Arranjos com Repetições

Leitura Complementar 06

Notas de Aula de Matemática Discreta

Samy Sá

Universidade Federal do Ceará
Campus de Quixadá
Quixadá, Brasil
samy@ufc.br

Requisitos: Princípios Básicos de Contagem, Permutaçoes e Repetições.
Texto produzido em 16/05/2014.
Observação: Esse texto equivale à Seçao 6.5: "Permutações e Combinações Generalizadas" do Rosen, 7a Edição.

1 Introdução

Em vários problemas de contagem, temos a possibilidade de repetições dos elementos como nos problemas envolvendo strings de caracteres. Por exemplo, considere o enunciado:

"Quantas placas de carros existem com quaisquer letras e a numeração 0123?"

Como estudamos no princípio da multiplicação, dada a disponibilidade de 26 caracteres no alfabeto, podemos estabelecer 26.26.26 sequências diferentes de 3 letras. Ainda assim, estamos lidando com um caso de permutações, dado que a sequência das letras (a ordem) importa. A diferença é que se trata de um caso de permutações com repetições.

Em outras situações, temos elementos muito parecidos, indiscerníveis, como copias de algum tipo. Considere o enunciado:

"Suponha que temos 3 bolas azuis, 3 bolas vermelhas e 3 bolas verdes em um recipiente. Se retirarmos 3 bolas aleatoriamente, quantos resultados diferentes podemos ter em termos de quantidades de cada cor, ou seja, se a ordem não importa?"

Como a ordem dos sorteios não importa, o leitor já deve estar ciente de que se trata de um caso de combinações. O resultado, porém, não é $C(9, 3)$, mas $C(5, 2)$! Mas como? O enunciado não tem nem 5 e nem 2! De onde vieram esses números? Veremos em detalhes na seção sobre combinações com repetições.

2 Permutações com Repetições

Esses casos são totalmente baseados no principio da multiplicação. Lembre que um caso normal de r-permutações de n objetos daria $P(n, r) = \frac{n!}{(n-r)!} = n.(n-1).(n-$

$2).\ldots.(n-r+2).(n-r+1)$, visto que os objetos não poderiam ser escolhidos repetidas vezes. Por conta disso, a segunda escolha não conta mais com o elemento pego na primeira escolha e assim por diante. Mas se repetições são aceitas, cada escolha conta com n elementos e o resultado aqui sera n^r.

Teorema 1 *O número de r-permuutações de n elementos com repetições é n^r.*

No exemplo das placas, temos permutações (a ordem importa) de 26 elementos (letras) de tamanho 3, ou seja, 3-permutações de n elementos. Como vimos anteriormente, o total é de 26^3 possíveis resultados.

3 Combinações com Repetições

Quando há inúmeras cópias de um objeto à disposição para combinações, a perspectiva deve ser diferente, como no problema de pegar 3 bolas coloridas em uma reserva com bolas à vontade de cada cor. Nesses casos, considere uma solução qualquer do problema. A solução tem 3 bolas coloridas que podem ser agrupadas por cor e podemos utilizar algo para separar as cores. Se usarmos as letras R para vermelho (red), B para azul (blue), G para verde (green), e o símbolo | para separar as cores, teremos os seguintes resultados possíveis:

1. RRR||
2. RR|G|
3. RR||B
4. R|GG|
5. R|G|B
6. R||BB
7. |GGG|
8. |GG|B
9. |G|BB
10. ||BBB

No caso, como sao 3 cores, necessitaríamos de 2 separadores, como barras de metal de algum tipo. Se olharmos por essa perspectiva, uma solução qualquer do problema tem 5 objetos: 3 bolas coloridas e 2 separadores. O problema agora se reduz a escolher em que posições (das 5) os dois separadores serão colocados. Isso nos da o resultado comentado antes: $C(5,2) = 10$.

E se fosse pra escolher 100 bolas coloridas, como no enunciado anterior, a partir de uma reserva com bolas à vontade de cada cor? O resultado aqui é $C(102,2)$. Você consegue explicar esse resultado? [1]

Mais um exemplo: Suponha agora que há bolas de 10 cores diferentes, à vontade. Se for de escolhermos 50 bolas entre estas, quantos resultados diferentes podemos conseguir? [2]

Teorema 2 *Existem $C(n+r-1,r) = C(n+r-1,n-r)$ r-combinações de n elementos quando é permitido repetições.*

[1] Uma soluçao desse problema teria 100 bolas e 2 separadores, num total de 102 objetos. Entre as posições destes, escolheriamos apenas as dos 2 separadores.

[2] O total seria de C(59,9), pois as soluçoes terao 50 bolas e 9 separadores.

4 Permutações Envolvendo Objetos Indiscerníveis

Em alguns casos, temos elementos que não podem ser diferenciados. Considere o problema: Quantas strings diferentes podemos formar por permutações das letras da palavra SUCESSO? Como há 3 ocorrências da letra S, mudá-las de lugar, apenas essas letras, não mudaria a palavra. Para determinar o total de strings, nós fazemos as permutações como se fossem letras distintas e tiramos repetições com o princípio da divisão. Nesse caso, teremos 7! permutações das 7 letras, mas, como há 3 ocorrências indiscerníveis de S, devemos dividir o resultado pelo número de manieras como esses 3 S's podem ser arrumados, ou seja, 3!.

Teorema 3 *O número de diferentes permutações de n objetos em que há n_1 objetos indiscerníveis do tipo 1, n_2 objetos indiscerníveis do tipo 2, ... , n_k objetos indiscerníveis do tipo k é*
$\frac{n!}{n_1!n_2!...n_k!}$.

5 Exercícios

Exercício 1: De quantas maneiras se pode distribuir 3 projetos para 5 funcionários se cada funcionário pode participar de mais de um projeto?

Exercício 2: Um padaria vende salgadinhos de vários tipos: coxinha de frango, bolinha de queijo, pastel de carne, kibe, canudinho, empada. De quantas maneiras pode-se escolher...

(a) 25 salgadinhos?
(b) 50 salgadinhos?
(c) 100 salgadinhos?
(d) 50 salgadinhos com pelo menos 5 de cada tipo?
(e) 50 salgadinhos se não tiver disponibilidade de bolinha de queijo?
(f) 50 salgadinhos com pelo menos 10 coxinhas e no máximo 5 pastéis?

Exercício 3: Quantas strings podem ser feitas com as letras das seguintes palavras?

(a) MISSISSIPI
(b) ABRACADABRA
(c) ABACATADA
(d) SOCORRO