北京邮电大学2017——2018学年第二学期

《高等数学》期末试题

注意：所有题目答案都写在答题纸上，写在试卷上无效；

一． 填空题（每空3分，共30分）

1．数项级数$\sum_{n=1}^{\infty}\left(\frac{n}{3n-1}\right)^{2n-1}$是__收敛__（收敛或发散）.

2．设$f(x)$是以2π为周期的周期函数，且

$$f(x)=\begin{cases}0 & x\in(-\pi,0)\\ x+1 & x\in[0,\pi]\end{cases},$$

其对应的傅里叶级数的和函数在$x=\pi$处的值为$\underline{\frac{\pi+1}{2}}$.

3．极限$\lim\limits_{(x,y)\to(0,0)}\frac{3(x^2+y^2)}{\sqrt{4+x^2+y^2}-2}=\underline{\quad 12\quad}$.

4．设$f(x,y)=\begin{cases}\frac{1}{xy}\sin x^2y & xy\neq 0\\ 0 & xy=0\end{cases}$，则$f_x(0,1)=\underline{1}$.

5．设$f(x,y,z)=e^x yz^2$,其中$z=z(x,y)$是由$x+y+z+xyz=0$

确定的隐函数，则$f_x(0,1,-1)=\underline{1}$.

6．函数$f(x,y,z)=\ln(x^2+y^2+z^2)$在点$A(1,-1,0)$处的最大

方向导数是$\underline{\sqrt{2}}$.

7．设$z=f(x+y,xy)$，且$f(x,y)$具有连续的二阶偏导.

则$\frac{\partial^2 z}{\partial x^2}=\underline{f_{11}+2yf_{12}+y^2f_{22}}$.

8. $\int_0^{\frac{\pi}{2}} \mathrm{d}y \int_y^{\frac{\pi}{2}} \frac{\cos x}{x} \mathrm{d}x = \underline{1}$.

9．设 $\vec{A}(x,y,x) = xy^2\vec{i} + ye^z\vec{j} + z^2\vec{k}$，点 $p(1,1,0)$，

则 $div\overrightarrow{rot\vec{A}}|_p = \underline{\ \ 0\ \ \ \ }$.

10. 已知椭圆 $L:\frac{x^2}{4}+\frac{y^2}{3}=1$ 周长为 A，则 $\oint_L (2xy+3x^2+4y^2)\mathrm{d}s =$ $\underline{12A\ \ \ \ }$.

二．（10 分）

已知二元函数 $f(x,y)$ 满足 $f(x,y) = y + 2\int_0^x f(x-t,y)\mathrm{d}t$，

$g(x,y)$ 满足 $g_x(x,y)=1, g_y(x,y)=-1$，且 $g(0,0)=0$.

求 $\lim\limits_{n\to\infty}\left(\frac{f(\frac{1}{n},n)}{g(n,1)}\right)^n$.

解：(1) 由已知 $f(x,y) = y + 2\int_0^x f(x-t,y)\mathrm{d}t$，

令 $x-t=u$，则 $f(x,y) = y - 2\int_x^0 f(u,y)\mathrm{d}u$

对上式两端关于 x 求偏导得 $f_x(x,y) = 2f(x,y)$

则有 $f(x,y) = \varphi(y)e^{2x}$，

又 $f(x,y) = y - 2\int_x^0 f(u,y)\mathrm{d}u$

$$= y + 2\int_0^x \varphi(y)e^{2u}\mathrm{d}u = y + \varphi(y)e^{2x} - \varphi(y)$$

则有 $\varphi(y) = y$，即 $f(x,y) = ye^{2x}$.

（2） 由 $g_x(x,y)=1$ 得 $g(x,y)=x+\psi(y)$

则 $g_y(x,y)=\psi'(y)$，又 $g_y(x,y)=-1$，

则有 $g(x,y)=x-y+C$，又 $g(0,0)=0$，

得 $g(x,y)=x-y$

（3） $\lim\limits_{n\to\infty}\left(\dfrac{f(\frac{1}{n},n)}{g(n,1)}\right)^n=\lim\limits_{n\to\infty}\left(\dfrac{ne^{\frac{2}{n}}}{n-1}\right)^n=e^2\lim\limits_{n\to\infty}\left(\dfrac{n}{n-1}\right)^n=e^3$.

三．（10 分）

已知曲面 $z=xy$ 在点 p 处法线与平面 $x+3y+z=0$ 垂直.

求曲面上在 p 点切平面及法线方程。

解：曲面 $z=xy$ 上点 p 处的法向量为 $\vec{n}=\{-y,-x,1\}$

又与平面 $x+3y+z=0$ 的法向量 $\overrightarrow{n_1}=\{1,3,1\}$ 平行

故点 p 为 $(-3,-1,3)$

则切平面方程为 $(x+3)+3(y+1)+z-3=0$

法线为 $\dfrac{x+3}{1}=\dfrac{y+1}{3}=z-3$.

四．（10 分）

某公司可通过电台及报纸两种方式做销售某种商品的广告,根据统计资料销售收入 R（万元)与电台广告费用 x_1（万元）及报纸广告费用 x_2（万元）之间的关系有如下经验公

式：$R=15+14x_1+32x_2-8x_1x_2-2x_1{}^2-10x_2{}^2$，若提供的广告费用为 1.5 万元，求相应的最优广告策略.

解：利润函数为

$$L(x_1,x_2)=15+14x_1+32x_2-8x_1x_2-2x_1{}^2-10x_2{}^2-(x_1+x_2)$$

由题意知要求利润函数在$x_1+x_2=1.5$时的条件极值.

构造拉格朗日函数

$$F(x_1,x_2,\lambda)=15+14x_1+32x_2-8x_1x_2-2x_1{}^2-10x_2{}^2-(x_1+x_2)+\lambda(x_1+x_2-1.5)$$

则由

$$\begin{cases} F_{x_1}(x_1,x_2,\lambda)=-4x_1-8x_2+13+\lambda=0 \\ F_{x_2}(x_1,x_2,\lambda)=-8x_1-20x_2+31+\lambda=0 \\ F_{\lambda}(x_1,x_2,\lambda)=x_1+x_2-1.5=0 \end{cases}$$

解得$x_1=0,x_2=1.5$，即将广告费全部用于报纸广告，可使利润最大.

五.（10 分）求幂级数$\sum\limits_{n=1}^{\infty}\dfrac{n(n+1)x^{n-1}}{2}$收敛区间与和函数.

解：$\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{\dfrac{(n+1)(n+2)x^n}{2}}{\dfrac{n(n+1)x^{n-1}}{2}}=1$ 故收敛区间为$(-1,1)$；

和函数

$$s(x)=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{n(n+1)x^{n-1}}{2}=\frac{1}{2}\sum_{n=1}^{\infty}(x^{n+1})''=(\frac{1}{2}\sum_{n=1}^{\infty}x^{n+1})''=\frac{1}{2}\left(\frac{x^2}{1-x}\right)''$$

$$=\frac{1}{(1-x)^3}.$$

六.（每题 6 分，共 30 分）计算下列积分

1．$\iiint\limits_{\Omega} z\mathrm{d}V$，其中$\Omega$是由$z=\sqrt{x^2+y^2}$及球面

$z=\sqrt{1-x^2-y^2}$所围成的闭区域.

解：　用球面坐标系

$$\iiint\limits_{\Omega} z\mathrm{d}V=\int_0^{2\pi}\mathrm{d}\theta\int_0^{\frac{\pi}{4}}\mathrm{d}\varphi\int_0^1 r\cos\varphi r^2\sin\varphi\mathrm{d}r$$

$$=\frac{\pi}{8}.$$

2．设Σ是曲面$z=x^2+y^2,\quad z\le 1$的下侧，

求$I=\iint\limits_{\Sigma}(x-y)dydz+(y-z)dzdx+(z-x)dxdy$.

解：补充面$\Sigma^*\begin{cases} z=1\\ x^2+y^2\le 1\end{cases}$取上侧。

$$I=\iint\limits_{\Sigma}(x-y)dydz+(y-z)dzdx+(z-x)dxdy$$

$$=\iint\limits_{\Sigma+\Sigma^*}(x-y)dydz+(y-z)dzdx+(z-x)dxdy$$

$$-\iint\limits_{\Sigma^*}(x-y)dydz+(y-z)dzdx+(z-x)dxdy$$

其中

$$\iint\limits_{\Sigma+\Sigma^*}(x-y)dydz+(y-z)dzdx+(z-x)dxdy=$$

$$3\iiint\limits_{\Omega}dxdydz=3\int_0^{2\pi}d\theta\int_0^1 d\rho\int_{\rho^2}^1\rho dz=\frac{3\pi}{2}$$

$$\iint_{\Sigma^*}(x-y)dydz+(y-z)dzdx+(z-x)dxdy=$$

$$\iint_D(1-x)dxdy$$

$$=\int_0^{2\pi}d\theta\int_0^1(1-\rho\cos\theta)\rho d\rho=\pi$$

故 $I=\iint_{\Sigma}(x-y)dydz+(y-z)dzdx+(z-x)dxdy=\dfrac{\pi}{2}$.

3. 设 C 是上半圆周 $y=\sqrt{1-x^2}$ 从点 $(-1,0)$ 到点 $(1,0)$ 的有向曲线，

求 $\int_C(y^3\mathrm{e}^x-2y)\mathrm{d}x+(3y^2\mathrm{e}^x-2)\mathrm{d}y$.

解： $P=y^3\mathrm{e}^x-2y$, $\quad Q=3y^2\mathrm{e}^x-2$

于是 $\dfrac{\partial P}{\partial y}=3y^2\mathrm{e}^x-2$, $\quad \dfrac{\partial Q}{\partial x}=3y^2\mathrm{e}^x$,

补充从点 $(1,0)$ 到点 $(-1,0)$ 的直线段 L，则 L 和 C 围成区域

为 D，由格林公式

$$\int_C(y^3\mathrm{e}^x-2y)\mathrm{d}x+(3y^2\mathrm{e}^x-2)\mathrm{d}y$$

$$=\oint_{C+L}(y^3\mathrm{e}^x-2y)\mathrm{d}x+(3y^2\mathrm{e}^x-2)\mathrm{d}y-\int_L(y^3\mathrm{e}^x-2y)\mathrm{d}x+(3y^2\mathrm{e}^x-2)\mathrm{d}y$$

$$=-\iint_D 2\mathrm{d}x\mathrm{d}y-\int_L(y^3\mathrm{e}^x-2y)\mathrm{d}x+(3y^2\mathrm{e}^x-2)\mathrm{d}y$$

$$=-\pi.$$

4. 求 $\iint_{\Sigma}(x+y+z)\mathrm{d}S$，其中 $\Sigma: z=\sqrt{1-x^2-y^2}$.

解：由积分区域的对称性知

$$\iint_{\Sigma} x\mathrm{d}S = \iint_{\Sigma} y\mathrm{d}S = 0,$$

于是 $\iint_{\Sigma}(x+y+z)\mathrm{d}S = \iint_{\Sigma} z\mathrm{d}S$

$$= \iint_{x^2+y^2\le 1} \sqrt{1-x^2-y^2}\,\frac{1}{\sqrt{1-x^2-y^2}}\mathrm{d}x\mathrm{d}y$$

$$= \pi.$$

5. 曲线积分 $\int_L [1+x\varphi(y)]\mathrm{d}x + [x^2\varphi(y)-y]\mathrm{d}y$ 与路径无关，

其

中 $\varphi(0)=1$，$\varphi(y)\neq 0$，$\varphi'(y)$ 连续.

（1）求 $\varphi(y)$；

（2）计算沿 $(x-2)^2+y^2=4$ 从 $A(4,0)$ 到 $O(0,0)$ 的积分值.

解：(1) 由积分与路径的条件可得

$$P = 1+x\varphi(y), Q = x^2\varphi(y)-y$$

有 $\dfrac{\partial P}{\partial y} = \varphi'(y) = \dfrac{\partial Q}{\partial x} = 2x\varphi(y)$，则 $\varphi(y) = C\mathrm{e}^{y^2}$，

又 $\varphi(0)=1$，得 $\varphi(y) = \mathrm{e}^{y^2}$.

(2) 由积分与路径无关，选择从 $A(4,0)$ 到 $O(0,0)$ 的直线段，

于是 $L: y=0, x=x.$ x 从 4 到 0

$$\int_L [1+x\varphi(y)]\mathrm{d}x + [x^2\varphi(y)-y]\mathrm{d}y = \int_4^0 (1+x)\mathrm{d}x = -12.$$