# 北京邮电大学 2018-2019 学年第一学期

# 《高等数学 A》（上）期末考试试题（1）

## 答案及参考评分标准

**一. 填空题（本大题共 10 小题，每小题 3 分，共 30 分）**

1. 填： $e^{-3}$

2. 填: $\dfrac{1}{4}$

3. 填: $\dfrac{1}{10}$

4. 填: $y=-\dfrac{1}{e}x+1$

5. 填: $(2-\sqrt{2},2+\sqrt{2})$

6. 填: $\dfrac{\pi}{3}$

7. 填: $\arcsin e^{x}-\sqrt{1-e^{2x}}+C$

8. 填: $\dfrac{5}{2}\pi$

9. 填: $\dfrac{\pi}{2\sqrt{2}}$

10. 填: $\arctan(x+y+1)=x+c$

**二（10 分）**. 设 $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\ln(1-x)+a\sin x+bx^{2}}{x^{2}}=\dfrac{5}{2}$， 求常数 $a$ 与 $b$ 的值.

**解** 由假设有 $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\ln(1-x)+a\sin x}{x^{2}}=\dfrac{5}{2}-b$ (1)

从而 $\dfrac{\ln(1-x)+a\sin x}{x^{2}}=\dfrac{5}{2}-b+\alpha(x)$， 其中 $\lim\limits_{x\to 0}\alpha(x)=0$.

$$\Rightarrow \lim_{x\to 0}\frac{\ln(1-x)+a\sin x}{x}=\lim_{x\to 0}\left[\frac{5}{2}-b+\alpha(x)\right]x=0$$

由洛比达法则．得

$$\lim_{x\to 0}\frac{-\dfrac{1}{1-x}+a\cos x}{1}=0\Rightarrow a=1 \qquad (2)$$

由(1)，得

$$\frac{5}{2}-b=\lim_{x\to 0}\frac{\ln(1-x)+\sin x}{x^2}=\lim_{x\to 0}\frac{-\dfrac{1}{1-x}+\cos x}{2x}$$

$$=\lim_{x\to 0}\frac{-1+(1-x)\cos x}{2x(1-x)}=\lim_{x\to 0}\frac{-1+(1-x)\cos x}{2x}$$

$$=\lim_{x\to 0}\frac{-(1-x)+(1-x)\cos x-x}{2x}=-\frac{1}{2}$$

于是$b=3.$

所以 $a=1,b=3.$

**三（10 分）**．设 $y=y(x)$ 由参数方程 $\begin{cases} x=\cos t^2, \\ y=t\cos t^2-\displaystyle\int_1^{t^2}\frac{\cos u}{2\sqrt{u}}du, \end{cases}(t>0)$

确定． 求 $\dfrac{dy}{dx},\dfrac{d^2y}{dx^2}$ 及 $\left.\dfrac{d^2y}{dx^2}\right|_{t=\sqrt{\frac{\pi}{2}}}$．

**解** $\dfrac{dy}{dt}=\cos t^2-2t^2\sin t^2-\dfrac{\cos t^2}{2t}\,2t=-2t^2$ s

$$\frac{dx}{dt}=-2t\sin t^2$$

所以 $\dfrac{dy}{dx}=t$

$$\frac{d^2y}{dx^2}=\frac{d}{dx}\left(\frac{dy}{dx}\right)=\frac{d}{dt}\left(\frac{dy}{dx}\right)\cdot\frac{dt}{dx}=\frac{d}{dt}\left(\frac{dy}{dx}\right)\cdot 1\Big/\frac{dx}{dt}$$

$$= \frac{d}{dt}(t) \cdot 1/(-2t\sin t^2) = -\frac{1}{2t\sin t^2}$$

$$\left.\frac{d^2y}{dx^2}\right|_{t=\sqrt{\frac{\pi}{2}}} = -\left.\frac{1}{2t\sin t^2}\right|_{t=\sqrt{\frac{\pi}{2}}} = -\frac{1}{\sqrt{2\pi}}$$

**四（10 分）**确定常数 $A$ 的取值范围，使得函数 $f(x) = x^2 + \frac{A}{x^4} \geq 6$ 对任何 $x \neq 0$ 均成立.

**解** 对任何 $x \neq 0$，

$$f(x) = x^2 + \frac{A}{x^4} \geq 6 \Leftrightarrow \frac{x^6 + A - 6x^4}{x^4} \geq 0 \Leftrightarrow A \geq 6x^4 - x^6$$

令 $g(x) = 6x^4 - x^6$. 下面只要求出 $g(x)$ 在 $(0,+\infty)$ 的最大值即可.

$$g'(x) = 24x^3 - 6x^5 = 6x^3(4 - x^2)\begin{cases} > 0, 0 < x < 2, \\ = 0, \quad x = 2 \\ < 0, 2 < x < +\infty \end{cases}$$

所以 $g(x)$ 在 $(0,+\infty)$ 的最大值为 $g(2) = 32$.

故当 $A \in [32,+\infty)$ 时，$f(x) = x^2 + \frac{A}{x^4} \geq 6$ 对任何 $x \neq 0$ 均成立.

**五(10 分)**. 设常数 $a > 0$，证明当 $x > 0$ 时，下面的不等式成立:

$$e^{-x}(x^2 - ax + 1) < 1$$

**证明** 注意不等式等价于

$$x^2 - ax + 1 < e^x \Leftrightarrow e^x - x^2 + ax - 1 > 0$$

令 $f(x) = e^x - x^2 + ax - 1$. 则当 $x \geq 0$ 时，$f(x)$ 任意阶可导.

$$f'(x) = e^x - 2x + a, \quad f''(x) = e^x - 2$$

由于 $f''(x) = e^x - 2\begin{cases} < 0, 0 \leq x < \ln 2 \\ = 0, \quad x = \ln 2 \\ > 0, \ln 2 < x < +\infty \end{cases}$，所以 $f'(x)$ 在 $x = \ln 2$ 取得最小值，最小值为

$$f'(\ln 2)=e^{\ln 2}-2\ln 2+a=2(1-\ln 2)+a>a>0$$

故函数 $f(x)$ 在 $[0,+\infty)$ 上严格单调增加，于是有

$$f(x)>f(0)=0,\ \forall x>0$$

从而要证明的不等式成立.

**六(12 分)**.(1) 设 $f(x)$ 为非负连续函数， 且满足

$f(x)\int_0^x f(x-t)dt=\ln(1+x)$，求 $f(x)$ 在 $[0,2]$ 上的平均值.

(2) 计算 $\int_0^{n\pi} x|\sin x|dx$，其中 $n$ 为正整数.

**解** (1) $f(x)\int_0^x f(x-t)dt \xlongequal{u=x-t} f(x)\int_0^x f(u)du=f(x)\int_0^x f(t)dt$

于是 $$f(x)\int_0^x f(t)dt=\ln(1+x)$$

从而 $$\int_0^2\left[f(x)\int_0^x f(t)dt\right]dx=\int_0^2\ln(1+x)dx$$

得 $$\frac{1}{2}\left(\int_0^2 f(t)dt\right)^2=3\ln 3-2$$

所求平均值为 $\frac{1}{2}\int_0^2 f(x)dx=\frac{\sqrt{6\ln 3-4}}{2}$

(2) $\int_0^{n\pi} x|\sin x|dx=\left(\int_0^{\pi}+\cdots+\int_{(k-1)\pi}^{k\pi}+\cdots+\int_{(n-1)\pi}^{n\pi}\right)x|\sin x|dx$

$$\int_{(k-1)\pi}^{k\pi} x|\sin x|dx \xlongequal{x=u+(k-1)\pi} \int_0^{\pi}[u+(k-1)\pi]|\sin u|du$$

$$=\int_0^{\pi} u\sin u du+(k-1)\pi\int_0^{\pi}\sin u du$$

$$=\int_0^{\pi} u\sin u du+2(k-1)\pi$$

$$=-u\cos u\Big|_0^{\pi}+\int_0^{\pi}\cos u du+2(k-1)\pi=(2k-1)\pi$$

所以 $\int_0^{n\pi} x|\sin x|dx=\sum_{k=1}^{n}(2k-1)\pi=n^2\pi$

**七(12 分)**. 求微分方程 $y''+8y'+16y=e^{-4x}+16x^2+8x$ 的通解.

**解** 齐次方程的特征方程为 $\lambda^2+8\lambda+16=0$ ,即

$(\lambda+4)^2=0$，特征根为 $\lambda_1=\lambda_2=-4$.

所以齐次方程 $y''+8y'+16y=0$ 的通解为

$$\bar{y}=(c_1+c_2x)e^{-4x}$$

(1) 对非齐次方程 $y''+8y'+16y=e^{-4x}$，因为 $\alpha=-4$ 是 2 重特征值，所以可设其特解为 $y_1^*=Ax^2e^{-4x}$，代入上述方程解得 $A=\frac{1}{2}$. 从而

$$y_1^*=\frac{1}{2}x^2e^{-4x}$$

(2) $y''+8y'+16y=16x^2+8x$，因为 $\alpha=0$ 不是特征根，可设其特解为 $y_2^*=ax^2+bx+c$，代入上述方程，解得 $a=1, b=-\frac{1}{2}, c=\frac{1}{8}$. 于是

$$y_2^*=x^2-\frac{1}{2}x+\frac{1}{8}$$

故原方程的通解为

$$y=(c_1+c_2x)e^{-4x}+\frac{1}{2}x^2e^{-4x}+x^2-\frac{1}{2}x+\frac{1}{8}$$

**八(8 分)**. 设 $0<x_1<x_2$，证明，$\exists\xi\in(x_1,x_2)$，使得

$$x_1e^{x_2}-x_2e^{x_1}=(1-\xi)e^{\xi}(x_1-x_2)$$

**证** 所欲证等式等价于

$$\frac{e^{x_2}}{x_2}-\frac{e^{x_1}}{x_1}=(1-\xi)e^{\xi}\left(\frac{1}{x_2}-\frac{1}{x_1}\right)$$

也等价于 $$\left(\frac{e^{x_2}}{x_2}-\frac{e^{x_1}}{x_1}\right)\Big/\left(\frac{1}{x_2}-\frac{1}{x_1}\right)=(1-\xi)e^{\xi}. \tag{1}$$

令 $f(x)=e^x/x$， $g(x)=1/x$ . 则 $f(x),g(x)$ 在 $[x_1,x_2]$ 上连续，在 $(x_1,x_2)$ 内可导，且 $g'(x)=-1/x^2\neq 0,\forall x\in(x_1,x_2)$ .

由柯西中值定理知，存在 $\xi\in(x_1,x_2)$，使得

$$\frac{f(x_2)-f(x_1)}{g(x_2)-g(x_1)}=\frac{f'(\xi)}{g'(\xi)}$$

$$=\left(\frac{\xi e^{\xi}-e^{\xi}}{\xi^2}\right)\Big/\left(-\frac{1}{\xi^2}\right)=(1-\xi)e^{\xi}$$