《概率论与数理统计》期末考试试题(4 学分)

注记：按照课程组要求，真题答案不能发给大家。本试题将在本学期复习课程中集中讲解。讲解课件因为包含真题答案，也不能发给大家。

一、填空题（每小题 4 分，共 40 分）

1.设 $P(A)=\dfrac{1}{2}$， $P(B-A)=\dfrac{1}{4}$，则 $P(A\mid A\cup B)=$______ .

2.设随机变量 X 和 Y 相互独立， X 服从参数为 2 的泊松分布,$Y\sim U(0,2)$，则 $E(X(X+Y))=$ _______.

3.设随机变量 X 和 Y 相互独立, X 的分布律为 $P\{X=-1\}=\dfrac{1}{2}, P\{X=1\}=\dfrac{1}{2}$, Y 服从均值为 1 的指数分布,则 $P\{XY>1\}=$_____ .

4. 设 $(X,Y)\sim N(-1,1,4,9,-\dfrac{2}{3})$, 则 $D(2X+Y)=$ _______.

5. 设 $X_1,X_2,\cdots,X_{96}$ 独立同分布，X_1 的概率密度为 $f(x)=1-|x|,-1<x<1$,利用中心极限定理， $P\{|\sum_{i=1}^{96}X_i|<2\}$ 的近似值为_______.

6. 有两箱同类型的零件, 每箱都装有 100 个零件, 第一箱有 80 个一等品, 第二箱有 40 个一等品, 现从两箱中任选一箱, 然后从该箱中有放回地取零件两次, 每次取一个,令 $X_i=\begin{cases}1,\text{第i次取到一等品},\\0,\text{否则},\end{cases}$ $i=1,2$ ，则 X_1 与 X_2 的相关系数为 _______.

7. 设 X_1,X_2,X_3,X_4 为来自总体 X 的样本, 总体 X 的概率密度为

$$f(x)=\begin{cases}\dfrac{2x}{\theta^2},0<x<\theta,\\0,\text{其他}\end{cases}$$

令 $T=\max\{X_1,X_2,X_3,X_4\}$,则 $E(T)=$______ .

8. 某种电子产品的某一参数服从正态分布，从这种电子产品中抽取 16 件，测量它们的这一参数，并算得样本方差为 $s^2=1.6$, 则 σ^2 的置信度为95%的置信

区间为_______.

9. 设 $X_1,X_2,\cdots,X_{10}$ 为来自总体 $N(0,\sigma^2)$ 的样本，若统计量 $T=\dfrac{a(X_1-X_2)}{\sqrt{\sum\limits_{i=3}^{10}X_i^2}}$ 服从 t 分布，则 $a=$_______，该 t 分布的自由度为_______.

10. 设 X_1,X_2 为来自总体 $N(\mu,\sigma^2)$ 的样本,则 σ 的无偏估计 $\hat{\sigma}=a|X_1-X_2|$ 的方差为_______. (先确定常数 a ,使之为无偏估计,然后求方差)

二、(12 分)

设随机变量 X 的概率密度为 $f(x)=\begin{cases}\dfrac{3}{4}(1-x^2), -1<x<1,\\ 0, \quad 其它,.\end{cases}$,

（1）求 X 的方差；（2） X 与 $|X|$ 是否不相关？(3) X 与 $|X|$ 是否相互独立？

三、(10 分)

盒子中有 3 个黑球，1 个红球，先从中任取 2 球, 以 X 表示取出的黑球数,将取出的 2 球放回盒子中,并放进 X 个红球,再从盒子中任取 2 球,以 Y 表示取出的黑球数, 求（1）(X,Y) 的分布律；(2) Y 的分布律；（3） $Y=0$ 条件下 X 的条件分布律.

四、(12 分)

设 X 的概率密度为

$$f_X(x)=\begin{cases}\dfrac{3}{8}x^2, 0<x<2,\\ 0, 其他\end{cases}$$

在 $X=x(0<x<2)$ 条件下，Y 在区间 $(0,x)$ 上服从均匀分布,求

（1） Y 的概率密度;(2) $E(XY)$;(3) $Z=X-Y$ 的分布函数及概率密度.

五、(10 分)

设 $X_1,X_2,\cdots,X_n$ 为来自总体 X 的样本，总体 X 的概率密度为

$$f(x;\theta)=\begin{cases}\dfrac{2}{\sqrt{2\pi\theta}}\ \mathrm{e}^{-\frac{x^2}{2\theta}}, x>0,\\ 0, \quad 其它,\end{cases}$$

其中$\theta>0$为未知参数,

(1) 求θ的最大似然估计量;

（2）θ的最大似然估计量是否为θ的无偏估计？

六、(8 分)

为了比较两种枪弹的速度，在相同条件下进行速度测定，样本量及由测定结果算得样本均值及样本方差如下:

甲种枪：$n_1=8,\ \ \bar{x}=2805\ ,\quad s_1^2=160$

乙种枪：$n_2=8,\ \ \bar{y}=2781\ ,\quad s_2^2=128$

设甲、乙两种枪的枪弹速度分别服从正态分布$N(\mu_1,\sigma_1^2)$和$N(\mu_2,\sigma_2^2)$,

(1) 试检验假设:$H_0:\sigma_1=\sigma_2\qquad H_1:\sigma_1\neq\sigma_2$ (检验水平$\alpha=0.1$);

(2) 在检验水平$\alpha=0.05$下，能否认为甲种枪的枪弹平均速度显著地大于乙种枪的枪弹平均速度?

七、(8 分)

为考察某种维尼纶纤维的耐水性能，安排了一组试验，测得其甲醇浓度x及相应的“缩醇化度”y的数据如下：

x	18	20	22	24	26	28	30
y	26.8	28.3	28.7	28.9	29.7	30.1	31.2

经计算得: $\sum_{i=1}^{7}x_i=168$，$\sum_{i=1}^{7}x_i^2=4144$，$\sum_{i=1}^{7}y_i=203.7$，$\sum_{i=1}^{7}y_i^2=5939.57$，

$\sum_{i=1}^{7}x_iy_i=4924.4$.

(1) 求线性回归方程$\hat{y}=\hat{a}+\hat{b}x$；

(2) 对回归方程作显著性检验,即检验假设$H_0:b=0\qquad H_1:b\neq0$ (水平取$\alpha=0.01$).

附: $\Phi(0.5)=0.6915$，$\Phi(1)=0.8413$，$t_{0.05}(14)=1.76$，$t_{0.005}(5)=4.0322$，

$\chi^2_{0.025}(15)=25$，$\chi^2_{0.975}(15)=6.26$，$F_{0.05}(7,7)=3.79$，$F_{0.01}(1,5)=16.3$.