Indução Matemática
Matemática Discreta

Prof. MSc. Samy Sá

Universidade Federal do Ceará
Campus de Quixadá

2 de abril de 2014

Universidade Federal do Ceará
Computer Science Department
Samy Sá (samy@ufc.br)

Outline

Universidade Federal do Ceará
Computer Science Department
Samy Sá (samy@ufc.br)

Outline

Introdução

Indução Matemática

Cuidados e Orientações

Exercícios

Universidade Federal do Ceará
Computer Science Department
Samy Sá (samy@ufc.br)

Introdução

Muitos enunciados matemáticos afirmam propriedades que seriam verdadeiras para todos os inteiros ou elementos de algum conjunto contável.

Universidade Federal do Ceará
Computer Science Department
Samy Sá (samy@ufc.br)

Introdução

Muitos enunciados matemáticos afirmam propriedades que seriam verdadeiras para todos os inteiros ou elementos de algum conjunto contável.

Exemplo

Para todo n inteiro positivo, $n^3 - n$ *é divisível por 3.*

Universidade Federal do Ceará
Computer Science Department
Samy Sá (samy@ufc.br)

Introdução

Muitos enunciados matemáticos afirmam propriedades que seriam verdadeiras para todos os inteiros ou elementos de algum conjunto contável.

Exemplo

Para todo n inteiro positivo, $n^3 - n$ é divisível por 3.

Constatação:

Compreender como ler e construir provas pro indução é um objetivo chave no aprendizado de matemática discreta.

Universidade Federal do Ceará
Computer Science Department
Samy Sá (samy@ufc.br)

Outline

Universidade Federal do Ceará
Computer Science Department
Samy Sá (samy@ufc.br)

Introdução

Provas usando indução matemática têm dois passos...

- Primeiro, mostramos que a propriedade $P(k)$ é válida para $k = 1$.

Universidade Federal do Ceará
Computer Science Department
Samy Sá (samy@ufc.br)

Introdução

Provas usando indução matemática têm dois passos...

- Primeiro, mostramos que a propriedade $P(k)$ é válida para $k = 1$.
- Em seguida, mostramos que $\forall k(P(k) \rightarrow P(k+1))$.

Universidade Federal do Ceará
Computer Science Department
Samy Sá (samy@ufc.br)

Introdução

Provas usando indução matemática têm dois passos...

- Primeiro, mostramos que a propriedade $P(k)$ é válida para $k = 1$.
- Em seguida, mostramos que $\forall k(P(k) \rightarrow P(k+1))$.

Constatação:

Se valem $P(1)$ e $\forall k(P(k) \rightarrow P(k+1))$, então a propriedade deve ser válida para todos os inteiros positivos.

Universidade Federal do Ceará
Computer Science Department
Samy Sá (samy@ufc.br)

Indução Matemática

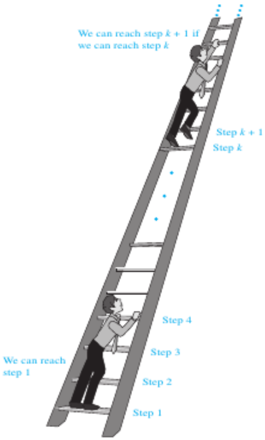

Figura: Indução ilustrada: A subida de uma escada infinita.

Universidade Federal do Ceará
Computer Science Department
Samy Sá (samy@ufc.br)

Indução Matemática

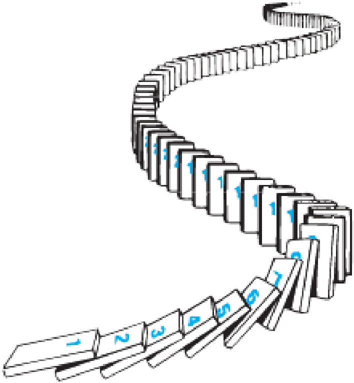

Figura: Indução ilustrada: Uma sequência infinita de dominós.

Universidade Federal do Ceará
Computer Science Department
Samy Sá (samy@ufc.br)

Indução Matemática - Exemplo

Exemplo

Se n é um inteiro positivo, então $n^3 - n$ é um múltiplo de 3.

Universidade Federal do Ceará
Computer Science Department
Samy Sá (samy@ufc.br)

Indução Matemática - Exemplo

Exemplo

Se n é um inteiro positivo, então $n^3 - n$ é um múltiplo de 3.

Prova

*Por **indução**.*

B *Seja $n = 1$, temos $1^3 - 1 = 1 - 1 = 0$, um múltiplo de 3.*

Universidade Federal do Ceará
Computer Science Department
Samy Sá (samy@ufc.br)

Indução Matemática - Exemplo

Exemplo

Se n é um inteiro positivo, então $n^3 - n$ é um múltiplo de 3.

Prova

*Por **indução**.*

B *Seja $n = 1$, temos $1^3 - 1 = 1 - 1 = 0$, um múltiplo de 3.*

P *Seja um k qualquer, suponha que $k^3 - k$ é um múltiplo de 3 (**hipótese de indução**).*

Universidade Federal do Ceará
Computer Science Department
Samy Sá (samy@ufc.br)

Indução Matemática - Exemplo

Exemplo

Se n é um inteiro positivo, então $n^3 - n$ é um múltiplo de 3.

Prova

*Por **indução**.*

B *Seja $n = 1$, temos $1^3 - 1 = 1 - 1 = 0$, um múltiplo de 3.*

P *Seja um k qualquer, suponha que $k^3 - k$ é um múltiplo de 3 (**hipótese de indução**).Considere agora o caso $k + 1$.*

Universidade Federal do Ceará
Computer Science Department
Samy Sá (samy@ufc.br)

Indução Matemática - Exemplo

Exemplo

Se n é um inteiro positivo, então $n^3 - n$ *é um múltiplo de 3.*

Prova

*Por **indução**.*

B *Seja* $n = 1$, *temos* $1^3 - 1 = 1 - 1 = 0$, *um múltiplo de 3.*

P *Seja um k qualquer, suponha que* $k^3 - k$ *é um múltiplo de 3 (**hipótese de indução**).Considere agora o caso* $k + 1$*.Nesse caso, teremos* $(k+1)^3 - (k+1)$
$= k^3 + 3.k^2.1 + 3.k.1^2 + 1^3 - (k+1)$

Universidade Federal do Ceará
Computer Science Department
Samy Sá (samy@ufc.br)

Indução Matemática - Exemplo

Exemplo

Se n é um inteiro positivo, então $n^3 - n$ é um múltiplo de 3.

Prova

*Por **indução**.*

B *Seja $n = 1$, temos $1^3 - 1 = 1 - 1 = 0$, um múltiplo de 3.*

P *Seja um k qualquer, suponha que $k^3 - k$ é um múltiplo de 3 (**hipótese de indução**).Considere agora o caso $k + 1$.Nesse caso, teremos $(k + 1)^3 - (k + 1)$*
$= k^3 + 3.k^2.1 + 3.k.1^2 + 1^3 - (k + 1) =$
$k^3 + 3k^2 + 3.k + 1 - k - 1$

Universidade Federal do Ceará
Computer Science Department
Samy Sá (samy@ufc.br)

Indução Matemática - Exemplo

Exemplo

Se n é um inteiro positivo, então $n^3 - n$ é um múltiplo de 3.

Prova

*Por **indução**.*

B *Seja $n = 1$, temos $1^3 - 1 = 1 - 1 = 0$, um múltiplo de 3.*

P *Seja um k qualquer, suponha que $k^3 - k$ é um múltiplo de 3 (**hipótese de indução**).Considere agora o caso $k + 1$.Nesse caso, teremos $(k + 1)^3 - (k + 1)$*
$= k^3 + 3.k^2.1 + 3.k.1^2 + 1^3 - (k + 1) =$
$k^3 + 3k^2 + 3.k + 1 - k - 1 = k^3 + 3k^2 + 3.k - k$. *Pela hipótese de indução, $k^3 - k$ é um múltiplo de 3.*

Universidade Federal do Ceará
Computer Science Department
Samy Sá (samy@ufc.br)

Indução Matemática - Exemplo

Exemplo

Se n é um inteiro positivo, então $n^3 - n$ é um múltiplo de 3.

Prova

*Por **indução**.*

B *Seja $n = 1$, temos $1^3 - 1 = 1 - 1 = 0$, um múltiplo de 3.*

P *Seja um k qualquer, suponha que $k^3 - k$ é um múltiplo de 3 (**hipótese de indução**).Considere agora o caso $k + 1$.Nesse caso, teremos $(k + 1)^3 - (k + 1)$ $= k^3 + 3.k^2.1 + 3.k.1^2 + 1^3 - (k + 1) =$ $k^3 + 3k^2 + 3.k + 1 - k - 1 = k^3 + 3k^2 + 3.k - k$. Pela hipótese de indução, $k^3 - k$ é um múltiplo de 3.Logo, temos que $(k + 1)^3 - (k + 1) = (k^3 - k) + 3.(k^2 + k)$ é um múltiplo de 3.*

Universidade Federal do Ceará
Computer Science Department
Samy Sá (samy@ufc.br)

Outline

Universidade Federal do Ceará
Computer Science Department
Samy Sá (samy@ufc.br)

Indução Matemática - Observações

Alguns cuidados importantes:

- Uma prova por indução precisa da base E do passo.

Universidade Federal do Ceará
Computer Science Department
Samy Sá (samy@ufc.br)

Indução Matemática - Observações

Alguns cuidados importantes:

- Uma prova por indução precisa da base E do passo.
- É **necessário** que a prova de $P(k+1)$ utilize a hipótese de indução, ou seja, o caso $P(k)$ como parte da prova.

Universidade Federal do Ceará
Computer Science Department
Samy Sá (samy@ufc.br)

Indução Matemática - Observações

Alguns cuidados importantes:

- Uma prova por indução precisa da base E do passo.
- É **necessário** que a prova de $P(k+1)$ utilize a hipótese de indução, ou seja, o caso $P(k)$ como parte da prova.
- Uma prova por indução normalmente não nos dá intuições sobre o motivo de um teorema ser verdade.

Universidade Federal do Ceará
Computer Science Department
Samy Sá (samy@ufc.br)

Orientações Básicas para Uso de Indução

Busque sempre seguir os passos:

1. Expresse a senteça que deseja provar na forma $\forall n \geq b, P(n)$, para algum b fixo.
2. Escreva "BASE" e mostre que $P(b)$ é verdadeiro.
3. Escreve "PASSO INDUTIVO".
4. Enuncie e identifique claramente a hipótese de indução na forma "assuma que $P(k)$ é verdade para algum $k \geq b$.
5. Reforce o que precisa ser provado a partir da hipótese, ou seja, enuncie o que $P(k+1)$ significa.
6. Mostre que $P(k+1)$ vale utilizando de alguma forma a hipótese de que $P(k)$ vale.
7. Identifique claramente a conclusão do passo de indução.
8. Enuncie a conclusão de que $P(n)$ vale p/ todo inteiro $n \geq b$.

Universidade Federal do Ceará
Computer Science Department
Samy Sá (samy@ufc.br)

Outline

Universidade Federal do Ceará
Computer Science Department
Samy Sá (samy@ufc.br)

Exercícios

1. Demonstrar os seguintes enunciados por indução.

a) Mostre que se n é um inteiro positivo, então $1 + 2 + ... + n = \frac{n(n+1)}{2}$

b) $1 + 2 + 2^2 + ... + 2^n = 2^{n+1} - 1$

c) Para todo n inteiro positivo, $n < 2^n$.

d) Se um conjunto S tem n elementos, então S terá 2^n subconjuntos.

e) $n^2 - 1$ é divisível por 8 sempre que n for um inteiro positivo ímpar.