高等数学复习笔记

本文只讲重要概念，过于简单的不再重复。

空间解析几何

向量

模

向量的模$|(x,y,z)| = \sqrt{x^2+y^2+z^2}$

其几何意义为向量的长度

点乘

$$(x_1,y_1,z_1)\cdot(x_2,y_2,z_2) = x_1\times x_2 + y_1\times y_2 + z_1\times z_2$$

其几何意义为两个向量的模的乘积再乘以两向量夹角的余弦。也代表A向量在B向量的投影再乘以B向量。

其物理意义为A向量在B向量方向做的功。

叉乘

$$(x_1,y_1,z_1)\times(x_2,y_2,z_2) = \begin{bmatrix} i & j & k \\ x_1 & y_1 & z_1 \\ x_2 & y_2 & z_2 \end{bmatrix}$$

其几何意义为与两个向量都垂直的新向量，其方向符合右手螺旋法则，其长度为两向量围成的平行四边形的面积，即向量的模的积再乘以夹角正弦。

叉乘满足反交换律和分配律。

混合积

$$(x_1,y_1,z_1)\cdot[(x_2,y_2,z_2)\times(x_3,y_3,z_3)] = \begin{bmatrix} x_1 & y_1 & z_1 \\ x_2 & y_2 & z_2 \\ x_3 & y_3 & z_3 \end{bmatrix}$$

其几何意义为三个向量围成的六面体的体积，也是三棱锥体积的六倍。三向量共面。

平面

平面一般表达式

$$Ax+By+Cz+D=0$$

其法向量为(A,B,C)，也就是平面的垂线的方向

点法式

$A(x-x_0)+B(y-y_0)+C(z-z_0)=0$

其中(x_0,y_0,z_0)是平面上任意一点

截距式

$\frac{x}{a}+\frac{y}{b}+\frac{z}{c}=1$

其中$(a,0,0),(0,b,0),(0,0,c)$为平面在x,y,z轴的截距

点和平面的距离

$d=\frac{|Ax_0+By_0+Cz_0+D|}{\sqrt{A^2+B^2+C^2}}$

直线

直线标准表达式

$\begin{cases}A_1x+B_1y+C_1z+D_1=0\\A_2x+B_2y+C_2z+D_2=0\end{cases}$

其几何意义为两个平面相交成为一条直线。

其方向和两平面的法向量都垂直，所以为$(A_1,B_1,C_1)\times(A_2,B_2,C_2)$。

对称方程

$\frac{x-x_0}{m}=\frac{y-y_0}{n}=\frac{z-z_0}{p}$

(m,n,p)为直线的方向，都不能为0

参数方程

$\begin{cases}x=x_0+mt\\y=y_0+nt\\z=z_0+pt\end{cases}$

直线和平面垂直

直线的方向和平面法向量点乘为0

直线和平面平行

直线的方向和平面法向量叉乘为0

点和直线的距离

公式很复杂，一般不作为考点。

求极限

洛必达法则

如果$f(x)$和$g(x)$在i处都趋近于0，$\lim\limits_{x\to i}f(x)/g(x)=\lim\limits_{x\to i}f'(x)/g'(x)$

解读：因为两条曲线都趋近于0，靠近0点附近近似于两条直线，直线的斜率的比值就是直线上的点的y的比值。

夹逼定理

$f(x) <= g(x) <= h(x)$，且$f(x)$和$h(x)$收敛于y，那么$g(x)$也收敛于y。

单调有限序列必有极限

夹逼定理的特例

罗尔定理

f(a)=f(b)，f在[a,b]间连续可导，则a,b间必有一点f'(c)=0

拉格朗日中值定理

就是把罗尔定理拉斜了。

柯西中值定理

就是[a,b]区间f(x),g(x)两个函数的导数的比值，至少有一点等于$\frac{f(b)-f(a)}{g(b)-g(a)}$

求导

基本公式

$$
\begin{aligned}
(C)' &= 0 \\
(x^n)' &= nx^{n-1} \\
(\sin x)' &= \cos x \\
(\cos x)' &= \sin x \\
(e^x)' &= e^x \\
(\ln x)' &= \frac{1}{x}
\end{aligned}
$$

其它公式

$$
\begin{aligned}
(a^x)' &= \ln a \times a^x \\
(log_a x)' &= \frac{1}{x \ln a} \\
(\tan x)' &= sec^2 x \\
(\cot x)' &= -\csc^2 x \\
(\sec x)' &= \sec x \tan x \\
(\csc x)' &= -\csc x \cot x \\
(\arcsin x)' &= \frac{1}{\sqrt{1-x^2}} \\
(\arccos x)' &= -\frac{1}{\sqrt{1-x^2}} \\
(\arctan x)' &= \frac{1}{1+x^2} \\
(\text{arccot}\, x)' &= -\frac{1}{1+x^2}
\end{aligned}
$$

运算法则

- $(u+v)' = u' + v'$
- $(uv)' = u'v + v'u$
- $(\frac{u}{v})' = \frac{u'v - v'u}{v^2}$
- $f[g(x)]' = f'[g(x)]g'(x)$
- $\frac{dx}{dy} = \frac{1}{\frac{dy}{dx}}$
  反函数的导数等于直接函数的倒数，但注意反函数的x是原函数的y
  例：求$(\arcsin x)'$
  $$x = \sin(\arcsin x)$$
  $$\text{两边求导}1 = cos(\arcsin x) * (\arcsin x)'$$
  $$(\arcsin x)' = \frac{1}{cos(\arcsin x)} = \frac{1}{\sqrt{1 - \sin^2(\arcsin x)}} = \frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$$
  也可以便捷运算：
  $$(\sin x)' = \cos x$$
  $$(\arcsin x)' = \frac{1}{\cos y} = \frac{1}{cos(arcsinx)} = \frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$$

求导技巧

- y=f(x)求导，有时可以先ln(y)=ln(f(x))，两边求导后再消除y。例如：
  $$y = x^x$$
  $$\ln y = x \ln x$$
  $$\frac{1}{y}y' = 1 + \ln x$$
  $$y' = y(1 + lnx)$$
  $$y' = x^x + x^x \ln x$$

泰勒级数

泰勒公式是用多项式逼近原函数，其思想为：如果两个数组在某x_0处值相同，一阶导数相同，二阶导数相同...N阶导数都相同，那么这两条曲线将十分拟合。

$$f(x) = f(x_0) + f'(x_0)(x - x_0) + \frac{f''(x_0)}{2!}(x - x_0)^2 + \cdots + \frac{f^{(n)}(x_0)}{n!}(x - x_0)^n + o(x^n)$$

麦克劳林公式是泰勒公式当$x_0 = 0$的特殊情况

$$f(x) = f(0) + f'(0)x + \frac{f''(0)}{2!}x^2 + \cdots + \frac{f^{(n)}(0)}{n!}x^n + o(x^n)$$

$$e^x = 1 + x + \frac{1}{2!}x^2 + \cdots + \frac{1}{n!}x^n + o(x^n)$$

$$\sin x = x - \frac{1}{3!}x^3 + \frac{1}{5!}x^5 - \cdots + o(x^n)$$

$$\cos x = 1 - \frac{1}{2!}x^2 + \frac{1}{4!}x^4 + \cdots + o(x^n)$$

$$e^{i\theta} = \cos\theta + i\sin\theta$$

傅里叶级数

对于循环区间为$[-\pi, \pi]$的周期函数，傅里叶级数是利用$1, \sin x, \cos x, \sin 2x, \cos 2x, \cdots, \sin nx, \cos nx$相互之间的全正交性，将函数的时域变换为频域。

全正交：

- $\int_{-\pi}^{\pi} 1 \times \sin kx dx = 0$
- $\int_{-\pi}^{\pi} 1 \times \cos kx dx = 0$
- $\int_{-\pi}^{\pi} \sin jx \sin kx dx = 0 \quad (j \neq k)$
- $\int_{-\pi}^{\pi} \cos jx \cos kx dx = 0 \quad (j \neq k)$
- $\int_{-\pi}^{\pi} \sin jx \cos kx dx = 0$

时域和频域可以相互转化，这样在工程上，可以先把数字信号转为频域，然后处理（比如降低频率女声转为男声），然后再重新转为时域信号。

$$f(x) = \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} (a_n \cos nx + b_n \sin nx)$$

$$a_n = \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(x) \cos nx dx \quad (n = 0, 1, 2, 3, \cdots)$$

$$b_n = \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(x) \sin nx dx \quad (n = 1, 2, 3, 4, \cdots)$$

- 对于同样的频率n，为什么既有$a_n \cos nx$，又有$b_n \sin nx$？原因是$\sqrt{a_n^2 + b_n^2}$决定了该频率的强度，而两者之间的比例关系决定了该频率的相位。所以也可以表示为 $$f(x) = \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} a_n \sin(nx + \omega_n)$$
- 如果f(x)在$[-\pi, \pi]之间只有有限个第一类间断点并且只有有限个极值点，那么其傅里叶级数在连续点收敛于f(x)，在第一类间断点收敛于左极限和右极限的平均值。

方向导数和梯度

如果$f(x,y)$在(x_0,y_0)处可微分，则该函数在该点沿任意方向l的方向导数为

$\frac{\partial f}{\partial l}|_{(x_0,y_0)} = f_x(x_0,y_0) \cos\alpha + f_y(x_0,y_0) \cos\beta$

其中$(\cos\alpha, \cos\beta)$是l的方向余弦，即$(\cos\alpha, \cos\beta) = \frac{l}{|l|}$

其几何意义为沿着l方向每移动一单位，f的函数值变化的单位数。

梯度向量$grad\ f(x,y) = \frac{\partial f}{\partial x} i + \frac{\partial f}{\partial y} j$

其几何意义为，f在这个方向变化最快

极值

极值条件

当函数f(x)在某区间可导时，$f'(x_0) = 0$的点是可能是极值点。

- 当$f''(x_0) > 0$，$f(x)$在x_0点取极小值。
- 当$f''(x_0) < 0$，$f(x)$在x_0点取极大值。
- 当$f''(x_0) = 0$，$f(x)$在x_0点是否极值看$f'''(x_0)$，$f''''(x_0)$，以此类推。
- 易错点：$f(x) = x^3$的导数$3x^2$在$x = 0$点为0，但不是极值点

条件极值（拉格朗日乘值法）

求f(x,y)在某区间，满足g(x,y)=0限制条件的极值。

令$F(x,y,\lambda) = f(x,y) + \lambda g(x,y)$，分别对$x, y, \lambda$求偏导数。满足三个偏导数都为0的点为条件极值点。

偏微分

二元函数二重偏微分有dxdx,dxdy,dydx,dydy。其中dxdy=dydx

积分

三种积分方法：凑元法，第二类换元法，分部积分法

凑微分法

$\int f(g(x))g'(x)dx = [\int f(u)du]_{u=g(x)} = F(g(x))$

本质上是对$[F[g(x)]]' = F'[g(x)]g'(x)$的逆运算。

例：

$$\int \sin^3 x dx = \int -sin^2 x d\cos x$$
$$= \int (\cos^2 x - 1) d\cos x$$
$$= \int \cos^2 x d\cos x - \int 1 d\cos x$$
$$= \frac{1}{3}\cos^3 x - cosx$$

第二类换元法

$\int f(x)dx \overset{x=\phi(t)}{=} [\int f(\phi(t))\phi'(t)dt]_{t=\phi^{-1}(t)}$

例：

$$\int \sqrt{a^2 - x^2} dx$$
$$令x = a\sin t \quad (-\frac{\pi}{2} < t < \frac{\pi}{2})$$
$$原式 = \int a\cos t \times a\cos t dt$$
$$= a^2 \int \cos^2 t dt$$
$$= a^2 \int \frac{1+\cos 2t}{2} dt$$
$$= \frac{a^2}{2}t + \frac{a^2}{4}\sin 2t + C$$
$$= \frac{a^2}{2}\arcsin\frac{x}{a} + \frac{a^2}{2}\sin t\cos t + C$$
$$= \frac{a^2}{2}\arcsin\frac{x}{a} + \frac{1}{2}\sqrt{a^2 - x^2} + C$$

分部积分法

$\int uv'dx = uv - \int vu'dx$

本质上是$(uv)' = u'v + v'u$其中等号右边一部分容易积分另一部分不容易积分时，把其中一部分换成另一部分。

$$\int x\cos x dx = \int x d\sin x$$
$$= x\sin x - \int \sin x dx \quad \backslash$$
$$= x\sin x + \cos x + C$$

有理函数的积分

- $\frac{P(x)}{Q(x)}$一定可以积分，其中$P(x), Q(x)$是x的多项式
- 三角有理函数$R(\sin x, \cos x)$可以通过万能公式转变为t的多项式来积分
    - $\tan\frac{x}{2} = u$
    - $\sin x = \frac{2\tan\frac{x}{2}}{1+\tan^2\frac{x}{2}} = \frac{2u}{1+u^2}$
    - $\cos x = \frac{1-u^2}{1+u^2}$
    - $x = 2\arctan u \Rightarrow dx = \frac{2du}{1+u^2}$

例：

$$\int \frac{1+\sin x}{\sin x(1+\cos x)}dx = \int \frac{1+\frac{2u}{1+u^2}}{\frac{2u}{1+u^2}(1+\frac{1-u^2}{1+u^2})} \times \frac{2}{1+u^2}du$$
$$= \frac{1}{4}u^2 + u + \frac{1}{2}\ln|u| + C$$
$$= \frac{1}{4}(\tan\frac{x}{2})^2 + \tan\frac{x}{2} + \frac{1}{2}\ln|\tan\frac{x}{2}| + C$$

常用积分技巧

- 有$\sqrt{a^2-x^2}, \sqrt{a^2+x^2}, \sqrt{x^2-a^2}$等出现的，可以用变换三角形，将x设为$a\sin t, a\cos t, a\sec t, a\tan t$等。
  利用公式$1-\sin^2 x = \cos^2 x$，$1+\tan^2 x = \sec^2 x$来消去根号。
- $\frac{g(x)}{f(x)}$形式积分，看一下f(x)是否可以分解因式成$u(x) \times v(x)$，如果可以拆项后分别积分
- $f(x)\sin x, f(x)cos(x)$等的积分，经常可以把$\sin x dx$变成$d\cos x$来降次
- 如被积函数为商形式，若分子次数比分母小，可试用倒置换 $x = \frac{1}{t}$

多元函数积分

多元函数定积分，可以根据曲面的形状，先积x再积y，或者先积y再积x

微分方程

微分方程是一个很深的话题。最基础的方法是分离变量法。把x和dx放在等号左侧，把y和dy放在等号右侧，分别积分。