Erros em Demonstrações - Apreenda Sobre e Evite-os

Leitura Complementar 02

Notas de Aula de Matemática Discreta

Samy Sá

Universidade Federal do Ceará
Campus de Quixadá
Quixadá, Brasil
samy@ufc.br

Requisitos: Teoria dos Conjuntos (Básico)
Texto produzido em 21/02/2014.

1 Resumo de Demonstrações

Em aulas e leituras anteriores, vimos que o primeiro passo para uma demonstração é compreender o enunciado do teorema que queremos provar. Em particular, é interessante identificarmos as hipóteses e as conclusões de um teorema no formato condicional. Isso permitiria utilizar as técnicas de provar condicionais e nos daria um primeiro norte, pois destaca algumas das ferramentas disponíveis (as hipóteses) e um objetivo pra demonstração. Também é no enunciado que avaliamos se o teorema envolve generalizações e/ou existenciais. Vimos os tipos de argumentos necessários para cada tipo de prova entre estes: As generalizações caracterizam todos os elementos de um conjunto simultaneamente, enquanto os existenciais podem caracterizar apenas um elemento, o qual podemos construir em uma prova dita construtiva ao mostrar a testemunha do teorema ou argumentar pela sua existência, mesmo que não conheçamos tal testemunha.

Na hora de escolher a técnica para demosntração, deve-se ter me mente nessa parte o seguinte: Em cada técnica (prova direta, contraposição, contradição, ...), quais seriam as hipóteses e conclusões destacadas e qual dessas técnicas parece permitir um caminho mais fácil entre tais partes? Principalmente no começo, enquanto se acostuma a fazer demonstrações, vale enumerar as possibilidades de cada técnica e pensar em qual delas seria a mais adequada. Com o tempo de prática e a experiência, essa decisão se torna quase automática.

Finalmente, inclui-se um pouco de estratégia: Podemos adaptar a prova de um teorema com enunciado parecido ou aplicar um raciocínio ao contrário que segue a partir da conclusão, como que buscando as hipóteses. A vantagem de adaptar uma demonstração é que o processo se torna bem mais simples, pois a estrutura do argumento já está pronta. No caso do raciocínio ao contrário (reverso), temos a possibilidade de chegar a uma tautologia invés das hipóteses, o que também resolve a prova, mas é importante seguir seu raciocínio apenas com regras de equivalência. As premissa do raciocínio reverso são duas: (i) normalmente podemos acrescentar quaisquer tautologias (tais como teoremas) às hipóteses de uma demonstração no começo e (ii) se utilizarmos apenas equivalências no raciocínio, podemos invertê-lo para obter uma prova direta ou variação desta.

Em caso de dúvidas sobre qualquer um dos pontos acima, é recomendado recorrer às leituras anteriores e rever os conceitos. Faça os exercícios sugeridos e, se desejar mais, converse com o professor para que uma lista mais extensa seja provida.

2 Erros Comuns em Provas

Existe muitos erros em potencial que podem ser cometidos em uma demonstração, por isso chamaremos atenção para alguns dos erros mais comuns. Em cada nova prova, é essencial manter a consistência do argumento que estamos construindo. Um caminho para encontrar possíveis erros em sua demonstração é tentando avaliá-la após completa: Em cada passo utilizado, será que existe algum possível motivo para que ele tenha sido erroneamente aplicado? Ou talvez um dos seus passos permita falsificar o argumento que construiu? Talvez seja um tipo de passo que não deveria ser usado naquele momento, a exemplo de regras de inferência em provas com raciocínio reverso (que não podem ser usadas)?

2.1 Passos Inválidos

Pra começarmos, avalie a seguinte prova. Antes de seguir em frente e ler o que há de errado com ela, tente detectar por sua conta. Será um excelente exercício buscar encontrar o erro sozinho.

Exemplo 1 *() O que há de errado com essa "prova" de que 1 = 2?*[1]

"Prova:"

Usaremos este passos, onde a e b são dois inteiros positivos iguais.

Step	***Reason***
1. $a = b$	*Hipótese.*
2. $a^2 = ab$	*Multiplique os dois lados de (1) por* a
3. $a^2 - b^2 = ab - b^2$	*Subtraia* b^2 *dos dois lados de (2)*
4. $(a - b)(a + b) = ab - b^2$	*Utilize o produto notável da diferença de dois quadrados em (3)*
5. $(a - b)(a + b) = b(a - b)$	*Fatore o segundo lado da equação em (4)*
6. $(a + b) = b$	*Divida ambos os lados por* $a - b$
7. $2b = b$	*Substitua* a *por* b *em (6) por causa da hipótese de que* $a = b$
8. $2 = 1$	*Divida ambos os lados por* b*.*

Pergunta*: Você sabe o que há de errado com a suposta demonstração acima?*

Solução*: Todos os passos são corretos, exceto pelo passo 6 em que dividimos ambos os lados da equação por $a - b$. O motivo do erro é que $a = b$, e por isso temos que $a - b$ vale zero; Dividindo ambos os lados só é válido enquanto o divisor for diferente de zero. Observe que o passo 8, embora parecido, não gera problemas, pois supomos que b é um inteiro positivo e, portanto, maior que zero.*

Para evitar erros desse tipo, esteja atento às condições necessárias para aplicar cada passo nas suas demonstrações.

[1] Este exemplo foi livremente traduzido do livro Discrete Mathematics and Its Applications de Kenneth Rosen, 7th Edition, Page 89, Example 15.

2.2 Cuidado com os Condicionais

Um outro tipo de erro comum vem da má compreensão de um enunciado ou do uso indevido de regras de equivalência de não existem. Considere a seguinte "prova":

Exemplo 2 ***"Teorema:"*** *Se n^2 é um número positivo, então n é positivo.*[2]

"Prova:" *Suponha que n^2 é um número positivo. Por que o condicional "se n é positivo, então n^2 é positivo, podemos concluir que n é positivo.*

Pergunta*: Você sabe o que há de errado com a suposta demonstração acima?*

Solução*: Observe que o enunciado seria traduzido como $(\forall n)[n^2$ é um número positivo $\rightarrow n$ é positivo$]$. Nesse caso, temos que $P(n)$ é n^2 é um número positivo e $Q(n)$ significa que n é positivo. A prova se baseia no teorema $(\forall n)[Q(n) \rightarrow P(n)]$, que podemos demonstrar com tranquilidade. O problema na prova é que os condicionais $Q(n) \rightarrow P(n)$ e $P(n) \rightarrow Q(n)$ não são equivalentes, nem dizem nada um sobre o outro. A partir da hipótese $P(n)$ acima de que n^2 é um número positivo, não podemos concluir diretamente que n é um número positivo (o $Q(n)$), pois a regra de inferência utilizada não é válida. Veja a tabela:*

f	g	$f \rightarrow g$	$g \rightarrow f$
F	F	V	V
F	V	V	F
V	F	F	V
V	V	V	V

Compare as colunas referentes a $f \rightarrow g$ e $g \rightarrow f$. Note que as sequências de valores verdade são diferentes, portanto tratam-se de fórmulas não equivalentes.

Para evitar erros desse tipo, conheça bem suas regras de equivalência e inferência. Caso precise, revisite o material do livro que utilizou em matemática básica ou o próprio Rosen.

2.3 Negação da Hipótese

Exemplo 3 ***"Teorema:"*** *Se n não é um número positivo, então n^2 não é positivo. (Esse "teorema" é a contrapositiva do "teorema" no Exemplo 2.)* [3]

"Prova:" *Suponha que n não é um número positivo. Por que o condicional "se n é positivo, então n^2 é positivo", podemos concluir que n^2 não é positivo.*

Pergunta*: Você sabe o que há de errado com a suposta demonstração acima?*

Solução*: Além de utilizar um teorema falso como base, há um problema muito mais profundo com esta suposta demonstração: Ela começa negando a hipótese de um condicional que seria utilizado em seguida. Como um passo intermediário, cita-se o "teorema" que afirma "se n é positivo, então n^2 é positivo". Veja esse teorema*

[2] Este exemplo foi livremente traduzido do livro Discrete Mathematics and Its Applications de Kenneth Rosen, 7th Edition, Page 89, Example 16.

[3] Este exemplo foi livremente traduzido do livro Discrete Mathematics and Its Applications de Kenneth Rosen, 7th Edition, Page 89, Example 17.

traduzido como $(\forall n)[Q(n) \rightarrow P(n)]$, onde $P(n)$ afirma que n^2 é um número positivo e $Q(n)$ significa que n é positivo (similar ao exemplo anterior). Observe que a "prova" dada acima começa afirmando $\neg Q(n)$ e conclui $\neg P(n)$, ou seja, opera como se os condicionais $Q(n) \rightarrow P(n)$ e $\neg Q(n) \rightarrow \neg P(n)$ fossem equivalentes, mas eles não são! Veja a tabela:

f	g	$\neg f$	$\neg g$	$f \rightarrow g$	$\neg f \rightarrow \neg g$
F	F	V	V	V	V
F	V	V	F	V	F
V	F	F	V	F	V
V	V	F	F	V	V

Compare as colunas referentes a $f \rightarrow g$ e $\neg f \rightarrow \neg g$. Note que as sequências de valores verdade são diferentes, portanto tratam-se de fórmulas não equivalentes.

Para evitar erros desse tipo, conheça bem suas regras de equivalência e inferência. Caso precise, revisite o material do livro que utilizou em matemática básica ou o próprio Rosen.

2.4 Apelar para o Enunciado

Este tipo de erro é particularmente grave. Muitos argumentos incorretos se baseiam em insistir no enunciado, utilizando o fato que se quer provar como parte da prova em si. Essa falácia é chamada de "apelar para a questão" e ocorre quando um ou mais dos passos utilizados na prova são baseados na verdade prévia da sentença que queremos provar. Porque isso consiste quando usamos uma senteça para provar ela mesma, esse tipo de erro também é conhecido como raciocínio circular.

Exemplo 4 *Será que o argumento a seguir é correto? Ele supostamente mostra que se n é par sempre que n^2 for par.*[4]

Suponha que n^2 é par. Então $n^2 = 2k$, para algum inteiro k. Seja $n = 2l$ para algum inteiro l. Isso mostra que n é par.

***Solução**: O argumento é incorreto. Observe que a forma traduzida do teorema seria $(\forall n \in \mathbb{Z})[n^2$ é par $\rightarrow n$ é par$]$. O argumento começa corretamente com a hipótese de que n^2 é par, utilizando a estrutura de prova direta. O problema vem quando, invés de seguir concluindo consequências da hipótese, o autor simplesmente pula para concluir que n também seria par, mas nenhum indício disso havia sido dado ainda. Isso consiste em afirmar o próprio enunciado original e portanto não consiste em uma demonstração. Observe que nesse caso temos um teorema válido para provar, mas o método é que foi inadequado.*

[4] Este exemplo foi livremente traduzido do livro Discrete Mathematics and Its Applications de Kenneth Rosen, 7th Edition, Page 90, Example 18.

3 Conclusões

Uma parte importante do processo de aprender a fazer demonstrações envolve compreender possíveis erros para poder evitá-los. Seja crítico com suas próprias demonstrações (e as de outros). Releia e procure por possíveis erros para que possa corrigí-los. Detectar qualquer erro em uma prova quase garantirá que você mesmo não cometerá de novo tal erro no futuro. Às vezes até matemáticos famosos cometem alguns erros difíceis de notar e demonstrações erradas de resultados importantes circulam a comunidade despercebidas por anos até que essas sutilezas sejam propriamente percebidas. O melhor caminho para desenvolver essa habilidade é exercitar bastante, sem medo de errar, mas aprendendo com esses erros quando acontecerem.

4 Exercícios

Exercício 1: Prove que "se n^2 é um número par, então n também é par".

Observe o processo de prova de que "$\sqrt{2}$ é um número irracional". Utilizeremos o resultado provado no Exercício 1 como lema para a demosntração.

Lema 1 *"se n^2 é um número par, então n também é par".*

Prova 1 *Deixada como exercício.*

Teorema 1 *"$\sqrt{2}$ é um número irracional"*

Prova 2 *Por contradição, suponha que $\sqrt{2}$ é um número racional. Logo, existem inteiros a e b tais que $\sqrt{2} = a/b$, enquanto a e b não possuem fatores comuns e $b \neq 0$. A suposição é válida, pois podemos assumir a forma racional minimizada de qualquer número. Elevando os dois lados da equação ao quadrado, temos $2 = (a/b)^2 = a^2/b^2$. Logo, $2b^2 = a^2$ e, portanto, a^2 é par. Pelo Lema 1, concluímos que a é par. Portanto, existe um inteiro c tal que $a = 2c$. Substituindo em $2b^2 = a^2$, teremos $2b^2 = (2c)^2 = 4c^2$. Dividindo os dois lados por 2, temos que $b^2 = 2c^2$, ou seja, que b^2 é par. O Lema 1 nos permite concluir que b é par. Uma vez que a e b são pares, esses números têm o 2 como fator comum, mas isso é um absurdo, pois assumimos que a e b não possuiam fatores comuns. Logo, $\sqrt{2}$ deve ser um número irracional.*

Exercício 3: Adapte a prova acima para mostrar que "$\sqrt{3}$ é um número irracional".

Construa demonstrações para os seguintes itens e avalie-as com calma em busca de possíveis erros:

Exercício 4: Prove que existem 100 inteiros positivos consecutivos que não são quadrados perfeitos. Sua prova foi construtiva ou não construtiva? Dica: Considere a diferença entre quadrados perfeitos vizinhos.

Exercício 5: Mostre que não existem quadrados perfeitos cujo último dígito seja 3. Dica: Demonstre primeiro que o último dígito de um quadrado perfeito será sempre $0, 1, 4, 5, 6 ou 9$. Argumente por contra-posição para finalizar a prova do teorema.

Exercício 6: Suponha que a e b são inteiros ímpares com $a \neq b$. Mostre que existe um único inteiro c tal que $|a - c| = |b - c|$.

EXTRA

Nos seguintes itens, considere um tabuleiro comum de xadrez ou damas, 8x8 (8 colunas e 8 linhas) com quadrados em cores alternadas de preto e branco. Considere também peças de dominó 1x2, cujos quadrados que as formam tenham o mesmo tamanho dos quadrados no tabuleiro. Responda:

Exercício 7: Podemos cobrir um tabuleiro comum de xadrez com dominós, correspondendo uma peça de dominó para cada par de quadrados do tabuleiro?

Exercício 8: Remova um quadrado de um dos cantos do tabuleiro. Argumente que é impossível cobrir esse tabuleiro recortado com donimós.

Exercício 9: Considere um tabuleiro de xadrez 8x8 e remova apenas os quadrados de dois cantos opostos. Mostre que é possível cobrir esse tabuleiro com donimós.