Compreendendo Enunciados de Teoremas

Semana 01 - Leitura Complementar

Notas de Aula de Matemática Discreta

Prof. Samy Sá

Universidade Federal do Ceará
Campus de Quixadá
Quixadá, Brasil
samy@ufc.br

Requisitos: Teoria dos Conjuntos (Básico)
Texto produzido em 13/02/2014.

1 Enunciados de Generalização

Enunciados de teoremas frequentemente envolvem generalizações, ou seja, se tratam de afirmações sobre todos os elementos de algum conjunto, o qual chamaremos de *domínio de discurso*.

A declaração formal de uma generalização apresentaria ocorrÊncias do quantificador universal ($\forall$), mas é comum omití-los em função de uma leitura mais natural. Nesse caso, pode-se utilizar termos como "qualquer", "todos(as)", "para cada" ou apenas variáveis no enunciado. Alguns exemplos:

1. **Todo** número natural possui um sucessor.
2. **Qualquer** número natural cuja soma dos seus dígitos dá um número divisível por 9 será também divisível por 9.
3. O último dígito de **cada** número múltiplo de 5 é necessariamente 0 ou 5.
4. Se $x > y$, onde x e y são números rais positivos, então $x^2 > y^2$. (uso de variáveis)

Esses enunciados podem ser reescritos de forma a revelar os quantificadores:

1. **Para todo** número natural x, x possui um sucessor.
2. **Para todo** número natural x, se a soma dos dígitos de x é um número divisível por 9, então x é divisível por 9.
3. **Para todo** x múltiplo de 5, o último dígito de x será 0 ou 5.
4. **Para todo** x e para todo y reais positivos, se $x > y$, então $x^2 > y^2$.

Compreender como o enunciado seria reescrito para revelar os quantificadores é essencial para identificar a estrutura de um argumento válido. Como pode ser observado na maioria dos exemplos acima, enunciados de generalização normalmente seriam reescritos para uma sentença com o formato $(\forall x)[P(x) \to Q(x)]$, onde $P(x)$ e $Q(x)$ são afirmações sobre os elementos do domínio de discurso. De fato, mesmo o Item 1. dentre os exemplos acima pode ser reescrito para destacar essa estrutura.

Podemos reescrever a sentença "Para todo número natural x, x possui um sucessor." das seguintes formas, entre outras:

– $(\forall x \in \mathbb{N})(\exists y \in \mathbb{N})[y$ é sucessor de $x]$
– $(\forall x)(\exists y)[x \in \mathbb{N} \to y \in \mathbb{N} \wedge y$ é sucessor de $x]$
– $(\forall x)[x \in \mathbb{N} \to (\exists y)(y \in \mathbb{N} \wedge y$ é sucessor de $x)]$

A segunda e a terceira formas de reescrever o enunciado destacam bem a estrutura de generalização que mencionamos, ou seja, que a sentença pode ser interpretada na forma $(\forall x)[P(x) \to Q(x)]$.

1.1 Demonstrando Generalizações

No caso das generalizações na forma $(\forall x)[P(x) \to Q(x)]$, o processo de demonstração se baseia em mostrar que $P(c) \to Q(c)$, para um elemento arbitrário c do domínio e em seguida aplicar o que chamamos de *Generalização Universal*. Esse último passo é padrão, basicamente sempre igual. Por isso, demonstrar uma generalização consiste principalmente em mostrar o condicional $P(c) \to Q(c)$. Nesse passo, diversas técnicas podem ser empregadas de acordo com a estrutura e conteúdo do condicional em questão. Alternativamente, se viável, pode-se demonstrar a generalização sem recorrer à instanciação das variáveis.

Observação 1 *Alguns enunciados envolvem múltiplas variáveis quantificadas universalmente (com o para todo). Em cada caso de demonstração, devemos eleger um elemento arbitrário do domínio para cada variável universalmente quantificada. Por exemplo, a generalização 4. "Se $x > y$, onde x e y são números rais positivos, então $x^2 > y^2$." contém duas variáveis quantificadas universalmente. Logo, devemos eleger dois elementos arbitrários c, d no primeiro passo para provar o condicional.*

Nos exemplos a seguir, para provar condicionais $p \to q$, começaremos sempre supondo p e desenvolveremos um argumento para concluir q. Outras técnicas mais elaboradas serão introduzidas ao longo do curso, bem como técnicas para provar outros tipos de teoremas.

Utilizaremos a seguinte definição para demonstrar o nosso primeiro teorema:

Definição 1 *(Paridade de Inteiros)*

Um inteiro n é par *se existe um inteiro k tal que $n = 2k$ e n é* ímpar *se existe um inteiro k tal que $n = 2k + 1$. Dizemos que dois inteiros têm a mesma paridade se os dois forem pares ou os dois forem ímpares. Caso contrário, dizemos que os números têm paridades opostas.*

Exemplo 1 *Demonstraremos que "Se n é um inteiro ímpar, então n^2 também será um inteiro ímpar."*[1]

Solução*: Observe que o teorema afirma $(\forall n)[P(n) \to Q(n)]$, onde $P(n)$ é "n é um inteiro ímpar" e $Q(n)$ é "n^2 é ímpar". Como dito anteriormente, seguiremos a convenção matemática de provas mostrando que $P(n)$ implica $Q(n)$.*

[1] Este exemplo foi livremente traduzido do livro Discrete Mathematics and Its Applications de Kenneth Rosen, 7th Edition, Page 83, Example 1.

Suponha que $P(n)$ é verdade, ou seja, assuma que n é um inteiro ímpar. Pela definição de inteiro ímpar, existe um inteiro k tal que $n = 2k + 1$. Podemos elevar os dois lados da equação para achar uma expressão de n^2. Quando fazemos isso, encontramos que $n^2 = (2k+1)^2 = (2k)^2+2.(2k).1+(1)^2 = 4k^2+4k+1 = 2(2k^2+2k)+1$. Pela definição de um inteiro ímpar, concluímos que n^2 é um inteiro ímpar (ele é o dobro de um inteiro mais um). Consequentemente, temos provado que if n é um inteiro ímpar, então n^2 é também ímpar. $\blacksquare$

Exemplo 2 *Demonstraremos que "Se m e n são ambos quadrados perfeitos , então mn será também um quadrado perfeito."*[2] *(Um inteiro a é um quadrado perfeito se existe um inteiro b tal que $a = b^2$.)*

Solução: Suponha que a hipótese do condicional é verdaeira, ou seja, que m e n são dois quadrados perfeitos. Pela definição de quadrado perfeito, devem existir inteiros s e t tais que $m = s^2$ e $n = t^2$. O objetivo da prova é mostrar que mn deve ser um quadrado perfeito quando e m e n o forem; observando as equações sobre m e n, podemos demonstrar isso com facilidade. Temos $mn = s^2t^2 = (ss)(tt) = (st)(st) = (st)^2$, utilizando propriedades da multiplicação (comutatividade e associatividade). Pela definição de quadrado perfeito, mn é uma quadrado perfeito, uma vez que mn é o quadrado de st, que é um inteiro. Provamos que se m e n são ambos quadrados perfeitos, mn também será. $\blacksquare$

1.2 Exemplos e Contra-Exemplos

Como vimos no começo deste capítulo, uma generalização se refere a todos os elementos de um domínio. Por essa razão, devemos tomar muito cuidado com o que os exemplos de uma afirmação nos dizem. Quando tratamos de uma generalização $(\forall x)P(x)$, exibir um exemplo c (um elemento do domínio) tal que $P(c)$ seja verdade não consiste em prova. Tais exemplos podem ser vistos como evidências, ou seja, eles *sugerem* que a propriedade vale para todo o domínio, mas não produzem garantias.

Exemplo 3 *Considere a afirmação: "Para todo número real x, se x^2 é um número racional, então x é um número racional."*[3]

***Avalie**: Se tomarmos o exemplo $x = 3$, temos que $x^2 = 9$ é um número racional e x também é racional. De maneira similar, para $x = -1$, temos que $x^2 = 1$ é um número racional e x também é racional. Já são dois exemplo, um positivo e um negativo, mas isso não garante que a afirmação esteja correta. Se tomarmos $x = \sqrt{2}$, temos que $x^2 = \sqrt{2}^2 = 2$, que é um número racional, mas nesse caso x não é racional. Portanto, $\sqrt{2}$ é um contra-exemplo da afirmação e essa generalização é **FALSA**.*

Aprendemos algo com o exemplo acima: É impossível provar que uma generalização é correta apenas com exemplos, mas basta um único exemplo em contrário (um contra-exemplo) para tornar a generalização falsa.

[2] Este exemplo foi livremente traduzido do livro Discrete Mathematics and Its Applications de Kenneth Rosen, 7th Edition, Page 83, Example 2.

[3] Um número real é racional se pode ser escrito como fração de dois inteiros. Caso contrário, o número é dito irracional. A união dos conjuntos dos racionais ($\mathbb{Q}$) e irracionais ($\mathbb{I}$) resulta no conjunto dos reais ($\mathbb{R}$), ou seja, $\mathbb{Q} \cup \mathbb{I} = \mathbb{R}$.

Uma situação em que podemos utilizar de exemplos como prova é nos casos de teoremas baseados no quantificador existencial. Para demonstrar um teorema do tipo $(\exists x)P(x)$, basta mostrar um valor de x que satisfaça a propriedade. Em contra-partida, para mostrar que um existencial é falso, os caminhos são similares aos que utilizamos para demonstrar generalizações. De fato, a negação de um existencial é equivale a uma generalização. Por exemplo, a sentença "Não existe um número primo maior que todos os outros primos." pode ser também entendida como "Para todo número primo, não é verdade que este é maior que todos os outros primos.". Mais formalmente, a lógica matemática nos diz que $\neg(\exists x)[P(x)] \equiv (\forall x)[\neg P(x)]$. Outras equivalências similares seguem na lógica, mas vamos nos ater a apresentá-las conforme necessário ao texto.

2 Exercícios

Exercício 1: Mostre que existem dois números m e n primos tais que $m + n = 18$.

Exercício 2: Mostre que existem números reais a e b tais que $\sqrt{a+b} = \sqrt{a} + \sqrt{b}$.

Exercício 3: Seja $P(n)$ a proposição "Se a e b são reais positivos, então $(a+b)^n \geq (a^n + b^n)$." Prove que $P(1)$ é verdade.

Exercício 4: Mostre que o quadrado de um número par qualquer é também um número par.

Nos exercícios a seguir, prove ou desprove as afirmações:

Exercício 5: A diferença de quaisquer dois inteiros ímpares é um número par.

Exercício 6: Um inteiro positivo x é par se e somente se $x + 5$ é um número ímpar.

Exercício 7: Todo inteiro positivo pode ser escrito como a soma de três quadrados perfeitos.

Exercício 8: Dados x e y inteiros positivos, se $x^2 + y^2$ é par, então x e y são de mesma paridade.

Exercício 9: A diferença de quaisquer dois números naturais é sempre um número natural.

Exercício 10: Se $n > m$, então a média de n e m é maior que m.