Matemática Discreta
Lista de Exercícios 02

Técnicas de Demonstração: por exaustão/casos, existência, unicidade, contra-exemplos

1. Demonstre que $n^2 + 1 \geq 2^n$ quando n é um inteiro positivo com $1 \leq n \leq 4$.
2. Demonstre que se x e y são números reais, então max(x, y) + min(x, y) = $x + y$. [*Dica*: Use uma demonstração por casos, com os dois casos correspondentes a $x \geq y$ e $x < y$, respectivamente.]
3. Demonstre a **desigualdade triangular**, que afirma que se x e y são números reais, então $|x| + |y| \geq |x + y|$ (em que $|x|$ representa o valor absoluto de x, que é igual a x se $x \geq 0$ e igual a $-x$ se $x < 0$).
4. Demonstre que há 100 números inteiros positivos consecutivos que não são raízes quadradas perfeitas. Sua desmonstração é construtiva ou não construtiva?
5. Demonstre que há um par de números inteiros consecutivos, tal que um desses números inteiros é um quadrado perfeito e o outro, um cubo perfeito.
6. Demonstre ou contrarie que há um número racional x e um número irracional y, tal que x^y é irracional.
7. Mostre que cada uma destas proposições pode ser usada para expressar o fato de que há um único elemento x, tal que $P(x)$ seja verdadeira.

   (a) $\exists x \forall y (P(y) \leftrightarrow x = y)$

   (b) $\exists x P(x) \wedge \forall x \forall y (P(x) \wedge P(y) \rightarrow x = y)$

   (c) $\exists x (P(x) \wedge \forall y (P(y) \rightarrow x = y))$

8. Suponha que a e b sejam números inteiros ímpares, com $a \neq b$. Mostre que há um único número inteiro c, tal que $|a - c| = |b - c|$.
9. Mostre que se n é um número inteiro ímpar, então há um único número inteiro k, tal que n é a soma de $k - 2$ e $k + 3$
10. Demonstre que dado um número real x, existem números únicos n e ϵ, tal que $x = n - \epsilon$, n é um número inteiro e $0 \leq \epsilon < 1$.
11. A **média harmônica** de dois números reais x e y é igual a $2xy/(x + y)$. A **média geométrica** de dois números reais x e y é igual a $\sqrt{xy}$. Para qualquer par de reais positivos distintos x e y, uma destas médias é sempre maior que a outra? Formule uma conjectura e demonstre-a.
12. Escreva os números $1, 2, \ldots, 2n$ em uma lousa, onde n é um número inteiro ímpar. Escolha dois números quaisquer, j e k, escreva $|j - k|$ na lousa e apague j e k. Continue este processo até que apenas um número inteiro esteja escrito na lousa. Demonstre que este número inteiro que restou deve ser ímpar.
13. Fomule uma conjectura sobre os dígitos decimais que aparecem como dígito final da quarta potência de um número inteiro. Demonstre sua conjectura, usando uma demonstração por casos.
14. Demonstre que não há um número inteiro positivo n tal que $n^2 + n^3 = 100$.
15. Comprove que não existem soluções para os números inteiros positivos x e y na equação $x^4 + y^4 = 625$.
16. Demonstre que se $n = abc$, em que a, b e c são números inteiros positivos, então $a \leq \sqrt[3]{n}$, $b \leq \sqrt[3]{n}$ ou $c \leq \sqrt[3]{n}$.
17. Mostre que se x é racional e y é irracional, então $x + y$ é irracional.
18. Mostre que se x é racional não nulo e y é irracional, então xy é irracional.
19. Demonstre que entre dois números racionais distintos há um número irracional.
20. Demonstre ou contrarie que você pode usar dominós para ladrilhar o tabuleiro de xadrez padrão com os dois cantos adjacentes removidos (ou seja, os cantos que não são opostos).
21. Demonstre que você pode usar dominós para ladrilhar um tabuleiro de xadrez retangular com um número par de quadrados.
22. Use uma demonstração por exaustão para mostrar que não existe um ladrilhamento que use dominós de um tabuleiro de xadrez 4 por 4 com lados opostos removidos. [Dica: Primeiro mostre que você pode assumir que os quadrados à esquerda superior e à direita inferior foram removidos. Numere os quadrados do tabuleiro original de 1 a 16, começando na primeira fila, da esquerda para a direita, então começando na esquerda da segunda fila e indo para a direita, e assim por diante. Remova os quadrados 1 e 16. Para começar a demonstração, note que o quadrado 2 está coberto pelo dominó na horizontal, que cobre os quadrados 2 e 3, ou verticalmente, que cobre os quadrados 2 e 6. Considere cada um desses casos separadamente e trabalhe com todos os subcasos que aparecem.]
23. Mostre que existem dois quadrados brancos e dois pretos de um tabuleiro de xadrez padrão, que quando removidos, torna impossível ladrilhar os quadrados restantes com dominós.