# 线性代数启蒙

李尚志

北京航空航天大学

# 第8周

## 内积

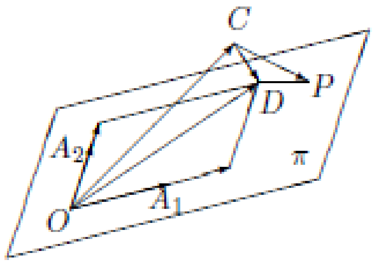
# § 8.1

# 最小二乘法

# 最小二乘法

**例1.** 某材料生产过程中的废品率$y$近似与某化学成分含量$x$成一次函数$y=kx+b$. 根据如下数据求待定常数$k,b$.

| $x(\%)$ | 3.7 | 4.0 | 4.2 |
|---|---|---|---|
| $y(\%)$ | 0.9 | 0.6 | 0.35 |




**解.**
$$\begin{cases} 3.7k+b=0.9 \\ 4.0k+b=0.6 \\ 4.2k+b=0.35 \end{cases}$$

$$k\mathbf{a}_1+b\mathbf{a}_2=\mathbf{c}$$

$$AX=\mathbf{c}$$

$$d^2=|CD|^2=|k\mathbf{a}_1+b\mathbf{a}_2-\mathbf{b}|^2$$
$$=(3.7k+b-0.9)^2+(4.0k+b-0.6)^2+(4.2k+b-0.35)^2$$

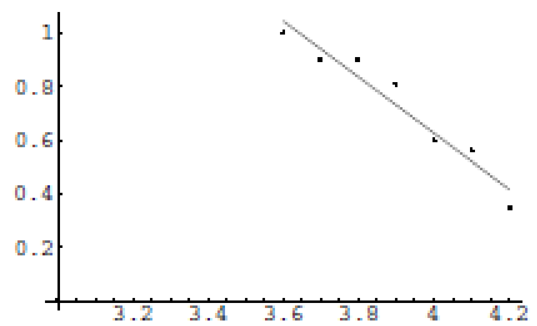
取最小值 $\Leftrightarrow$

$$\begin{pmatrix} \mathbf{a}_1^T \\ \mathbf{a}_2^T \end{pmatrix}(k\mathbf{a}_1+b\mathbf{a}_2-\mathbf{c})=\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

$\Leftrightarrow$ $A^TAX=A^Tc$

# 例2.

| $x(\%)$ | 3.6 | 3.7 | 3.8 | 3.9 | 4.0 | 4.1 | 4.2 |
|---|---|---|---|---|---|---|---|
| $y(\%)$ | 1.00 | 0.9 | 0.9 | 0.81 | 0.60 | 0.56 | 0.35 |




# 解.

$k\mathbf{a}_1 + b\mathbf{a}_2 = \mathbf{c}, \quad AX = \mathbf{c}$

$$d^2 = (kx_1 + b - y_1)^2 + \cdots + (kx_7 + b - y_7)^2 = (AX - \mathbf{c})^T (AX - \mathbf{c})$$

$$\begin{pmatrix} \mathbf{a}_1^T \\ \mathbf{a}_2^T \end{pmatrix} (k\mathbf{a}_1 + b\mathbf{a}_2 - \mathbf{c}) = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \ A^T(AX-c)=0 \ \Leftrightarrow A^TAX=A^Tc$$

```
In[1]:= A = {{3.6, 1}, {3.7, 1}, {3.8, 1}, {3.9, 1}, {4.0, 1},
          {4.1, 1}, {4.2, 1}};
        c = {1.0, 0.9, 0.9, 0.81, 0.60, 0.56, 0.35};
        Inverse[Transpose[A].A].Transpose[A].c

Out[2]= {-1.04643, 4.8125}
```

# 计算机拟合

例2.

| $x(\%)$ | 3.6 | 3.7 | 3.8 | 3.9 | 4.0 | 4.1 | 4.2 |
|---|---|---|---|---|---|---|---|
| $y(\%)$ | 1.00 | 0.9 | 0.9 | 0.81 | 0.60 | 0.56 | 0.35 |

```
In[7]:= data = {{3.6, 1.0}, {3.7, 0.9}, {3.8, 0.9}, {3.9, 0.81}, {4.0, 0.6},
           {4.1, 0.56}, {4.2, 0.35}};
        Fit[data, {1, x}, x]

Out[8]= 4.8125 - 1.04643 x
```

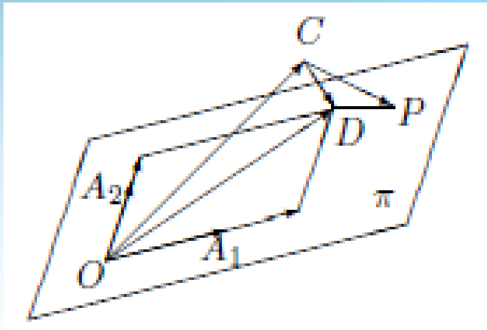
```
In[5]:= Fit[data, {1, x, x^2}, x]

Out[5]= -13.0664 + 8.14643 x - 1.17857 x^2
```

# § 8.2

# 几何内积的代数推广

# 几何性质的代数推广




- CD<CP <=勾股定理$CP^2=DC^2+DP^2$
- <= 完全平方公式：

$$\mathrm{a}=\overrightarrow{CD}, \mathrm{b}=\overrightarrow{DP}, \quad \overrightarrow{CP}^2=(\mathrm{a}+\mathrm{b})^2=\mathrm{a}^2+2\mathrm{a}\cdot\mathrm{b}+\mathrm{b}^2$$

- <= 运算律：$=\mathrm{a}\cdot(\mathrm{a}+\mathrm{b})+\mathrm{b}\cdot(\mathrm{a}+\mathrm{b}) = \mathrm{a}\cdot\mathrm{a}+\mathrm{b}\cdot\mathrm{a}+\mathrm{a}\cdot\mathrm{b}+\mathrm{b}\cdot\mathrm{b}$
- 内积推广到$R^n$: 列向量$\mathrm{a}=(a_1,\ldots,a_n)^T$,$\mathrm{b}=(b_1,\ldots,b_n)^T$
- 内积 $(\mathrm{a},\mathrm{b})=\mathrm{a}^T\mathrm{b}=a_1b_1+\cdots+a_nb_n$.
- 长度(模)平方: $|\mathrm{a}|^2=\mathrm{a}^2=(\mathrm{a},\mathrm{a})=a_1^2+\cdots+a_n^2\geq 0$

# 角度

平方公式:$(a-b)^2=a^2+b^2-2a\cdot b$

$=|a|^2+|b|^2-2|a||b|\cos\theta$(余弦定理)

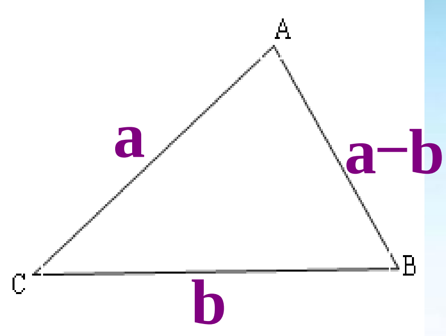
推广到*n* 数组向量:

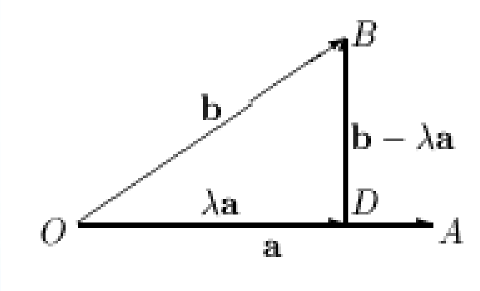
定义: $\cos\theta=(a\cdot b)/(|a||b|)$

问题:$|\cos\theta|\leqq 1$ 成立吗?

几何理由: $|\cos\theta|=$ 邻边/斜边

{直角边<斜边}<= 勾股定理



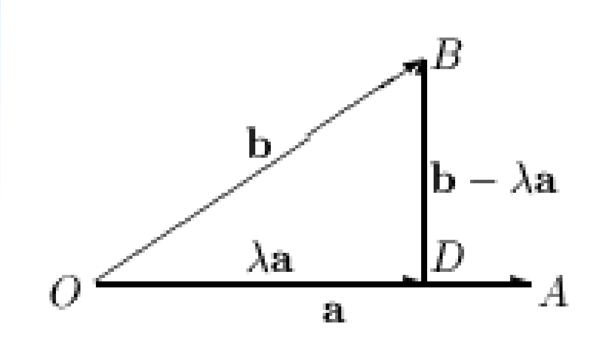

代数化:$(b-\lambda a)\cdot a=0$ =>

$$\lambda=\frac{\mathbf{b}\cdot\mathbf{a}}{\mathbf{a}^2},\quad (\mathbf{b}-\lambda\mathbf{a})^2\geq 0$$

# 柯西不等式

## 几何理由代数化：

$$(\mathbf{b}-\lambda\mathbf{a})\cdot\mathbf{a}=0,\ \ \lambda=\frac{\mathbf{b}\cdot\mathbf{a}}{\mathbf{a}^2},\ \ (\mathbf{b}-\lambda\mathbf{a})^2\geq 0$$




$$(\mathbf{b}-\lambda\mathbf{a})^2=\mathbf{b}^2-2\lambda(\mathbf{a},\mathbf{b})+\lambda^2\mathbf{a}^2$$

$$=\mathbf{b}^2-2\frac{(\mathbf{a},\mathbf{b})}{\mathbf{a}^2}(\mathbf{a},\mathbf{b})+\frac{(\mathbf{a},\mathbf{b})^2}{(\mathbf{a}^2)^2}\mathbf{a}^2=\mathbf{b}^2-\frac{(\mathbf{a},\mathbf{b})^2}{\mathbf{a}^2}\geq 0$$

**$(a^2)(b^2)\geq (a,b)^2$ （柯西不等式）**

**$|\cos\theta| = |(a,b)|/(|a||b|) \leq 1.$**

# 欧氏空间

内积(a,b)的性质只用到如下运算律, 与是否数组无关.

1. 双线性 (按乘法展开) :

$$(x_1\mathbf{a}_1 + x_2\mathbf{a}_1, y_1\mathbf{b}_1 + y_2\mathbf{b}_2) = \sum_{i,j=1}^{2} x_i(\mathbf{a}_i, \mathbf{b}_j)y_j = (x_1, y_1)\begin{pmatrix}(\mathbf{a}_1, \mathbf{b}_1) & (\mathbf{a}_1, \mathbf{b}_2)\\(\mathbf{a}_2, \mathbf{b}_1) & (\mathbf{a}_2, \mathbf{b}_2)\end{pmatrix}\begin{pmatrix}y_1\\y_2\end{pmatrix}$$

2. 对称性(“交换律”): (a,b)=(b,a)

3. 正定性： a≠0→ (a,a)>0.

欧氏空间：*R*上线性空间*V*, 定义了满足以上性质的内积.

# 由坐标计算内积

欧氏空间$V$, 取定一组基$M$={$a_1,\ldots,a_n$}, 每个向量a用坐标 $X=(x_1,\ldots,x_n)^T$ 表示:

$$a= x_1a_1+\cdots+x_na_n=AX,\ A=(a_1,\ldots,\ a_n)$$

$$(a,b)=(AX,AY)=\sum_{i,j=1}^{n} x_i s_{ij} y_j = X^T S Y,\ s_{ij}=(a_i,a_j).$$

$S=(s_{ij})_{n\times n}$ 称为基M的Gram方阵.

当 $V$是列向量空间, $(a,b)=a^Tb$, $S=A^TA$.

# § 8.3

# 正交化方法

# 标准正交基

标准正交基: 当$S=I$, 内积 $(X,Y)=X^TY=x_1y_1+\cdots+x_ny_n$ 最简单.

基$M=(\mathrm{a}_1,\ldots,\mathrm{a}_n)$满足:

(1) 当 $i\neq j$, $s_{ij}=(\mathrm{a}_i,\mathrm{a}_j)=0$, 基向量两两正交, 称$M$为正交基.

(2) $s_{ii}=(\mathrm{a}_i,\mathrm{a}_i)=1$, 基向量都是单位向量. 称$M$为标准正交基.

标准正交基下的坐标:

设$M=\{\mathrm{a}_1,\ldots,\mathrm{a}_n\}$是标准正交基, $\mathrm{a}=x_1\mathrm{a}_1+\cdots+x_n\mathrm{a}_n$

则内积 $(\mathrm{a},\mathrm{a}_{ii})=x_i$ 为a在M下的坐标 $\mathrm{a}=(\mathrm{a},\mathrm{a}_1)\mathrm{a}_1+\cdots+(\mathrm{a},\mathrm{a}_n)\mathrm{a}_n$

# 坐标变换

基变换与坐标变换: 设$M$={a$_1$,…, a$_n$}是V的一组基. 每个向量a可写成a=$AX$的形式, 列向量$X$是 a在$M$下的坐标.

设 $N$ = {b$_1$,…,b$_n$}={$AP_1$,…,$AP_n$}是另一组基,

$P_i$是b$_i$在$M$下的坐标. 则 a=$AX$ 在 $N$ 下的坐标$Y$ 满足

$$AX = y_1(AP_1)+\cdots+y_n(AP_n)=(AP_1,..,AP_n)Y=A(PY),$$

矩阵$P$ =($P_1$,…,$P_n$) 的各列是基向量b在M下的坐标,

称为基$M$ 到$N$ 的过渡矩阵, 一定是可逆矩阵.

同一向量a在两组基$M$,$N$下的坐标$X$,$Y$满足公式

$$X = PY \qquad \text{(坐标变换公式)}$$

# Gram-Schmidt正交化

用坐标变换可以将欧氏空间$V$任意一组基$M=\{\mathbf{a}_1,\ldots,\mathbf{a}_n\}$ 变成标准正交基. 先取 $\mathbf{b}_1=\mathbf{a}_1$.

待定 $x$ 使 $\mathbf{b}_2=\mathbf{a}_2-x\mathbf{b}_1$ 满足

$(\mathbf{b}_2,\mathbf{b}_1)=(\mathbf{a}_2-x\mathbf{b}_1,\mathbf{b}_1)=(\mathbf{a}_2,\mathbf{b}_1)-x(\mathbf{b}_1,\mathbf{b}_1)=0$, $x=(\mathbf{a}_2,\mathbf{b}_1)/(\mathbf{b}_1,\mathbf{b}_1)$.

设已选 $\mathbf{b}_i=\mathbf{a}_i-(x_1\mathbf{b}_1+\cdots+x_{i-1}\mathbf{b}_{i-1})$ 使 $\mathbf{b}_1,\ldots,\mathbf{b}_k$ 两两正交.

待定 $\mathbf{b}_{k+1}=\mathbf{a}_{k+1}-y_1\mathbf{b}_1-\cdots-y_k\mathbf{b}_k$使

$(\mathbf{b}_{k+1},\mathbf{b}_i)=(\mathbf{a}_{k+1},\mathbf{b}_{ii})-y_i(\mathbf{b}_i,\mathbf{b}_i)=0$, $y_i=(\mathbf{a}_{k+1},\mathbf{b}_{ii})/(\mathbf{b}_i,\mathbf{b}_i)$.

得到正交基$\{\mathbf{b}_1,\ldots,\mathbf{b}_n\}$, 再用单位向量 $|\mathbf{b}_i|^{-1}\mathbf{b}_i$ 代替每个 $\mathbf{b}_i$.

# 矩阵相合

设欧氏空间$V$的基$M=\{a_1,\ldots,a_n\}$到$N=\{b_1,\ldots,b_n\}$的过渡矩阵为$P=(P_1,\ldots,P_n)$. $M$的Gram方阵为$S$. 则$b_{ij}=(b_i,b_j)=P_i^TSP_j$. $N$的Gram方阵

$$B=(b_{ij})_{n\times n}=\begin{pmatrix} P_1^TSP_1 & \cdots & P_1^TSP_n \\ \vdots & \cdots & \vdots \\ P_n^TSP_1 & \cdots & P_n^TP_n \end{pmatrix}=P^TSP$$

同阶方阵A,B相合：存在可逆方阵$P$使$B=P^TAP$.

相合A→$B$可用一系列初等行变换和相应的列变换实现.

$$\mathbf{a}_1 = (1,-1,0,0)^T, \mathbf{a}_2 = (0,1,-1,0)^T, \mathbf{a}_3 = (0,0,1,-1)^T$$

$$\begin{pmatrix} 2 & -1 & 0 \\ -1 & 2 & -1 \\ 0 & -1 & 2 \end{pmatrix} \qquad P = \begin{pmatrix} \frac{\sqrt{2}}{2} & \frac{\sqrt{6}}{6} & \frac{\sqrt{3}}{6} \\ 0 & \frac{\sqrt{6}}{3} & \frac{\sqrt{3}}{3} \\ 0 & 0 & \frac{\sqrt{3}}{2} \end{pmatrix}$$

$$(G, I) = \begin{pmatrix} 2 & -1 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ -1 & 2 & -1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & -1 & 2 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \xrightarrow{\frac{1}{2}(1)+(2)} \begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & \frac{3}{2} & -1 & \frac{1}{2} & 1 & 0 \\ 0 & -1 & 2 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

$$\xrightarrow{\frac{2}{3}(2)+(3)} \begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & \frac{3}{2} & 0 & \frac{1}{2} & 1 & 0 \\ 0 & 0 & \frac{4}{3} & \frac{1}{3} & \frac{2}{3} & 1 \end{pmatrix} \xrightarrow{\frac{1}{\sqrt{2}}(1), \sqrt{\frac{2}{3}}(2), \frac{\sqrt{3}}{2}(3)} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & \frac{\sqrt{2}}{2} & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & \frac{\sqrt{6}}{6} & \frac{\sqrt{6}}{3} & 0 \\ 0 & 0 & 1 & \frac{\sqrt{3}}{6} & \frac{\sqrt{3}}{3} & \frac{\sqrt{3}}{2} \end{pmatrix}$$

# 利用计算机

例3. 求方程 $x_1+x_2+x_3+x_4=0$解空间的一组标准正交基.

```
In[2]:= Orthogonalize[{{1, -1, 0, 0}, {0, 1, -1, 0}, {0, 0, 1, -1}}]
```

Out[2]= $\left\{\left\{\frac{1}{\sqrt{2}}, -\frac{1}{\sqrt{2}}, 0, 0\right\}, \left\{\frac{1}{\sqrt{6}}, \frac{1}{\sqrt{6}}, -\sqrt{\frac{2}{3}}, 0\right\}, \left\{\frac{1}{2\sqrt{3}}, \frac{1}{2\sqrt{3}}, \frac{1}{2\sqrt{3}}, -\frac{\sqrt{3}}{2}\right\}\right\}$

# 谢谢！