Matemática Discreta
Lista de Exercícios 11

Revisão Relações: propriedades, representação, fecho

1. Liste os pares ordenados na realação R de $A = \{0, 1, 2, 3, 4\}$ em $B = \{0, 1, 2, 3\}$ em que (a,b) $\in R$ se somente se

   (a) $a = b$ (b) $a + b = 4$ (c) $a > b$

2. Para cada uma destas relações no conjunto $\{1, 2, 3, 4\}$, decida se ela é reflexiva, se é simétrica, se é anti-simétrica e se é transitiva.

   (a) $\{(2, 2), (2, 3), (2, 4), (3, 2), (3, 3), (3, 4)\}$
   (b) $\{(1, 1), (1, 2), (2, 1), (2, 2), (3, 3), (4, 4)\}$
   (c) $\{(2, 4), (4, 2)\}$
   (d) $\{(1, 2), (2, 3), (3, 4)\}$
   (e) $\{(1, 1), (2, 2), (3, 3), (4, 4)\}$
   (f) $\{(1, 3), (1, 4), (2, 3), (2, 4), (3, 1), (3, 4)\}$

3. Determine se a relação R no conjunto de todos os números inteiros é reflexiva, simétrica, anti-simétrica e/ou transitiva, em que $(x, y) \in R$ se somente se

   (a) $x \neq y$.
   (b) $xy \geq 1$.
   (c) $x = y + 1$ ou $x = y - 1$.
   (d) x e y são ambos negativos ou ambos não negativos.
   (e) $x = y^2$.
   (f) $x \geq y^2$.

Uma relação *R* em um conjunto *A* é **irreflexiva** se para todo $a \in A$, $(a, a) \notin R$.
Isto é, *R* é irreflexiva se nenhum elemento de *A* for relacionado a si próprio.

4. Quais relações no Exercício 2 são irreflexivas?
5. Uma relação em um conjunto pode não ser nem reflexiva nem irreflexiva?
6. Dê um exemplo de relação irreflexiva no conjunto de todas as pessoas.
7. Quais relações no Exercício 2 são assimétricas?
8. Quais relações no Exercício 3 são assimétricas?
9. Use quantificadores para expressar o que signifca uma relação ser assimétrica.
10. Quantas relações diferentes existem de um conjunto com m elementos em um conjunto com n elementos?
11. Sejam A o conjunto dos estudantes de sua escola e B conjunto dos livros na biblioteca da escola. Sejam $R_1 e R_2$ as relações que consistem em todos os pares ordenados (a, b), nos quais é exigido que o estudante a leia o livro b em uma disciplina, e nos quais o estudante a leu o livro b, respectivamente. Descreva os pares ordenados em cada uma destas aplicações.

    (a) $R_1 \cup R_2$. (b) $R_1 \cap R_2$. (c) $R_1 - R_2$. (d) $R_2 - R_1$.

12. Seja R a relação no conjunto das pessoas que consiste nos pares (a, b), nos quais a é progenitor de b. Seja S a relação no conjunto das pessoas que consiste nos pares (a, b), nos quais a e b são irmãos. O que são $S \circ R$ e $R \circ S$?

    Os exercícios abaixo tratam destas relações no conjunto dos número reais:

    $R_1 = \{(a, b) \in \mathbb{R}^2 | a > b\}$, a relação "maior que".

    $R_2 = \{(a, b) \in \mathbb{R}^2 | a \geq b\}$, a relação "maior que ou igual a".

    $R_3 = \{(a, b) \in \mathbb{R}^2 | a < b\}$, a relação "menor que".

    $R_4 = \{(a, b) \in \mathbb{R}^2 | a \leq b\}$, a relação "menor que ou igual a".

    $R_5 = \{(a, b) \in \mathbb{R}^2 | a = b\}$, a relação "igual a".

    $R_6 = \{(a, b) \in \mathbb{R}^2 | a \neq b\}$, a relação "diferente de".

13. Determine

    (a) $R_2 \cup R_4$. (c) $R_3 \cap R_6$. (e) $R_3 - R_6$.
    (b) $R_3 \cup R_6$. (d) $R_4 \cap R_6$. (f) $R_6 - R_3$.

14. Determine

    (a) $R_2 \circ R_1$. (d) $R_4 \circ R_1$. (g) $R_4 \circ R_6$.
    (b) $R_2 \circ R_2$ (e) $R_5 \circ R_3$.
    (c) $R_3 \circ R_5$. (f) $R_3 \circ R_6$. (h) $R_6 \circ R_6$.

15. Seja R a relação no conjunto das pessoas com doutorado, tal que $(a, b) \in R$ se e somente se a foi o orientador de tese de b. Quando um par ordenado (a, b) está em R^2? Quando um par ordenado (a, b) está em R^n, quando n é um inteiro positivo? (Observe que toda pessoa com doutorado tem um orientador de tese.)
16. Quantas das 16 relações diferentes em $\{0, 1\}$ contêm o par $(0, 1)$?
17. (a) Quantas relações existem no conjunto $\{a, b, c, d\}$?

    (b) Quantas relações existem no conjunto $\{a, b, c, d\}$ que contêm o par (a, a)?
18. Quantas relações existem em um conjunto com n elementos que sejam

    (a) simétricas? (d) irreflexivas?
    (b) anti-simétricas (e) reflexivas e simétricas?
    (c) assimétricas? (f) nem reflexivas ne irreflexivas?

19. Mostre que a relação R em um conjunto A é simétrica se e somente se $R = R^{-1}$, em que R^{-1} é a relação inversa.
20. Mostre que a relação R em um conjunto A é reflexiva se e somente se a relação inversa R^{-1} for reflexiva.
21. Suponha que a relação R seja irreflexiva. R^2 é necessariamente irreflexiva? Dê uma razão para sua resposta.
22. Represente cada uma destas relações em $\{1, 2, 3\}$ por uma matriz

    (a) $\{(1, 1), (1, 2), (1, 3)\}$
    (b) $\{(1, 2), (2, 1), (2, 2), (3, 3)\}$
    (c) $\{((1, 1), (1, 2), (1, 3), (2, 2), (2, 3), (3, 3)\}$
    (d) $\{(1, 3), (3, 1)\}$

23. Liste os pares ordenados nas relações em $\{1, 2, 3\}$ correspondentes a estas matrizes

    (a) $\begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \end{bmatrix}$ (b) $\begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{bmatrix}$ (c) $\begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \end{bmatrix}$

24. Como a matriz que representa uma relação R em um conjunto A pode ser usada para determinar se a relação é irreflexiva?
25. Determine se as relações representadas pelas matrizes no Exercício 23 são reflexivas, irreflexivas, simétricas, anti-simétricas e/ou transitivas.
26. Quantos elementos não nulos a matriz que representa a relação R em $A = \{1, 2, 3, \dots, 100\}$ tem se R for

    (a) $\{(a, b) \mid a > b\}$? (d) $\{(a, b) \mid a = 1\}$?
    (b) $\{(a, b) \mid a \neq b\}$?
    (c) $\{(a, b) \mid a = b + 1\}$? (e) $\{(a, b) \mid ab = 1\}$?

27. Como pode ser encontrada a matriz para $\overline{R}$, o complementar da relação R, a partir da matriz que representa R, quando R é uma relação em um conjunto finito A?
28. Seja R a relação representada pela matriz

$$M_R = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

    Encontre a matriz que representa

    (a) R^{-1} (b) $\overline{R}$ (c) R^2

29. Seja R a relação representada pela matriz

$$M_R = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \end{bmatrix}$$

    Encontre as matrizes que representam

    (a) R^2 (b) R^3 (c) R^4

30. Seja R uma relação em um conjunto A com n elementos. Se existirem k elementos não nulos em M_R, a matriz que representa R, quantos elementos não nulos existem em $M_{\overline{R}}$, a matriz que representa $\overline{R}$, o complemento de R?
31. Trace os dígrafos que representam cada uma das relações abaixo.

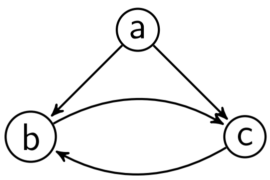
    (a) $\{(1, 2), (1, 3), (1, 4), (2, 3), (2, 4), (3, 4)\}$
    (b) $\{(1, 1), (1, 4), (2, 2), (3, 3), (4, 1)\}$
    (c) $\{(1, 2), (1, 3), (1, 4), (2, 1), (2, 3), (2, 4), (3, 1), (3, 2), (3, 4), (4, 1), (4, 2), (4, 3)\}$
    (d) $\{(2, 4), (3, 1), (3, 2), (3, 4)\}$

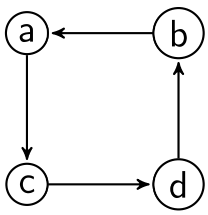
32. Trace os dígrafos que representam cada uma das relações abaixo.

    (a) $\begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 & 1 \end{bmatrix}$ (b) $\begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$ (c) $\begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 1 & 0 \end{bmatrix}$

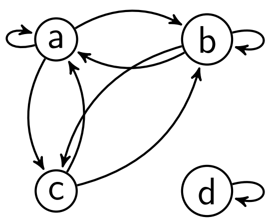
Nos exercícios abaixo, liste os pares ordenados nas relações representandas pelos dígrafos.

33.





34.



35.

36. Como o dígrafo de uma relação R em um conjunto finito A pode ser usado para determinar se uma relação é assimétrica?

37. Determine se as relações representadas pelos dígrafos mostrados nos exercícios 33 a 35 são reflexivas, irreflexivas, simétricas, anti-simétricas e/ou transitivas.

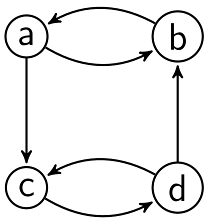
38. Seja R uma relação em um conjunto A. Explique como usar o dígrafo que representa R para obter o dígrafo que representa a relação inversa R^{-1}.

39. Seja R a relação no conjunto $\{0, 1, 2, 3\}$ que contém os pares ordenados $(0, 1), (1, 1), (1, 2), (2, 0), (2, 2) e (3, 0)$. Encontre o

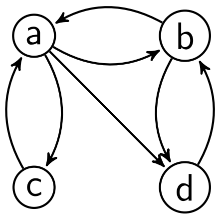
    (a) fecho reflexivo de *R*. (b) fecho simétrico de *R*.

Nos exercícios abaixo, trace o dígrafo do fecho reflexivo das relações com os dígrafos mostrados.

40.



41.



42. Encontre os dígrafos dos fechos simétricos das relações com os dígrafos mostrados nos exercícios acima.

43. Encontre o dígrafo da menor relação que seja tanto reflexiva quanto simétrica para cada uma das relações com dígrafos mostrados nos exercícios acima.

44. Quando é possível definir o “fecho irreflexivo” de uma relação R, isto é, uma relação que contenha R, seja irreflexiva e esteja contida em toda relação irreflexiva que contenha R?

45. Seja R a relação no conjunto $\{1, 2, 3, 4, 5\}$ que contém os pares ordenados $(1, 3), (2, 4), (3, 1), (3, 5), (4, 3), (5, 1), (5, 2)$ e $(5, 4)$. Encontre

    (a) R^2. (c) R^4. (e) R^6.

    (b) R^3. (d) R^5. (f) R^*.

46. Seja R a relação no conjunto de todos os estudantes que contém o par ordenado (a, b) se a e b tiverem, pelo menos, uma aula em comum e $a \neq b$. Quando (a, b) está em

    (a) R^2. (b) R^3. (c) R^*.

47. Use representação por matrizes para encontrar os fechos transitivos destas relações em {1, 2, 3, 4}:

    (a) $\{(1, 2), (2, 1), (2, 3), (3, 4), (4, 1)\}$

    (b) $\{(2, 1), (2, 3), (3, 1), (3, 4), (4, 1), (4, 3)\}$

    (c) $\{(1, 2), (1, 3), (1, 4), (2, 3), (2, 4), (3, 4)\}$

    (d) $\{(1, 1), (1, 4), (2, 1), (2, 3), (3, 1), (3, 2), (3, 4), (4, 2)\}$

48. Encontre a menor relação que contém a relação $\{(1, 2), (1, 4), (3, 3), (4, 1)\}$ que seja.

    (a) reflexiva e transitiva. (c) reflexiva, simetrica e transitiva.

    (b) simétrica e transitiva.