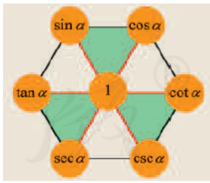
三角函数

注，本章节仅含存三角函数。和三角形，圆形相关的三角函数参见三角形和圆形章节

- $\sin\alpha = \frac{y}{r}$，$\cos\alpha = \frac{x}{r}$，$\tan\alpha = \frac{y}{x}$
- 正弦函数$y = \sin x$在区间$\left[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right]$上，从-1 增大到 1, 是递增的; 在区间$\left[\frac{\pi}{2}, \frac{3\pi}{2}\right]$上，从 1 减少到-1，是递减的。
- 余弦函数$y = \cos x$在区间$[-\pi, 0]$上，从-1 增大到 1, 是递增的; 在区间$[0, \pi]$上，从 1 减少到-1，是递减的。
- 正切函数在每一个开区间$\left(-\frac{\pi}{2} + k\pi, \frac{\pi}{2} + k\pi\right)(k \in \mathbf{Z})$上都是单调递增的
- $\sin^2\alpha + \cos^2\alpha = 1$
  $\tan^2\alpha + 1 = \sec^2\alpha$
  $\cot^2\alpha + 1 = \csc^2\alpha$
  $\tan\alpha = \frac{\sin\alpha}{\cos\alpha}$



- $\sin(-\alpha) = -\sin\alpha$
  $\cos(-\alpha) = \cos\alpha$
  $\tan(-\alpha) = -\tan\alpha$
- $\sin(\pi \pm \alpha) = \mp\sin\alpha$
  $\cos(\pi \pm \alpha) = -\cos\alpha$
  $\tan(\pi \pm \alpha) = \pm\tan\alpha$
- $\sin\left(\frac{\pi}{2} \pm \alpha\right) = \cos\alpha$
  $\cos\left(\frac{\pi}{2} \pm \alpha\right) = \mp\sin\alpha$
  $\tan\left(\frac{\pi}{2} \pm \alpha\right) = \mp\cot\alpha$
- $\sin(\alpha \pm \beta) = \sin\alpha\cos\beta \pm \cos\alpha\sin\beta$
  $\cos(\alpha \pm \beta) = \cos\alpha\cos\beta \mp \sin\alpha\sin\beta$
  $\tan(\alpha \pm \beta) = \frac{\tan\alpha \pm \tan\beta}{1 \mp \tan\alpha\tan\beta}$
- $\sin 2\alpha = 2\sin\alpha\cos\alpha$
  $\cos 2\alpha = \cos^2\alpha - \sin^2\alpha = 2\cos^2 - 1 = 1 - 2\sin^2\alpha$
  $\tan 2\alpha = \frac{2\tan\alpha}{1 - \tan^2\alpha}$
- 积化和差公式
  $\sin\alpha\sin\beta = -\frac{1}{2}[\cos(\alpha + \beta) - \cos(\alpha - \beta)]$
  $\sin\alpha\cos\beta = \frac{1}{2}[\sin(\alpha + \beta) + \sin(\alpha - \beta)]$
  $\cos\alpha\sin\beta = \frac{1}{2}[\sin(\alpha + \beta) - \sin(\alpha - \beta)]$
  $\cos\alpha\cos\beta = \frac{1}{2}[\cos(\alpha + \beta) + \cos(\alpha - \beta)]$

和差化积公式

- $\cos x+\cos y=2\cos\frac{x+y}{2}\cos\frac{x-y}{2}$
  $\cos x-\cos y=-2\sin\frac{x+y}{2}\sin\frac{x-y}{2}$
  $\sin x+\sin y=2\sin\frac{x+y}{2}\cos\frac{x-y}{2}$
  $\sin x-\sin y=2\cos\frac{x+y}{2}\sin\frac{x-y}{2}$

半角公式

- $\sin\frac{a}{2}=\pm\sqrt{\frac{1-\cos\alpha}{2}}$
  $\cos\frac{a}{2}=\pm\sqrt{\frac{1+\cos\alpha}{2}}$
  $\tan\frac{a}{2}=\pm\sqrt{\frac{1-\cos a}{1+\cos a}}$

万能公式

- $\sin a=\frac{2\tan\frac{a}{2}}{1+\tan^2\frac{a}{2}}$
  $\cos a=\frac{1-\tan^2\frac{a}{2}}{1+\tan^2\frac{a}{2}}$
  $\tan a=\frac{2\tan\frac{a}{2}}{1-\tan^2\frac{a}{2}}$

三角函数与向量

- 向量的数量积(内积) $a\cdot b=|a||b|\cos\langle a,b\rangle$
- 向量 a 在向量 b 上的投影 $|a|\cos\langle a,b\rangle$
- $a\perp b\Leftrightarrow a\cdot b=0\Leftrightarrow|a|\cos\langle a,b\rangle=0$
- 向量加减内积运算满足交换律，结合律，分配律

特殊角的三角函数值

RAD	DEG	Sin	Cos	Tan	求解方法	注释
0	0	0	1	0	显然	
$\frac{1}{15}\pi$	12°	略	略	略	$\sin\left(\frac{\pi}{15}\right)=\sin\left(\frac{\pi}{6}-\frac{\pi}{10}\right)$	
$\frac{1}{12}\pi$	15°	$\frac{\sqrt{6}-\sqrt{2}}{4}$	$\frac{\sqrt{6}+\sqrt{2}}{4}$	$2-\sqrt{3}$	半个30°， 或$\sin\left(\frac{\pi}{12}\right)=\sin\left(\frac{\pi}{3}-\frac{\pi}{4}\right)$	$x^2-4x+1=0$的解，也叫白金分割数
$\frac{1}{10}\pi$	18°	$\frac{\sqrt{5}-1}{4}$	$\frac{\sqrt{10+2\sqrt{5}}}{4}$	$\frac{1}{5}\sqrt{25-10\sqrt{5}}$	半个36°	
$\frac{1}{9}\pi$	20°	略	略	略	$\sin(3\alpha)=3\sin\alpha-4\sin^3\alpha$	wolfram
$\frac{1}{8}\pi$	22.5°	$\frac{\sqrt{2-\sqrt{2}}}{2}$	$\frac{\sqrt{2+\sqrt{2}}}{2}$	$\sqrt{2}-1$	半个45°	$x^2-2x-1=0$的解，也叫白银分割数
$\frac{1}{6}\pi$	30°	$\frac{1}{2}$	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	$\frac{\sqrt{3}}{3}$	半个等边三角形	
$\frac{1}{5}\pi$	36°	$\frac{\sqrt{10-2\sqrt{5}}}{4}$	$\frac{\sqrt{5}+1}{4}$	$\sqrt{5-2\sqrt{5}}$	$\sin(5\alpha)=5\sin\alpha-20\sin^3\alpha+16\sin^5\alpha$	$\cos\left(\frac{\pi}{5}\right)$为半个黄金分割数
$\frac{1}{4}\pi$	45°	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	1	等腰直角三角形	
$\frac{3}{10}\pi$	54°	$\frac{\sqrt{5}+1}{4}$	$\frac{\sqrt{10-2\sqrt{5}}}{4}$	$\frac{1}{5}\sqrt{25+10\sqrt{5}}$	参见36°	
$\frac{1}{3}\pi$	60°	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	$\frac{1}{2}$	$\sqrt{3}$	等边三角形	
$\frac{3}{8}\pi$	67.5	$\frac{\sqrt{2+\sqrt{2}}}{2}$	$\frac{\sqrt{2-\sqrt{2}}}{2}$	$\sqrt{2}+1$	参见22.5°	
$\frac{2}{5}\pi$	72°	$\frac{\sqrt{5}-1}{4}$	$\frac{\sqrt{10+2\sqrt{5}}}{4}$	$\sqrt{5+2\sqrt{5}}$	参见18°	
$\frac{5}{12}\pi$	75°	$\frac{\sqrt{6}+\sqrt{2}}{4}$	$\frac{\sqrt{6}-\sqrt{2}}{4}$	$2+\sqrt{3}$	参见15°	
$\frac{1}{2}\pi$	90°	1	0	NA	显然	

解题技巧

- 一个包含sin和cos的算式，可以除以$\sin^2 x+\cos^2 x$，然后分子分母同时除以$\cos^2 x$，变成只有tan的算式
- 同时有α和β的方程组，可以写成一边是α另一边是β，然后利用$\sin^2\alpha+\cos^2\alpha=1$消去一个角度
- 三角函数换算表。查表用，无需记忆。严格讲每个根号前应有正负号。

函数	sin	cos	tan	cot	sec	csc
$\sin\theta$	$\sin\theta$	$\sqrt{1-\cos^2\theta}$	$\frac{\tan\theta}{\sqrt{1+\tan^2\theta}}$	$\frac{1}{\sqrt{1+\cot^2\theta}}$	$\frac{\sqrt{\sec^2\theta-1}}{\sec\theta}$	$\frac{1}{\csc\theta}$
$\cos\theta$	$\sqrt{1-\sin^2\theta}$	$\cos\theta$	$\frac{1}{\sqrt{1+\tan^2\theta}}$	$\frac{\cot\theta}{\sqrt{1+\cot^2\theta}}$	$\frac{1}{\sec\theta}$	$\frac{\sqrt{\csc^2\theta-1}}{\csc\theta}$
$\tan\theta$	$\frac{\sin\theta}{\sqrt{1-\sin^2\theta}}$	$\frac{\sqrt{1-\cos^2\theta}}{\cos\theta}$	$\tan\theta$	$\frac{1}{\cot\theta}$	$\sqrt{\sec^2\theta-1}$	$\frac{1}{\sqrt{\csc^2\theta-1}}$
$\cot\theta$	$\frac{\sqrt{1-\sin^2\theta}}{\sin\theta}$	$\frac{\cos\theta}{\sqrt{1-\cos^2\theta}}$	$\frac{1}{\tan\theta}$	$\cot\theta$	$\frac{1}{\sqrt{\sec^2\theta-1}}$	$\sqrt{\csc^2\theta-1}$
$\sec\theta$	$\frac{1}{\sqrt{1-\sin^2\theta}}$	$\frac{1}{\cos\theta}$	$\sqrt{1+\tan^2\theta}$	$\frac{\sqrt{1+\cot^2\theta}}{\cot\theta}$	$\sec\theta$	$\frac{\csc\theta}{\sqrt{\csc^2\theta-1}}$
$\csc\theta$	$\frac{1}{\sin\theta}$	$\frac{1}{\sqrt{1-\cos^2\theta}}$	$\frac{\sqrt{1+\tan^2\theta}}{\tan\theta}$	$\sqrt{1+\cot^2\theta}$	$\frac{\sec\theta}{\sqrt{\sec^2\theta-1}}$	$\csc\theta$