Matemática Discreta
Lista de Exercícios 04

Números Primos e Máximo Divisor Comum

1. Determine se cada um destes números inteiros é primo.
   (a) 21 (b) 29 (c) 71 (d) 97 (e) 111 (f) 143
2. Encontre a fatoração em primos de cada um dos números abaixo.
   (a) 88 (b) 126 (c) 729 (d) 1001 (e) 1111 (f) 909090
3. Encontre a fatoração de números primos de 10!.
4. Mostre que $\log_2 3$ é um número irracional. Lembre-se de que um número irracional é um número real x que não pode ser escrito como a razão de dois números inteiros.
5. Demonstre ou negue a existência de três números inteiros positivos e ímpares consecutivos que são primos, ou seja, números ímpares primos na forma $p, p+2, p+4$.
6. Quais números inteiros positivos menores que 30 são relativamente primos de 30?
7. Determine se os números em cada um dos conjuntos abaixo são primos entre si (verifique dois a dois).
   (a) 11, 15, 19 (b) 14, 15, 21 (c) 12, 17, 31, 37 (d) 7, 8, 9, 11
8. Mostre que se $2^n - 1$ é primo, então n é primo.
   [**Dica**: Use a identidade $2^{ab} - 1 = (2^a - 1).(2^{a(b-1)} + 2^{a(b-2)} + \ldots + 2^a + 1)$.]

   O valor da **função ϕ de Euler** para o número inteiro positivo n é definido como sendo o número de inteiros positivos menores ou iguais a n que são relativamente primos de n (primos entre si).

9. Encontre
   (a) $\phi(4)$ (b) $\phi(10)$ (c) $\phi(13)$
10. Qual é o valor de $\phi(p^k)$ quando p é primo e k é um número inteiro positivo?
11. Quais são os máximos divisores comuns de cada par de números inteiros abaixo?
   (a) $3^7 \cdot 5^3 \cdot 7^3$, $2^{11} \cdot 3^3 \cdot 5^9$
   (b) $11 \cdot 13 \cdot 17$, $2^9 \cdot 3^7 \cdot 5^5 \cdot 7^3$
   (c) 23^{31}, 23^{17}
   (d) $41 \cdot 43 \cdot 53$, $41 \cdot 43 \cdot 53$
   (e) $3^{13} \cdot 517$, $2^{12} \cdot 7^{21}$
   (f) 1111, 0
12. Qual é o mínimo múltiplo comum de cada par do exercício anterior?
13. Encontre mdc(92928, 123552) e mmc(92928, 123552) e verifique se $\text{mdc}(92928, 123552) \cdot \text{mmc}(92928, 123552) = 92928 \cdot 123552$. [**Dica:** Primeiro encontre as fatorações em números primos de 92928 e 123552. Faça também utilizando o algoritmo de Euclides.]
14. Demonstre que o produto de três números inteiros consecutivos quaisquer é divisivel por 6.
15. Demonstre ou negue que $n^2 - 79n + 1601$ é primo sempre que n for um número inteiro positivo.
16. Demonstre ou negue que $p_1 p_2 \ldots p_n + 1$ é primo para todo número inteiro positivo n, em que $p_1, p_2, \ldots, p_n$ são os n menores números primos.
17. Mostre que se a, b e m são números inteiros tal que $m \geq 2$ e $a \equiv b(mod\ m)$, então $mdc(a, m) = mdc(b, m)$.

Respostas:

1. 29, 71, 97 primos; 21, 111, 143 não primos
2. (a) $2^3 \cdot 11$ (b) $2 \cdot 3^2 \cdot 7$ (c) 3^6 (d) $7 \cdot 11 \cdot 13$ (e) $11 \cdot 101$ (f) $2 \cdot 3^3 \cdot 5 \cdot 7 \cdot 13 \cdot 37$
3. $2^8 \cdot 3^4 \cdot 5^2 \cdot 7$
4. Suponha que $\log_2 3 = p/q$, em que $p, q \in \mathbb{Z}^+$ e $q \neq 0$. Então $2^{p/q} = 3$, de modo que $2^p = 3^q$. Isto viola o Teorema Fundamental da Aritmética. Logo, $\log_2 3$ é irracional.
5. 3, 5 e 7 são primos da forma desejada.
6. 1, 7, 11, 13, 17, 19, 23, 29
7. (a) Sim. (b) Não. (c) Sim. (d) Sim.
8. Suponha que n não seja primo, de modo que $n = ab$, em que a e b são inteiros maiores que 1. Como $a > 1$, pela identidade dada na dica, $2^a - 1$ é um fator de $2^n - 1$ que é maior que 1, e o segundo fator nesta identidade também é maior que 1. Logo, $2^n - 1$ não é primo.
9. (a) 2 (b) 4 (c) 12
10. $\phi(p^k) = p^k - p^{k-1}$. Temos $p^k - 1$ inteiros positivos menores que p^k. Como p é primo, os únicos números que não são primos em relação a p^k são os múltiplos de p. Os múltiplos de p menores que p^k são $p, 2p, 3p, \ldots, (p^{k-1} - 1)p$. Ou seja, dentre os $p^k - 1$ inteiros positivos menores que p^k, exatamente $p^{k-1} - 1$ não são primos em relação a p^k. Portanto, $\phi(p^k) = (p^k - 1) - (p^{k-1} - 1) = p^k - p^{k-1}$.
11. (a) $3^5 \cdot 5^3$ (b) 1 (c) 23^{17} (d) $41 \cdot 43 \cdot 53$ (e) 1 (f) 1111
12. (a) $2^{11} \cdot 3^7 \cdot 5^9 \cdot 7^3$ (b) $2^9 \cdot 3^7 \cdot 5^5 \cdot 7^3 \cdot 11 \cdot 13 \cdot 17$ (c) 23^{31} (d) $41 \cdot 43 \cdot 53$ (e) $2^{12} 3^{13} 5^{17} 7^{21}$ (f) Não definido.
13. $\text{mdc}(92928, 123552) = 1056$; $\text{mmc}(92928, 123552) = 10\,872\,576$; ambos os produtos são 11 481 440 256
14. Como um a cada dois inteiros é divisível por 2, o produto é divisível por 2. Como uma a cada três inteiros é divisível por 3, o produto é divisivel por 3. Portanto, o produto tem ambos, 2 e 3, em sua fatoração em primos e é, portanto, divisível por 3*2=6.
15. $n = 1601$ é um contra-exemplo.
16. Contra-Exemplo: $(2 \times 3 \times 5 \times 7 \times 11 \times 13) + 1 = 30031$ e $30031 = 59 \times 509$ não é primo.
17. Decorre diretamente do teorema do algoritmo de Euclides, pois podemos escrever $a \equiv b(\text{mod } m)$ na forma $a = ms + b$ para algum inteiro s.

Questões adicionais:

1. Determine se cada um destes números inteiros é primo.
   (a) 19 (b) 27 (c) 93 (d) 101 (e) 107 (f) 113
2. Encontre a fatoração em números inteiros primos de cada um destes números inteiros.
   (a) 39 (b) 81 (c) 101 (d) 143 (e) 289 (f) 899
3. Quantos zeros há no final de 100!?
4. Demonstre que para todo número inteiro positivo n existem n números inteiros compostos consecutivos. [*Dica:* Considere os n números inteiros consecutivos começando como $(n+1)! + 2$.]
5. Quais números inteiros positivos menores que 12 são relativamente primos de 12?
6. Determine se os números inteiros em cada um dos conjuntos abaixo são pares relativamente primos.
   (a) 21, 34, 55 (b) 14, 17, 85 (c) 25, 41, 49, 64 (d) 17, 18, 19, 23
7. Chamamos um número inteiro positivo de **perfeito** se ele for igual à soma de seus divisores positivos diferentes dele mesmo.
   (a) Mostre que 6 e 28 são perfeitos.
8. Mostre que n é primo se e somente se $\phi(n) = n - 1$.
9. Quais são os máximos divisores comuns de cada par de números inteiros abaixo?
   (a) $2^2 \cdot 3^3 \cdot 5^5$, $2^5 \cdot 3^3 \cdot 5^2$
   (b) $2 \cdot 3 \cdot 5 \cdot 7 \cdot 11 \cdot 13$, $2^{11} \cdot 3^9 \cdot 11 \cdot 17^{14}$
   (c) 17, 17^{17}
   (d) $2^2 \cdot 7$, $5^3 \cdot 13$
   (e) 0, 5
   (f) $2 \cdot 3 \cdot 5 \cdot 7$, $2 \cdot 3 \cdot 5 \cdot 7$
10. Qual é o mínimo múltiplo como de cada par do exercício anterior?
11. Encontre mdc(1000, 625) e mmc(1000, 625) e verifique se $\text{mdc}(1000, 625) \cdot \text{mmc}(1000, 625) = 1000 \cdot 625$.
12. Se o produto de dois números inteiros é $2^7 3^8 5^2 7^{11}$ e seu máximo divisor comum é $2^3 3^4 5$, qual é o mínimo múltiplo comum entre eles?
13. Encontre o menor número inteiro positivo com n fatores diferentes quando n for
   (a) 3. (b) 4. (c) 5. (d) 6. (e) 10.
14. Demonstre que o conjunto dos números racionais positivos é contável montando uma função que determine para um número racional p/q com $mdc(p, q) = 1$ a base 11 a partir da representação decimal de p seguido do digito A da base 11, que corresponde ao número decimal 10, seguido de uma representação decimal de q.