Lista de Exercícios - Teoria dos Números

Leitura Complementar 04

Notas de Aula de Matemática Discreta

Samy Sá

Universidade Federal do Ceará
Campus de Quixadá
Quixadá, Brasil
samy@ufc.br

Requisitos: Funções (Vide Leitura Preparatória 02)
Texto produzido em 20/03/2014.

O presente documento propõe exercícios para os temas de Divisibilidade, Aritmética Modular, Primos e Máximo Divisor Comum.

1 Divisibilidade e Aritmética Modular

Exercício 1: Qual o quociente e o resto quando

(a) 19 é dividido por 7?
(b) -111 é dividido por 11?
(c) 789 é dividido por 23?
(d) 1001 é dividido por 13?
(e) 0 é dividido por 19?
(f) 3 é dividido por 5?
(g) -1 é dividido por 3?
(h) 4 é dividido por 1?

Exercício 2: Avalie as quantidades abaixo.

(a) 13 **mod** 3
(b) -97 **mod** 11
(c) 155 **mod** 19
(d) -221 **mod** 23

Exercício 3: Mostre que se $a|b$ e $b|a$, em que a e b são inteiros não nulos, então $a = b$ ou $a = -b$.

Exercício 4: Mostre que se a, b e c são números inteiros com $c \neq 0$, tal que $ac|bc$, então $a|b$.

Exercício 5: Mostre que se $n \mid m$, em que n e m sÃ£o números inteiros positivos maiores que 1, e se $a \equiv b \pmod{m}$, em que a e b são números inteiros, então $a \equiv b (\text{mod } n)$.

Exercício 6: Encontre contra-exemplos para cada uma das proposições abaixo sobre congruências.

(a) Se $ac \equiv bc(\text{mod } m)$, em que a, b, c e m são números inteiros com $m \geq 2$, então $a \equiv b(\text{mod } m)$.
(b) Se $a \equiv b(\text{mod } m)$ e $c \equiv d(\text{mod } m)$, em que a, b, c, d e m são números inteiros com c e d positivos e $m \geq 2$, então $a^c \equiv b^d(\text{mod } m)$.

Exercício 7: Qual a sequência de números pseudo-aleatórios gerada usando-se o gerador $x_{n+1} = 3x_n$ **mod** 11 com $x_0 = 2$?

2 Números Primos e Máximos Divisores Comuns

Exercício 8: Determine se cada um destes números inteiros é primo.

(a) 21 (c) 71 (e) 111
(b) 29 (d) 97 (f) 143

Exercício 9: Encontre a fatoração em primos de cada um dos números abaixo.

(a) 88 (c) 729 (e) 1111
(b) 126 (d) 1001 (f) 909090

Exercício 10: Encontre a fatoração de números primos de $10!$.

Exercício 11: Demonstre ou negue que $n^2 - 79n + 1601$ é primo sempre que n for um número inteiro positivo.

Exercício 12: Demonstre que o produto de três números inteiros consecutivos quaisquer é divisível por 6.

Exercício 13: Determine se os números em cada um dos conjuntos abaixo são primos entre si (verifique dois a dois).

(a) 11, 15, 19 (c) 12, 17, 31, 37
(b) 14, 15, 21 (d) 7, 8, 9, 11

Exercício 14: Quais são os máximos divisores comuns de cada par de números inteiros abaixo?
(a) $3^7 \cdot 5^3 \cdot 7^3, \quad 2^{11} \cdot 3^3 \cdot 5^9$
(b) $11 \cdot 13 \cdot 17, \quad 2^9 \cdot 3^7 \cdot 5^5 \cdot 7^3$
(c) $23^{31}, \quad 23^{17}$
(d) $41 \cdot 43 \cdot 53, \quad 41 \cdot 43 \cdot 53$
(e) $3^{13} \cdot 517, \quad 2^{12} \cdot 7^{21}$
(f) $1111, \quad 0$

Exercício 15: Mostre que se a, b e m são números inteiros tais que $m \geq 2$ e $a \equiv b(mod\ m)$, então $mdc(a, m) = mdc(b, m)$.