

期中题目选讲

一. 如图 1 所示, 光滑水平桌面上有两个质量为 M , 半径为 R 的 $1/4$ 圆弧滑槽 A 和 B, 滑槽可以桌面上滑动, 一个质量是 $m=M/2$ 的小滑块 C 放在滑槽 A 的顶端, 开始时滑槽和滑块都是静止状态。此时小滑块从静止开始下滑, 忽略一切摩擦, 求: (1) 小滑块在滑槽 B 上可能达到的最高高度; (2) 小滑块与滑槽 B 脱离后能否在追上滑槽 A? (3) 如果让小滑块 C 在离开滑槽 B 后还能追上滑槽 A, 则小滑块 C 的质量最多是多少?

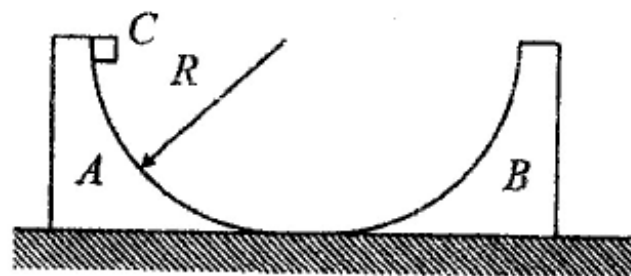


图 1

一、解：(1)由于无摩擦，系统机械能守恒，在水平方向动量守恒，设滑块和滑槽A分离后的速率分别是u和v，则

$$M\vec{v} + m\vec{u} = 0$$

$$\frac{1}{2}Mv^2 + \frac{1}{2}mu^2 = mgR$$

$$\text{可得: } u = \sqrt{\frac{M}{M+m} 2gR} = \sqrt{\frac{4}{3}gR}, \quad v = \frac{m}{M} \sqrt{\frac{M}{M+m} 2gR} = \sqrt{\frac{1}{3}gR}$$

滑块到达滑槽B的最高位置时，二者以相同速度运动，设高度为h，二者共同速度为v₁

$$(M + m)v_1 = mu$$

$$\frac{1}{2}(M + m)v_1^2 + mgh = \frac{1}{2}mu^2$$

$$\text{可得 } v_1 = \frac{m}{M+m}u = \sqrt{\frac{4}{27}gR}, \quad h = \left(1 - \frac{m}{M+m}\right)\frac{2}{3}R = \frac{4}{9}R$$

(2) 同理，滑块和滑槽B分离之后的速度为 $u_2 = \frac{M-m}{M+m}u = \sqrt{\frac{4}{27}gR} < v$ ，所以不可能追上滑槽A

(3) 如果能够追上滑槽A，需要 $u_2 > v$ ，因此有

$$\frac{M-m}{M+m}u > \frac{m}{M}u$$

$$\text{可得 } m < \frac{M}{\sqrt{2}+1}$$

二. 气象员要释放一探测气球。在无风的天气时, 气球将以 $v=5\text{m/s}$ 的速度竖直上升 1000m 后再以同样的速度返回。这天气象员释放气球时遇到了水平的风, 假设风速大小随高度的关系为 $u=u_0+kh$, 其中 $u_0=5\text{m/s}$, $k=0.01\text{m/s}^2$ 。求: 气象员需要走多少米才能回收收到气球?

解: 气球上升和下降过程对称, 上升过程中高度与时间的关系为 $h = vt$,

气球的水平速度为 $u = u_0 + kh = u_0 + kvt$

因此气象员需要走的距离为 $x = 2 \int_0^{200} u dt = 2 \int_0^{200} (5 + 0.05t) dt =$

4000m

三. 如图 2 所示, 一个带量为 Q , 半径为 R 的均匀带电半球面, 求: 球心处的电势和电场强度的大小。

解: 球心处的电势为 $V = \frac{Q}{4\pi\epsilon_0 R}$

球心处的电场为

$$\begin{aligned} E &= \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{dq}{4\pi\epsilon_0 R^2} \cos\theta \\ &= \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{\cos\theta}{4\pi\epsilon_0 R^2} \frac{Q}{2\pi R^2} 2\pi R \sin\theta R d\theta = \frac{Q}{8\pi\epsilon_0 R^2} \end{aligned}$$

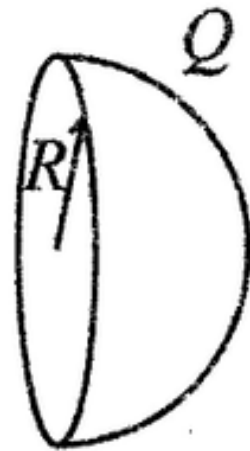


图 2

四. 如图 3 所示, 一球形电容器由半径为 R_1 的中心球形导体和内半径为 R_2 , 外半径为 R_3 的同心球壳导体组成, 将内球接地, 外壳充电到带电量为 Q , 无穷远处为电势零点。求: (1) 内球上的带电量, (2) 电容器的电容大小, (3) 电容器两导体间的电势差

解: 设内球带电量为 q , 则外球壳内表面带电量为 $-q$, 外表面带电量为 $Q+q$

$$\frac{-q}{4\pi\epsilon_0} \left(\frac{1}{R_1} - \frac{1}{R_2} \right) = \frac{Q+q}{4\pi\epsilon_0} \frac{1}{R_3}$$

$$\text{可得 } q = -\frac{Q}{R_3} \frac{1}{\frac{1}{R_1} - \frac{1}{R_2} + \frac{1}{R_3}}$$

(2) 电容器可以看成是孤立球体电容器和球形电容器并联

$$C = \frac{4\pi\epsilon_0 R_1 R_2}{R_2 - R_1} + 4\pi\epsilon_0 R_3$$

(2) 两极板的电势差为

$$\begin{aligned} U &= \frac{-q}{4\pi\epsilon_0} \left(\frac{1}{R_1} - \frac{1}{R_2} \right) \\ &= \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{Q}{R_3} \left(\frac{1}{\frac{1}{R_1} - \frac{1}{R_2} + \frac{1}{R_3}} \right) \left(\frac{1}{R_1} - \frac{1}{R_2} \right) \end{aligned}$$

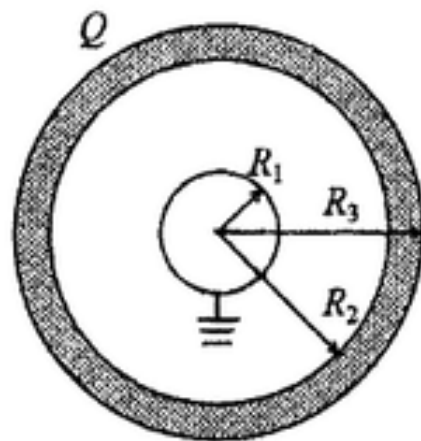


图 3