

# 北京邮电大学 2019-2020 学年

## 线性代数期末试题 (A)

### 一. 填空题 (每小题 3 分, 共 30 分)

1. 已知多项式  $p(x) = \begin{vmatrix} x & x^2 & 1 & 0 \\ x^3 & x & 2 & 1 \\ -x^4 & 0 & x & 2 \\ 4 & 3 & 4 & x \end{vmatrix}$ , 则  $p(x)$  中  $x^7$  的系数为 \_\_\_\_\_.

答案: -3

2. 行列式  $\begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 8 & 4 & 2 & 1 \\ 27 & 9 & 3 & 1 \\ a^3 & a^2 & a & 1 \end{vmatrix} =$  \_\_\_\_\_.

答案:  $2(a-1)(a-2)(a-3)$

3. 已知  $A = \frac{1}{2} \begin{pmatrix} 1 & -\sqrt{3} \\ \sqrt{3} & 1 \end{pmatrix}$  满足  $A^6 = E$ , 则  $A^{11} =$  \_\_\_\_\_.

答案:  $\frac{1}{2} \begin{pmatrix} 1 & \sqrt{3} \\ -\sqrt{3} & 1 \end{pmatrix}$

4. 已知  $A$  为 3 阶可逆矩阵, 将  $A$  的第 3 列减去第 2 列对应元素后得到矩阵  $B$ , 则  $B^{-1}A =$  \_\_\_\_\_.

答案:  $\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$

5. 已知 3 阶矩阵  $A = (a_{ij})$  满足  $A^* = A^T$  ( $A^*$ ,  $A^T$  分别表示  $A$  的伴随矩阵与转置矩阵), 若  $a_{11} = a_{12} = a_{13} = a > 0$ , 则  $a =$  \_\_\_\_\_.

答案:  $\frac{\sqrt{3}}{3}$

6. 已知过原点的直线  $L$  与直线  $L_1: x-1=y+2=-z-4$  相交, 且与平面

$\Pi: x-y+2z=3$  平行, 则  $L$  的标准方程为\_\_\_\_\_.

答案:  $x=\frac{y}{3}=z$

7. 设  $\alpha_1=(1,-1,0)$ ,  $\alpha_2=(4,2,a+2)$ ,  $\alpha_3=(2,4,3)$ ,  $\alpha_4=(1,a,1)$ , 若  $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3, \alpha_4$

中任意两个向量都与另外两个向量等价, 则

$a$  =\_\_\_\_\_.

答案:  $a=1$

8. 已知  $n$  阶矩阵  $A=(a_{ij})$ ,  $|A|=0$ ,  $|A|$  的元素  $a_{ij}$  的余子式为  $M_{ij}(i, j=1, 2, \dots, n)$ .

若  $M_{11} \neq 0$ , 则方程组  $Ax=0$  的通解为\_\_\_\_\_.

答案:  $x=k(M_{11}, -M_{12}, \dots, (-1)^{n+1}M_{1n})^T$ ,  $k$  为任意常数

9. 已知 3 阶实对称矩阵  $A$  与  $\text{diag}(1, -2, 5)$  相似,  $x$  为任意 3 维单位列向量, 则

$x^T Ax$  的最大值为\_\_\_\_\_.

答案: 5

10. 设  $f(x, y, z)=2x^2+y^2+kz^2+2xy-4yz$ , 已知方程  $f(x, y, z)=1$  的图形是椭

球面, 则  $k$  的取值范围是\_\_\_\_\_.

答案:  $k>8$

二. (10 分) 设  $\alpha_1=(2, 2, -1)^T$ ,  $\alpha_2=(-1, -2, 1)^T$ ,  $\alpha_3=(-1, -1, 1)^T$ , 若矩阵  $A$  满

足  $A\alpha_1=\alpha_2$ ,  $A\alpha_2=\alpha_3$ ,  $A\alpha_3=\alpha_1$ , 求  $A$ .

解: 已知  $A(\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3)=(A\alpha_1, A\alpha_2, A\alpha_3)=(\alpha_2, \alpha_3, \alpha_1)$

$$\text{即 } A \begin{pmatrix} 2 & -1 & -1 \\ 2 & -2 & -1 \\ -1 & 1 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1 & -1 & 2 \\ -2 & -1 & 2 \\ 1 & 1 & -1 \end{pmatrix},$$

$$A = \begin{pmatrix} -1 & -1 & 2 \\ -2 & -1 & 2 \\ 1 & 1 & -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 2 & -1 & -1 \\ 2 & -2 & -1 \\ -1 & 1 & 1 \end{pmatrix}^{-1}$$

$$\begin{pmatrix} 2 & -1 & -1 \\ 2 & -2 & -1 \\ -1 & 1 & 1 \end{pmatrix}^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 1 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & 2 \end{pmatrix}$$

$$A = \begin{pmatrix} -1 & -1 & 2 \\ -2 & -1 & 2 \\ 1 & 1 & -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 1 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -2 & 3 & 3 \\ -3 & 3 & 2 \\ 2 & -2 & -1 \end{pmatrix}.$$

三. (10 分) 设  $\alpha_1 = (1, 1, 1, 2)^T$ ,  $\alpha_2 = (2, 1, 1, 6)^T$ ,  $\alpha_3 = (1, 2, a-3, -2)^T$ ,

$\alpha_4 = (1, 2, 5, a)^T$ , 讨论  $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3, \alpha_4$  的线性相关性.

$$\text{解: } \begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 & 2 \\ 2 & 1 & 1 & 6 \\ 1 & 2 & a-3 & -2 \\ 1 & 2 & 5 & a \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 & 2 \\ 0 & -1 & -1 & 2 \\ 0 & 1 & a-4 & -4 \\ 0 & 1 & 4 & a-2 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} -1 & -1 & 2 \\ 1 & a-4 & -4 \\ 1 & 4 & a-2 \end{vmatrix}$$

$$= \begin{vmatrix} -1 & -1 & 2 \\ 0 & a-5 & -2 \\ 0 & 3 & a \end{vmatrix} = -(a-2)(a-3),$$

当  $a \neq 2$  且  $a \neq 3$  时,  $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3, \alpha_4$  线性无关; 当  $a = 2$  或  $a = 3$  时,  $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3, \alpha_4$  线性相关.

四. (10 分) 设  $\alpha_1 = (1, 2, 1, -4)^T$ ,  $\alpha_2 = (2, -2, 3, -5)^T$ ,  $\alpha_3 = (3, 0, 4, -9)^T$ ,

$\alpha_4 = (1, -2, 2, 1)^T$ , 求向量组  $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3, \alpha_4$  的一个极大无关组, 并将其余向量用该

极大无关组线性表示.

解: 对 $(\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3, \alpha_4)$ 作初等行变换, 化为行最简形, 得

$$(\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3, \alpha_4) = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 1 \\ 2 & -2 & 0 & -2 \\ 1 & 3 & 4 & 2 \\ -4 & -5 & -9 & 1 \end{pmatrix} \rightarrow \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix},$$

$\alpha_1, \alpha_2, \alpha_4$ 为极大无关组 (8分),  $\alpha_3 = \alpha_1 + \alpha_2$ .

五. (12分) 已知方程组 
$$\begin{cases} x_1 + x_2 + x_3 + x_4 = 0 \\ x_2 + 2x_3 + 2x_4 = 1 \\ x_2 + (3-a)x_3 + 2x_4 = b \\ 3x_1 + 2x_2 + x_3 + ax_4 = -1 \end{cases}$$
 有无穷多解.

(1) 求 $a, b$ ; (2) 求该方程组的通解.

解: (1) 对方程组的增广矩阵作初等行变换, 得

$$\left( \begin{array}{cccc|c} 1 & 1 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 2 & 2 & 1 \\ 0 & 1 & 3-a & 2 & b \\ 3 & 2 & 1 & a & -1 \end{array} \right) \rightarrow \left( \begin{array}{cccc|c} 1 & 1 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 2 & 2 & 1 \\ 0 & 0 & 1-a & 0 & b-1 \\ 0 & 0 & 0 & a-1 & 0 \end{array} \right),$$

故 $a = b = 1$ .

(2) 继续对上述行阶梯形矩阵作初等行变换, 化为行最简形, 得

$$\left( \begin{array}{cccc|c} 1 & 1 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 2 & 2 & 1 \end{array} \right) \rightarrow \left( \begin{array}{cccc|c} 1 & 0 & -1 & -1 & -1 \\ 0 & 1 & 2 & 2 & 1 \end{array} \right),$$

原方程组同解于 
$$\begin{cases} x_1 - x_3 - x_4 = -1 \\ x_2 + 2x_3 + 2x_4 = 1 \end{cases}$$
, 取特解 $\eta = (-1, 1, 0, 0)^T$ ,

对应齐次方程组 
$$\begin{cases} x_1 - x_3 - x_4 = 0 \\ x_2 + 2x_3 + 2x_4 = 0 \end{cases}$$
 的通解为

$x = x_3(1, -2, 1, 0)^T + x_4(1, -2, 0, 1)^T$ ,  $x_3, x_4$  为任意实数.

所求方程组的通解为

$$x = k_1(1, -2, 1, 0)^T + k_2(1, -2, 0, 1)^T + (-1, 1, 0, 0)^T,$$

$k_1, k_2$  为任意实数.

**六. (10 分)** 设  $\alpha_1 = (1, 2, 2, -1)$ ,  $\alpha_2 = (1, 1, -1, 1)$ , 求  $\alpha_3, \alpha_4$ , 使  $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3, \alpha_4$  为正交向量组.

解: 依题意,  $\alpha_3, \alpha_4$  是方程组  $\begin{cases} x_1 + 2x_2 + 2x_3 - x_4 = 0 \\ x_1 + x_2 - x_3 + x_4 = 0 \end{cases}$  的正交的解向量.

该方程组的一组基础解系为  $\xi_1 = (4, -3, 1, 0)$ ,  $\xi_2 = (-3, 2, 0, 1)$ .

$$\text{取 } \alpha_3 = \xi_1 = (4, -3, 1, 0),$$

$$\alpha_4 = \xi_2 - \frac{(\xi_2, \xi_1)}{(\xi_1, \xi_1)} \xi_1$$

$$= (-3, 2, 0, 1) - \frac{-18}{26} (4, -3, 1, 0) = \frac{1}{13} (-3, -1, 9, 13).$$

**七. (12 分)** 用正交变换将二次型  $f = 3x_1^2 + 4x_2^2 + 2x_3^2 - 4x_1x_2 - 4x_1x_3$  化为标准形.

解:  $f$  的矩阵为  $A = \begin{pmatrix} 3 & -2 & -2 \\ -2 & 4 & 0 \\ -2 & 0 & 2 \end{pmatrix},$

$$|A - \lambda E| = \begin{vmatrix} 3-\lambda & -2 & -2 \\ -2 & 4-\lambda & 0 \\ -2 & 0 & 2-\lambda \end{vmatrix} = -\lambda(\lambda-3)(\lambda-6)$$

$A$  的特征值为  $\lambda_1 = 0, \lambda_2 = 3, \lambda_3 = 6$ .

求解  $Ax = 0$ , 得  $A$  的对应  $\lambda_1 = 0$  的单位特征向量为  $p_1 = \frac{1}{3}(2, 1, 2)^T$ ;

求解  $(A-3E)x=0$ ，得  $A$  的对应  $\lambda_2=3$  的单位特征向量为  $p_2=\frac{1}{3}(1,2,-2)^T$ ；

求解  $(A-6E)x=0$ ，得  $A$  的对应  $\lambda_3=6$  的单位特征向量为  $p_3=\frac{1}{3}(-2,2,1)^T$ 。

令  $P=\frac{1}{3}\begin{pmatrix} 2 & 1 & -2 \\ 1 & 2 & 2 \\ 2 & -2 & 1 \end{pmatrix}$ ，则在正交变换  $x=Py$  下， $f$  化为标准形

$$f=3y_2^2+6y_3^2.$$

八. (6分) 已知向量组  $\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_m$  线性无关， $\beta_i = \sum_{j=1}^m b_{ji} \alpha_j$ ，

$i=1, 2, \dots, n$ . 求证：如果  $\beta_1, \beta_2, \dots, \beta_n$  线性相关，则  $r(B) < n$ ，其中  $B = (b_{ij})_{m \times n}$ 。

证明：由已知可得  $(\beta_1, \beta_2, \dots, \beta_n) = (\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_m)B$ 。

如果  $\beta_1, \beta_2, \dots, \beta_n$  线性相关，则存在不全为零的数  $a_1, a_2, \dots, a_n$ ，使得

$$a_1\beta_1 + a_2\beta_2 + \dots + a_n\beta_n = 0. \text{ 令 } \tilde{x} = (a_1, a_2, \dots, a_n)^T,$$

$$\text{即 } (\beta_1, \beta_2, \dots, \beta_n)\tilde{x} = (\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_m)B\tilde{x} = 0.$$

因为  $\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_m$  线性无关，所以  $B\tilde{x} = 0$ ，这说明  $n$  元齐次线性方程组

$Bx = 0$  有非零解  $\tilde{x}$ ，所以  $r(B) < n$ 。