高等数学复习笔记

本文只讲重要概念，过于简单的不再重复。

空间解析几何

向量

模

向量的模$|(x,y,z)| = \sqrt{x^2+y^2+z^2}$

其几何意义为向量的长度

点乘

$(x_1,y_1,z_1)\cdot(x_2,y_2,z_2) = x_1\times x_2 + y_1\times y_2 + z_1\times z_2$

其几何意义为两个向量的模的乘积再乘以两向量夹角的余弦。也代表A向量在B向量的投影再乘以B向量。

其物理意义为A向量在B向量方向做的功。

叉乘

$$(x_1,y_1,z_1)\times(x_2,y_2,z_2) = \begin{bmatrix} i & j & k \\ x_1 & y_1 & z_1 \\ x_2 & y_2 & z_2 \end{bmatrix}$$

其几何意义为与两个向量都垂直的新向量，其方向符合右手螺旋法则，其长度为两向量围成的平行四边形的面积，即向量的模的积再乘以夹角正弦。

叉乘满足反交换律和分配律。

混合积

$$(x_1,y_1,z_1)\cdot[(x_2,y_2,z_2)\times(x_3,y_3,z_3)] = \begin{bmatrix} x_1 & y_1 & z_1 \\ x_2 & y_2 & z_2 \\ x_3 & y_3 & z_3 \end{bmatrix}$$

其几何意义为三个向量围成的六面体的体积，也是三棱锥体积的六倍。三向量共面。

平面

平面一般表达式

$Ax + By + Cz + D = 0$

其法向量为(A, B, C)，也就是平面的垂线的方向

点法式

$A(x - x_0) + B(y - y_0) + C(z - z_0) = 0$

其中(x_0, y_0, z_0)是平面上任意一点

截距式

$\frac{x}{a} + \frac{y}{b} + \frac{z}{c} = 1$

其中$(a, 0, 0), (0, b, 0), (0, 0, c)$为平面在$x, y, z$轴的截距

点和平面的距离

$d = \frac{|Ax_0 + By_0 + Cz_0 + D|}{\sqrt{A^2 + B^2 + C^2}}$

直线

直线标准表达式

$\begin{cases} A_1x + B_1y + C_1z + D_1 = 0 \\ A_2x + B_2y + C_2z + D_2 = 0 \end{cases}$

其几何意义为两个平面相交成为一条直线。

其方向和两平面的法向量都垂直，所以为$(A_1, B_1, C_1) \times (A_2, B_2, C_2)$。

对称方程

$\frac{x - x_0}{m} = \frac{y - y_0}{n} = \frac{z - z_0}{p}$

(m, n, p)为直线的方向，都不能为0

参数方程

$\begin{cases} x = x_0 + mt \\ y = y_0 + nt \\ z = z_0 + pt \end{cases}$

直线和平面垂直

直线的方向和平面法向量点乘为0

直线和平面平行

直线的方向和平面法向量叉乘为0

点和直线的距离

公式很复杂，一般不作为考点。

求极限

洛必达法则

如果$f(x)$和$g(x)$在i处都趋近于0，$\lim_{x \to i} f(x)/g(x) = \lim_{x \to i} f'(x)/g'(x)$

解读：因为两条曲线都趋近于0，靠近0点附近近似于两条直线，直线的斜率的比值就是直线上的点的y的比值。

夹逼定理

$f(x) <= g(x) <= h(x)$，且$f(x)$和$h(x)$收敛于y，那么$g(x)$也收敛于y。

单调有限序列必有极限

夹逼定理的特例

罗尔定理

f(a)=f(b)，f在[a,b]间连续可导，则a,b间必有一点f'(c)=0

拉格朗日中值定理

就是把罗尔定理拉斜了。

柯西中值定理

就是[a,b]区间f(x),g(x)两个函数的导数的比值，至少有一点等于$\frac{f(b)-f(a)}{g(b)-g(a)}$

求导

基本公式

$$(C)' = 0$$
$$(x^n)' = nx^{n-1}$$
$$(\sin x)' = \cos x$$
$$(\cos x)' = \sin x$$
$$(e^x)' = e^x$$
$$(\ln x)' = \frac{1}{x}$$

其它公式

$$(a^x)' = \ln a \times a^x$$
$$(log_a x)' = \frac{1}{x \ln a}$$
$$(\tan x)' = sec^2 x$$
$$(\cot x)' = -\csc^2 x$$
$$(\sec x)' = \sec x \tan x$$
$$(\csc x)' = -\csc x \cot x$$
$$(\arcsin x)' = \frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$$
$$(\arccos x)' = -\frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$$
$$(\arctan x)' = \frac{1}{1+x^2}$$
$$(\text{arccot}\, x)' = -\frac{1}{1+x^2}$$

运算法则

- $(u+v)' = u' + v'$
- $(uv)' = u'v + v'u$
- $(\frac{u}{v})' = \frac{u'v - v'u}{v^2}$
- $f[g(x)]' = f'[g(x)]g'(x)$
- $\frac{dx}{dy} = \frac{1}{\frac{dy}{dx}}$

  反函数的导数等于直接函数的倒数，但注意反函数的x是原函数的y

  例：求$(\arcsin x)'$

$$x = \sin(\arcsin x)$$
$$\text{两边求导} 1 = cos(\arcsin x) * (\arcsin x)'$$
$$(\arcsin x)' = \frac{1}{cos(\arcsin x)} = \frac{1}{\sqrt{1-\sin^2(\arcsin x)}} = \frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$$

也可以便捷运算:

$$(\sin x)' = \cos x$$

$$(\arcsin x)' = \frac{1}{\cos y} = \frac{1}{cos(arcsinx)} = \frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$$

求导技巧

- y=f(x)求导，有时可以先ln(y)=ln(f(x))，两边求导后再消除y。例如:

$$y = x^x$$

$$\ln y = x \ln x$$

$$\frac{1}{y} y' = 1 + \ln x$$

$$y' = y(1 + lnx)$$

$$y' = x^x + x^x \ln x$$

泰勒级数

泰勒公式是用多项式逼近原函数，其思想为：如果两个数组在某x_0处值相同，一阶导数相同，二阶导数相同...N阶导数都相同，那么这两条曲线将十分拟合。

$f(x) = f(x_0) + f'(x_0)(x - x_0) + \frac{f''(x_0)}{2!}(x - x_0)^2 + \cdots + \frac{f^{(n)}(x_0)}{n!}(x - x_0)^n + o(x^n)$

麦克劳林公式是泰勒公式当$x_0 = 0$的特殊情况

$f(x) = f(0) + f'(0)x + \frac{f''(0)}{2!}x^2 + \cdots + \frac{f^{(n)}(0)}{n!}x^n + o(x^n)$

$e^x = 1 + x + \frac{1}{2!}x^2 + \cdots + \frac{1}{n!}x^n + o(x^n)$

$\sin x = x - \frac{1}{3!}x^3 + \frac{1}{5!}x^5 - \cdots + o(x^n)$

$\cos x = 1 - \frac{1}{2!}x^2 + \frac{1}{4!}x^4 + \cdots + o(x^n)$

$e^{i\theta} = \cos\theta + i\sin\theta$

傅里叶级数

对于循环区间为$[-\pi, \pi]$的周期函数，傅里叶级数是利用$1, \sin x, \cos x, \sin 2x, \cos 2x, \cdots, \sin nx, \cos nx$相互之间的全正交性，将函数的时域变换为频域。

全正交:

- $\int_{-\pi}^{\pi} 1 \times \sin kx dx = 0$
- $\int_{-\pi}^{\pi} 1 \times \cos kx dx = 0$
- $\int_{-\pi}^{\pi} \sin jx \sin kx dx = 0 \quad (j \neq k)$
- $\int_{-\pi}^{\pi} \cos jx \cos kx dx = 0 \quad (j \neq k)$
- $\int_{-\pi}^{\pi} \sin jx \cos kx dx = 0$

时域和频域可以相互转化，这样在工程上，可以先把数字信号转为频域，然后处理（比如降低频率女声转为男声），然后再重新转为时域信号。

$$f(x) = \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty}(a_n \cos nx + b_n \sin nx)$$

$$a_n = \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(x)\cos nx dx \quad (n = 0, 1, 2, 3, \cdots)$$

$$b_n = \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(x)\sin nx dx \quad (n = 1, 2, 3, 4, \cdots)$$

- 对于同样的频率n，为什么既有$a_n \cos nx$，又有$b_n \sin nx$？原因是$\sqrt{a_n^2 + b_n^2}$决定了该频率的强度，而两者之间的比例关系决定了该频率的相位。所以也可以表示为 $f(x) = \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} a_n \sin(nx + \omega_n)$
- 如果f(x)在$[-\pi, \pi]之间只有有限个第一类间断点并且只有有限个极值点，那么其傅里叶级数在连续点收敛于f(x)，在第一类间断点收敛于左极限和右极限的平均值。

方向导数和梯度

如果$f(x, y)$在(x_0, y_0)处可微分，则该函数在该点沿任意方向l的方向导数为

$\frac{\partial f}{\partial l}|_{(x_0, y_0)} = f_x(x_0, y_0)\cos\alpha + f_y(x_0, y_0)\cos\beta$

其中$(\cos\alpha, \cos\beta)$是l的方向余弦，即$(\cos\alpha, \cos\beta) = \frac{l}{|l|}$

其几何意义为沿着l方向每移动一单位，f的函数值变化的单位数。

梯度向量$grad\ f(x, y) = \frac{\partial f}{\partial x} i + \frac{\partial f}{\partial y} j$

其几何意义为，f在这个方向变化最快

偏微分

二元函数二重偏微分有dxdx,dxdy,dydx,dydy。其中dxdy=dydx

积分

三种积分方法：凑元法，第二类换元法，分部积分法

凑微分法

$\int f(g(x))g'(x)dx = [\int f(u)du]_{u=g(x)} = F(g(x))$

本质上是对$[F[g(x)]]' = F'[g(x)]g'(x)$的逆运算。

例:

$$
\begin{aligned}
\int \sin^3 x dx &= \int -sin^2 x d\cos x \\
&= \int (\cos^2 x - 1) d\cos x \\
&= \int \cos^2 x d\cos x - \int 1 d\cos x \\
&= \frac{1}{3}\cos^3 x - cosx
\end{aligned}
$$

第二类换元法

$\int f(x)dx \overset{x=\phi(t)}{=} [\int f(\phi(t))\phi'(t)dt]_{t=\phi^{-1}(t)}$

例:

$$
\begin{aligned}
&\int \sqrt{a^2-x^2}dx \\
&令x = a\sin t \quad (-\frac{\pi}{2} < t < \frac{\pi}{2}) \\
&原式 = \int a\cos t \times a\cos t dt \\
&= a^2\int \cos^2 t dt \\
&= a^2\int \frac{1+\cos 2t}{2}dt \\
&= \frac{a^2}{2}t + \frac{a^2}{4}\sin 2t + C \\
&= \frac{a^2}{2}\arcsin\frac{x}{a} + \frac{a^2}{2}\sin t\cos t + C \\
&= \frac{a^2}{2}\arcsin\frac{x}{a} + \frac{1}{2}\sqrt{a^2-x^2} + C
\end{aligned}
$$

分部积分法

$\int uv'dx = uv - \int vu'dx$

本质上是$(uv)' = u'v + v'u$其中等号右边一部分容易积分另一部分不容易积分时，把其中一部分换成另一部分。

$$
\begin{aligned}
&\int x\cos x dx = \int x d\sin x \\
&= x\sin x - \int \sin x dx \quad \backslash \\
&= x\sin x + \cos x + C
\end{aligned}
$$

有理函数的积分

- $\frac{P(x)}{Q(x)}$一定可以积分，其中$P(x), Q(x)$是x的多项式
- 三角有理函数$R(\sin x, \cos x)$可以通过万能公式转变为t的多项式来积分
    - $\tan\frac{x}{2} = u$
    - $\sin x = \frac{2\tan\frac{x}{2}}{1+\tan^2\frac{x}{2}} = \frac{2u}{1+u^2}$
    - $\cos x = \frac{1-u^2}{1+u^2}$
    - $x = 2\arctan u \Rightarrow dx = \frac{2du}{1+u^2}$

例:
$$
\begin{aligned}
\int\frac{1+\sin x}{\sin x(1+\cos x)}dx &= \int\frac{1+\frac{2u}{1+u^2}}{\frac{2u}{1+u^2}(1+\frac{1-u^2}{1+u^2})}\times\frac{2}{1+u^2}du \\
&= \frac{1}{4}u^2+u+\frac{1}{2}\ln|u|+C \\
&= \frac{1}{4}(\tan\frac{x}{2})^2+\tan\frac{x}{2}+\frac{1}{2}\ln|\tan\frac{x}{2}|+C
\end{aligned}
$$

常用积分技巧

- 有$\sqrt{a^2-x^2}, \sqrt{a^2+x^2}, \sqrt{x^2-a^2}$等出现的，可以用变换三角形，将x设为$a\sin t, a\cos t, a\sec t, a\tan t$等。
  利用公式$1-\sin^2 x = \cos^2 x$，$1+\tan^2 x = \sec^2 x$来消去根号。
- $\frac{g(x)}{f(x)}$形式积分，看一下f(x)是否可以分解因式成$u(x)\times v(x)$，如果可以拆项后分别积分
- $f(x)\sin x, f(x)cos(x)$等的积分，经常可以把$\sin x dx$变成$d\cos x$来降次
- 如被积函数为商形式，若分子次数比分母小，可试用倒置换 $x = \frac{1}{t}$

多元函数积分

多元函数定积分，可以根据曲面的形状，先积x再积y，或者先积y再积x

微分方程

微分方程是一个很深的话题。最基础的方法是分离变量法。把x和dx放在等号左侧，把y和dy放在等号右侧，分别积分。