北京邮电大学 2021—2022 学年第二学期

《概率论与数理统计》期末考试试题标准答案（4 学分）

考试注意事项：（1）不得使用计算器，答题前先浏览一下试卷末尾的"附注"；（2）所有答题内容都需写在答题纸上，包括填空题的答案（写清楚题号），按线上考试要求拍照、以 PDF 格式上传。

一、填空题（本题共 40 分，每小题 4 分）

1．设两两相互独立的三事件 A, B, C 满足：$ABC=\phi,\ P(A)=P(B)=P(C)<\dfrac{1}{2}$,

$P(A\cup B\cup C)=\dfrac{9}{16}$，则 $P(A)=\underline{\dfrac{1}{4}}$.

2.轰炸机轰炸某目标，它能飞到距目标 400,200,100（米）的概率分别为 0.5 ,0.3 ,0.2 ，又设它在距目标 400,200,100（米）命中率分别为 0.01 ,0.02 ,0.1 ，当目标被命中时，求飞机是在 400（米）处轰炸的概率为 $\underline{\dfrac{5}{31}}$.

3．设随机变量 X 服从参数 λ 的泊松分布，已知 $E(X^2+2X-4)=0$，则

$P(X\neq 0)=\underline{1-e^{-1}}$.

4. 设随机变量 X 的分布函数为 $F(x)=0.3\Phi(x)+0.7\Phi(\dfrac{x-1}{2})$，$\Phi(x)$ 为标准正态分布函数，则 $E(X)=\underline{0.7\quad}$.

5. 设随机变量 X 和 Y 相互独立，且均服从分布 $U(0,1)$, 则 $D(|X-Y|)=\underline{\dfrac{1}{18}}$.

6.设随机变量 $X_1, X_2\cdots, X_n$ 相互独立同分布，且 X_i 的分布律为

X	0	1
P	$1-m$	m

，$\Phi(x)$ 为标准正态分布函数，则 $\lim\limits_{n\to\infty}P\{\dfrac{\sum_{i=1}^{n}X_i-nm}{\sqrt{nm(1-m)}}\geq 2\}=\underline{1-\Phi(2)}$.

7.设 $F_1(x), F_2(x)$ 为两个分布函数，其相应的概率密度函数 $f_1(x), f_2(x)$ 是连续函数，则必为概率密度函数的是__D__.

A. $f_1(x)f_2(x)$，B. $2f_2(x)F_1(x)$，C. $f_1(x)F_2(x)$， D. $f_1(x)F_2(x)+f_2(x)F_1(x)$

8.设随机变量 X 的概率密度函数为 $f(x)=\begin{cases} ax+b, & 0<x<1 \\ 0, & 其它 \end{cases}$，且

$P(X<\frac{1}{3})=P(X>\frac{1}{3})$，则 a 和 b 等于 $\underline{a=-\frac{3}{2}, b=\frac{7}{4}}$.

9．设 $X_1, X_2 \cdots, X_{15}$ 是来自 $N(0,2^2)$ 的样本，则 $Y=\frac{{X_1}^2+\cdots+{X_{10}}^2}{2({X_{11}}^2+\cdots+{X_{15}}^2)}$ 服从 $\underline{F(10,5)}$ 分布．(给出分布类型及参数)

10．假定某材料硬度 $X \sim N(\mu,\sigma^2)$,测量 n 次，样本均值 $\overline{X}$，样本标准差 S，则 μ 的置信度为 $1-m$ 的双侧置信区间为 $\underline{\left(\bar{X} \pm \frac{S}{\sqrt{n}} t_{\frac{m}{2}}(n-1)\right)}$.

二、(**10 分**) 设随机变量 X 与 Y 相互独立，X 的概率分布为 $P\{X=i\}=\frac{1}{3}, i=-1,0,1,$ Y 的概率密度函数为 $f_Y(y)=\begin{cases} 1, & 0\le y<1 \\ 0, & 其它 \end{cases}$，记 $Z=X+Y,$

（1）求 $P\{Z\le\frac{1}{2}\mid X=0\}$,（2）求 Z 的概率密度函数 $f_Z(z)$.

解：

（1） $P\{Z\le\frac{1}{2}\mid X=0\}=P\{X+Y\le\frac{1}{2}\mid X=0\}=P\{Y\le\frac{1}{2}\mid X=0\}=P\{Y\le\frac{1}{2}\}=\frac{1}{2}$ （**4 分**）

（2）先求 Z 的分布函数

$$F_Z(z)=P\{X+Y\le z\}=P\{X+Y\le z\mid X=-1\}P\{X=-1\}+P\{X+Y\le z\mid X=0\}P\{X=0\}$$

$$+P\{X+Y\le z\mid X=1\}P\{X=1\}$$

$$=\frac{1}{3}[P\{X+Y\le z\mid X=-1\}+P\{X+Y\le z\mid X=0\}+P\{X+Y\le z\mid X=1\}]$$

$$=\frac{1}{3}[P\{Y\le z+1\mid X=-1\}+P\{Y\le z\mid X=0\}+P\{Y\le z-1\mid X=1\}]$$

$$=\frac{1}{3}[P\{Y\le z+1\}+P\{Y\le z\}+P\{Y\le z-1\}]$$

$$=\frac{1}{3}[F_Y(z+1)+F_Y(z)+F_Y(z-1)]$$

于是 Z 的概率密度函数为

$$f_Z(z)=F_Z'(z)=\frac{1}{3}[f_Y(z+1)+f_Y(z)+f_Y(z-1)]=\begin{cases}\frac{1}{3}, & -1\le z<2\\ 0, & \text{其它}\end{cases}$$ **（6 分）**

三、**（10 分）**设随机变量 X 的分布律为

X	0	1
P	$\frac{1}{3}$	$\frac{2}{3}$

，

设随机变量 Y 的分布律为

Y	-1	0	1
P	$\frac{1}{3}$	$\frac{1}{3}$	$\frac{1}{3}$

且 $P\{X^2=Y^2\}=1,$ 求（1）二维随机变量 (X,Y) 的联合分布律，（2）求 $Z=XY$ 的分布律，（3） X 和 Y 的相关系数 ρ_{XY}，判断 X 和 Y 是否不相关，是否独立.

解：（1）由 $P\{X^2=Y^2\}=1,$ 有 $P\{X=0,Y=0\}+P\{X=1,Y=1\}+P\{X=1,Y=-1\}=1,$

于是 $P\{X=0,Y=-1\}+P\{X=0,Y=1\}+P\{X=1,Y=0\}=0,$

根据联合分布和边缘分布的关系得二维随机变量 (X,Y) 的联合分布律为

X \ Y	-1	0	1	$p_{i\cdot}$
0	0	1/3	0	1/3
1	1/3	0	1/3	1/3
$p_{\cdot j}$	1/3	1/3	1/3	1

（4 分）

（2） $Z=XY$ 的所有可能取值为-1，0，1，分布律为

Z	-1	0	1
P	1/3	1/3	1/3

（2 分）

（3） $E(X)=\dfrac{2}{3}$， $E(Y)=0$，又 $E(XY)=0$，

所以， $\operatorname{cov}(X，Y)=E(XY)-(E(X))(E(Y))=0$

$$\rho=\frac{\operatorname{cov}(X,Y)}{\sqrt{D(X)}\sqrt{D(Y)}}=0$$ ， X 和 Y 不相关.

由（1）易知 $\exists i,j$, 使 $P\{X=i,Y=j\}\neq P\{X=i\}P\{Y=j\}$, 所以 X 和 Y 不独立.**（4 分）**

四、（10 分）设随机变量 $X\sim N(1,3^2)$， $Y\sim N(0,4^2)$，设 $Z=\dfrac{X}{3}+\dfrac{Y}{2}$，且 $\rho_{XY}=-\dfrac{1}{2}$，

（1）求 Z 的数学期望与方差;

（2）求 X 与 Z 的相关系数 ρ_{XZ} ;

（3）判断 X 与 Z 是否相互独立？为什么？

解:（1） $E(Z)=E(\dfrac{X}{3}+\dfrac{Y}{2})=\dfrac{1}{3}E(X)+\dfrac{1}{2}E(Y)=\dfrac{1}{3}$

$$D(Z)=D\left(\frac{X}{3}\right)+D\left(\frac{Y}{2}\right)+2\operatorname{Cov}\left(\frac{X}{3},\frac{Y}{2}\right)=\frac{1}{9}D(X)+\frac{1}{4}D(Y)+\frac{1}{3}\operatorname{Cov}(X,Y)$$

$$=\frac{1}{9}D(X)+\frac{1}{4}D(Y)+\frac{1}{3}\rho_{XY}\sqrt{D(X)}\sqrt{D(Y)}=3$$ **（4 分）**

（2） $\operatorname{cov}(X,Z)=\operatorname{cov}(X,\dfrac{X}{3}+\dfrac{Y}{2})=\dfrac{1}{3}D(X)+\dfrac{1}{2}\operatorname{cov}(X,Y)=0$，故 $\rho_{XZ}=0$ **（4 分）**

（3）因 Z 不一定是一维正态随机变量，（X, Z）不一定是二维正态随机变量，虽然他们不相关，但 X 与 Z 不一定相互独立.**（2 分）**

五、（**12 分**）设总体 X 服从 $[0,\theta]$ 的均匀分布，$X_1, X_2, \cdots, X_n$ 是来自总体 X 的简单随机样本.

（1）求 θ 的极大似然估计量 $\hat{\theta}_1$；（2）求 θ 的矩估计量 $\hat{\theta}_2$；

（3）讨论 $\hat{\theta}_1$ 和 $\hat{\theta}_2$ 是否具有无偏性，如果不是无偏估计，如何调整成无偏估计.

解：（1）X 的概率密度为 $f(x;\theta)=\begin{cases}\dfrac{1}{\theta}, 0\le x\le\theta \\ 0, \quad 其它\end{cases}$

似然函数为 $L(\theta)=\begin{cases}\dfrac{1}{\theta^n}, 0\le x_1,\cdots,x_n\le\theta \\ 0\ , \quad 其它\end{cases}=\begin{cases}\dfrac{1}{\theta^n}, a\le x_{(1)}, b\ge x_{(n)} \\ 0\ , \quad 其它\end{cases}$

$$x_{(1)}=\min(x_1,\cdots,x_n), x_{(n)}=\max(x_1,\cdots,x_n),$$

$\because \dfrac{d\ln(L)}{d\theta}=-\dfrac{n}{\theta}>0$，$\therefore L(\theta)$是$\theta$的单减函数，因此$L(\theta)$在$\theta=x_{(n)}$时，取最大值.

所以θ 的极大似然估计量 $\hat{\theta}_1=X_{(n)}=\max\left(X_i\right)$ （**6 分**）

（2）$E\left(X\right)=\dfrac{\theta}{2}$，所以$\theta$ 的矩估计量 $\hat{\theta}_2=2\bar{X}$. （**2 分**）

（3）讨论 $\hat{\theta}_1$ 和 $\hat{\theta}_2$ 是否具有无偏性，

$$E(\hat{\theta}_1)=E(X_{(n)})=\int_0^\theta xnF^{n-1}(x)f(x)dx=\int_0^\theta xn(\frac{x}{\theta})^{n-1}\frac{1}{\theta}dx=\frac{n}{n+1}\theta$$

$$E(\hat{\theta}_2)=E(2\bar{X})=2E(\bar{X})=2E(X)=\theta$$

所以 $\hat{\theta}_1$ 不是无偏估计，$\hat{\theta}_2$ 是无偏估计.

假设 $\hat{\theta}_1^*=\dfrac{n+1}{n}\hat{\theta}_1=\dfrac{n+1}{n}X_{(n)}$，$\hat{\theta}_1^*$ 是无偏估计. （**4 分**）

六、（**10 分**）

某钢铁工厂为了提高钢得率，提出了甲和乙两种方案. 为了研究哪一种方案好，各进行了 10 次试验，经过计算，方案甲和方案乙的样本均值和样本方差分别为 $\bar{X}_1=65.96, \bar{X}_2=69.43$，$S_1^2=3.35, S_2^2=2.22$，设甲乙两个方案得率相互独立，且分别来自正态总体 $N(\mu_1,\sigma_1^2)$ 和 $N(\mu_2,\sigma_2^2)$，μ_1, μ_2，σ_1^2,σ_2^2 都未知，问方案乙是否比方案甲显

著提高得率($\alpha=0.01$)?

（即检验 (1) H_0: $\sigma_1^{\ 2}=\sigma_2^{\ 2}, H_1$: $\sigma_1^{\ 2}\neq\sigma_2^{\ 2}$.（2） H_0：$\mu_1\geq\mu_2$ ， H_1: $\mu_1<\mu_2$ ）

解: (1) H_0: $\sigma_1^{\ 2}=\sigma_2^{\ 2}, H_1$: $\sigma_1^{\ 2}\neq\sigma_2^{\ 2}$.

采用检验统计量 $F=\dfrac{S_1^2}{S_2^2}\sim F(n_1-1, n_2-1)$,

拒绝域 W:$F>F_{\frac{\alpha}{2}}(n_1-1,n_2-1)$ 或 $F<F_{1-\frac{\alpha}{2}}(n_1-1,n_2-1)$,

$F=\dfrac{S_1^2}{S_2^2}=\dfrac{\mathbf{3.35}}{\mathbf{2.22}}=1.5066$, $F_{\frac{\alpha}{2}}(n_1-1,n_2-1)=F_{0.005}(9,9)=6.54$

$F_{1-\frac{\alpha}{2}}(n_1-1,n_2-1)=F_{0.995}(9,9)=\dfrac{1}{F_{0.005}(9,9)}=\dfrac{1}{6.54}=0.1529$, 故

$F_{1-\frac{\alpha}{2}}(n_1-1,n_2-1)<F<F_{\frac{\alpha}{2}}(n_1-1,n_2-1)$,

因此应接受原假设，认为两总体方差相等. **（5 分）**

(2) H_0: $\mu_1\geq\mu_2$ ，H_1: $\mu_1<\mu_2$

检验统计量 $T=\dfrac{\bar{X}_1-\bar{X}_2}{S_W\sqrt{\dfrac{1}{n_1}+\dfrac{1}{n_2}}}\sim t(n_1+n_2-2)$,其中 $S_W^{\ 2}=\dfrac{(n_1-1)S_1^{\ 2}+(n_2-1)S_2^{\ 2}}{n_1+n_2-2}$,

拒绝域 W:$T<-t_\alpha(n_1+n_2-2)$,

$T=\dfrac{-3.47}{1.6698\sqrt{\frac{1}{5}}}=-4.65$, $t_\alpha(n_1+n_2-2)=t_{0.01}(18)=2.552$,故 $T<-t_{0.01}(18)$,

因此拒绝原假设, 即能认为方案乙比方案甲显著提高得率. **（5 分）**

七、（8 分）

在服装标准制定中，调查了很多人的服装各部位数据，用 x 表示身高，y 表示裤长，

测量了 30 名女青年的数据，并算得：$\sum_{i=1}^{30}x_i=4797$，$\sum_{i=1}^{30}y_i=3068$，$\sum_{i=1}^{30}x_i^{\ 2}=767949$，

$\sum_{i=1}^{30} y_i^2 = 314112$，$\sum_{i=1}^{30} x_i y_i = 491124$.

（1）求裤长 y 对身高 x 的回归方程 $\hat{y} = \hat{a} + \hat{b}x$（$\hat{a}, \hat{b}$ 的计算结果保留 2 位小数）;

（2）检验回归方程的显著性，即检验假设 $H_0: b = 0, H_1: b \neq 0.$（水平取 $\alpha = 0.01$）

解：（1）$\bar{x} = \frac{1}{30}\sum_{i=1}^{30} x_i = 159.9$， $\bar{y} = \frac{1}{30}\sum_{i=1}^{30} y_i = 102.3$

$$S_{xx} = \sum_{i=1}^{30}(x_i - \bar{x})^2 = \sum_{i=1}^{30} x_i^2 - \frac{1}{30}\left(\sum_{i=1}^{30} x_i\right)^2 = 908.7$$

$$S_{xy} = \sum_{i=1}^{30}(x_i - \bar{x})(y_i - \bar{y}) = \sum_{i=1}^{30} x_i y_i - \frac{1}{30}\left(\sum_{i=1}^{30} x_i\right)\left(\sum_{i=1}^{30} y_i\right) = 550.8$$

$$\hat{b} = \frac{S_{xy}}{S_{xx}} = 0.61,\ \hat{a} = \bar{y} - \hat{b}\bar{x} = 102.3 - 0.61 \times 159.9 = 5.4$$

裤长 y 对身高 x 的回归方程 $\hat{y} = \hat{a} + \hat{b}x = 5.4 + 0.61x$. **（4 分）**

（2）检验回归方程的显著性，即检验假设 $H_0: b = 0, H_1: b \neq 0.$

$$S_{yy} = \sum_{i=1}^{30}(y_i - \bar{y})^2 = \sum_{i=1}^{30} y_i^2 - \frac{1}{30}(\sum_{i=1}^{30} y_i)^2 = 357.87$$

$$S_R = \sum_{i=1}^{n}(\hat{y}_i - \bar{y})^2 = \hat{b}S_{xy} = 0.61 \times 550.8 = 335.99$$

$$S_e = S_{yy} - S_R = 357.87 - 335.99 = 21.88$$

$$F = \frac{S_R/1}{S_e/28} = \frac{335.99 \times 28}{21.88} = 429.96$$

由于 $F > F_{0.01}(1,28) = 7.64$，因此在显著性水平 0.01 下，认为回归方程显著.**（4 分）**

附注： $F_{0.025}(9,9)$ =4.026，$\boldsymbol{t_{0.01}(18) = 2.552}$，$\sqrt{2.7881} \approx \mathbf{1.67}$，$\sqrt{5} \approx 2.24$

$F_{0.005}(9,9)$ =6.54，$F_{0.01}(1,28) = 7.64$