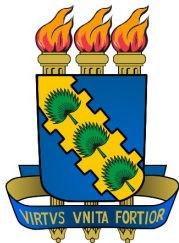


Permutações e Combinações

Matemática Discreta



Prof. MSc. Samy Sá

Universidade Federal do Ceará
Campus de Quixadá

17 de maio de 2014

Outline

Introdução

Permutações

Combinações

Outline

Introdução

Permutações

Combinações

Introdução

- Muitos problemas apresentam estrutura recorrente baseada no princípio da multiplicação.
- Em muitos casos, a diferença entre dois problemas é simplesmente se a ordem em que os elementos que compõem uma solução são escolhidos importa ou não.
- Chamaremos as soluções de cada tipo de problema de ARRANJOS.

Introdução

Exemplo

Num grupo de 10 pessoas, de quantas maneiras podemos organizar uma fila com 5 destas pessoas? De quantas maneiras podemos escolher 5 pessoas para formar um time de futebol?

Os problemas podem ser rephraseados de forma a perguntar

- Quantos arranjos de tamanho 5 dá pra formar com 10 elementos se a ordem IMPORTA (filas)?
- Quantos arranjos de tamanho 5 dá pra formar com 10 elementos se a ordem NÃO IMPORTA (times)?

Outline

Introdução

Permutações

Combinações

Permutações

Exemplo

Num grupo de 10 pessoas, de quantas maneiras podemos organizar uma fila com 5 destas pessoas?

Neste problema, a ordem em que escolhermos as pessoas **IMPORTA!**

Solução: Podemos tratar o problema como uma sequência de escolhas ao definir quem será o primeiro da fila, depois o segundo, depois o terceiro, etc. Dessa forma, teremos 10.9.8.7.6 possibilidades.

Permutações

Teorema

Se n é um inteiro positivo e r é um inteiro com $1 \leq r \leq n$, então há

$$P(n, r) = n.(n - 1).(n - 2)...(n - r + 1)$$

r -permutações de um conjunto com n elementos distintos.

Prova

Pelo princípio da multiplicação. O primeiro elemento tem n maneiras de ser escolhido. O segundo tem $n - 1$ maneiras e assim por diante. O r -ésimo elemento terá $n - (r - 1) = n - r + 1$ maneiras de ser escolhido. Observe que $P(n, 0) = 1$, pois há exatamente 1 maneira de escolher 0 elementos de um conjunto.

Permutações

Corolário

Se n, r são inteiros com $0 \leq r \leq n$, então $P(n, r) = \frac{n!}{(n-r)!}$.

Permutações - Exemplos

- De quantas maneiras pode-se escolher o primeiro, segundo e terceiro lugares em uma competição com 100 atletas?
- Suponha que um vendedor precisa visitar 8 cidades. Tirando a sua cidade de origem, as demais podem ser visitadas em qualquer ordem. De quantas maneiras o vendedor pode fazer o trajeto?
- Quantas permutações das letras ABCDEFGH contém a sequência ABC?

Outline

Introdução

Permutações

Combinações

Combinações

Exemplo

Num grupo de 10 pessoas, de quantas maneiras podemos escolher 5 pessoas para formar um time de futebol?

Neste problema, a ordem em que escolhermos as pessoas NÃO IMPORTA!

Solução: Podemos tratar o problema como uma sequência de escolhas ao definir quem será o primeiro da fila, depois o segundo, depois o terceiro, etc (p. da multiplicação), mas ao fim dessa operações precisaremos eliminar as copias de cada time (p. da divisão). Dessa forma, teremos $10 \cdot 9 \cdot 8 \cdot 7 \cdot 6$ possibilidades no todo, mas cada time pode ter sido formado de $5 \cdot 4 \cdot 3 \cdot 2 \cdot 1$ maneiras distintas. Portanto, há $10 \cdot 9 \cdot 8 \cdot 7 \cdot 6 / 5 \cdot 4 \cdot 3 \cdot 2 \cdot 1 = 9 \cdot 4 \cdot 7$ times diferentes.

Combinações

Teorema

O número de r -combinações de um conjunto com n elementos onde n é inteiro não negativo e r é um inteiro com $0 \leq r \leq n$ é

$$C(n, r) = \frac{n!}{r!(n-r)!}.$$

Prova

As r -permutações de n elementos poderiam ser obtidas pelas r -permutações em cada uma das r -combinações dos n elementos, ou seja,

$$P(n, r) = C(n, r) \cdot P(r, r).$$

Por essa idéia, a igualdade do teorema pode ser facilmente verificada

Combinações - Exemplos

- Quantas mãos de 5 cartas podem ser dadas num baralho comum de 52 cartas? De quantas maneiras podemos selecionar um conjunto de 47 cartas em um baralho comum de 52 cartas?

Combinações

Corolário

Sejam n, r inteiros com $0 \leq r \leq n$, então $C(n, r) = C(n, n - r)$.

Combinações - Exemplos

- Quantas strings de n bits contém exatamente r 1's?
- Suponha que um time de basquete tem 10 jogadores. De quantas maneiras podemos escolher quais são os 5 que iniciam o jogo?
- Suponha que uma universidade tem 9 professores no departamento de matemática e 11 no de computação. De quantas maneiras podemos montar um comitê com 3 professores da matemática e 4 da computação para elaborar uma nova disciplina?