北京邮电大学 2021—2022 学年第二学期

《概率论与数理统计》期末考试试题（4 学分）

考试注意事项：（1）不得使用计算器，答题前先浏览一下试卷末尾的“附注”；（2）所有答题内容都需写在答题纸上，包括填空题的答案（写清楚题号），按线上考试要求拍照、以 PDF 格式上传。

一、填空题（本题共 40 分，每小题 4 分）

1．设两两相互独立的三事件 A, B, C 满足：$ABC=\phi,\ P(A)=P(B)=P(C)<\dfrac{1}{2},$

$P(A\cup B\cup C)=\dfrac{9}{16}$，则 $P(A)=$____.

2.轰炸机轰炸某目标，它能飞到距目标 400,200,100（米）的概率分别为 0.5 ,0.3 ,0.2 ，又设它在距目标 400,200,100（米）命中率分别为 0.01 ,0.02 ,0.1 ，当目标被命中时，求飞机是在 400（米）处轰炸的概率为____.

3．设随机变量 X 服从参数 λ 的泊松分布，已知 $E(X^2+2X-4)=0$，则

$P(X\neq 0)=$____.

4. 设随机变量 X 的分布函数为 $F(x)=0.3\Phi(x)+0.7\Phi(\dfrac{x-1}{2})$，$\Phi(x)$ 为标准正态分布函数，则 $E(X)=$____.

5. 设随机变量 X 和 Y 相互独立，且均服从分布 $U(0,1)$, 则 $D(|X-Y|)=$____.

6.设随机变量 $X_1, X_2\cdots, X_n$ 相互独立同分布，且 X_i 的分布律为

X	0	1
P	$1-m$	m

，$\Phi(x)$ 为标准正态分布函数，则 $\lim\limits_{n\to\infty} P\{\dfrac{\sum\limits_{i=1}^{n} X_i - nm}{\sqrt{nm(1-m)}}\geq 2\}=$____.

7.设 $F_1(x), F_2(x)$ 为两个分布函数，其相应的概率密度函数 $f_1(x), f_2(x)$ 是连续函数，则必为概率密度函数的是____.

A. $f_1(x)f_2(x)$，B. $2f_2(x)F_1(x)$，C. $f_1(x)F_2(x)$， D. $f_1(x)F_2(x)+f_2(x)F_1(x)$

8.设随机变量 X 的概率密度函数为 $f(x)=\begin{cases} ax+b, & 0<x<1 \\ 0, & \text{其它} \end{cases}$，且

$P(X<\frac{1}{3})=P(X>\frac{1}{3})$，则 a 和 b 等于____.

9．设 $X_1,X_2\cdots,X_{15}$ 是来自 $N(0,2^2)$ 的样本，则 $Y=\frac{X_1^{\ 2}+\cdots+X_{10}^{\ 2}}{2(X_{11}^{\ 2}+\cdots+X_{15}^{\ 2})}$ 服从_____分布.(给出分布类型及参数)

10．假定某材料硬度 $X\sim N(\mu,\sigma^2)$,测量 n 次，样本均值 $\overline{X}$，样本标准差 S，则 μ 的置信度为 $1-m$ 的双侧置信区间为____.

二、(**10 分**) 设随机变量 X 与 Y 相互独立，X 的概率分布为 $P\{X=i\}=\frac{1}{3}, i=-1,0,1$, Y 的概率密度函数为 $f_Y(y)=\begin{cases}1, & 0\le y<1\\ 0, & \text{其它}\end{cases}$，记 $Z=X+Y$,

（1）求 $P\{Z\le\frac{1}{2}\,|\,X=0\}$,（2）求 Z 的概率密度函数 $f_Z(z)$.

三、(**10 分**) 设随机变量 X 的分布律为

X	0	1
P	$\frac{1}{3}$	$\frac{2}{3}$

，

设随机变量 Y 的分布律为

Y	-1	0	1
P	$\frac{1}{3}$	$\frac{1}{3}$	$\frac{1}{3}$

且 $P\{X^2=Y^2\}=1$, 求（1）二维随机变量 (X,Y) 的联合分布律，（2）求 $Z=XY$ 的分布律，（3） X 和 Y 的相关系数 ρ_{XY}，判断 X 和 Y 是否不相关，是否独立.

四、(10 分) 设随机变量 $X\sim N(1,3^2)$，$Y\sim N(0,4^2)$，设 $Z=\frac{X}{3}+\frac{Y}{2}$，且 $\rho_{XY}=-\frac{1}{2}$，

（1）求 Z 的数学期望与方差；

（2）求 X 与 Z 的相关系数 ρ_{XZ}；

（3）判断 X 与 Z 是否相互独立？为什么？

五、（12分）设总体 X 服从 $[0,\theta]$ 的均匀分布，$X_1, X_2, \cdots, X_n$ 是来自总体 X 的简单随机样本.

（1）求 θ 的极大似然估计量 $\hat{\theta}_1$；（2）求 θ 的矩估计量 $\hat{\theta}_2$；

（3）讨论 $\hat{\theta}_1$ 和 $\hat{\theta}_2$ 是否具有无偏性，如果不是无偏估计，如何调整成无偏估计.

六、（10分）

某钢铁工厂为了提高钢得率, 提出了甲和乙两种方案. 为了研究哪一种方案好, 各进行了 10 次试验, 经过计算，方案甲和方案乙的样本均值和样本方差分别为 $\bar{X}_1 = 65.96, \bar{X}_2 = 69.43$，$S_1^2=3.35, S_2^2=2.22$，设甲乙两个方案得率相互独立, 且分别来自正态总体 $N(\mu_1, \sigma_1^2)$ 和 $N(\mu_2, \sigma_2^2)$, $\mu_1, \mu_2, \sigma_1^2, \sigma_2^2$ 都未知，问方案乙是否比方案甲显著提高得率($\alpha = 0.01$)?

（即检验 (1) H_0: $\sigma_1^2 = \sigma_2^2, H_1$: $\sigma_1^2 \neq \sigma_2^2$.（2） H_0: $\mu_1 \geq \mu_2$ ， H_1: $\mu_1 < \mu_2$ ）

七、（8分）

在服装标准制定中，调查了很多人的服装各部位数据，用 x 表示身高，y 表示裤长，测量了 30 名女青年的数据，并算得：$\sum_{i=1}^{30} x_i = 4797$，$\sum_{i=1}^{30} y_i = 3068$，$\sum_{i=1}^{30} x_i^2 = 767949$，$\sum_{i=1}^{30} y_i^2 = 314112$，$\sum_{i=1}^{30} x_i y_i = 491124$.

（1）求裤长 y 对身高 x 的回归方程 $\hat{y} = \hat{a} + \hat{b}x$（$\hat{a}, \hat{b}$ 的计算结果保留 2 位小数)；

（2）检验回归方程的显著性，即检验假设 $H_0: b = 0, H_1: b \neq 0$.（水平取 $\alpha = 0.01$）

附注： $F_{0.025}(9,9)=4.026$，$\boldsymbol{t_{0.01}(18) = 2.552}$，$\sqrt{2.7881} \approx \mathbf{1.67}$，$\sqrt{5} \approx 2.24$

$F_{0.005}(9,9)=6.54$，$F_{0.01}(1,28) = 7.64$