## 三角函数

注,本章节仅含存三角函数。和三角形,圆形相关的三角函数参见三角形和圆形章节

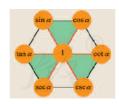
- $\sin \alpha = \frac{y}{r}$ ,  $\cos \alpha = \frac{x}{r}$ ,  $\tan \alpha = \frac{y}{x}$
- 正弦函数 $y=\sin x$ 在区间  $\left[-\frac{\pi}{2},\frac{\pi}{2}\right]$ 上,从-1 增大到 1, 是递增的; 在区间 $\left[\frac{\pi}{2},\frac{3\pi}{2}\right]$ 上,从 1 减少到-1,是递減的。
- 余弦函数 $y = \cos x$ 在区间  $[-\pi, 0]$ 上,从-1 增大到 1, 是递增的; 在区间 $[0, \pi]$ 上,从 1 减少到-1,是递減的。
- 正切函数在每一个开区间 $\left(-\frac{\pi}{2}+k\pi,\frac{\pi}{2}+k\pi\right)(k\in\mathbf{Z})$ 上都是单调递增的

$$\sin^2\alpha + \cos^2\alpha = 1$$

$$\tan^2 \alpha + 1 = \sec^2 \alpha$$

$$\cot^2 lpha + 1 = \csc^2 lpha$$

$$\tan \alpha = \frac{\sin \alpha}{\cos \alpha}$$



$$\sin(-\alpha) = -\sin\alpha$$

• 
$$\cos(-\alpha) = \cos \alpha$$

$$\tan(-\alpha) = -\tan\alpha$$

$$\sin(\pi \pm a) = \mp \sin \alpha$$

• 
$$\cos(\pi \pm \alpha) = -\cos \alpha$$

$$\tan(\pi \pm \alpha) = \pm \tan \alpha$$

$$\sin(\frac{\pi}{2} \pm \alpha) = \cos \alpha$$

• 
$$\cos(\frac{\pi}{2} \pm \alpha) = \mp \sin \alpha$$

$$\tan\left(\frac{\pi}{2} \pm \alpha\right) = \mp \cot \alpha$$

$$\sin(\alpha \pm \beta) = \sin \alpha \cos \beta \pm \cos \alpha \sin \beta$$

• 
$$\cos(\alpha \pm \beta) = \cos \alpha \cos \beta \mp \sin \alpha \sin \beta$$

$$an(lpha\pmeta)=rac{ anlpha\pm aneta}{1\mp anlpha aneta}$$

$$\sin 2\alpha = 2\sin \alpha\cos \alpha$$

$$\begin{array}{l} \bullet \quad \cos 2\alpha = \cos^2 \alpha - \sin^2 \alpha = 2\cos^2 - 1 = 1 - 2\sin^2 \alpha \\ \tan 2\alpha = \frac{2\tan \alpha}{1 - \tan^2 \alpha} \end{array}$$

$$\sin \alpha \sin \beta = -\frac{1}{2} [\cos(\alpha + \beta) - \cos(\alpha - \beta)]$$

$$\sin \alpha \cos \beta = \frac{1}{2} [\sin(\alpha + \beta) + \sin(\alpha - \beta)]$$

$$\cos \alpha \sin \beta = \frac{1}{2} [\sin(\alpha + \beta) - \sin(\alpha - \beta)]$$

$$\cos \alpha \cos \beta = \frac{1}{2} [\cos(\alpha + \beta) + \cos(\alpha - \beta)]$$

• 和差化积公式

$$\begin{aligned} \cos x + \cos y &= 2\cos\frac{x+y}{2}\cos\frac{x-y}{2}\\ \cos x - \cos y &= -2\sin\frac{x+y}{2}\sin\frac{x-y}{2}\\ \sin x + \sin y &= 2\sin\frac{x+y}{2}\cos\frac{x-y}{2}\\ \sin x - \sin y &= 2\cos\frac{x+y}{2}\sin\frac{x-y}{2} \end{aligned}$$

● 半角公式

$$\sin \frac{a}{2} = \pm \sqrt{\frac{1 - \cos \alpha}{2}}$$
$$\cos \frac{a}{2} = \pm \sqrt{\frac{1 + \cos \alpha}{2}}$$
$$\tan \frac{a}{2} = \pm \sqrt{\frac{1 - \cos a}{1 + \cos a}}$$

● 万能公式

$$\sin a = rac{2 anrac{a}{2}}{1+ an^2rac{a}{2}} \ \cos a = rac{1- an^2rac{a}{2}}{1+ an^2rac{a}{2}} \ an a = rac{2 anrac{a}{2}}{1- an^2rac{a}{2}}$$

## 三角函数与向量

- 向量的数量积(内积)  $a \cdot b = |a||b|\cos\langle a,b\rangle$
- 向量 a 在向量 b 上的投影  $|a|\cos\langle a,b\rangle$
- $a \perp b \Leftrightarrow a \cdot b = 0 \Leftrightarrow |a| \cos \langle a, b \rangle = 0$
- 向量加减内积运算满足交换律,结合律,分配律

## 解题技巧

- 一个包含 $\sin n \cos n$ 算式,可以除以 $\sin^2 x + \cos^2 x$ ,然后分子分母同时除以 $\cos^2 x$ ,变成只有 $\tan n$ 算式
- 同时有 $\alpha$ 和 $\beta$ 的方程组,可以写成一边是 $\alpha$ 另一边是 $\beta$ ,然后利用 $\sin^2\alpha + \cos^2\alpha = 1$ 消去一个角度
- 三角函数换算表。查表用,无需记忆。严格讲每个根号前应有正负号。

函数	$\sin$	cos	tan	cot	sec	csc
$\sin \theta$	$\sin  heta$	$\sqrt{1-\cos^2 heta}$	$rac{ an heta}{\sqrt{1+ an^2 heta}}$	$\frac{1}{\sqrt{1+\cot^2 heta}}$	$\frac{\sqrt{\sec^2\theta - 1}}{\sec\theta}$	$\frac{1}{\csc \theta}$
$\cos \theta$	$\sqrt{1-\sin^2  heta}$	$\cos \theta$	$rac{1}{\sqrt{1+ an^2  heta}}$	$\frac{\cot  heta}{\sqrt{1+\cot^2  heta}}$	$\frac{1}{\sec \theta}$	$\frac{\sqrt{\csc^2 \theta - 1}}{\csc \theta}$
$\tan \theta$	$\frac{\sin\theta}{\sqrt{1-\sin^2\theta}}$	$\frac{\sqrt{1-\cos^2\theta}}{\cos\theta}$	an heta	$\frac{1}{\cot \theta}$	$\sqrt{\sec^2 \theta - 1}$	$\frac{1}{\sqrt{\csc^2 \theta - 1}}$
$\cot \theta$	$\frac{\sqrt{1-\sin^2\theta}}{\sin\theta}$	$\frac{\cos\theta}{\sqrt{1-\cos^2\theta}}$	$\frac{1}{\tan \theta}$	$\cot  heta$	$\frac{1}{\sqrt{\sec^2 \theta - 1}}$	$\sqrt{\csc^2 \theta - 1}$
$\sec \theta$	$\frac{1}{\sqrt{1-\sin^2  heta}}$	$\frac{1}{\cos \theta}$	$\sqrt{1+ an^2 heta}$	$\frac{\sqrt{1+\cot^2 heta}}{\cot heta}$	$\sec  heta$	$\frac{\csc\theta}{\sqrt{\csc^2\theta-1}}$
$\csc \theta$	$\frac{1}{\sin \theta}$	$\frac{1}{\sqrt{1-\cos^2\theta}}$	$\frac{\sqrt{1+\tan^2\theta}}{\tan\theta}$	$\sqrt{1+\cot^2  heta}$	$\frac{\sec\theta}{\sqrt{\sec^2\theta - 1}}$	$\csc \theta$