Matemática Básica - Lista de Exercícios 2.4

Sequências e Somatórios

1. Encontre os termos abaixo da sequência $\{a_n\}$, em que $a_n = 2.(-3)^n + 5^n$.
   (a) a_0 (b) a_1 (c) a_4 (d) a_5
2. Quais são os termos a_0, a_1, a_2 e a_3 da sequência $\{a_n\}$, em que a_n é igual a
   (a) $2^n + 1$? (c) $\lfloor n/2 \rfloor$?
   (b) $(n+1)^{n+1}$ (d) $\lfloor n/2 \rfloor$ + $\lceil n/2 \rceil$?
3. Liste os primeiros 10 termos de cada uma das sequências abaixo.
   (a) a sequência que começa com 2 e na qual cada termo sucessivo é o termo anterior acrescido de 3 unidades
   (b) a sequência que lista cada número inteiro positivo três vezes, em ordem crescente
   (c) a sequência que apresenta os números inteiros positivos e ímpares em ordem crescente, listando cada número inteiro ímpar duas vezes
   (d) a sequência cujo n-ésimo termo é $n! - 2^n$
   (e) a sequência que começa com 3, na qual cada termo subsequente é duas vezes o termo anterior
   (f) a sequência cujos dois primeiros termos são 1 e cada termo subsequente é a soma dos dois termos anteriores (Esta é a famosa sequência Fibonacci, que estudaremos mais a frente no texto.)
   (g) a sequência cujo n-ésimo termo é o número de bits na expansão binária do número n(definida na Seção 3.6)
   (h) a sequência em que o n-ésimo termo é o número de letras da palavra em inglês para o índice n
4. Encontre pelo menos três sequências diferentes começando com os termos 1, 2, 4, em que os termos são construídos a partir de uma fórmula ou regra simples.
5. Para cada uma das listas de números inteiros, forneça uma fórmula ou regra simples para construir os termos de uma sequência de interios que comece com a lista dada. Assumindo que sua fórmula esteja correta, determine os três próximos termos da sequência.
   (a) 1, 0, 1, 1, 0, 0, 1, 1, 1, 0, 0, 0, 1,...
   (b) 1, 2, 2, 3, 4, 4, 5, 6, 6, 7, 8, 8,...
   (c) 1, 0, 2, 0, 4, 0, 8, 0, 16, 0,...
   (d) 3, 6, 12, 24, 48, 96, 192,...
   (e) 15, 8, 1, -6, -13, -20, -27,...
   (f) 3, 5, 8, 12, 17, 23, 30, 38, 47,...
   (g) 2, 16, 54, 128, 250, 432, 686,...
   (h) 2, 3, 7, 25, 121, 721, 5041, 40321,...
6. Mostre que se a_n indica o n-ésimo número inteiro positivo que não é um quadrado perfeito, então $a_n = n + \{\sqrt{n}\}$, em que $\{x\}$ indica o número inteiro mais próximo do número real x.
7. Quais são os valores das somas abaixo?
   (a) $\sum_{k=1}^{5}(k+1)$ (c) $\sum_{i=1}^{10} 3$
   (b) $\sum_{J=0}^{4}(-2)^j$ (d) $\sum_{j=0}^{8}(2^{j+1} - 2^j)$
8. Qual é o valor para cada uma das somas abaixo dos termos de uma progressão geométrica?
   (a) $\sum_{j=0}^{8} 3 \cdot 2^j$ (c) $\sum_{j=2}^{8}(-3)^j$
   (b) $\sum_{j=1}^{8} 2^j$ (d) $\sum_{j=0}^{8} 2 \cdot (-3)^j$
9. Compute cada uma das somas duplas abaixo.
   (a) $\sum_{i=1}^{2}\sum_{j=1}^{3}(i+j)$ (c) $\sum_{i=1}^{3}\sum_{j=0}^{2} i$
   (b) $\sum_{i=0}^{2}\sum_{j=0}^{3}(2i+3j)$ (d) $\sum_{i=0}^{2}\sum_{j=1}^{3} ij$
10. Mostre que $\sum_{j=1}^{n}(a_j - a_{j-1}) = a_n - a_0$ em que $a_0, a_1, \ldots, a_n$ é uma sequência de números reais. Esse tipo de soma é chamada de **telescópica**.
11. Some os dois lados da identidade $k^2 - (k-1)^2 = 2k - 1$ de $k = 1$a $k = n$ e use o Exercício 19 para encontrar
    (a) uma fórmula para $\sum_{k=1}^{n}(2k-1)$ (a soma dos primeiros n números naturais ímpares).
    (b) uma fórmula para $\sum_{k=1}^{n} k$.
12. Encontre $\sum_{k=100}^{200} k$. (Use a Tabela 2).
13. Encontre uma fórmula para $\sum_{k=0}^{m} \lfloor \sqrt{k} \rfloor$, quando m é um número inteiro positivo.
14. Quais são os valores dos produtos abaixo?
    (a) $\prod_{i=0}^{10} i$ (c) $\prod_{i=1}^{100} (-1)^i$
    (b) $\prod_{i=5}^{8} i$ (d) $\prod_{i=1}^{10} 2$

Lembre-se que o valor da função fatorial de um número inteiro positivo n, indicado por n!, é o produto dos números inteiros positivos de 1 a n. Lembrando também que 0! = 1.

15. Encontre $\sum_{j=0}^{4} j!$.

Questões adicionais:

1. Qual o termo a_8 da sequência $\{a_8\}$ da sequência $\{a_n\}$ se a_n é igual a
   (a) 2^{n-1}? (c) $1 + (-1)^n$?
   (b) 7? (d) $-(-2)^n$?
2. Quais são os termos a_0, a_1, a_2 e a_3 da sequência $\{a_n\}$, em que a_n é igual a
   (a) $(-2)^n$? (c) $7 + 4^n$?
   (b) 3? (d) $2^n + (-2)^n$?
3. Liste os primeiros 10 termos de cada uma das sequências abaixo.
   (a) a sequência obtida começando com 10 e o termo subsequente obtido pela subtração de 3 do termo anterior.
   (b) a sequência cujo n-ésimo termo é a soma dos primeiros n números inteiros positivos.
   (c) a sequência cujo n-ésimo termo é $3^n - 2^n$.
   (d) a sequência cujo n-ésimo termo é $\lfloor \sqrt{n} \rfloor$
   (e) a sequência cujos dois primeiros termos são 1 e 2 e cada termo subsequente é a soma dos dois termos anteriores
   (f) a sequência cujo n-ésimo termo é o maior número inteiro com a expansão binária de n bits (definida na Seção 3.6) (Escreva sua resposta em notação decimal.)
   (g) a sequência cujos termos são construídos sequencialmente por: comece com 1, então adicione 1, depois multiplique por 1, então adicione 2, depois multiplique por 2, e assim por diante
   (h) a sequência cujo n-ésimo termo é o maior número inteiro k, tal que $k! \leq n$
4. Encontre pelo menos três sequências diferentes começando com os termos 3, 5, 7, em os termos são construídos a partir de uma fórmula ou regra simples.
5. Para cada uma das listas de números inteiros, forneça uma fórmula ou regra simples para construir os termos de uma sequência de inteiros que comece com a lista dada. Assumindo que sua fórmula ou regra esteja correta, determine os três próximos termos da sequência.
   (a) 3, 6, 11, 18, 27, 38, 51, 66, 83, 102,...
   (b) 7, 11, 15, 19, 23, 31, 35, 39, 43,...
   (c) 1, 10, 11, 100, 101, 110, 111, 1000, 1001, 1010, 1011,...
   (d) 1, 2, 2, 2, 3, 3, 3, 3, 3, 5, 5, 5, 5, 5, 5, 5,...
   (e) 0, 2, 8, 26, 80, 242, 728, 2186, 6560, 19682,...
   (f) 1, 3, 15, 105, 945, 10395, 135135, 2027025, 34459425,
   (g) 1, 0, 0, 1, 1, 1, 0, 0, 0, 0, 1, 1, 1, 1, 1,...
   (h) 2, 4, 16, 256, 65536, 4294967296,...
6. Considere a_n como o n-ésimo termo da sequência 1, 2, 2, 3, 3, 3, 4, 4, 4, 4, 5, 5, 5, 5, 5, 6, 6, 6, 6, 6, 6,...,construída pela inclusão do número inteiro k exatamente k vezes. Mostre que $a_n = \left\lfloor \sqrt{2n} + 1/2 \right\rfloor$.
7. Quais são os valores das somas abaixo, em que $S = \{1, 3, 5, 7\}$?
   (a) $\sum_{j \in S} j$ (c) $\sum_{j \in S}(1/j)$
   (b) $\sum_{j \in S} j^2$ (d) $\sum_{j \in S} 1$
8. Encontre o valor de cada uma das somas a seguir.
   (a) $\sum_{j=0}^{8}(1 + (-1)^j)$ (c) $\sum_{j=0}^{8}(2 \cdot 3^j + 3 \cdot 2^j)$
   (b) $\sum_{j=0}^{8}(3^j - 2^j)$ (d) $\sum_{j=0}^{8}(2^{j+1} - 2^j)$
9. Compute cada uma das somas duplas abaixo.
   (a) $\sum_{i=1}^{3}\sum_{j=1}^{2}(i-j)$ (c) $\sum_{i=1}^{3}\sum_{j=0}^{2} j$
   (b) $\sum_{i=0}^{3}\sum_{j=0}^{2}(3i+2j)$ (d) $\sum_{i=0}^{2}\sum_{j=0}^{3} i^2 j^3$
10. Use a identidade $1/(k(k+1)) = 1/k - 1/(k+1)$ e o Exercício 19 para computar $\sum_{k=1}^{n} 1/(k(k+1))$.
11. *Use a técnica dada no Exercício 10 que se encontra no início desta lista, junto com o resultado do Exercício 11b que também encontra-se no início desta lista, para derivar a fórmula para $\sum_{k=1}^{n} k^2$ dada na Tabela 2. (*Dica:*Considere $a_k = k^3$ na soma telescópica do Exercício 10. Além de recorre a tabela que encontra-se na página 157).
12. Encontre $\sum_{k=99}^{200} k^3$. (Use a Tabela 2).
13. Encontre uma fórmula para $\sum_{k=0}^{m} \lfloor \sqrt[3]{k} \rfloor$, quando m é um número inteiro positivo.

Lembre-se que o valor da função fatorial de um número inteiro positivo n, indicado por n!, é o produto dos números inteiros positivos de 1 a n. Lembrando também que 0! = 1.

14. Expresse $n!$ usando a notação de produto.
15. Encontre $\prod_{j=0}^{4} j!$