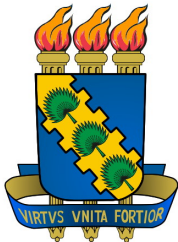


# Definições Recursivas e Indução Estrutural

## Matemática Discreta



Prof. MSc. Samy Sá

Universidade Federal do Ceará  
Campus de Quixadá

16 de abril de 2014

# Outline

---

Introdução

Definições Recursivas

Conjuntos Recursivamente Definidos

Indução Estrutural

Exercícios

# Outline

---

## Introdução

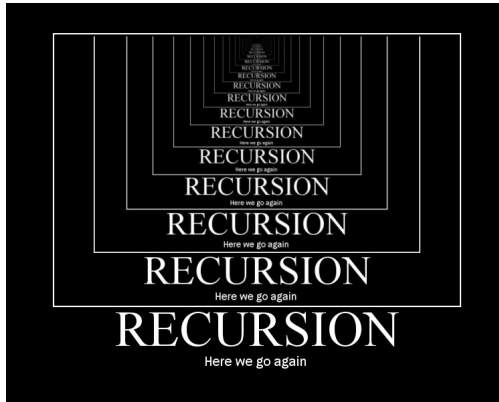
## Definições Recursivas

## Conjuntos Recursivamente Definidos

## Indução Estrutural

## Exercícios

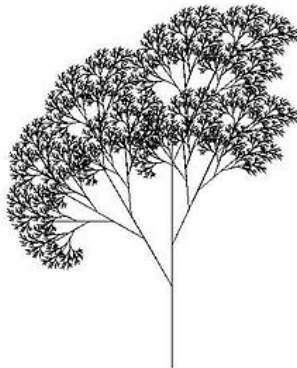
# Introdução



**Figura:** Imagem Recursiva

# Introdução

---



**Figura:** Árvore Recursiva

# Introdução



**Figura:** Pintura Recursiva

# Introdução



**Figura:** Escultura Recursiva

# Outline

---

Introdução

**Definições Recursivas**

Conjuntos Recursivamente Definidos

Indução Estrutural

Exercícios



# Definições Recursivas

---

Considere o domínio em  $\mathbb{Z}^+$ . Consistem de dois passos:

- BASE: Defina a função no caso 0 (zero)

# Definições Recursivas

---

Considere o domínio em  $\mathbb{Z}^+$ . Consistem de dois passos:

- BASE: Defina a função no caso 0 (zero)
- PASSO RECURSIVO: Especifique uma regra pra encontrar o valor da função em um inteiro qualquer com base em inteiros menores.

# Definições Recursivas

---

Considere o domínio em  $\mathbb{Z}^+$ . Consistem de dois passos:

- BASE: Defina a função no caso 0 (zero)
- PASSO RECURSIVO: Especifique uma regra pra encontrar o valor da função em um inteiro qualquer com base em inteiros menores.

## IMPORTANTE!!!

*Definições Recursivas também são chamadas de Definições Indutivas.*

# Definições Recursivas - Exemplo

---

## Exemplo

*Suponha que  $f$  é definida recursivamente por*

- $f(0) = 3$
- $f(n + 1) = 2.f(n) + 3$

# Definições Recursivas - Exemplo

---

## Exemplo

*Suponha que  $f$  é definida recursivamente por*

- $f(0) = 3$
- $f(n + 1) = 2.f(n) + 3$

## Constatação:

*Os valores de  $f_1, f_2, f_3$  e  $f_4$  são  $f_1 = 9, f_2 = 21, f_3 = 45, e f_4 = 93$ .*

# Definições Recursivas - Exemplo

---

## Exemplo

*Forneça uma definição recursiva da sequência  $a^n$ , onde  $a$  é um real qualquer não nulo e  $n$  é não negativo.*

# Definições Recursivas - Exemplo

---

## Exemplo

Forneça uma definição recursiva da sequência  $a^n$ , onde  $a$  é um real qualquer não nulo e  $n$  é não negativo. **Solução:**

- $a^0 = 1$
- $a^{n+1} = a.a^n$

# Outline

---

Introdução

Definições Recursivas

**Conjuntos Recursivamente Definidos**

Indução Estrutural

Exercícios



# Conjuntos Recursivamente Definidos

---

Conjuntos são definidos recursivamente de forma muito parecida com funções:

- No base, especificamos uma coleção inicial de elementos do conjunto;
- No passo indutivo, especificamos regras para acrescentar mais elementos ao conjuntos.

# Conjuntos Recursivamente Definidos - Exemplo

---

## Exemplo

*Suponha que  $S$  é definido recursivamente por*

- $3 \in S$
- Se  $x \in S$  e  $y \in S$ , então  $x + y \in S$ .

# Conjuntos Recursivamente Definidos - Exemplo

---

## Exemplo

*Suponha que  $S$  é definido recursivamente por*

- $3 \in S$
- Se  $x \in S$  e  $y \in S$ , então  $x + y \in S$ .

## Constatação:

*O conjunto indutivamente definido será  $S = \{3, 6, 9, 12, 15, \dots\}$*

# Conjuntos Recursivamente Definidos - Exemplo

---

## Exemplo

*Suponha agora que  $S$  é definido recursivamente por*

- $1, 3 \in S$
- *Se  $x \in S$  e  $y \in S$ , então  $x + y \in S$ .*

# Conjuntos Recursivamente Definidos - Exemplo

---

## Exemplo

*Suponha agora que  $S$  é definido recursivamente por*

- $1, 3 \in S$
- *Se  $x \in S$  e  $y \in S$ , então  $x + y \in S$ .*

## Constatação:

*O conjunto indutivamente definido será*

$$S = \{1, 3,$$

# Conjuntos Recursivamente Definidos - Exemplo

---

## Exemplo

*Suponha agora que  $S$  é definido recursivamente por*

- $1, 3 \in S$
- *Se  $x \in S$  e  $y \in S$ , então  $x + y \in S$ .*

## Constatação:

*O conjunto indutivamente definido será*

$$S = \{1, 3, 2, 4, 6,$$

# Conjuntos Recursivamente Definidos - Exemplo

---

## Exemplo

*Suponha agora que  $S$  é definido recursivamente por*

- $1, 3 \in S$
- *Se  $x \in S$  e  $y \in S$ , então  $x + y \in S$ .*

## Constatação:

*O conjunto indutivamente definido será*

$$S = \{1, 3, 2, 4, 6, 5, 7, 9,$$

# Conjuntos Recursivamente Definidos - Exemplo

---

## Exemplo

*Suponha agora que  $S$  é definido recursivamente por*

- $1, 3 \in S$
- Se  $x \in S$  e  $y \in S$ , então  $x + y \in S$ .

## Constatação:

*O conjunto indutivamente definido será*

$$S = \{1, 3, 2, 4, 6, 5, 7, 9, \dots\}$$



# Conjuntos Recursivamente Definidos - Exemplo

---

## Exemplo

*Suponha agora que  $S$  é definido recursivamente por*

- $1, 3 \in S$
- Se  $x \in S$  e  $y \in S$ , então  $x + y \in S$ .

## Constatação:

*O conjunto indutivamente definido será*

$$S = \{1, 3, 2, 4, 6, 5, 7, 9, \dots\}$$

## Constatação:

*Uma pequena mudança na base ou na regra do passo indutivo podem mudar radicalmente o conjunto gerado.*

# Conjuntos Recursivamente Definidos - Exemplo

---

## Exemplo

*Podemos definir o conjunto de fórmulas bem formadas na aritmética:*

- $x$  é uma fórmula bem formada se  $x$  é um numeral ou uma variável.*
- Se  $F$  e  $G$  são fórmulas bem formadas, então  $(F + G)$ ,  $(F - G)$ ,  $(F * G)$ , e  $(F / G)$  são fórmulas bem formadas.*

# Outline

---

Introdução

Definições Recursivas

Conjuntos Recursivamente Definidos

**Indução Estrutural**

Exercícios

# Indução Estrutural

---

Para provar resultados sobre conjuntos recursivamente definidos, utilizamos uma forma de indução:

- **BASE:** Mostre que a propriedade desejada vale para todos os elementos da BASE da definição recursiva do conjunto.

# Indução Estrutural

---

Para provar resultados sobre conjuntos recursivamente definidos, utilizamos uma forma de indução:

- **BASE:** Mostre que a propriedade desejada vale para todos os elementos da BASE da definição recursiva do conjunto.
- **PASSO INDUTIVO:** Mostre que se a propriedade desejada vale para todos os elementos utilizados para construir um novo elemento, então a propriedade também vale para o novo elemento construído.

# Indução Estrutural - Exemplo

---

## Exemplo

*Mostre que todas as fórmulas bem formadas da nossa definição recursiva têm um número igual de parênteses esquerdos e direitos.*

# Indução Estrutural - Exemplo

---

## Exemplo

*Mostre que todas as fórmulas bem formadas da nossa definição recursiva têm um número igual de parênteses esquerdos e direitos.*

**Solução:** (BASE) Se  $x$  é um numeral, tem zero parênteses esquerdos e direitos, portanto o mesmo número.

# Indução Estrutural - Exemplo

---

## Exemplo

*Mostre que todas as fórmulas bem formadas da nossa definição recursiva têm um número igual de parênteses esquerdos e direitos.*

**Solução:** (BASE) Se  $x$  é um numeral, tem zero parênteses esquerdos e direitos, portanto o mesmo número.

Alternativamente, se  $x$  é uma variável, também tem zero parênteses esquerdos e direitos e, portanto, o mesmo número.



# Indução Estrutural - Exemplo

---

## Exemplo

*Mostre que todas as fórmulas bem formadas da nossa definição recursiva têm um número igual de parênteses esquerdos e direitos.*

**Solução:** ... (PASSO INDUTIVO) Sejam  $F$ ,  $G$  duas fórmulas bem formadas, suponha que  $F$  tem  $k$  parênteses esquerdos e direitos e que  $G$  tem  $j$  parênteses esquerdos e direitos.

# Indução Estrutural - Exemplo

## Exemplo

*Mostre que todas as fórmulas bem formadas da nossa definição recursiva têm um número igual de parênteses esquerdos e direitos.*

**Solução:** ... (PASSO INDUTIVO) Sejam  $F$ ,  $G$  duas fórmulas bem formadas, suponha que  $F$  tem  $k$  parênteses esquerdos e direitos e que  $G$  tem  $j$  parênteses esquerdos e direitos. Observe que a fórmula  $(F + G)$  terá então  $k + j + 1$  parênteses esquerdos e  $k + j + 1$  parênteses direitos, o mesmo número, portanto.

# Indução Estrutural - Exemplo

## Exemplo

*Mostre que todas as fórmulas bem formadas da nossa definição recursiva têm um número igual de parênteses esquerdos e direitos.*

**Solução:** ... (PASSO INDUTIVO) Sejam  $F$ ,  $G$  duas fórmulas bem formadas, suponha que  $F$  tem  $k$  parênteses esquerdos e direitos e que  $G$  tem  $j$  parênteses esquerdos e direitos. Observe que a fórmula  $(F + G)$  terá então  $k + j + 1$  parênteses esquerdos e  $k + j + 1$  parênteses direitos, o mesmo número, portanto. Os casos das fórmulas  $(F - G)$ ,  $(F * G)$ , e  $(F / G)$  são similares.

# Outline

---

Introdução

Definições Recursivas

Conjuntos Recursivamente Definidos

Indução Estrutural

**Exercícios**

# Exercícios

---

## 1. Resolva:

- a) Dê uma definição recursiva dos inteiros positivos que são múltiplos de 5.
- b) Dê uma definição recursiva para a função  $ones(x)$  que conta o número de 1's em uma string de bits.
- c) Utilize indução estrutural pra mostrar que  $ones(st) = ones(s) + ones(t)$ .
- d) Defina o conjunto das fórmulas bem formadas sobre conjuntos onde variáveis representam conjuntos e os operadores disponíveis são  $\{\cup, \cap, \setminus, '\}$
- e) Dê uma definição recursiva da operação de reversão de uma string.
- f) Use indução estrutural para mostrar que  $(w_1 w_2)^R = w_2^R w_1^R$ .