Funções - Definições e Teoremas

Leitura Introdutória 02

Notas de Aula de Matemática Discreta

Samy Sá

Universidade Federal do Ceará
Campus de Quixadá
Quixadá, Brasil
samy@ufc.br

Requisitos: Teoria dos Conjuntos (Básico)
Texto produzido em 21/02/2014.

1 Introdução

Este texto oferece uma breve revisão do conteúdo de funções, dada sua importância para as aulas de sequências e somatórios que se seguirão.

Em muitas situações, precisamos desejamos guiar elementos de um conjunto para um segundo, que pode inclusive ser o mesmo que o primeiro. Por exemplo, suponha que desejamos relacionar clientes de uma locadora de filmes com seus gêneros de filmes favoritos entre Terror, Drama, Comédia e Romance e Ação. Suponha que o cliente Aldo prefere filmes de comédia, Bia prefere ação, Dario prefere terror, e Carla e Edu preferem drama. A associação deles é ilustrada na Figura 1:

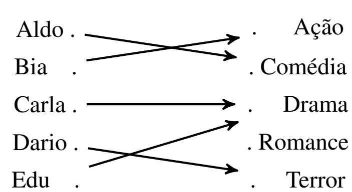

Figura 1. Os gêneros de filmes favoritos dos clientes de uma locadora.

Para trabalhar propriamente com funções nas próximas aulas, você precisará saber o que caracteriza...

1. Uma Função, seu domínio, contra-domínio e imagem.
2. Funções injetoras, sobrejetoras e injetoras
3. Inversão de funções

Passaremos por esses itens um a um, ditando as definições necessárias. Em cada passo, colocaremos exemplos e exercícios intercalados. Em uma versão futura, consideraremos acrescentar composição de funções a esse material.

2 Definições

Definição 1 *(Função)*

Sejam S e T dois conjuntos não vazios, uma função de S para T é uma associação que leva cada elemento de S a exatamente um elemento de T. Escrevemos $f(a) = b$ se b é o único elemento de T associado pela funça õ f ao elemento a de S. Se f é uma função de S para T, escrevemos $f : S \rightarrow T$.

Observação 1 *Funções também podem ser chamadas de mapeamentos, transformações, ou aplicações.*

Há diversas maneiras de especificar funções, a exemplo da ilustração na Figura 1. Podemos também escrever programas de computador para especificar funções, ou descrevê-las no formato de relação binária, ou seja, um subconjunto de $S \times T$, desde que cada elemento de S apareça somente uma vez na ordenada x desses pares (x, y). Nesse caso, o par $(a, b) \in f$ representa que $f(a) = b$.

Exemplo 1 *A função da Figura 1 poderia ser representada dessa forma como*

$f = \{(\textit{Aldo, Comédia}), (\textit{Bia, Ação}), (\textit{Carla, Drama}), (\textit{Dario, Terror}), (\textit{Edu, Drama})\}$.

Definição 2 *(Terminologia de Funções)*

*Se f é uma função de S para T, dizemos que S é o **domínio** de f e T é o **contra-domínio** de f. Se $f(a) = b$, dizemos que b é a **imagem** de a e que a é uma **imagem inversa** de b em f. A **imagem** da função f é o conjunto dos elementos de T que são imagem de algum elemento de S.*

Exemplo 2 *Mais uma vez, observaremos o exemplo da Figura 1, onde*

$S = \{$ *Aldo, Bia, Carla, Dario,Edu* $\}$

$T = \{$ *Ação, Comédia, Drama, Romance, Terror* $\}$.

Observe que os elementos Ação, Comédia, Drama, e Terror são imagem de algum elemento de S (são os favoritos de algum cliente), enquanto Romance não é imagem de ninugém. Podemos destacar que na função $f : S \rightarrow T$ ilustrada na Figura 1, a imagem de Bia é o elemento Ação. Da mesma forma, a única imagem inversa de Ação em f é Bia. O conjunto imagem de f será $T' = \{$ Ação, Comédia, Drama, Terror $\}$. Perceba ainda que $T' \subseteq T$, ou seja, a imagem é um subconjunto do contra-domínio.

Em várias linguagens de programação, temos domínio e contra-domínio expressos na assinatura de funções. Por exemplo, se implementarmos uma função de piso que retorna o maior inteiro menor que um x real, poderíamos ter em C ou C++ a assinatura

```
int piso(float x)
{
   ... (código)
}
```

Nesse caso, a entrada é do tipo float, que utilizamos para representar números reais. Portanto, o domínio da função será o conjunto dos reais e o contra-domínio será o conjunto dos inteiros, que é o tipo do valor de retorno. Essa função, portanto, tem assinatura $piso : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{Z}$. Como exemplos, podemos citar que o piso de $3,1415$ é 3, ou seja, a imagem de $3,1415$ na função $piso$ é 3.

Exercício 1 *Consideremos mais um exemplo de assinatura de função em programas. Veja o que seria a assinatura de um função para somar dois inteiros:*

*int **soma**(int x, int y)*
{
... (código)
}

Responda:

a) Qual é o domínio da função soma?
b) Qual é o contra-domínio de soma?
c) Qual é a imagem de $(3,8)$*?*
d) Encontre 3 imagens inversas de 10.

3 Funções Injetoras e Sobrejetoras

Definição 3 *(Função Injetora)*

*Uma função é dita **um para um** ou uma **injeção** se e somente se* $f(a) = f(b)$ *implica que* $a = b$ *para quaisquer* a, b *do domínio de* f*. Uma função é dita injetora se ela é um para um.*

Há outra forma de pensar em funções injetoras: Seja $f : S \rightarrow T$, se cada elemento de T que é imagem de algum elemento de S for imagem somente deste elemento. Podemos ainda dizer que cada elemento de T aparece apenas uma vez na ordenada y dos pares (x, y) que caracterizam f.

Exemplo 3 *Determine se a função ilustrada na Figura 1 **não é** injetora.*

***Solução**: O elemento Drama de* T *é imagem de dois elementos distintos de* S*, falsificando a condição* $(\forall a \in S)(\forall b \in S)[f(a) = f(b) \rightarrow a = b]$.

Exemplo 4 *Determine se a funça õ* $f(x) = x + 1$ *dos reais para os reais é injetora.*

***Solução**: Esta função é injetora. Basta observar que sempre que* $x \neq y$*, teremos também que* $x + 1 \neq y + 1$.

A implicação $(\forall x \in S)(\forall y \in S)[x \neq y \rightarrow x + 1 \neq y + 1]$ *é equivalente ao enunciado* $(\forall x \in S)(\forall y \in S)[f(x) = f(y) \rightarrow x = y]$ *por contraposição.*

Exercício 2 *Determine se as seguinte funções são injetoras:*

a) $f(n) = n - 1$*, com* $f : \mathbb{Z} \rightarrow \mathbb{Z}$
b) $f(x) = x^2$*, com* $f : \mathbb{Z} \rightarrow \mathbb{Z}$

c) $f(m,n) = 2m - n$, *com* $f : \mathbb{Z} \times \mathbb{Z} \to \mathbb{Z}$

Definição 4 *(Função Sobrejetora)*

Uma função $f : S \to T$ é uma ***injeção*** *se e somente se todo elemento de T é imagem de ao menos um elemento de S. Uma função é dita sobrejetora se ela é uma sobrejeção.*

Uma função portanto é uma sobrejeção se $(\forall y \in T)(\exists x \in S)[f(x) = y]$.

Exemplo 5 *A função $f : \mathbb{Z} \to \mathbb{Z}$ tal que $f(x) = x + 1$ é uma sobrejeção?*
Solução*: Esta função é sobrejetora. Observe que para qualquer número inteiro b no contradomínio, existe algum inteiro a do domínio tal que a é levado a b.*

Exercício 3 *Determine se as seguinte funções são sobrejetoras:*

a) $f(x) = x^2$, *com* $f : \mathbb{Z} \to \mathbb{Z}$
b) $f(x) = \{(a,3),(b,2),(c,1),(d,3)\}$ *com* $f : S \to T$ *onde* $S = \{a,b,c,d\}$ *e* $T = \{1,2,3\}$.

A figura a seguir ilustra todos os casos de tipos de funções:

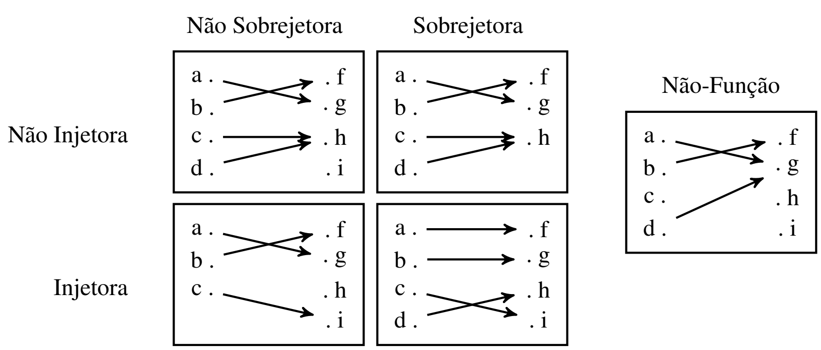

Figura 2. Exemplos dos diferentes tipos de funções e de uma não-função

4 Comparação das Definições

Dados conjuntos S e T, uma candidata a função $f : S \to T$ precisa satisfazer duas condições referentes ao seu **domínio**:

1. Cada elemento do **domínio** precisa ter ao menos uma imagem.
2. Nenhum elemento do **domínio** pode ter duas imagens.

Observe que a condição para que uma função seja injetora é muito parecida com a condição 2 acima, mas verificada do lado do contra-domínio:

3. Nenhum elemento do **contra-domínio** pode ter duas imagens inversas.

Além disso, a condição para que uma função seja sobrejetora é muito parecida com a condição 1 acima, mas também verificada do lado do contra-domínio:

4. Todo elemento do **contra-domínio** deve ter uma imagem inversa.

Embora não seja comum detalhar funções e suas propriedades dessa forma, escrevemos as condições de maneira conveniente para comparação. As duas condições acima para que uma função seja injetora e sobrejetora são as mesmas que as condições necessárias para ser uma função. A diferença é que verificamos a natureza de função no lado do domínio e suas propriedades no lado do contra-domínio.

5 Funções Bijetoras (Um-a-Um)

Definição 5 *(Função Bijetora)*

Uma função $f : S \to T$ é uma ***bijeção*** *de S em T se e somente se todo elemento de f é uma injeção e f éuma sobrejeção. Uma função é dita bijetora se ela é uma sobrejeção.*

Observe que se uma função $f : S \to T$ é uma bijeção, ela satisfaz as condições 3 (de que é injetora) e 4 (de que é sobrejetora) mencionadas na Seção 4. Por conta disso, se invertermos os pares que caracterizam f, o resultado será também uma função, a qual chamaremos de sua função inversa com assinatura $f^{-1} : T \to S$.

Exemplo 6 *Considere a função $f : \mathbb{Z} \to \mathbb{Z}$ tal que $f(x) = x + 1$. Seria f inversível? Caso sim, qual seria sua inversa?*

Solução*: f é inversível, pois pode-se verificar que se trata de uma bijeção. Pare inverter a função, devemos considerar os seguinte: Se $f(x) = y$ é a imagem de um x qualquer, qual seria a imagem inversa de y? Uma vez que $y = x + 1$, temos que sua imagem inversa $x = y - 1$. Consequentemente, $f^{-1}(y) = y - 1$. Podemos substituir a variável y por x de maneira uniforme para obter $f^{-1}(x) = x - 1$.*

A Figura 3 ilustra o que acontece com os pares de elementos do domínio e suas respectivas imagens na inversão de funções.

Na figura, observe que $f : S \to T$ é uma bijeção, assim como a sua inversa f^{-1}.

Perceba também que quando invertemos domínio e contra-domínio, as características 3 e 4 satisfeitas por f passam a satisfazer as condições 1 e 2 de f^{-1} e vice-versa, o que nos leva a um teorema importante sobre bijeções e inversão de funções:

Teorema 1 *Uma função $f : S \to T$ é inversível se e somente se f é uma bijeção.*

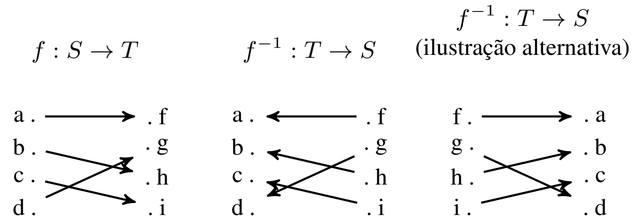

Figura 3. Uma função f e possíveis ilustrações de sua inversa f^{-1}

Prova 1 *Suponha que f não é uma bijeção. Observaremos dois casos:*

(Caso 1) *Suponha que f não é injetora. Logo, existe um elemento de T que é imagem de ao menos dois elementos de S. Quando tentarmos inverter a função, o resultado $f^{-1} : T \to S$ terá um elemento de T com duas imagens, o que é inadmissível para uma função. Logo, f^{-1} não seria função nesse caso.*

(Caso 2) *Suponha que f não é sobrejetora. Logo, existe um elemento de T que não é imagem de nenhum elemento de S. Quando tentarmos inverter a função, o resultado $f^{-1} : T \to S$ terá um elemento de T sem nenhuma imagens, e portanto não f^{-1} não será uma função.* ■

6 Exercícios

Exercício 5: Cada item a seguir sugere uma estrutura que é candidata a função. Verifique se as condições necessárias são respeitadas. Em caso positivo, verifique se a função é injetora e/ou sobrejetora. Em caso de bijeções, calcule sua função inversa.

a) $f : \mathbb{Z} \to \mathbb{N}$, onde $f(x) = x^2 + 1$
b) $g : \mathbb{N} \to \mathbb{Q}$, onde $g(x) = 1/x$
c) $h : \mathbb{Z} \to \mathbb{Z}$, onde $h(x) = x$ (função identidade)
d) $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$, onde $f(x, y) = (y + 1, x + 1)$
e) $g : \mathbb{Z} \times \mathbb{N} \to \mathbb{Q}$, onde $g(x, y) = x/(y + 1)$
f) $h : \mathbb{N} \to \mathbb{N}$, onde $h(x) = 1/x$ se x for par e $h(x) = x + 1$ se x for ímpar.

7 Respostas dos Exercícios Intercalados no Texto

Exercício 1:

a) O domínio da função $soma$ é $\mathbb{Z} \times \mathbb{Z}$, pois os elementos do domínio são pares ordenados de inteiros.
b) O contra-domínio de $soma$ é $\mathbb{Z}$, pois os valores de saída da função são inteiros.
c) A imagem de $(3, 8)$ em $soma$ é 11.
d) Existem infinitas imagens inversas de 10: Qualquer par de inteiros cuja soma seja 10 vale. Podemos citar como exemplos os pares $(2, 8)$, $(-1, 11)$, e $(10, 0)$.

Exercício 2:

a) $f(n) = n - 1$, com $f : \mathbb{Z} \to \mathbb{Z}$ é injetora, pois para valores diferentes de n, teremos sempre valores diferentes de $f(n)$.
b) $f(x) = x^2$, com $f : \mathbb{Z} \to \mathbb{Z}$ não é injetora, pois, por exemplo, $f(2) = f(-2) = 4$.

c) $f(m, n) = 2m - n$, com $f : \mathbb{Z} \times \mathbb{Z} \to \mathbb{Z}$ não é injetora, pois, por exemplo, $f(4, 0) = f(5, 2) = 8$.

Exercício 3: a) $f(x) = x^2$, com $f : \mathbb{Z} \to \mathbb{Z}$ não é sobrejetora, pois, por exemplo, o 3 não é imagem de nenhum elemento do domínio.

b) $f(x) = \{(a, 3), (b, 2), (c, 1), (d, 3)\}$ com $f : S \to T$ onde $S = \{a, b, c, d\}$ e $T = \{1, 2, 3\}$ é sobrejetora, pois cada elememntos de T é imagem de ao menos um elemento de S.