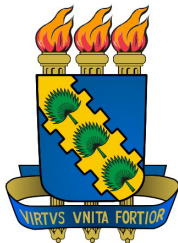


# Contagem - Regras Básicas

## Matemática Discreta



Prof. MSc. Samy Sá

Universidade Federal do Ceará  
Campus de Quixadá

28 de abril de 2014

# Outline

---

O que é Combinatória

Regras Básicas - Produto

Regras Básicas - Soma

Problemas de Contagem c/ Soma e Produto

Regras Básicas - Subtração

Regras Básicas - Divisão

Diagramas em Árvore

# Outline

---

## O que é Combinatória

Regras Básicas - Produto

Regras Básicas - Soma

Problemas de Contagem c/ Soma e Produto

Regras Básicas - Subtração

Regras Básicas - Divisão

Diagramas em Árvore

# O que é Combinatória

---

É o estudo de objetos organizados (arranjados) e uma importante parte da matemática discreta.

- Quantas senhas diferentes de tamanho 8 podem ser construídas com caracteres alfanuméricos sem repetição?
- Quantos endereços de IP diferentes existem? (IPV4-IPV6)
- De quantas maneiras podemos escolher 100 estudantes entre 2000 para receberem um prêmio?

# O que é Combinatória

---

É o estudo de objetos organizados (arranjados) e uma importante parte da matemática discreta.

- Enumerar possibilidades é uma das principais atividades.
  - Contamos o número de operações realizadas por um algoritmo para determinar sua complexidade.
- Trabalhamos sempre com conjuntos contáveis, por isso é parte da matemática discreta.
- Contagem é uma parte fundamental do cálculo de probabilidades.
  - Contamos os resultados de sucesso em um experimentos e comparamos ao total de possíveis resultados para determinar probabilidade de sucesso.

# Outline

---

O que é Combinatória

**Regras Básicas - Produto**

Regras Básicas - Soma

Problemas de Contagem c/ Soma e Produto

Regras Básicas - Subtração

Regras Básicas - Divisão

Diagramas em Árvore

# Regra do Produto

---

## Definição

*Suponha que um processo pode ser quebrado em uma sequência de dois passos. Se há  $n_1$  maneiras de resolver o primeiro passo e  $n_2$  maneiras de resolver o segundo passo, então haverá  $n_1 n_2$  maneiras de resolver o processo.*

## Regra do Produto - Exemplo

---

### Exemplo

*Uma companhia com apenas dois empregados, Abel e Beto, aluga um andar de um prédio com 12 escritórios. De quantas maneiras diferentes podemos ter os dois empregados alocados em escritórios distintos?*

**Solução:** Podemos observar o processo de alocar os dois empregados como uma sequência em que alocamos Abel e depois alocamos Beto. Temos  $12 \cdot (12-1) = 132$  maneiras de alocá-los em escritórios.



# Regra do Produto - Exemplo

---

## Exemplo

*Quantas strings de bits de tamanho 7 existem?*

**Solução:** Podemos ver o processo de estabelecer uma string de 7 bits como uma sequência de 7 passos, em que a cada passo alocamos um bit. Nesse caso, cada passo pode ser resolvido de 2 maneiras e o total de strings será  $2 \cdot 2 \cdot 2 \cdot 2 \cdot 2 \cdot 2 \cdot 2 = 2^7 = 128$  strings.

## Regra do Produto - Exemplo

---

### Exemplo

*Quantas placas de veículos com 3 letras e 4 números podem ser emitidas?*

**Solução:** Podemos ver o processo de estabelecer uma placa qualquer como uma sequência de passos em que cada passo envolve escolher um desses caracteres. Nesse caso, temos 26 possibilidades para cada um dos 3 primeiros passos e 10 possibilidades para cada um dos últimos 4 passos. O total será de  $26 \cdot 26 \cdot 26 \cdot 10 \cdot 10 \cdot 10 \cdot 10 = 175,760,000$  possíveis placas de veículos.

## Regra do Produto - Outros Exemplos

---

- Calcular quantas linhas tem a tabela verdade de uma fórmula em lógica proposicional.
- Quantos subconjuntos de um conjunto finito qualquer?
- Quantas funções podemos construir de um conjunto de  $m$  elementos para um com  $n$  elementos?

# Outline

---

O que é Combinatória

Regras Básicas - Produto

**Regras Básicas - Soma**

Problemas de Contagem c/ Soma e Produto

Regras Básicas - Subtração

Regras Básicas - Divisão

Diagramas em Árvore

# Regra da Soma

---

## Definição

*Se uma tarefa pode ser resolvida de uma entre  $n_1$  ou  $n_2$  maneiras (alternativas), então a tarefa pode ser resolvida de  $n_1 + n_2$  maneiras diferentes.*

## Regra da Soma - Exemplo

---

### Exemplo

*Um estudante de computação pode escolher um projeto qualquer para fazer entre os disponíveis em 3 listas. As listas têm, respectivamente, 23, 15, e 19 opções de projetos e nenhum projeto aparece em duas listas.*

**Solução:** O estudante pode escolher entre  $23 + 15 + 19 = 57$  opções.

# Regra da Soma

---

A regra da soma pode ser parafraseada em termos de conjuntos:

$$|A_1 \cup A_2 \cup \dots \cup A_n| = |A_1| + |A_2| + \dots + |A_n|,$$

onde quaisquer  $A_i, A_j$  são disjuntos.

## IMPORTANTE!!!

*Quando os conjuntos não forem disjuntos, a situação precisa de atenção extra.*

# Outline

---

O que é Combinatória

Regras Básicas - Produto

Regras Básicas - Soma

**Problemas de Contagem c/ Soma e Produto**

Regras Básicas - Subtração

Regras Básicas - Divisão

Diagramas em Árvore



# Problemas Mais Elaborados: Soma e Produto

---

Alguns problemas não podem ser resolvidos utilizando apenas a regra do produto ou apenas a da soma, mas a combinação dos dois princípios permite resolver muitos problemas.

# Problemas Mais Elaborados: Soma e Produto

---

## Exemplo

*Na linguagem BASIC, o nome de uma variável é uma string de um a dois caracteres alfanuméricos onde letras maiúsculas e minúsculas não são diferenciadas. Uma variável em BASIC deve começar com uma letra e deve ser diferente das 5 strings definidas como reservadas. Quantas variáveis diferentes podem ser definidas em BASIC?*

# Problemas Mais Elaborados: Soma e Produto

---

**Solução:** Vamos por partes...

1. Há duas possibilidades para as variáveis, as que só têm uma letra ( $V_1$ ) e as que têm uma letra seguida de uma letra ou número ( $V_2$ ). O total será  $V = V_1 + V_2$ .
2. Temos que  $V_1 = 26$ ;
3. Calcularemos  $V_2$ . Pode ser visto como uma sequência de dois passos: Escolha do primeiro caractere seguida da escolha do segundo. Como há 5 palavras reservadas, temos  
 $V_2 = 26 \cdot (26 + 10) - 5$
4.  $V = V_1 + V_2 = 26 + 26 \cdot (26 + 10) - 5 = 957$ .

# Outline

---

O que é Combinatória

Regras Básicas - Produto

Regras Básicas - Soma

Problemas de Contagem c/ Soma e Produto

**Regras Básicas - Subtração**

Regras Básicas - Divisão

Diagramas em Árvore

# Regra da Subtração (Inclusão-Exclusão)

---

## Definição

*Se uma tarefa pode ser resolvida de uma entre  $n_1$  ou  $n_2$  maneiras (alternativas), então o número de maneiras que a tarefa pode ser resolvida é  $n_1 + n_2$  menos o total de alternativas comuns às duas maneiras.*

## IMPORTANTE!!!

*A Regra da Subtração também é chamada de Princípio da Inclusão-Exclusão, especialmente quando usada para contar elementos de conjuntos. Ela pode ser rephraseada em termos de conjuntos:*

$$|A_1 \cup A_2| = |A_1| + |A_2| - |A_1 \cap A_2|$$

## Regra da Subtração - Exemplo

---

### Exemplo

*Uma empresa recebe 350 aplicações de candidatos. Suponha que 220 destes se graduaram em computação, 147 se graduaram em negócios, e 51 se graduaram tanto em computação quanto em negócios. Quantos candidatos não são graduados em nenhum dos dois cursos?*

**Solução:** O total de candidatos graduados em computação OU negócios será a soma das alternativas, excluindo os candidatos em comum aos dois títulos. O total será  $220 + 147 - 51 = 316$  candidatos. Portanto, dos 350, devemos ter  $350 - 316 = 34$  candidatos que não são graduados em computação e nem em negócios.

# Outline

---

O que é Combinatória

Regras Básicas - Produto

Regras Básicas - Soma

Problemas de Contagem c/ Soma e Produto

Regras Básicas - Subtração

**Regras Básicas - Divisão**

Diagramas em Árvore

# Regra da Divisão

---

## Definição

*Existem  $\frac{n}{d}$  maneiras de resolver uma tarefa se esta puder ser feita por um procedimento com  $n$  alternativas de resolução e para cada maneira  $w$  de resolver tarefa exatamente  $d$  das  $n$  alternativas correspondem a  $w$ .*

## IMPORTANTE!!!

*Podemos rephrasear a regra da divisão em termos de conjuntos. Se o conjunto finito  $A$  com  $n$  elementos é a união de  $w$  conjuntos disjuntos distintos cada um com  $d$  elementos, então  $w = \frac{|A|}{d} = \frac{n}{d}$ .*



## Regra da Divisão - Exemplo

---

### Exemplo

*De quantas maneiras diferentes podemos sentar 4 pessoas ao redor de uma mesa redonda se duas maneiras são consideradas idênticas quando as vizinhanças das pessoas são as mesmas?*

**Solução:** Primeiro, consideramos quatro posições onde as pessoas podem sentar. Dessa forma, as pessoas podem ser sentadas de  $4 \cdot 3 \cdot 2 \cdot 1 = 24$  maneiras nas quatro posições. Como a mesa é circular, qualquer uma das posições poderia ser a primeira. Dessa forma, para cada maneira de sentar as pessoas, teremos 4 arranjos idênticos. Pela regra da divisão, teremos  $24/4 = 6$  formas diferentes de sentar as pessoas ao redor da mesa.

# Outline

---

O que é Combinatória

Regras Básicas - Produto

Regras Básicas - Soma

Problemas de Contagem c/ Soma e Produto

Regras Básicas - Subtração

Regras Básicas - Divisão

**Diagramas em Árvore**

# Diagramas em Árvore

---

Problemas de contagem podem ser resolvidos com auxílio de árvores.

- A raiz representa uma solução qualquer antes da sua construção.
- Cada ramificação apresenta um conjunto de possibilidades a partir do seu ponto de origem (uma escolha).
- A quantidade de escolhas a partir de uma ramificação pode variar.

# Diagramas em Árvore - Exemplo (Quadro)

---

## Exemplo

*Quantas strings de bits com tamanho quatro não apresentam duas ocorrências seguidas do 1?*

# Diagramas em Árvore - Exemplo (Quadro)

---

## Exemplo

*Uma rodada classificatória entre dois times de um certo esporte acontece como uma melhor de cinco. O primeiro time a vencer três partidas entre cinco se classifica enquanto o outro é eliminado. De quantas maneiras diferentes o resultado da rodada classificatória pode ocorrer?*