

北京邮电大学 2022——2023 学年第一学期

《算法设计与分析》期末考试试题（A 卷）

考试 注意 事项	一、学生参加考试须带学生证或学院证明，未带者不准进入考场。学生必须按照监考教师指定座位就坐。 二、书本、参考资料、书包等物品一律放到考场指定位置。 三、学生不得另行携带、使用稿纸，要遵守《北京邮电大学考场规则》，有考场违纪或作弊行为者，按相应规定严肃处理。 四、学生必须将答题内容做在试题答卷上，做在试题及草稿纸上一律无效。 五、用黑色钢笔或签字笔答题。										
考试 课程	算法设计与分析				考试时间			2022 年 12 月 22 日 13:30~15:30			
题号	一	二	三	四	五	六					总分
满分	10	10	20	20	20	20					
得分											
阅卷 教师											

一、（10 分）给出渐近上界 O 的定义，并证明： $3n^2 + 4n = O(n^2)$ 。

二、（10 分）求解以下线性齐次递归方程：

$$f(n) = f(n-1) + 12f(n-2),$$

$$f(1) = 1,$$

$$f(0) = 1/2$$

三. (20 分) 快速排序算法

考虑将输入序列进行**非递减排序**的快速排序算法。

(1) (5 分) 说明快速排序算法的实现原理, 分析划分元素的选取对算法性能的影响;

(2) (7 分) 用 C/C++/Java 语言伪代码描述快速排序算法实现过程, 要求:

i) 给出 partition 过程的代码实现;

ii) 排序算法采用随机选择策略选择划分元素, 给出 RandomizedPartition 过程实现代码;

(3) (4 分) 证明: 在最好情况下, 快速排序算法的最好时间复杂度为 $T(n)=O(n\lg n)$, 其中 n 为排序元素的个数;

(4) (4 分) 给定输入序列 {23, 13, 28, 20, 22, 19, 25}, 将序列按照非递减顺序排列, 描述整个排序过程。假设在排序过程中, RandomizedPartition 过程总是选取序列中最后 1 个元素作为划分基准元素。

四. (20 分) **最长公共子序列问题**: 给定两个序列 $X=\{x_1, x_2, \dots, x_m\}$ 和 $Y=\{y_1, y_2, \dots, y_n\}$, 试找出 X 和 Y 的最长公共子序列。比如, 对长度为 7 的串 $X=\{C, B, C, B, D, A, C\}$, 和长度为 6 的串 $Y=\{B, D, C, A, B, A\}$, 它们最长公共子序列为 $Z=\{B, C, B, A\}$, 长度为 4。

试用动态规划法求解最长公共子序列问题, 要求:

(1) (6 分) 写出最长公共子序列问题的公共子序列长度的递归方程式;

(2) (14 分) 用 C/C++/Python 语言伪代码描述算法流程, 包括: 计算最长公共子序列长度的过程, 以及生成最长公共子序列的过程。

五、(20 分) 背包问题: 给定 n 种物品和 1 个背包, 其中物品 i 的重量是 w_i , 其价值为 v_i , 背包的容量为 C 。在选择物品 i 装入背包时, 可以选择物品 i 的一部分, 请问应如何选择装入背包的物品, 使得装入背包中物品的总价值最大?

- (1) (4 分) 给出此优化问题的整数规划数学公式, 即问题的形式化描述。
- (2) (4 分) 给出该问题贪心算法求解的贪心策略。
- (3) (6 分) 基于 C/C++/Java/Python 等高级编程语言写出贪心算法的伪代码。
- (4) (3 分) 分析(3)中给出的贪心算法的时间复杂性。
- (5) (3 分) 给定 4 种物品重量分别为 $\{10, 40, 55, 20\}$ 价值分别为 $\{20, 120, 55, 100\}$, 背包容量是 100, 求背包的最大价值以及对应的放入背包的物品重量。

六、(20 分) 4 皇后问题: 在 4×4 的棋盘上摆放四个皇后, 使其不能互相攻击, 即任意两个皇后都不能处于同一行、同一列或同一斜线上。

- (1) (3 分) 请基于回溯法设计本问题的解向量;
- (2) (7 分) 给出搜索的剪枝策略, 并画出解空间树;
- (3) (7 分) 写出基于 C/C++ 的算法伪代码;
- (4) (3 分) 分析所写算法的时间复杂性。