第四章

1、期望、方差、协方差、相关系数

定义、性质、计算。

随机变量函数的期望。

2、常用分布的期望方差

① $b(n,p)$（或 $B(n,p)$），特例 $b(1,p)$

② $\pi(\lambda)$（泊松分布）

③ 均匀分布 $U(a,b)$

④ 指数分布 E

⑤ 正态分布 $N(\mu,\sigma^2)$

⑥ 二维均匀分布

⑦ 二维正态分布 $N(\mu_1,\mu_2,\sigma_1^2,\sigma_2^2,\rho)$

1° 密度函数

2° 数字特征

3° 边缘分布

4° 一般性质：线性函数或线性变换仍正态；X与Y独立 $\Leftrightarrow$ X与Y不相关（$\rho=0$）

由 扫描全能王 扫描创建

$$P\left(\left|\sum_{i=1}^{1500} X_i\right| > 15\right) = 1 - P\left(\left|\sum X_i\right| \le 15\right)$$

$$= 1 - \left(\Phi\left(\frac{15}{10\sqrt{5}/2}\right) - \Phi\left(\frac{-15}{10\sqrt{5}/2}\right)\right)$$

(2) $$P\left\{\left|\sum_{i=1}^{n} X_i\right| < 10\right\} \ge 0.90$$

$$\sum_{i=1}^{n} X_i \sim N\left(0, \frac{n}{12}\right)$$

$$P\left\{\left|\sum_{i=1}^{n} X_i\right| < 10\right\} = 2\Phi\left(\frac{10}{\sqrt{n/12}}\right) - 1$$

$$= 2\Phi\left(\frac{10\sqrt{12}}{\sqrt{n}}\right) - 1 \ge 0.90$$

$$\Phi\left(\frac{10\sqrt{12}}{\sqrt{n}}\right) \ge 0.95 \quad (\Phi(1.645) = 0.95)$$

$$\frac{10\sqrt{12}}{\sqrt{n}} \ge 1.645$$

$$n \le \left(\frac{10\sqrt{12}}{1.645}\right)^2 \quad ?$$

101.3

第五章

1、大数定律

2、中心极限定理$\triangle$

设 $X_1, X_2, \cdots, X_n, \cdots$ 独立同分布且 $X_i \sim U(0,1)$

则 $\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} X_i^2$ 依概率收敛于 $\underline{1/3}$

$$E(X_1^2) = \int_0^1 x^2 dx = \frac{1}{3}$$

利用正态分布近似计算概率

P_{126} 3.

例 (1) 求 $P\{|\sum_{i=1}^{1500} X_i| > 15\}$?

$$\sum_{i=1}^{1500} X_i \sim N(\quad , \quad)$$

$E(\sum_{i=1}^{1500} X_i)$ $\quad$ $D(\sum_{i=1}^{1500} X_i)$ $\quad$ $D(X_i) = \frac{1}{12}$

$$\sum_{i=1}^{1500} X_i \sim N(0, \underbrace{\tfrac{1}{12} \times 1500}) \quad \frac{500}{4}$$

(2) $X_1+X_2 \sim N(0,2)$, $\dfrac{X_1+X_2}{\sqrt{2}} \sim N(0,1)$

$X_3^2+X_4^2+X_5^2 \sim \chi^2(3)$

$$\frac{(X_1+X_2)/\sqrt{2}}{\sqrt{\dfrac{X_3^2+X_4^2+X_5^2}{3}}} \sim t(3)$$

即 $\underbrace{\sqrt{\dfrac{3}{2}}}_{C} \cdot \dfrac{X_1+X_2}{(X_3^2+X_4^2+X_5^2)^{1/2}} \sim t(3)$

6. (2) $T=\sum_{i=1}^{n} X_i \sim B(n,p)$

(3) $E(\bar{X})=E(X)=p$

$D(\bar{X})=D(X)/n=\dfrac{p(1-p)}{n}$

$E(S^2)=D(X)=p(1-p)$

7

8

$z_1 = Min(X_1, \dots, X_n)$, $z_2 = Max(x_1, \dots, x_n)$

z_1的分布函数

$F_{z_1}(z) = p\{Min(x_1, \dots, x_n) \le z\}$

$= 1 - p\{Min(x_1, \dots, x_n) > z\}$

$= 1 - p\{x_1 > z, \dots, x_n > z\}$

$= 1 - p\{x_1 > z\} \cdots p\{x_n > z\}$

$= 1 - (p\{X > z\})^n = 1 - (1 - F(z))^n$

再求z_1的密度 $\Rightarrow E(z_1)$, $D(z_1)$.

z_2的分布函数

$F_{z_2}(z) = p\{Max(x_1, \dots, x_n) \le z\}$

$= p\{x_1 \le z, \dots, x_n \le z\}$

$= \dots$

8、设 X 表示100个部件中正常工作的部件数，则 $X \sim B(100, 0.9)$

则需求

$$P\{X \geq 85\}$$

由中心极限定理知，$X \sim N(\underset{E(X)}{\underline{90}}, \underset{D(X)}{9})$

$$P\{X \geq 85\}$$

$$= 1 - P\{X < 85\}$$

$$\approx \begin{cases} 1 - \Phi\left(\dfrac{85-90}{3}\right) \\ 1 - \Phi\left(\dfrac{84-90}{3}\right) \quad ✓ \\ 1 - \Phi\left(\dfrac{84.5-90}{3}\right) \end{cases}$$

P_{147} 1. $\bar{X} \sim N(52, \frac{6.3^2}{36})$

$P(50.8 < \bar{X} < 53.8)$

$= \Phi(\frac{53.8-52}{6.3/6}) - \Phi(\frac{50.8-52}{6.3/6})$

$\Phi(-x) = 1 - \Phi(x)$

$\Phi(1) = 0.8413$. $\Phi(1.28) = 0.9$

4. (1) $X_1 + X_2 + X_3 \sim N(0, 3)$

$\frac{X_1+X_2+X_3}{\sqrt{3}} \sim N(0,1)$

同理 $\frac{X_4+X_5+X_6}{\sqrt{3}} \sim N(0,1)$

$(\frac{X_1+X_2+X_3}{\sqrt{3}})^2 + (\frac{X_4+X_5+X_6}{\sqrt{3}})^2 \sim \chi^2(2)$

$C = \frac{1}{3}$.

3. 正态总体的抽样分布

$x_1, \cdots x_n$ 来自总体 $N(\mu, \sigma^2)$ 的样本，则

(1) $\bar{x} \sim N(\mu, \frac{\sigma^2}{n})$

(2) $\frac{(n-1)S^2}{\sigma^2} \sim \chi^2(n-1)$

(3) $\bar{x}$ 与 S^2 独立

(4) $\frac{\bar{x}-\mu}{S/\sqrt{n}} \sim t(n-1)$

$x_1, \cdots, x_{n_1}$ 来自总体 $N(\mu_1, \sigma_1^2)$，$y_1, \cdots, y_{n_2}$ 来自总体 $N(\mu_2, \sigma_2^2)$，且独立，则

① $\frac{S_1^2}{S_2^2} \Big/ \frac{\sigma_1^2}{\sigma_2^2} \sim F(n_1-1, n_2-1)$

(2) 若 $\sigma_1 = \sigma_2$，则

$$\frac{\bar{x}-\bar{y}-(\mu_1-\mu_2)}{S_w\sqrt{\frac{1}{n_1}+\frac{1}{n_2}}} \sim t(n_1+n_2-2)$$

内

16、(2)

μ: $(\bar{x} \pm \frac{S}{\sqrt{n}} t_{\frac{\alpha}{2}}(n-1))$

第六章

1、样本的概念(两个特性)、统计量的概念、求统计量的期望、方差

知道 $E(\bar{X})$、$D(\bar{X})$、$E(S^2)$

$$E(\bar{X}) = E\left(\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} X_i\right) = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} \underbrace{E(X_i)}$$

$$= E(X) = \mu$$

2、三大分布、分位数

① χ^2分布

② t分布

③ F分布

三大分布的定义

$$\hat{\theta}=\left(\frac{\bar{X}}{1-\bar{X}}\right)^2$$

另一种做法

令 $\frac{\sqrt{\theta}}{1+\sqrt{\theta}}=\bar{X}$ 解出 θ…

最大似然估计

似然函数

$$f(x;\theta)=\begin{cases}?, & 0\le x\le 1\\ 0, & \cdots\end{cases}$$

$$L(\theta)=\prod_{i=1}^{n} f(x_i;\theta)$$

$$=\prod_{i=1}^{n}\left(\sqrt{\theta}\,x_i^{\sqrt{\theta}-1}\right)$$

$$=(\sqrt{\theta})^n(x_1x_2\cdots x_n)^{\sqrt{\theta}-1}$$

$$\ln L(\theta)=\frac{n}{2}\ln\theta+(\sqrt{\theta}-1)\sum_{i=1}^{n}\ln x_i$$

令 $\frac{\partial \ln L(\theta)}{\partial\theta}=\frac{n}{2\theta}+\frac{1}{2\sqrt{\theta}}\sum_{i=1}^{n}\ln x_i=0$

解得 θ 的最大似然估计为

$$\hat{\theta} = \left(\frac{n}{\sum_{i=1}^{n} \ln x_i}\right)^2$$

P_{174} 10.

(1) $E\left[C\sum_{i=1}^{n-1}(X_{i+1}-X_i)^2\right]$

$= C\sum_{i=1}^{n-1} E(X_{i+1}-X_i)^2$

$E(X_{i+1}-X_i)^2$

$= D(X_{i+1}-X_i) + [E(X_{i+1}-X_i)]^2$

$= D(X_{i+1}) + D(X_i) + 0$

$= 2\sigma^2$

$= 2(n-1)\sigma^2 C = \sigma^2$

$\therefore C = \frac{1}{2(n-1)}$

(2) $E(\bar{X}^2 - cS^2)$

$= E(\bar{X}^2) - cE(S^2)$

$= D(\bar{X}) + (E(\bar{X}))^2 - cE(S^2)$

$= \frac{\sigma^2}{n} + \mu^2 - \sigma^2 = (\frac{1}{n} - c)\sigma^2 + \mu^2 = \mu^2$

$c = \frac{1}{n}$

(2) 检验统计量

$$t=\frac{\bar{x}-\bar{y}}{S_w\sqrt{\frac{1}{n_1}+\frac{1}{n_2}}}$$

$$S_w^2=\frac{(n_1-1)S_1^2+(n_2-1)S_2^2}{n_1+n_2-2},\quad S_w=\sqrt{S_w^2}$$

1°: $H_0: \mu_1=\mu_2$ $H_1: \mu_1\neq\mu_2$

拒绝域 $|t|\geq t_{\frac{\alpha}{2}}(n_1+n_2-2)$

2°: $H_0: \mu_1\leq\mu_2$ $H_1: \mu_1>\mu_2$

$$t\geq t_\alpha(n_1+n_2-2)$$

计算 t 的观察值，作出判断

给出：$\bar{x}$，S^2

(3) 由样本值计算 t 之观察值为

$t = \cdots$

(4) 作出判断

要求：单个正态总体的均值检验

P_{220}. 17.

解 (1) 检验统计量为

$F = S_1^2 / S_2^2$

$S^2 = \frac{1}{n-1}\sum_{i=1}^{n}(x_i - \bar{x})^2$

$\bar{x}$

拒绝域为 $F \le F_{1-\frac{\alpha}{2}}(n_1-1, n_2-1)$

或 $F \ge F_{\frac{\alpha}{2}}(n_1-1, n_2-1)$

(注：$F_{1-\alpha}(n,m) = \frac{1}{F_\alpha(m,n)}$)

计算 F 之值.

作出判断

附：$t_{0.05}(8)=?$

第七章

1. 两个估计方法：矩估计，最大似然估计。

2. 估计量评选标准

1°无偏性：判断无偏性，修偏（求估计量的期望）

2°有效性（求估计无偏估计量的方法）

3. 区间估计（单个正态总体均值，方差的（双侧）置信区间。

$N(\mu,\sigma^2)$，μ，σ^2均未知。

例 P_{173}、2 .(2)

$\mu=E(X)=\int_0^1 x\cdot\sqrt{\theta}x^{\sqrt{\theta}-1}dx=\frac{\sqrt{\theta}}{1+\sqrt{\theta}}$

$\theta=\left(\frac{\mu}{1-\mu}\right)^2$，所以$\theta$的矩估计为

第九章

一元线性回归 { 建立回归方程 / 检验回归方程的显著性

即 $H_0: \beta_1=0 \quad H_1: \beta_1 \neq 0$

F检验.

$$t=\frac{\hat{\beta}_1}{\hat{\sigma}}\sqrt{L_{xx}}$$

$$F=t^2=\frac{\hat{\beta}_1^2 L_{xx}}{\hat{\sigma}^2}=\frac{S_A}{S_E/(n-2)}$$

拒绝域: $F \geq F_\alpha(1, n-2)$

当拒绝 H_0 时, 就说回归方程是显著的.

计算: $L_{xx}=\sum_{i=1}^{n} x_i^2-\frac{1}{n}\left(\sum_{i=1}^{n} x_i\right)^2$

$$L_{xy}=\sum_{i=1}^{n} x_i y_i-\frac{1}{n}\left(\sum_{i=1}^{n} x_i\right)\left(\sum_{i=1}^{n} y_i\right)$$

$$L_{yy}=\sum_{i=1}^{n} y_i^2-\frac{1}{n}\left(\sum_{i=1}^{n} y_i\right)^2 \checkmark$$

(给出 $\sum x_i^2$, $\sum x_i$, $\sum y_i$, $\sum x_i y_i$, $\sum y_i^2$)

$\hat{\beta}_1 = \frac{L_{xy}}{L_{xx}}$ | $\bar{x} = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} x_i$

回归方程 $\hat{y} = \bar{y} + \hat{\beta}_1 (x - \bar{x})$ | $\bar{y} = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} y_i$

$$S_A = \hat{\beta}_1^2 L_{xx} = \frac{L_{xy}^2}{L_{xx}}$$ （保留三位）

$$S_E = L_{yy} - S_A$$

$$F = \frac{S_A}{S_E/(n-2)}$$

例 P_{266}.

第八章

前三节（重点是正态总体参数的检验）

P_{218} 4

$H_0: \mu \le 10$ $\quad$ $H_1: \mu > 10$

检验统计量 $t = \frac{\bar{x} - 10}{S/\sqrt{20}}$

拒绝域为 $W: t \ge t_\alpha(20-1)$ ✓

$$\mu + \sqrt{\theta}\,\mu = \sqrt{\theta}$$

$$\Rightarrow \sqrt{\theta} = \frac{\mu}{1-\mu} \qquad \theta = \left(\frac{\mu}{1-\mu}\right)^2$$

$$n + \sqrt{\theta}\sum_{i=1}^{n} \ln x_i -$$

$$\sqrt{\theta} = \frac{-n}{\sum_{i=1}^{n} \ln x_i}$$

$$\theta = \left(\frac{n}{\sum_{i=1}^{n} \ln x_i}\right)^2$$