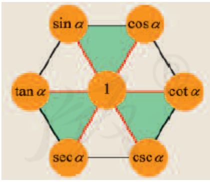
三角函数

注，本章节仅含存三角函数。和三角形，圆形相关的三角函数参见三角形和圆形章节

- $\sin\alpha=\frac{y}{r}$，$\cos\alpha=\frac{x}{r}$，$\tan\alpha=\frac{y}{x}$
- 正弦函数$y=\sin x$在区间$\left[-\frac{\pi}{2},\frac{\pi}{2}\right]$上，从-1 增大到 1，是递增的；在区间$\left[\frac{\pi}{2},\frac{3\pi}{2}\right]$上，从 1 减少到-1，是递减的。
- 余弦函数$y=\cos x$在区间$[-\pi,0]$上，从-1 增大到 1，是递增的；在区间$[0,\pi]$上，从 1 减少到-1，是递减的。
- 正切函数在每一个开区间$\left(-\frac{\pi}{2}+k\pi,\frac{\pi}{2}+k\pi\right)$ $(k\in\mathbf{Z})$上都是单调递增的
- $$\sin^2\alpha+\cos^2\alpha=1$$
  $$\tan^2\alpha+1=\sec^2\alpha$$
  $$\cot^2\alpha+1=\csc^2\alpha$$
  $$\tan\alpha=\frac{\sin\alpha}{\cos\alpha}$$



- $$\sin(-\alpha)=-\sin\alpha$$
  $$\cos(-\alpha)=\cos\alpha$$
  $$\tan(-\alpha)=-\tan\alpha$$
- $$\sin(\pi\pm a)=\mp\sin\alpha$$
  $$\cos(\pi\pm\alpha)=-\cos\alpha$$
  $$\tan(\pi\pm\alpha)=\pm\tan\alpha$$
- $$\sin\left(\frac{\pi}{2}\pm\alpha\right)=\cos\alpha$$
  $$\cos\left(\frac{\pi}{2}\pm\alpha\right)=\mp\sin\alpha$$
  $$\tan\left(\frac{\pi}{2}\pm\alpha\right)=\mp\cot\alpha$$
- $$\sin(\alpha\pm\beta)=\sin\alpha\cos\beta\pm\cos\alpha\sin\beta$$
  $$\cos(\alpha\pm\beta)=\cos\alpha\cos\beta\mp\sin\alpha\sin\beta$$
  $$\tan(\alpha\pm\beta)=\frac{\tan\alpha\pm\tan\beta}{1\mp\tan\alpha\tan\beta}$$
- $$\sin 2\alpha=2\sin\alpha\cos\alpha$$
  $$\cos 2\alpha=\cos^2\alpha-\sin^2\alpha=2\cos^2-1=1-2\sin^2\alpha$$
  $$\tan 2\alpha=\frac{2\tan\alpha}{1-\tan^2\alpha}$$
- 积化和差公式

  $$\sin\alpha\sin\beta=-\frac{1}{2}[\cos(\alpha+\beta)-\cos(\alpha-\beta)]$$
  $$\sin\alpha\cos\beta=\frac{1}{2}[\sin(\alpha+\beta)+\sin(\alpha-\beta)]$$
  $$\cos\alpha\sin\beta=\frac{1}{2}[\sin(\alpha+\beta)-\sin(\alpha-\beta)]$$
  $$\cos\alpha\cos\beta=\frac{1}{2}[\cos(\alpha+\beta)+\cos(\alpha-\beta)]$$

- 和差化积公式

  $\cos x+\cos y=2\cos\frac{x+y}{2}\cos\frac{x-y}{2}$

  $\cos x-\cos y=-2\sin\frac{x+y}{2}\sin\frac{x-y}{2}$

  $\sin x+\sin y=2\sin\frac{x+y}{2}\cos\frac{x-y}{2}$

  $\sin x-\sin y=2\cos\frac{x+y}{2}\sin\frac{x-y}{2}$

- 半角公式

  $\sin\frac{a}{2}=\pm\sqrt{\frac{1-\cos\alpha}{2}}$

  $\cos\frac{a}{2}=\pm\sqrt{\frac{1+\cos\alpha}{2}}$

  $\tan\frac{a}{2}=\pm\sqrt{\frac{1-\cos a}{1+\cos a}}$

- 万能公式

  $\sin a=\frac{2\tan\frac{a}{2}}{1+\tan^2\frac{a}{2}}$

  $\cos a=\frac{1-\tan^2\frac{a}{2}}{1+\tan^2\frac{a}{2}}$

  $\tan a=\frac{2\tan\frac{a}{2}}{1-\tan^2\frac{a}{2}}$

三角函数与向量

- 向量的数量积(内积) $a\cdot b=|a||b|\cos\langle a,b\rangle$
- 向量 a 在向量 b 上的投影 $|a|\cos\langle a,b\rangle$
- $a\perp b\Leftrightarrow a\cdot b=0\Leftrightarrow|a|\cos\langle a,b\rangle=0$
- 向量加减内积运算满足交换律，结合律，分配律

解题技巧

- 一个包含sin和cos的算式，可以除以$\sin^2x+\cos^2x$，然后分子分母同时除以$\cos^2x$，变成只有tan的算式
- 同时有α和β的方程组，可以写成一边是α另一边是β，然后利用$\sin^2\alpha+\cos^2\alpha=1$消去一个角度
- 三角函数换算表。查表用，无需记忆。严格讲每个根号前应有正负号。

函数	sin	cos	tan	cot	sec	csc
$\sin\theta$	$\sin\theta$	$\sqrt{1-\cos^2\theta}$	$\frac{\tan\theta}{\sqrt{1+\tan^2\theta}}$	$\frac{1}{\sqrt{1+\cot^2\theta}}$	$\frac{\sqrt{\sec^2\theta-1}}{\sec\theta}$	$\frac{1}{\csc\theta}$
$\cos\theta$	$\sqrt{1-\sin^2\theta}$	$\cos\theta$	$\frac{1}{\sqrt{1+\tan^2\theta}}$	$\frac{\cot\theta}{\sqrt{1+\cot^2\theta}}$	$\frac{1}{\sec\theta}$	$\frac{\sqrt{\csc^2\theta-1}}{\csc\theta}$
$\tan\theta$	$\frac{\sin\theta}{\sqrt{1-\sin^2\theta}}$	$\frac{\sqrt{1-\cos^2\theta}}{\cos\theta}$	$\tan\theta$	$\frac{1}{\cot\theta}$	$\sqrt{\sec^2\theta-1}$	$\frac{1}{\sqrt{\csc^2\theta-1}}$
$\cot\theta$	$\frac{\sqrt{1-\sin^2\theta}}{\sin\theta}$	$\frac{\cos\theta}{\sqrt{1-\cos^2\theta}}$	$\frac{1}{\tan\theta}$	$\cot\theta$	$\frac{1}{\sqrt{\sec^2\theta-1}}$	$\sqrt{\csc^2\theta-1}$
$\sec\theta$	$\frac{1}{\sqrt{1-\sin^2\theta}}$	$\frac{1}{\cos\theta}$	$\sqrt{1+\tan^2\theta}$	$\frac{\sqrt{1+\cot^2\theta}}{\cot\theta}$	$\sec\theta$	$\frac{\csc\theta}{\sqrt{\csc^2\theta-1}}$
$\csc\theta$	$\frac{1}{\sin\theta}$	$\frac{1}{\sqrt{1-\cos^2\theta}}$	$\frac{\sqrt{1+\tan^2\theta}}{\tan\theta}$	$\sqrt{1+\cot^2\theta}$	$\frac{\sec\theta}{\sqrt{\sec^2\theta-1}}$	$\csc\theta$