímpar, existe um inteiro k tal que $c = 2k + 1$.*

Universidade Federal do Ceará
Computer Science Department
Samy Sá (samy@ufc.br)

Prova de Equivalências

Prova

Usaremos o método para provar generalizações.

1. *Seja c um número inteiro qualquer.*
2. *Desejamos mostrar que c é ímpar* $\leftrightarrow$ c^2 *é ímpar.*
   - **2.1** *(*$\rightarrow$*) Mostraremos que c é ímpar* $\rightarrow$ c^2 *é ímpar*
     - **2.1.1** *Como c é ímpar, existe um inteiro k tal que* $c = 2k + 1$.
     - **2.1.2** *Portanto,* $c^2 = (2k + 1)^2$.

Universidade Federal do Ceará
Computer Science Department
Samy Sá (samy@ufc.br)

Prova de Equivalências

Prova

Usaremos o método para provar generalizações.

1. *Seja c um número inteiro qualquer.*
2. *Desejamos mostrar que c é ímpar* $\leftrightarrow c^2$ *é ímpar.*
   - **2.1** *(*$\rightarrow$*) Mostraremos que c é ímpar* $\rightarrow c^2$ *é ímpar*
     - **2.1.1** *Como c é ímpar, existe um inteiro k tal que* $c = 2k + 1$.
     - **2.1.2** *Portanto,* $c^2 = (2k + 1)^2$.
     - **2.1.3** *Desenvolvendo o produto notável, temos* $c^2 = (2k)^2 + 2.(2k).1 + 1^2 = 4k^2 + 4k + 1$.

Universidade Federal do Ceará
Computer Science Department
Samy Sá (samy@ufc.br)

Prova de Equivalências

Prova

Usaremos o método para provar generalizações.

1. *Seja c um número inteiro qualquer.*
2. *Desejamos mostrar que c é ímpar* $\leftrightarrow$ c^2 *é ímpar.*
   2.1 $(\rightarrow)$ *Mostraremos que c é ímpar* $\rightarrow$ c^2 *é ímpar*
      2.1.1 *Como c é ímpar, existe um inteiro k tal que* $c = 2k + 1$.
      2.1.2 *Portanto,* $c^2 = (2k + 1)^2$.
      2.1.3 *Desenvolvendo o produto notável, temos* $c^2 = (2k)^2 + 2.(2k).1 + 1^2 = 4k^2 + 4k + 1$.
      2.1.4 *Podemos reescrever a expressão:* $c^2 = 2(2k^2 + 2k) + 1$*, que é ímpar.*

Universidade Federal do Ceará
Computer Science Department
Samy Sá (samy@ufc.br)

Prova de Equivalências

Prova

Usaremos o método para provar generalizações.

1. *Seja c um número inteiro qualquer.*
2. *Desejamos mostrar que c é ímpar* $\leftrightarrow$ c^2 *é ímpar.*
   - **2.1** ($\rightarrow$) *Mostraremos que c é ímpar* $\rightarrow$ c^2 *é ímpar*
     - **2.1.1** *Como c é ímpar, existe um inteiro k tal que* $c = 2k + 1$.
     - **2.1.2** *Portanto,* $c^2 = (2k + 1)^2$.
     - **2.1.3** *Desenvolvendo o produto notável, temos* $c^2 = (2k)^2 + 2.(2k).1 + 1^2 = 4k^2 + 4k + 1$.
     - **2.1.4** *Podemos reescrever a expressão:* $c^2 = 2(2k^2 + 2k) + 1$, *que é ímpar.*
     - **2.1.5** *Logo, se c é ímpar,* c^2 *é ímpar.*

Universidade Federal do Ceará
Computer Science Department
Samy Sá (samy@ufc.br)

Prova de Equivalências

Prova

Usaremos o método para provar generalizações.

1. *Seja c um número inteiro qualquer.*
2. *Desejamos mostrar que "c é ímpar $\leftrightarrow$ c^2 é ímpar".*
   - **2.1** *($\rightarrow$) – CONCLUÍDO.*
   - **2.2** *($\leftarrow$) Mostraremos que "c^2 é ímpar $\rightarrow$ c é ímpar".*

Universidade Federal do Ceará
Computer Science Department
Samy Sá (samy@ufc.br)

Prova de Equivalências

Prova

Usaremos o método para provar generalizações.

1. *Seja c um número inteiro qualquer.*
2. *Desejamos mostrar que "c é ímpar $\leftrightarrow$ c^2 é ímpar".*
   - **2.1** *($\rightarrow$) – CONCLUÍDO.*
   - **2.2** *($\leftarrow$) Mostraremos que "c^2 é ímpar $\rightarrow$ c é ímpar".*
     - **2.2.1** *Como c^2 é ímpar, existe um inteiro l tal que $c^2 = 2l + 1$.*

Universidade Federal do Ceará
Computer Science Department
Samy Sá (samy@ufc.br)

Prova de Equivalências

Prova

Usaremos o método para provar generalizações.

1. *Seja c um número inteiro qualquer.*
2. *Desejamos mostrar que "c é ímpar $\leftrightarrow$ c^2 é ímpar".*

   2.1 *($\rightarrow$) – CONCLUÍDO.*

   2.2 *($\leftarrow$) Mostraremos que "c^2 é ímpar $\rightarrow$ c é ímpar".*

   2.2.1 *Como c^2 é ímpar, existe um inteiro l tal que $c^2 = 2l + 1$.*

   2.2.2 *Suponha que c seja par. Logo, existe um inteiro m tal que $c = 2m$.*

Universidade Federal do Ceará
Computer Science Department
Samy Sá (samy@ufc.br)

Prova de Equivalências

Prova

Usaremos o método para provar generalizações.

1. *Seja c um número inteiro qualquer.*
2. *Desejamos mostrar que "c é ímpar $\leftrightarrow$ c^2 é ímpar".*
   - **2.1** *($\rightarrow$) – CONCLUÍDO.*
   - **2.2** *($\leftarrow$) Mostraremos que "c^2 é ímpar $\rightarrow$ c é ímpar".*
     - **2.2.1** *Como c^2 é ímpar, existe um inteiro l tal que $c^2 = 2l + 1$.*
     - **2.2.2** *Suponha que c seja par. Logo, existe um inteiro m tal que $c = 2m$.*
     - **2.2.3** *Portanto, $c^2 = (2m)^2 = 4m^2$.*

Universidade Federal do Ceará
Computer Science Department
Samy Sá (samy@ufc.br)

Prova de Equivalências

Prova

Usaremos o método para provar generalizações.

1. *Seja c um número inteiro qualquer.*
2. *Desejamos mostrar que "c é ímpar $\leftrightarrow$ c^2 é ímpar".*
   - **2.1** *($\rightarrow$) – CONCLUÍDO.*
   - **2.2** *($\leftarrow$) Mostraremos que "c^2 é ímpar $\rightarrow$ c é ímpar".*
     - **2.2.1** *Como c^2 é ímpar, existe um inteiro l tal que $c^2 = 2l + 1$.*
     - **2.2.2** *Suponha que c seja par. Logo, existe um inteiro m tal que $c = 2m$.*
     - **2.2.3** *Portanto, $c^2 = (2m)^2 = 4m^2$.*
     - **2.2.4** *De 2.2.1 e 2.2.3, temos $2l + 1 = 4m^2$.*

Universidade Federal do Ceará
Computer Science Department
Samy Sá (samy@ufc.br)

Prova de Equivalências

Prova

Usaremos o método para provar generalizações.

1. *Seja c um número inteiro qualquer.*
2. *Desejamos mostrar que "c é ímpar $\leftrightarrow c^2$ é ímpar".*
   - **2.1** *($\rightarrow$) – CONCLUÍDO.*
   - **2.2** *($\leftarrow$) Mostraremos que "c^2 é ímpar $\rightarrow$ c é ímpar".*
     - **2.2.1** *Como c^2 é ímpar, existe um inteiro l tal que $c^2 = 2l + 1$.*
     - **2.2.2** *Suponha que c seja par. Logo, existe um inteiro m tal que $c = 2m$.*
     - **2.2.3** *Portanto, $c^2 = (2m)^2 = 4m^2$.*
     - **2.2.4** *De 2.2.1 e 2.2.3, temos $2l + 1 = 4m^2$.*
     - **2.2.5** *Isolando l, temos $l = \frac{4m^2-1}{2} = \frac{2.(2m^2)-1}{2}$. Como o numerador da fração é ímpar, l não é inteiro, mas isso é uma* ***contradição****!*

Universidade Federal do Ceará
Computer Science Department
Samy Sá (samy@ufc.br)

Prova de Equivalências

Prova

Usaremos o método para provar generalizações.

1. *Seja c um número inteiro qualquer.*
2. *Desejamos mostrar que "c é ímpar $\leftrightarrow$ c^2 é ímpar".*

   2.1 *($\rightarrow$) – CONCLUÍDO.*

   2.2 *($\leftarrow$) Mostraremos que "c^2 é ímpar $\rightarrow$ c é ímpar".*

   2.2.1 *Como c^2 é ímpar, existe um inteiro l tal que $c^2 = 2l + 1$.*

   2.2.2 *Suponha que c seja par. Logo, existe um inteiro m tal que $c = 2m$.*

   2.2.3 *Portanto, $c^2 = (2m)^2 = 4m^2$.*

   2.2.4 *De 2.2.1 e 2.2.3, temos $2l + 1 = 4m^2$.*

   2.2.5 *Isolando l, temos $l = \frac{4m^2-1}{2} = \frac{2.(2m^2)-1}{2}$. Como o numerador da fração é ímpar, l não é inteiro, mas isso é uma **contradição**!*

   2.2.6 *Logo, a suposição de que c seria par deve estar errada.*

Universidade Federal do Ceará
Computer Science Department
Samy Sá (samy@ufc.br)

Prova de Equivalências

Prova

Usaremos o método para provar generalizações.

1. *Seja c um número inteiro qualquer.*
2. *Desejamos mostrar que "c é ímpar $\leftrightarrow$ c^2 é ímpar".*
   - **2.1** *($\rightarrow$) – CONCLUÍDO.*
   - **2.2** *($\leftarrow$) Mostraremos que "c^2 é ímpar $\rightarrow$ c é ímpar".*
     - **2.2.1** *Como c^2 é ímpar, existe um inteiro l tal que $c^2 = 2l + 1$.*
     - **2.2.2** *Suponha que c seja par. Logo, existe um inteiro m tal que $c = 2m$.*
     - **2.2.3** *Portanto, $c^2 = (2m)^2 = 4m^2$.*
     - **2.2.4** *De 2.2.1 e 2.2.3, temos $2l + 1 = 4m^2$.*
     - **2.2.5** *Isolando l, temos $l = \frac{4m^2-1}{2} = \frac{2.(2m^2)-1}{2}$. Como o numerador da fração é ímpar, l não é inteiro, mas isso é uma **contradição**!*
     - **2.2.6** *Logo, a suposição de que c seria par deve estar errada.*
     - **2.2.7** *Concluímos que se c^2 é ímpar, c também é ímpar.*

Universidade Federal do Ceará
Computer Science Department
Samy Sá (samy@ufc.br)

Prova de Equivalências

Teorema
$(\forall n \in \mathbb{Z})(n \text{ é ímpar} \leftrightarrow n^2 \text{ é ímpar})$

Prova
Empregamos o método para provar generalizações.

1. *Seja c um número inteiro qualquer. (Instanciação)*
2. *Mostramos que c é ímpar $\leftrightarrow$ c^2 é ímpar. (Caso específico)*

Prova de Equivalências

Teorema

$(\forall n \in \mathbb{Z})(n \textit{ é ímpar} \leftrightarrow n^2 \textit{ é ímpar})$

Prova

Empregamos o método para provar generalizações.

1. *Seja c um número inteiro qualquer. (Instanciação)*
2. *Mostramos que c é ímpar* $\leftrightarrow$ *c^2 é ímpar. (Caso específico)*
3. *Como escolhemos um c qualquer, a propriedade vale para todo número inteiro. (Generalização)*

Exercícios

Prove ou desprove:

1. O quadrado de um número inteiro par é um número par.

Universidade Federal do Ceará
Computer Science Department
Samy Sá (samy@ufc.br)

Exercícios

Prove ou desprove:

1. O quadrado de um número inteiro par é um número par.
2. Todo número inteiro positivo pode ser escrito como a soma dos quadrados de três inteiros.

Samy Sá (samy@ufc.br)

Exercícios

Prove ou desprove:

1. O quadrado de um número inteiro par é um número par.
2. Todo número inteiro positivo pode ser escrito como a soma dos quadrados de três inteiros.
3. Para x inteiro, 3x+2 é par SSE x+5 é ímpar.

Universidade Federal do Ceará
Computer Science Department
Samy Sá (samy@ufc.br)

Exercícios

Prove ou desprove:

1. O quadrado de um número inteiro par é um número par.
2. Todo número inteiro positivo pode ser escrito como a soma dos quadrados de três inteiros.
3. Para x inteiro, 3x+2 é par SSE x+5 é ímpar.
4. Todo gato que é especialista em xadrez também é fluente em chinês e latim.

Universidade Federal do Ceará
Computer Science Department
Samy Sá (samy@ufc.br)

Dicas

1. O quadrado de um número inteiro par é um número par.
   - Use o método para provar Generalizações
2. Todo número inteiro positivo pode ser escrito como a soma dos quadrados de três inteiros.
   - Procure um Contra-Exemplo
3. Para x inteiro, 3x+2 é par SSE x+5 é ímpar.
   - Use o método para provar generalizações
   - No segundo passo do método, faça uma prova de equivalência.
4. Todo gato que é especialista em xadrez também é fluente em chinês e latim.
   - Use um argumento de vacuidade