Operações de Conjuntos como Ilustração dos Princípios de Contagem

Leitura Complementar 05

Notas de Aula de Matemática Discreta

Samy Sá

Universidade Federal do Ceará
Campus de Quixadá
Quixadá, Brasil
samy@ufc.br

Requisitos: Teoria dos Conjuntos, Contagem Básica (Slides 28/04)
Texto produzido em 02/05/2014.

1 Introdução

Neste artigo, vamos rever as definições dos principais conceitos de contagem e ilustraremos esses conceitos com analogias a operações sobre conjuntos. Cada uma das definições que segue foi exemplificada nos slides e aulas do assunto, de forma que este texto complementa os estudos anteriores. Em cada passo, revisaremos a definição e ilustraremos com a analogia.

Definição 1 *(Princípio da Multiplicação)*

Suponha que um processo pode ser quebrado em uma sequência de dois passos. Se há n_1 maneiras de resolver o primeiro passo e n_2 maneiras de resolver o segundo passo, então haverá $n_1 n_2$ maneiras de resolver o processo.

Exemplo 1 *Considere os conjuntos $S = \{1, 2, 3, 4\}$ e $T = \{a, b, c\}$ e relembre o conceito de produto cartesiano de dois conjuntos em que obteriamos $S \times T = \{(1, a), (2, a), (3, a), (4, a), (1, b), (2, b), (3, b), (4, b), (1, c), (2, c), (3, c), (4, c)\}$. O produto tem 12 elementos e, não por coincidência, $|S|.|T| = 3.4 = 12$. Podemos ver o produto cartesiano como um problema de contagem a ser resolvido pelo princípio da multiplicação. O número de maneiras de resolver o processo de escolher um par ordenado do produto cartesiano pode ser visto como uma sequência de dois passos em que escolhemos o primeiro argumento e depois escolhemos o segundo. Mas observe que temos 3 maneiras de escolher o primeiro (algum elemento de S) e 4 maneiras de escolher o segundo (algum elemento de T). O princípio da multiplicação nos diz que temos então $3.4 = 12$ maneiras de construir um par ordenado no produto cartesiano de S por T.*

Definição 2 *(Princípio da Soma)*

Se uma tarefa pode ser resolvida de uma entre n_1 ou n_2 maneiras (alternativas), então a tarefa pode ser resolvida de $n_1 + n_2$ maneiras diferentes.

Exemplo 2 *Suponha que você tem dois conjuntos com elementos de categorias bem distintas. Por exemplo, considere um conjunto somente com números naturais e outro somente com letras do alfabeto, como $S = \{1, 2, 3, 4\}$ e $T = \{a, b, c\}$. Se for pra escolher aleatoriamente um elemento de qualquer um dos dois conjuntos, quantos resultados diferentes se pode ter, ou seja, de quantas formas diferentes se pode escolher uma resposta? Aqui temos 4 possibilidades no conjunto e S e mais 3 possibilidades no conjunto T. Como todas são diferentes, temos de fato 7 possibilidades. O conjunto com todas as possibilidades é $S \cup T = \{1, 2, 3, 4, a, b, c\}$ que, por ser união de conjuntos disjuntos, terá na sua cardinalidade a soma das cardinalidades dos conjuntos originais.*

Não é à toa que o resultado foi a soma das cardinalidades dos conjuntos (3 + 4 = 7). Se tivermos S, T dois conjuntos de alternativas em que $|S| = n$, $|T| = m$ e $S \cap T = \emptyset$, o número de alternativas sera sempre $n + m$. A terceira condição, porém, é importantíssima, como veremos em breve no principio da subtraçao. Isso só dará certo quando os conjuntos forem disjuntos, ou seja, não houver interseçao entre eles. No exemplo acima, utilizamos categorias diferentes de elementos para forçar que não houvesse interseção, mas o mesmo raciocínio vale para conjuntos numéricos sem interseção.

Definição 3 *(Princípio da Subtração)*

Se uma tarefa pode ser resolvida de uma entre n_1 ou n_2 maneiras (alternativas), então o número de maneiras que a tarefa pode ser resolvida é $n_1 + n_2$ menos o total de alternativas comuns às duas maneiras.

Esse princípio substitui o da soma nas situaçoes em que $S \cap T \neq \emptyset$, ou seja, quando a interseção entre os conjuntos não é vazia.

Exemplo 3 *Suponha conjuntos S, T tais que $S = \{0, 2, 4, 6, 8\}$ e $T = \{2, 3, 5, 7\}$. Se o objetivo é escolher um número entre os disponíveis nos conjuntos S, T, de quantas maneiras diferentes podemos fazê-lo, ou seja, quantos resultados distintos podemos ter? Solução: Observe que o 2 está nos dois conjuntos, de forma que essa alternativa deve ser contada apenas uma vez. As opções, então, são os elementos do conjunto $S \cup T = \{0, 2, 4, 6, 8, 3, 5, 7\}$, que tem 8 elementos. Mas se aplicarmos o princípio da soma, portanto, teremos o resultado $5 + 4 = 9$, quando temos apenas 8 alternativas de fato. Pelo princípio da subtração, devemos remover as repetições, ou seja, a cardinalidade da interseção. Obtemos exatamente $4 + 5 - 1 = 8$ por esse princípio.*

De certa forma, os princípios da soma e da subtração são o mesmo princípio. Pode-se dizer que o da soma é um caso particular da subtração em que a interseção tem zero elementos. Da mesma forma, estaríamos descontando as repetições, mas esse desconto não seria aparente.

Definição 4 *(Princípio da Divisão)* *Existem $\frac{n}{d}$ maneiras de resolver uma tarefa se esta puder ser feita por um procedimento com n alternativas de resolução e para cada maneira w de resolver tarefa exatamente d das n alternativas correspondem a w.*

Exemplo 4 *Considere o conjunto $S = \{1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9\}$. Se utilizarmos como critério de comparação o resto da divisão de um elemento destes por 3, teremos 3 grupos: $S_1 = \{1, 4, 7\}$, $S_2 = \{2, 5, 8\}$, e $S_3 = \{3, 6, 9\}$. Observe que nesse critério, todos os grupos têm exatamente a mesma quantidade de elementos. Agora considere a questão: Se o objetivo é escolher um número qualquer para dividí-lo por 3 e guardar apenas seu resto, quantos resultados diferentes podemos obter? Esse exemplo torna a resposta natural, mas está aqui pra ilustrar o princípio da divisão. Temos 9 alternativas, mas cada 3 delas correspondem a um certo resultado único. Para chegar à resposta, pelo princípio da divisão, teremos $9/3 = 3$ possíveis maneiras de resolver a tarefa.*

Se utilizássemos como critério o resto da divisão por 5, teríamos apenas 5 possíveis maneiras de resolver a tarefa, mas a conta não seria tão diretamente pelo princípio da divisão. O motivo é que enquanto algumas maneiras w teriam 2 alternativas correspondentes a w, há uma delas que só teria uma alternativa para designá-la, a dizer, a opção 5 que é a única a gerar resto zero.

2 Exercícios

Exercício 1: Uma sequência de DNA é formada por 4 tipos diferentes de elementos, a dizer, A,C,T,G, em quaisquer quantidades e em qualquer sequência, repetições à vontade. Com base nisso, responda:

a) Quantas cadeias de DNA de 5 elementos terminam em A?
b) Quantas cadeias de DNA de 6 elementos começam com T e terminam com G?
c) Quantas cadeias de DNA de 5 elementos contém somente A e T?
d) Quantas cadeias de DNA de 5 elementos não contém C?

Exercício 2: Quantos inteiros positivos de 1000 até 9999...

a) são divisíveis por 9?
b) são pares?
c) têm seus 4 dígitos todos diferentes?
d) não são divisíveis por 3?
e) são divisíveis por 5 ou 7?
f) não são divisíveis nem por 5 e nem por 7?
g) são divisíveis por 5, mas não por 7?
h) são divisíveis por 5 e 7?

Exercício 3: De quantas maneiras um fotógrafo pode organizar 6 pessoas entre 10 de um casamento (incluindo os noivos) se...

a) A noiva precisa aparecer na foto?
b) Tanto a noiva quanto o noivo precisam aparecer na foto?
c) Um e somente um entre a noiva e o noivo deve aparecer na foto?
d) A noiva deve aparecer ao lado do noivo na foto?
e) A noiva está em algum lugar à esquerda do noivo?
f) Duas fotos com as mesmas 6 pessoas são consideradas iguais independente das posições?

Exercício 4: De quantas maneiras 6 pessoas podem se sentar ao redor de uma mesa circular se dois arranjos de assentos forem considerados iguais sempre que os vizinhos da esquerda e direita forem os mesmos para cada pessoa?