# 北京邮电大学 2017—2018 学年第一学期

## 《概率论与数理统计》期末考试试题（A 卷）

考试注意事项：学生必须将答案内容做在试题答题纸上，做在试题纸上一律无效.

一、填空题（本题共 40 分，每小题 4 分）

1．从 0 到 9 十个数字中任取三个不同的数字，事件 $A$={三个数字中不含 0 或 5}，则概率 $P(A)=($　　$)$。

2．设在三次独立试验中，事件 $A$ 出现的概率均相等，且 $A$ 至少出现一次的概率为 $\frac{19}{27}$，则在一次试验中事件 $A$ 出现的概率为(　　)。

3．设随机变量 $X_1 \sim U[0,6], X_2 \sim N(0,2^2), X_3 \sim$ 泊松分布 $P(1)$，且 $X_1, X_2, X_3$ 相互独立，若 $Y=3X_3+X_1-2X_2$，则 $D(Y)=($　　$)$。

4．设随机变量 $X$ 和 $Y$ 的数学期望分别为 $-2$ 和 2，方差分别为 1 和 4，而相关系数为 $-0.5$，则根据切比雪夫不等式有 $P\{|X+Y|\geq 6\}\leq($　　$)$。

5．设随机变量 $K$ 服从区间[1，6]上的均匀分布，则方程 $x^2+Kx+1=0$ 有实根的概率为(　　)。

6．设随机变量 $X$ 的概率密度为 $f(x)=\begin{cases} \frac{1}{3} & x\in[0,1] \\ \frac{2}{9} & x\in[3,6] \\ 0 & \text{其他} \end{cases}$，若 $K$ 使得 $P(X\geq K)=\frac{2}{3}$，则 $K$ 的取值范围是：(　　)。

7.设随机变量 $X$ 服从正态分布 $N(10,(0.02)^2)$，设 $\Phi(x)$ 为标准正态分布的分布函数，已知 $\Phi(2.5)=0.9938$，则 $X$ 落在区间（9.95，10.05）内的概率为(　　)。

8.设随机变量 $X$ 与 $Y$ 相互独立，$X$ □ $N(1,2)$，$Y$ □ $N(0,1)$，则随机变量 $Z=2X-Y+3$ 的概率密度函数 $f(z)=($　　$)$。

8. 设随机变量 $X$ 与 $Y$ 相互独立，$X \sim N(1,2)$，$Y \sim N(0,1)$，则随机变量 $Z=2X-Y+3$ 的概率密度函数 $f(z)=$ $\underline{\dfrac{1}{3\sqrt{2\pi}}e^{-\frac{(z-5)^2}{18}}}$。

$E^2(x)$.
$D(z)$

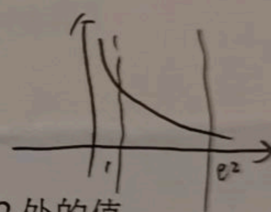
9. 设 $X_1,X_2,X_3$ 是来自总体 $N(0,\sigma^2)$ 的简单随机样本，则统计量 $\dfrac{\sqrt{2}X_1}{\sqrt{X_2^2+X_3^2}}$ 服从 $\underline{t(2)}$ 分布。(给出分布类型及参数)

10. 设零件长度服从正态分布 $N\left(\mu,\sigma^2\right)$，现随机抽取 11 个零件，测得其长度的样本方差 $S^2=1$，则总体方差 $\sigma^2$ 的置信水平为 0.95 的双侧置信区间为

$$\underline{\left(\frac{(n-1)S^2}{\chi^2_{\alpha/2}(n-1)},\frac{(n-1)S^2}{\chi^2_{1-\alpha/2}(n-1)}\right)=\left(\frac{10\times1}{20.48},\ \frac{10\times1}{3.25}\right)=(0.49\,,3.08)}。$$

（$\chi^2_{0.975}(10)=3.25,\chi^2_{0.025}(10)=20.48$）

二、（12 分）设 $D$ 是由曲线 $xy=1$ 与直线 $x=1,y=0,x=e^2$ 围成的平面区域，二维随机变量 $(X,Y)$ 在区域 $D$ 上服从均匀分布，则




（1）给出 $(X,Y)$ 的概率密度函数，

（2）求 $(X,Y)$ 关于 $X$ 的边缘概率密度函数及其在 $x=2$ 处的值，

（3）求 $E(2X+1)$。

解：（1）由 $S_D=\int_1^{e^2}\dfrac{1}{x}dx=2$，因为 $(X,Y)$ 在区域 $D$ 上服从均匀分布，

设 $(X,Y)$ 的联合概率密度为 $f\left(x,y\right)$，则 $f\left(x,y\right)=\begin{cases}\dfrac{1}{2} & (x,y)\in D\\ 0 & (x,y)\notin D\end{cases}$。（4 分）

（2）当 $1\le x\le e^2$ 时，$f_X(x)=\int_{-\infty}^{+\infty}f(x,y)dy=\int_0^{\frac{1}{x}}\dfrac{1}{2}dy=\dfrac{1}{2x}$，

则 $f_X(x)=\begin{cases}\dfrac{1}{2x} & 1\le x\le e^2\\ 0 & 其它\end{cases}$。（4 分）

$f_X(x)$ 在 $x=2$ 处的值为 $\dfrac{1}{4}$.

（3）$E(X)=\int_{-\infty}^{+\infty}xf_X(x)dx=\int_1^{e^2}\dfrac{1}{2}dy=\dfrac{1}{2}(e^2-1)$，则 $E(2X+1)=e^2$。（4 分）

三、（8 分）设随机变量 $X$ 与 $Y$ 相互独立，其概率密度函数分别为

$f_X(x)=\begin{cases}1 & 0\le x\le 1\\ 0 & 其它\end{cases}$，$f_Y(y)=\begin{cases}e^{-y} & y>0\\ 0 & y\le 0\end{cases}$，求 $Z=2X+Y$ 的概率密度函数。

解：$(X,Y)$ 的联合概率密度函数 $f(x,y)=f_X(x)\,f_Y(y)=\begin{cases}e^{-y} & 0\le x\le 1, y>0\\ 0 & 其它\end{cases}$

$Z$ 的分布函数为：

$$F_Z(z)=P(Z\le z)=P\{2X+Y\le z\}=\iint\limits_{2x+y\le z}f(x,y)dxdy$$

$$=\begin{cases}\iint\limits_{2x+y\le z}0dxdy=0 & z<0\\ \int_0^{\frac{z}{2}}dx\int_0^{z-2x}e^{-y}dy=\dfrac{z}{2}-\dfrac{1}{2}+\dfrac{1}{2}e^{-z} & 0\le z<2 \quad（4 分）\\ \int_0^1dx\int_0^{z-2x}e^{-y}dy=1-\dfrac{1}{2}e^{2-z}+\dfrac{1}{2}e^{-z} & z\ge 2\end{cases}$$

从而 $Z$ 的概率密度为：$f_z(z)=\begin{cases}0 & z<0\\ \dfrac{1}{2}(1-e^{-z}) & 0\le z<2\\ \dfrac{1}{2}(e^2-1)e^{-z} & z\ge 2\end{cases}$（4 分）

四、（12 分）设一箱装有 100 件产品，其中一、二、三等品分别为 80、10、10 件，现从中任取一件，且 $X_i=\begin{cases}1 & 抽到i等品\\ 0 & 其它\end{cases}$，$i=1,2,3$。求：

（1）随机变量 $X_1$ 与 $X_2$ 的联合分布，

（2）$X_1$ 与 $X_2$ 的相关系数 $\rho$，

（3）$X_1$与$X_2$是否独立？

解：设事件$A_i=\{$从 100 件产品种任取一件是$i$等品$\}$，$i=1,2,3$，据题意可知

$$P(A_1)=0.8, P(A_2)=P(A_3)=0.1$$

（1）随机变量$X_1$与$X_2$的联合分布如下：

$$P(X_1=0,X_2=0)=P(A_3)=0.1$$

$$P(X_1=1,X_2=0)=P(A_1)=0.8$$

$$P(X_1=0,X_2=1)=P(A_2)=0.1$$

$$P(X_1=1,X_2=1)=P(A_1A_2)=0$$

（4 分）

（2）关于$X_1$的边缘概率分布如下：

$$P(X_1=0)=P(X_1=0,X_2=0)+P(X_1=0,X_2=1)=0.1+0.1=0.2$$

$$P(X_1=1)=P(X_1=1,X_2=0)+P(X_1=1,X_2=1)=0.8+0=0.8$$

关于$X_2$的边缘概率分布如下：

$$P(X_2=0)=P(X_1=0,X_2=0)+P(X_1=1,X_2=0)=0.1+0.8=0.9$$

$$P(X_2=1)=P(X_1=0,X_2=1)+P(X_1=1,X_2=1)=0.1+0=0.1$$

由（1），可得$E(X_1X_2)=0\times0\times0.1+0\times1\times0.1+1\times0\times0.8+1\times1\times0=0$

因此$Cov(X_1,X_2)=E[(X_1-EX_1)(X_2-EX_2)]$

$=E(X_1X_2)-EX_1EX_2=0-0.8\times0.1=-0.08$

因此$\rho=\dfrac{Cov(X_1,X_2)}{\sqrt{D(X_1)}\sqrt{D(X_2)}}=\dfrac{-0.08}{\sqrt{0.16}\sqrt{0.09}}=-\dfrac{2}{3}$ 。（4 分）

（3）$X_1$与$X_2$不是不相关，故不独立。（4 分）

（或者利用（1）及边缘分布的结果，用独立的定义判断，不独立）

五、（12 分）设总体 $X$ 的密度函数为

$$f(x;\theta)=\begin{cases}\frac{1}{\theta}e^{-\frac{x}{\theta}} & x>0,\\ 0 & x\le 0\end{cases}$$

$(X_1, X_2, \cdots, X_n)$ 是来自总体 $X$ 的简单随机样本，

（1）求未知参数 $\theta$ 的矩估计量 $\hat{\theta}_1$，

（2）判断 $\hat{\theta}_1$ 和 $\hat{\theta}_2=n\min\{X_1,X_2,\cdots,X_n\}$ 是否是 $\theta$ 的无偏估计量，

（3）判断 $\hat{\theta}_1$ 和 $\hat{\theta}_2$ 的有效性。

解：（1）密度函数为

$$f(x;\theta)=\begin{cases}\frac{1}{\theta}e^{-\frac{x}{\theta}} & x>0,\\ 0 & x\le 0\end{cases}，则 E(X)=\int_{-\infty}^{+\infty}xf(x)dx=\theta 。$$

将 $E(X)$ 替换成 $\bar{X}$，得 $\theta$ 的矩估计量 $\hat{\theta}_1$ 为 $\hat{\theta}_1=\bar{X}$。（4 分）

（2）由于 $E(\bar{X})=E(X)=\theta$，所以 $\hat{\theta}_1=\bar{X}$ 是 $\theta$ 的无偏估计量。

令 $Z=\min\{X_1,X_2,\cdots,X_n\}$，

$$F_Z(z)=1-P(X_1>z,X_2>z,\cdots,X_n>z)=1-\prod_{i=1}^{n}(1-P(X_i\le z))=\begin{cases}0 & z<0\\ 1-e^{-\frac{nz}{\theta}} & z\ge 0\end{cases}$$

则 $f_Z(z)=\begin{cases}0 & z<0\\ \frac{n}{\theta}e^{-\frac{nz}{\theta}} & z\ge 0\end{cases}$，则 $Z\sim E\left(\frac{n}{\theta}\right)$ $\therefore E(Z)=\frac{\theta}{n}\therefore E(nZ)=\theta$，

所以 $\hat{\theta}_2=n\min\{X_1,X_2,\cdots,X_n\}$ 是 $\theta$ 的无偏估计量。（4 分）

（3）$\because D(\bar{X})=\frac{\theta^2}{n}$，$D(n\min\{X_1,X_2,\cdots,X_n\})=\theta^2$，所以 $\hat{\theta}_1$ 比 $\hat{\theta}_2$ 更有效。（4 分）

六、（8 分）设总体 $X$ 服从 $[0, \lambda]$ 区间上的均匀分布，参数 $\lambda>0$，$(X_1, X_2, \cdots, X_n)$ 是来自总体 $X$ 的简单随机样本，

（1）求$\lambda$的最大似然估计，（2）若$\beta=3\lambda+2$，求$\beta$的最大似然估计。

解：（1）$X\sim f(x;\lambda)=\begin{cases}\dfrac{1}{\lambda} & 0\le x\le\lambda\\ 0 & 其它\end{cases}$

所以，似然函数为$L(x_1,x_2,\dots,x_n;\lambda)=\begin{cases}\dfrac{1}{\lambda^n} & 0\le x_1,x_2,\dots,x_n\le\lambda\\ 0 & 其它\end{cases}$

考虑$L$的取值，要使$L$取值最大，$\lambda$应最小。

当$\lambda=\max(x_1,x_2,\dots,x_n)$时，$L$取值最大，

所以，最大似然估计为$\hat{\lambda}=\max(x_1,x_2,\dots,x_n)$。　　　　（**5 分**）

（2）　由极大似然估计的不变性，

因此，$\beta$的最大似然估计量为　$\hat{\beta}=3\hat{\lambda}+2=3\max(x_1,x_2,\dots,x_n)+2$。　　（**3 分**）

七、（**8 分**）设考生的某次考试成绩服从正态分布，从中任取 36 位考生的成绩，其平均成绩为 66.5 分，标准差为 15 分，问在 0.05 的显著性水平下，可否认为全体考生这次考试的平均成绩为 70 分，给出检验过程。

附表：　$t$分布数值表

$t_{0.025}(35)=2.0301$，$t_{0.025}(36)=2.0281$，$t_{0.05}(35)=1.6896$，$t_{0.05}(36)=1.6883$

解：要检验的假设为$H_0:\mu=\mu_0(\mu_0=70),H_1:\mu\ne\mu_0$

检验用的统计量　$t=\dfrac{\overline{x}-\mu_0}{s/\sqrt{n}}\sim t(n-1)$，

拒绝域为　　$|t|\ge t_{\frac{\alpha}{2}},t_{\frac{\alpha}{2}}(n-1)=t_{0.025}(35)=2.0301,$　　　　（**4 分**）

而观测值为$|t|=\dfrac{|66.5-70|}{15/\sqrt{36}}=1.4$，$|t|=1.4<t_{0.025}(35)=2.0301$，没落在拒绝域内，

所以接受 $H_0$，故可认为全体考生这次考试的平均成绩为 70 分。　（**4 分**）