Coeficientes Binomiais e Identidades em Combinatória
Matemática Discreta

Prof. MSc. Samy Sá

Universidade Federal do Ceará
Campus de Quixadá

17 de maio de 2014

Universidade Federal do Ceará
Computer Science Department
Samy Sá (samy@ufc.br)

Outline

Coeficientes Binomiais

O Teorema Binomial

Alguns Resultados

Triângulo de Pascal

Universidade Federal do Ceará
Computer Science Department
Samy Sá (samy@ufc.br)

Outline

Coeficientes Binomiais

O Teorema Binomial

Alguns Resultados

Triângulo de Pascal

Universidade Federal do Ceará
Computer Science Department
Samy Sá (samy@ufc.br)

Coeficientes Binomiais

- O número de r-combinações de n elementos pode ser denotado como $\binom{n}{r}$.
- Chamamos-lhes de coeficientes binomiais, pois ocorrem como coeficientes em expansões de binômios $(a+b)^n$.

Exemplo

- $(a+b)^1 = (a+b) = 1.a + 1.b = \binom{1}{0}.a + \binom{1}{1}.b$
- $(a+b)^2 = 1.a^2 + 2.a.b + 1.b^2 = \binom{2}{0}.a^2 + \binom{2}{1}.a.b + \binom{2}{2}.b^2$
- $(a+b)^3 = 1.a^3 + 3.a^2.b + 3.a.b^2 + 1.b^3 = \binom{3}{0}.a^3 + \binom{3}{1}.a^2.b + \binom{3}{2}.a.b^2 + \binom{3}{3}.b^3.$

...

Universidade Federal do Ceará
Computer Science Department
Samy Sá (samy@ufc.br)

Outline

Coeficientes Binomiais

O Teorema Binomial

Alguns Resultados

Triângulo de Pascal

O Teorema Binomial

Teorema

Sejam x, y variáveis e n um inteiro não negativo. Então

$$(x+y)^n = \sum_{j=0}^{n} \binom{n}{j} x^{n-j} y^j = \binom{n}{0} x^n y^0 + \binom{n}{1} x^{n-1} y^1 + ... + \binom{n}{n} x^0 y^n$$

Prova

Usamos uma prova por combinatória. Os termos do produto $(x+y).(x+y).\ldots.(x+y)$ são da forma $x^{n-j}y^j$. Observe que para obter um termo desses, devemos escolher $n-j$ vezes o termo x entre as n ocorrências da soma $x+y$. Portanto, o coeficiente de $x^{n-j}y^j$ será $\binom{n}{n-j}$, que é o mesmo $\binom{n}{j}$.

O Teorema Binomial

Dessa forma, não precisamos fazer muitas contas para saber alguns coeficientes.

PERGUNTA:

Quanto é o coeficiente de $x^{12}y^{13}$ *na expansão de* $(x+y)^{25}$*?*

Constatação:

Pelo teorema binomial, o coeficiente será $\binom{25}{12} = \frac{25!}{13!.12!}$.

Universidade Federal do Ceará
Computer Science Department
Samy Sá (samy@ufc.br)

O Teorema Binomial

Dessa forma, não precisamos fazer muitas contas para saber alguns coeficientes.

PERGUNTA:

Quanto é o coeficiente de $x^{12}y^{13}$ na expansão de $(2x-3y)^{25}$?

Constatação:

Observe que, pelo teorema binomial, temos

$(x+y)^{25} = \sum_{j=0}^{25} \binom{25}{j} (2x)^{25-j}(-3y)^j$. *Portanto, o coeficiente de* $x^{12}y^{13}$ *nessa expansão será* $\binom{25}{13}.2^{12}.(-3)^{13}$.

Outline

Coeficientes Binomiais

O Teorema Binomial

Alguns Resultados

Triângulo de Pascal

Universidade Federal do Ceará
Computer Science Department
Samy Sá (samy@ufc.br)

Alguns Resultados

O terema binomial nos permite provar alguns resultados úteis com simplicidade.

Corolário

Seja n não negativo, então

$$\sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} = 2^n.$$

Prova

Utilizando o teorema binomial com $x = y = 1$, temos:

$$2^n = (1+1)^n = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} .1^{n-k}.1^k = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k}.$$

Universidade Federal do Ceará
Computer Science Department
Samy Sá (samy@ufc.br)

Alguns Resultados

O terema binomial nos permite provar alguns resultados úteis com simplicidade.

Corolário

Seja n positivo, então

$$\sum_{k=0}^{n}(-1)^k\binom{n}{k} = 0.$$

Prova

Utilizando o teorema binomial com $x = 1$ *e* $y = -1$*, temos:*

$0^n = (1 + (-1))^n = \sum_{k=0}^{n}\binom{n}{k}.1^{n-k}.(-1)^k = \sum_{k=0}^{n}(-1)^k\binom{n}{k}$. *Isso conclui a prova do corolario.*

Universidade Federal do Ceará
Computer Science Department
Samy Sá (samy@ufc.br)

Alguns Resultados

O terema binomial nos permite provar alguns resultados úteis com simplicidade.

Corolário

Seja n não negativo, então

$$\sum_{k=0}^{n}(2)^k\binom{n}{k} = 3^n.$$

Prova

Observe que o lado esquerdo da expressão corresponde à expansão do binômio $(1+2)^n$*, temos:*

$(1+2)^n = \sum_{k=0}^{n}\binom{n}{k}.1^{n-k}.2^k = \sum_{k=0}^{n}2^k\binom{n}{k}$. *Portanto,*

$$\sum_{k=0}^{n}2^k\binom{n}{k} = 3^n$$

Universidade Federal do Ceará
Computer Science Department
Samy Sá (samy@ufc.br)

Outline

Coeficientes Binomiais

O Teorema Binomial

Alguns Resultados

Triângulo de Pascal

Universidade Federal do Ceará
Computer Science Department
Samy Sá (samy@ufc.br)

Identidade de Pascal

O terema binomial nos permite provar alguns resultados úteis com simplicidade.

Teorema

Sejam k, n inteiros positivos e $n \geq k$, então $\binom{n+1}{k} = \binom{n}{k-1} + \binom{n}{k}$.

Universidade Federal do Ceará
Computer Science Department
Samy Sá (samy@ufc.br)

Triângulo de Pascal

$$
\begin{array}{ccccccccc}
 & & & & \binom{0}{0} & & & & \\
 & & & \binom{1}{0} & & \binom{1}{1} & & & \\
 & & \binom{2}{0} & & \binom{2}{1} & & \binom{2}{2} & & \\
 & \binom{3}{0} & & \binom{3}{1} & & \binom{3}{2} & & \binom{3}{3} & \\
\binom{4}{0} & & \binom{4}{1} & & \binom{4}{2} & & \binom{4}{3} & & \binom{4}{4}
\end{array}
$$

$$
\begin{array}{ccccccccccc}
 & & & & & 1 & & & & & \\
 & & & & 1 & & 1 & & & & \\
 & & & 1 & & 2 & & 1 & & & \\
 & & 1 & & 3 & & 3 & & 1 & & \\
 & 1 & & 4 & & 6 & & 4 & & 1 & \\
1 & & 5 & & 10 & & 10 & & 5 & & 1
\end{array}
$$

Universidade Federal do Ceará
Computer Science Department
Samy Sá (samy@ufc.br)

Triângulo de Pascal

- O triângulo de Pascal junto às condições $\binom{n}{0} = \binom{n}{n} = 1$.

Universidade Federal do Ceará
Computer Science Department
Samy Sá (samy@ufc.br)

Exercícios

1. A linha do triângulo de Pascal contendo os coeficientes binomiais $\binom{10}{k}$, onde $0 \leq k \leq 10$, é: 1 10 45 120 210 252 210 120 45 10 1. Utilize a identidade de Pascal para encontrar a linha seguinte do triângulo.
2. Mostre que se n, k são inteiros com $1 \leq k \leq n$, então $k\binom{n}{k} = n\binom{n-1}{k-1}$. Você pode usar uma prova combinatória ou manipulaçao algébrica da fórmula do binômio $\binom{n}{r}$.