算法设计与分析

黄刘生

中国科学技术大学计算机系
国家高性能计算中心（合肥）

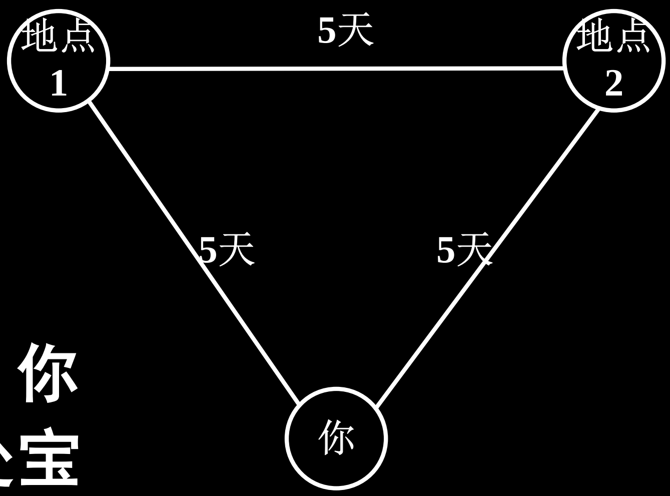
2008.8.19

第一部分

概率算法

Ch.1 绪论

§1.1 引言



1. 故事：想象自己是神化故事的主人公，你有一张不易懂的地图，上面描述了一处宝藏的藏宝地点。经分析你能确定最有可能的两个地点是藏宝地点，但二者相距甚远。假设你如果已到达其中一处，就立即知道该处是否为藏宝地点。你到达两处之一地点，以及从其中一处到另一处的距离是5天的行程。进一步假设有一条恶龙，每晚光顾宝藏并从中拿走一部分财宝。假设你取宝藏的方案有两种：

§1.1 引言

方案1. 花4天的时间计算出准确的藏宝地点，然后出发寻宝，一旦出发不能重新计算

方案2. 有一个小精灵告诉你地图的秘密，但你必须付给他报酬，相当于龙3晚上拿走的财宝

Prob 1.1.1 若忽略可能的冒险和出发寻宝的代价，你是否接受小精灵的帮助？

显然，应该接受小精灵的帮助，因为你只需给出3晚上被盗窃的财宝量，否则你将失去4晚被盗财宝量。

但是，若冒险，你可能做得更好！

§1.1 引言

设x是你决定之前当日的宝藏价值，设y是恶龙每晚盗走的宝藏价值，并设x>9y

方案1：4天计算确定地址，行程5天，你得到的宝藏价值为：x-9y

方案2：3y付给精灵，行程5天失去5y，你得到的宝藏价值为：x-8y

方案3：投硬币决定先到一处，失败后到另一处(冒险方案)

一次成功所得：x-5y，机会1/2

二次成功所得：x-10y，机会1/2

期望赢利：x-7.5y

2. 意义

该故事告诉我们：当一个算法面临某种选择时，有时随机选择比耗时做最优选择更好，尤其是当最优选择所花的时间大于随机选择的平均时间的时侯

显然，概率算法只能是期望的时间更有效，但它有可能遭受到最坏的可能性。

3. 期望时间和平均时间的区别

- **确定算法的平均执行时间**

  输入规模一定的所有输入实例是等概率出现时，算法的平均执行时间。

- **概率算法的期望执行时间**

  反复解同一个输入实例所花的平均执行时间。

因此，对概率算法可以讨论如下两种期望时间

① **平均的期望时间**：所有输入实例上平均的期望执行时间

② **最坏的期望时间**：最坏的输入实例上的期望执行时间

4. 例子

① 快速排序中的随机划分

要求学生写一算法，由老师给出输入实例，按运行时间打分，大部分学生均不敢用简单的划分，运行时间在1500-2600ms，三个学生用概率的方法划分，运行时间平均为300ms。

② 8皇后问题

系统的方法放置皇后(回溯法)较合适，找出所有92个解 $O(2^n)$，若只找92个其中的任何一个解可在线性时间内完成O(n)。

随机法：随机地放置若干皇后能够改进回溯法，特别是当n较大时

③ 判断大整数是否为素数

确定算法无法在可行的时间内判断一个数百位十进制数是否素数，否则密码就不安全。

概率算法将有所作为：若能接受一个任意小的错误的概率

5. 概率算法的特点

(1) 不可再现性

在同一个输入实例上，每次执行结果不尽相同，例如

① N-皇后问题

概率算法运行不同次将会找到不同的正确解

② 找一给定合数的非平凡因子

每次运行的结果不尽相同，但确定算法每次运行结果必定相同

(2) 分析困难

要求有概率论，统计学和数论的知识

6. 约定

随机函数uniform：<u>随机</u>，<u>均匀</u>，<u>独立</u>

① 设a，b为实数，a<b,

uniform(a, b) 返回x，$a \le x < b$

② 设i，j为整数，i≤j,

uniform(i..j)=k, $i \le k \le j$

③ 设X是非空有限集,

uniform(X) $\in$ X

例1：设p是一个素数，a是一个整数满足1≤a<p， a模除p的指数(index)是满足$a^i \equiv 1 \pmod{p}$的最小正整数i。它等于集合$X=\{a^j \bmod p \mid j \ge 1\}$的势，即$i=|X|$。

例如，2模除31的指数等于5：$2^5 \bmod 31=1$，

$X=\{2^1 \bmod 31,\ 2^2 \bmod 31,\ 2^3 \bmod 31,\ 2^4 \bmod 31,\ 2^5 \bmod 31\}$；

5模除31的指数是3，即$5^3 \bmod 31 = 1$，

3模除31的指数是30。

由费马(Fermat)定理($a^{p-1} \equiv 1 \pmod{p}$)可知，a模p的指数总是恰好整除p-1.

例如，设p=31，若a=2，则30÷5=6;

若a=5，则30÷3=10。

因此，X中的j至多为p-1，由此可得一种在X中随机，均匀和独立地取一个元素的算法。

```
ModularExponent(a, j, p){
    //求方幂模s=a^j mod p, 注意先求a^j可能会溢出
    s ← 1;
    while j>0 do {
        if (j is odd) s ← s·a mod p;
        a ← a^2 mod p;
        j ← j div 2;
    }
    return s;
}

Draw (a, p) {
    // 在X中随机取一元素
    j ← uniform(1..p-1);
    return ModularExponent(a, j, p); // 在X中随机取一元素
}
```

- **伪随机数发生器**

  在实用中不可能有真正的随机数发生器，多数情况下是用伪随机数发生器代替。

  大多数伪随机数发生器是基于一对函数：

  S: X → X, 这里X足够大，它是种子的值域

  R: X → Y, Y是伪随机数函数的值域

  使用S获得种子序列：$x_0=g$, $x_i=S(x_{i-1})$, $i>0$

  然后使用R获得伪随机序列：$y_i=R(x_i)$, $i \geq 0$

  该序列必然是周期性的，但只要S和R选的合适，该周期长度会非常长。

  TC中可用rand()和srand(time), 用GNU C更好

§ 1.2 概率算法的分类

1. **基本特征**

   随机决策

   在同一实例上执行两次其结果(或过程)可能不同

   在同一实例上执行两次的时间亦可能不太相同

2. **分类**

   Numerical, Monte Carlo, Las Vegas, Sherwood.

   很多人将所有概率算法(尤其是数字的概率算法)称为Monte Carlo算法

§ 1.2 概率算法的分类

① 数字算法

随机性被最早用于求数字问题的近似解

例如，求一个系统中队列的平均长度的问题，确定算法很难得到答案

- 概率算法获得的答案一般是近似的，但通常算法执行的时间越长，精度就越高，误差就越小
- 使用的理由
  - 现实世界中的问题在原理上可能就不存在精确解

    例如，实验数据本身就是近似的，一个无理数在计算机中只能近似地表示
  - 精确解存在但无法在可行的时间内求得

    有时答案是以置信区间的形式给出的

§ 1.2 概率算法的分类

② **Monte Carlo算法 (MC算法)**

蒙特卡洛算法1945年由J. Von Neumann进行核武模拟提出的。它是以概率和统计的理论与方法为基础的一种数值计算方法，它是双重近似：一是用概率模型模拟近似的数值计算，二是用伪随机数模拟真正的随机变量的样本。

这里我们指的MC算法是： 若问题只有1个正确的解，而无近似解的可能时使用MC算法

例如，判定问题只有真或假两种可能性，没有近似解

因式分解，我们不能说某数几乎是一个因子

- **特点**：MC算法总是给出一个答案，但该答案未必正确，成功(即答案是正确的)的概率正比于算法执行的时间
- **缺点**：一般不能有效地确定算法的答案是否正确

§ 1.2 概率算法的分类

③ **Las Vegas算法 (LV算法)**

LV算法绝不返回错误的答案。

- **特点：获得的答案必定正确，但有时它仍根本就找不到答案。**

和MC算法一样，成功的概率亦随算法执行时间增加而增加。无论输入何种实例，只要算法在该实例上运行足够的次数，则算法失败的概率就任意小。

④ **Sherwood算法**

Sherwood算法总是给出正确的答案。

当某些确定算法解决一个特殊问题平均的时间比最坏时间快得多时，我们可以使用Sherwood算法来减少，甚至是消除好的和坏的实例之间的差别。

Ch.2 数字概率算法

这类算法主要用于找到一个数字问题的近似解

§ 2.1 π值计算

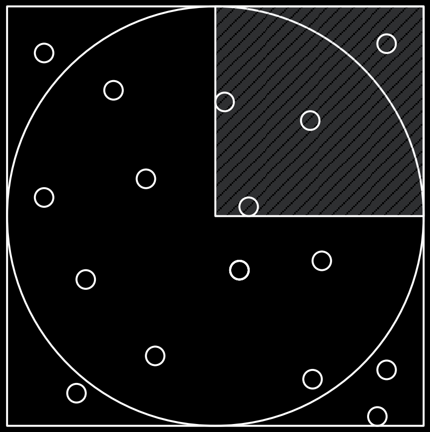
- 实验：将n根飞镖随机投向一正方形的靶子，计算落入此正方形的内切圆中的飞镖数目k。

  假定飞镖击中方形靶子任一点的概率相等(用计算机模拟比任一飞镖高手更能保证此假设成立)

  设圆的半径为r，面积$s_1 = \pi r^2$； 方靶面积$s_2=4r^2$

  由等概率假设可知落入圆中的飞镖和正方形内的飞镖平均比为：

$$\frac{k}{n} = \frac{\pi r^2}{4r^2} = \frac{\pi}{4}$$



由此知：

$$\pi \approx 4k/n \quad k = \frac{\pi n}{4}$$

§ 2.1 π值计算

- **求π近似值的算法**

为简单起见，只以上图的右上1/4象限为样本

```
Darts (n) {
    k ← 0;
    for i ← 1 to n do {
            x ← uniform(0, 1);
            y ← uniform(0, 1); // 随机产生点(x,y)
            if (x² + y² ≤ 1) then k++; //圆内
    }
    return 4k/n;
}
```

实验结果： π=3.141592654

n = 1000万: 3.140740, 3.142568 (2位精确)

n = 1亿: 3.141691, 3.141363 (3位精确)

n = 10亿: 3.141527, 3.141507 (4位精确)

§ 2.1 π值计算

求π近似值的算法

Ex.1 若将y ← uniform(0, 1) 改为 y ← x, 则上述的算法估计的值是什么？

§ 2.2 数字积分 (计算定积分的值)

Monte Carlo积分(但不是指我们定义的MC算法)

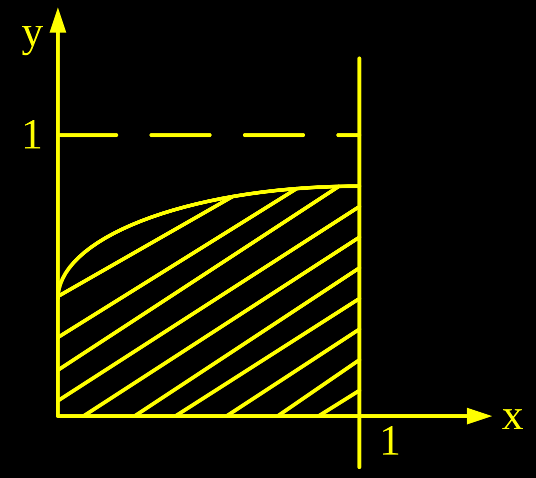
1、概率算法1

设f: [0, 1] → [0, 1]是一个连续函数，则由曲线y=f(x), x轴, y轴和直线x=1围成的面积由下述积分给出：

$$S = \int_0^1 f(x)dx$$

向单位面积的正方形内投镖n次，落入阴影部分的镖的数目为k，则

$$\frac{k}{n} = \frac{S}{1} => S = k/n$$



显然，只要n足够大 $S -> k/n$

§ 2.2 数字积分 (计算定积分的值)

1. **概率算法1**

```
HitorMiss (f, n) {
    k ← 0;
    for i ← 1 to n do {
            x ← uniform(0, 1);
            y ← uniform(0, 1);
            if y ≤ f(x) then k++;
    }
    return k/n;
}
```

Note: $\int_0^1 \sqrt{1-x^2}\,dx$ 是S/4的面积，∵ π =S, ∴ $\pi = 4\int_0^1 \sqrt{1-x^2}\,dx$

§ 2.2 数字积分 (计算定积分的值)

1. 概率算法1

Ex2. 在机器上用 $4\int_0^1 \sqrt{1-x^2}\,dx$ 估计π值，给出不同的n值及精度。

Ex3. 设a, b, c和d是实数，且a ≤ b, c ≤ d, f:[a, b] → [c, d]是一个连续函数，写一概率算法计算积分：

$$\int_a^b f(x)dx$$

注意，函数的参数是a, b, c, d, n和f, 其中f用函数指针实现，请选一连续函数做实验，并给出实验结果。

§ 2.2 数字积分 (计算定积分的值)

1. 概率算法1

*Ex4. 设ε,δ是(0,1)之间的常数，证明：

若I是 $\int_0^1 f(x)dx$ 的正确值，h是由HitorMiss算法返回的值，则当$n \geq I(1-I)/\varepsilon^2\delta$时有：

$$Prob[|h-I| < \varepsilon] \geq 1 - \delta$$

上述的意义告诉我们：$Prob[|h-I| \geq \varepsilon] \leq \delta$, 即：当$n \geq I(1-I)/\varepsilon^2\delta$时，算法的计算结果的绝对误差超过ε的概率不超过δ，因此我们根据给定ε和δ可以确定算法迭代的次数

$$n = \frac{I(1-I)}{\varepsilon^2\delta} \leq \left\lceil \frac{1}{4\varepsilon^2\delta} \right\rceil \quad (\because I(1-I) \leq \frac{1}{4})$$

解此问题时可用切比雪夫不等式，将I看作是数学期望。

§ 2.2 数字积分 (计算定积分的值)

2. **概率算法2**

更有效的概率算法是：在积分区间上随机均匀地产生点，求出这些点上的函数值的算术平均值，再乘以区间的宽度：

$$\int_a^b f(x)dx = (b-a)\frac{1}{n}\sum_{i-1}^{n} f(x_i),\ a \le x_i \le b$$

```
Crude (f, n, a, b) {
    sum ← 0;
    for i ← 1 to n do {
            x ← uniform(a, b);
            sum ← sum + f(x);
    }
    return (b-a)sum/n;
}
```

§ 2.2 数字积分 (计算定积分的值)

2. 概率算法2

用HitorMiss和Crude运行三次的结果为：

$$n = 1\text{亿}\begin{cases} hit & 3.141855,\ 3.141422,\ 3.141434 \\ crude & 3.141662,\ 3.141486,\ 3.141527 \end{cases}$$

假定 $\int_a^b f(x)dx$ 和 $\int_a^b f^2(x)dx$ 存在，由算法求得的估算值的方差反比于点数n。当n足够大时，估计的分布近似为正态分布。

对于给定的迭代次数n，Crude算法的方差不会大于HitorMiss的方差。但不能说，Crude算法总是优于HitorMiss。因为后者在给定的时间内能迭代的次数更多。例如，计算π值时，Crude需计算平方根，而用投镖算法darts时无需计算平方根。

§ 2.2 数字积分 (计算定积分的值)

3. **确定的算法**

梯形算法

将区间分为n-1个子区间，每个子区间内的长度为δ，

$$积分值=\delta(f(a+\delta)+f(a+2\delta)+...+\frac{f(a)+f(b)}{2})$$

```
Trapezoid (f, n, a, b) {
    // 假设 n ≥ 2
    delta ← (b-a)/(n-1);
    sum ← (f(a) + f(b))/2;
    for x ← a+delta step delta to b – delta do
            sum ← sum + f(x)
    return sum × delta;
}
```

§ 2.2 数字积分 (计算定积分的值)

3. 确定的算法

当n=100, π=3.140399

当n=1,000, π=3.141555

当n=10,000, π=3.141586

当n=100,000, π=3.141593

一般地，在同样的精度下，梯形算法的迭代次数少于MC积分，但是

① 有时确定型积分算法求不出解：例如，

$f(x)=\sin^2((100)!\ \pi x)$, $\int_0^1 f(x)dx = \frac{1}{2}$ 。

但若用梯形算法，当2 ≤n≤101时，返回值是0。若用MC积分则不会发生该类问题，或虽然发生，但概率小得多。

§ 2.2 数字积分 (计算定积分的值)

② 多重积分

在确定算法中，为了达到一定的精度，采样点的数目随着积分维数成指数增长，例如，一维积分若有100个点可达到一定的精度，则二维积分可能要计算100^2个点才能达到同样的精度，三维积分则需计算100^3个点。(系统的方法)

但概率算法对维数的敏感度不大，仅是每次迭代中计算的量稍增一点，实际上，MC积分特别适合用于计算4或更高维数的定积分。

若要提高精度，则可用混合技术：部分采用系统的方法，部分采用概率的方法

§ 2.3 概率计数

上一节可以认为，数字概率算法被用来近似一个实数，本节可用它们来估计一个整数值。例如，设X为有限集，若要求X的势|X|，则当X较大时，枚举显然不现实。

1. 问题：随机选出25人，你是否愿意赌其中至少有两个人生日相同吗？直觉告诉我们，一般人都不愿意赌其成立，但实际上成立的概率大于50%。

§ 2.3 概率计数

一般地，从n个对象中选出k个互不相同的对象，若考虑选择的次序，则不同的选择有 $\frac{n!}{(n-k)!}$ 种；若允许重复选取同一对象，则不同的选法共有 n^k 种。

因此，从n个对象(允许同一对象重复取多次)中随机均匀地选择出的k个对象互不相同的概率是：$\frac{n!}{(n-k)!n^k}$，注意a，b和b，a是不同的取法。由此可知，上述问题中，25个人生日互不相同的概率是：

$$\frac{365!}{340!365^{25}} \quad n=365, k=25$$

这里假设：不考虑润年，一年中人的生日是均匀分布的。

§ 2.3 概率计数

由Stirling公式知： $n! = \sqrt{2\pi n}(n/e)^n(1 + \frac{1}{12n} + \theta(n^2))$

$$\ln(1+x) = x - \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{3} - \theta(x^4) \quad when \quad -1 < x < 1$$

可得 $$\frac{n!}{(n-k)!n^k} = e^{-k(k-1)/2n - k^3/6n^2 \pm O(\max(k^2/n^2, k^4/n^3))}$$

假定 $1 \ll k \ll n$ **近似地** $\frac{n!}{(n-k)!n^k} \approx e^{-k^2/2n}$

实际上，若 $k \approx \alpha\sqrt{n}, \alpha = \sqrt{2\ln 2} \approx 1.177, k = 1.177\sqrt{365} \approx 22.5$

$e^{-k^2/2n} = e^{-(2\ln 2)n/2n} = e^{-\ln 2} = 50\%$ 取23个互不相同的人

当n＝365, $k = 25$时 $e^{25^2/730} \approx e^{-0.856} \approx 0.43$ 的概率为50%

§ 2.3 概率计数

因此，随机选出25个人中生日互不相同的概率约43%，由此可知至少有两人生日相同的概率约为57%。

此例提示：有回放抽样，大集合通过第一次重复来估计集合大小。

§ 2.3 概率计数

2. **求集合X的势**

设X是具有n个元素的集合，我们有回放地随机，均匀和独立地从X中选取元素，设k是出现第1次重复之前所选出的元素数目，则当n足够大时，k的期望值趋近为 $\beta\sqrt{n}$**，这里**

$$\beta = \sqrt{\pi/2} \approx 1.253$$

利用此结论可以得出估计|X|的概率算法：

$$\beta\sqrt{n} = \sqrt{n\pi/2} = k \qquad n = \frac{2k^2}{\pi}$$

2. 求集合X的势

```
SetCount (X) {
    k ← 0; S ← Φ;
    a ← uniform(X);
    do {
            k++;
            S ← S∪{a}; a ← uniform(X);
    } while (a ∉ S)
    return 2k²/π
}
```

注意：∵k的期望值是 $\sqrt{n\pi/2}$，∴上述算法n需足够大，且运行多次后才能确定n=|X|，即取多次运行后的平均值才能是n。

该算法的时间和空间均为 $\theta(\sqrt{n})$，因为 $k=\theta(\sqrt{n})$

§ 2.3 概率计数

EX. 用上述算法，估计整数子集1~n的大小，并分析n对估计值的影响。

§ 2.3 概率计数

3. 多重集合中不同对象数目的估计

假设磁带上记录有Shakespeare全集，如何统计其中使用了多少个不同的单词？为简单起见，同一词的复数，被动语态等可作为不同项。

设N是磁带上总的单词数，n是其中不同词的数目

- **方法一：** 对磁带上的单词进行外部排序，时间$\theta(N\lg N)$,空间需求较大
- **方法二：** 在内存中建一散列表，表中只存储首次出现的单词，平均时间$O(N)$，空间$\Omega(n)$

§ 2.3 概率计数

3. 多重集合中不同对象数目的估计

- ❖ 方法三：若能忍受某种误差及已知n或N的上界M，则存在一个时空性能更好的概率算法解此问题。

设U是单词序列的集合，设参数m稍大于lgM，可令：

$$m = 5 + \lceil \lg M \rceil$$

设h：U → $\{0, 1\}^m$ 是一个散列函数，它用伪随机数的方法将U中的单词映射为长度为m的位串。(目的，减少存储量)

若y是一个长度为k的位串，用y[i]表示y的第i位，1≤i≤k；

用π(y, b), b ∈ {0, 1}来表示满足y[i]=b的最小的i，若y的位中没有哪一位等于b，则π =k+1

3. 多重集合中不同对象数目的估计

$$即:\pi(\mathrm{y},\mathrm{b})=\begin{cases} i & 使得 y[i]=b 的最小 i, \quad 1\le i\le k; \\ k+1 & y[i]\ne b, \quad\quad\quad\quad\quad 1\le i\le k; \end{cases} \quad b=0 \text{ or } 1$$

```
WordCount () {
   y[1..m+1] ← 0; // 初始化
   for 磁带上每个单词x do { //顺序读磁带
      i ← π(h(x), 1); // x的散列值中等于1的最小位置，表示x是
                      //以 00...01 打头的
                           i位
      y[i] ← 1; // 将该位置置为1
   }
   return π(y, 0); // 返回y中等于0的最小位置
}
```

(注释中：$\underbrace{00\ldots01}_{i位}$)

§ 2.3 概率计数

3. 多重集合中不同对象数目的估计

❖ 上界估计

例，不妨设m=4，$h(x_1)$=0011, $h(x_2)$=1010, $h(x_3)$=0110, $h(x_4)$=0010,

	1	2	3	4	5
y	1	1	1	0	0
	x_2	x_3	x_1 x_4		

算法返回：**k=4**

也就是说，若算法返回4，说明磁带上至少有3个单词的散列地址是以1, 01，001打头的，但绝没有以0001打头的单词。

∵一个以0001开始的随机二进制串的概率是2^{-4}=1/16

∴磁带上不太可能有多于16个互不相同的单词，即：互异单词的上界2^k

因为只要h的随机性好，则对16个不同的单词x_i，$\pi(h(x_i), 1) \neq 4$(这些单词的散列值等于1的最小位置均不为4)的概率是$(15/16)^{16} \approx 35.6\% \approx e^{-1}$(每个$x_i$不等于0001的概率的15/16，16个单词均不以0001开头的概率为35.6%)，只有此时算法才可能返回4。

§2.3 概率计数

3. 多重集合中不同对象数目的估计

实际上，若算法的返回值k为4，则n=16的概率为：

$$Prob[k=4 \mid n=16] = 31.75\%$$

❖ 下界估计

∵一个以001开始的随机二进制串的概率是2^{-3}

∴在磁带上互不相同的单词数目少于4的可能性不大，即：互不相同单词的下界2^{k-2}

因为，对4个互不相同的单词中，至少有一个是以001打头的概率为$1-(7/8)^4 \approx 41.4\%$。实际上，若算法的返回值k为4，则n=4的概率为：

$$Prob[k=4 \mid n=4] = 18.75\%$$

粗略的分析告诉我们：

磁带上互不相同的单词数目为：$2^{k-2} \sim 2^k$

实际上，算法WordCount估计的n应等于$2^k/1.54703$

❖ 性能：时间O(N)，空间：O(lgN)

§2.4 线性代数中的数字问题

例如，矩阵乘法，求逆，计算特征值和特征向量只有一些特殊的应用，概率算法会执行得比确定性算法要好。

Ch.3 Sherwood算法

Sherwood算法能够平滑不同输入实例的执行时间

- 设A是一个**确定算法**，$t_A(x)$是解某个实例x的执行时间，设n是一整数，X_n是大小为n的实例的集合

  假定X_n中每一个实例是等可能出现的，则算法A解一个大小为n的实例的平均执行时间是：$$\bar{t}_A(n) = \sum_{x \in X_n} t_A(x) / |X_n|$$

这里无法消除这样的可能性，存在一个size为n的实例x使得：

$$t_A(x) \gg \bar{t}_A(n)$$

- 设B是一个**概率算法**，对每个size为n的实例x满足：

$$t_B(x) \approx \bar{t}_A(n) + s(n)$$

这里$t_B(x)$是算法B在实例x上的期望值，s(n)是概率算法B为了取得均匀性所付出的成本。

Ch.3 Sherwood算法

虽然算法B的执行时间也可能偶然地在某一个实例x上大于 $\bar{t}_A(n)+s(n)$，但这种偶然性行为只是由于算法所做的概率选择引起的，与实例x本身没有关系。因此，不再有最坏情况的实例，但有最坏的执行时间。

算法B在一个size为n的实例集上的平均期望时间可定义为：$\bar{t}_B(n)=\sum_{x\in X_n} t_B(x)/|X_n|$

很清楚 $\bar{t}_B(n)\approx\bar{t}_A(n)+s(n)$

也就是说Sherwood算法的平均执行时间略为增加。

§ 3.1 选择与排序

在n个元素中选择第k个最小元素的算法关键在于选择划分元，有两种常用的方法：

① 精心挑选划分元，使之是一个伪中值的元素，这样可使算法的最坏执行时间是O(n)

② 取当前搜索区间的第一个元素作划分元，平均时间为O(n)，但最坏时间是$O(n^2)$。由于此方法简单，故平均性能较前者好。

该类确定算法的特点：设T[1..n]互不相同，算法的执行时间不是依赖于数组元素的值，而是依赖于元素间的相对次序，因此，表达时间的函数不只是依赖于n，而且还依赖于数组元素的排列δ

设 $t_p(n, \delta)$ —— 使用伪中值算法的执行时间

$t_s(n, \delta)$ —— 使用简单算法的执行时间

对多数的δ，$\forall n$, 有 $t_s(n,\delta) < t_p(n,\delta)$

但对有的δ, $t_s(n,\delta) > t_p(n,\delta)$

§ 3.1 选择与排序

更精确地，设S_n是T中前n个数的排列的集合，$|S_n|=n!$，

定义 $\bar{t}_s(n)=\sum_{\delta\in S_n} t_s(n,\delta)/n!$，于是有：

$$(\exists C_p)(\exists n_1\in N)(\forall n\geq n_1)(\forall\delta\in S_n)[t_p(n,\delta)\leq C_p n]$$

//伪中值算法最坏时间是线性的

$$(\exists C_s \ll C_p)(\exists n_2\in N)(\forall n\geq n_2)[\bar{t}_s(n)\leq C_s n]$$

$//\bar{t}_s(n)$小于$t_p(n,\delta)$,简单算法的平均时间远小于$t_p(n,\delta)$

但是：

$$(\exists C_s')(\exists n_3\in N)(\forall n\geq n_3)(\exists\delta\in S_n)[t_s(n,\delta)\geq C_s' n^2 \gg C_p n\geq t_p(n,\delta)]$$

//存在某个实例,或说实例的某个排列使得简单算法的执行时间远远大于t_p

§ 3.1 选择与排序

- **概率算法**

  随机选择T中的元素作为划分元

  期望时间为O(n)，独立于输入实例

  注意：算法的某次执行有可能达到$O(n^2)$，但这种可能性与实例无关

  随着n的增大，这种可能性会很小。

  设$t_r(n, \delta)$是Sherwood算法的平均时间，则

$$(\exists n_0 \in N)(\forall n \geq n_0)(\forall \delta \in S_n)[t_r(n,\delta) < t_p(n,\delta)]$$

§ 3.2 随机的预处理

将选择和排序的确定算法修改为Sherwood算法很简单，但是当算法较复杂，例如它是一个缺乏文档资料的软件包的一部分时，就很难对其进行修改。注意，只有当该算法平均时间性能较优，但最坏性能较差时，才有修改的价值。

一般方法是：

① 将被解的实例变换到一个随机实例。// 预处理

② 用确定算法解此随机实例，得到一个解。

③ 将此解变换为对原实例的解。// 后处理

§ 3.2 随机的预处理

设： f: X → Y 是解某问题用到的一个函数，且平均性能较优(指相应的算法)；

∀n∈N，X_n是size为n的实例的集合

A_n是一个大小和X_n大小相同的集合，

假定在A_n中能够有效地均匀随机抽样

$A=\cup A_n$

则随机的预处理由一对函数构成：

$$u: X \times A \to X$$

$$v: A \times Y \to Y$$

u和v满足三个性质：

① $(\forall n \in N)(\forall x, y \in X_n)(\exists! r \in A_n)[u(x,r) = y]$

此性质说明原实例x可通过随机抽样变换成另一个实例y，

∃！ 表示存在且只存在一个

② $(\forall n \in N)(\forall x \in X_n)(\forall r \in A_n)[f(x) = v(r, f(u(x,r)))]$

此性质表示对y的解可变换为对原实例x的解

③ 函数u和v在最坏情况下能够有效计算

§ 3.2 随机的预处理

于是确定算法f(x)可改造为Sherwood算法：

```
RH(x) {
    // 用Sherwood算法计算f(x)
    n ← length[x]; // x的size为n
    r ← uniform(A_n); // 随机取一元素
    y ← u(x, r);  //将原实例x转化为随机实例y
    s ← f(y); // 用确定算法求y的解s
    return v(r, s); // 将s的解变换为x的解
}
```

§ 3.2 随机的预处理

例1：选择和排序的Sherwood算法

- 只需进行随机预处理

  将输入实例中元素打乱即可，相当于洗牌

  后处理无需进行

  只需调用确定的算法前先调用下述算法：

```
Shuffle (T) {
        n ← length[T];
        for i ← 1 to n-1 do {
            // 在T[i..n]中随机选1元素放在T[i]上
            j ← uniform(i..n);
            T[ i ] <—> T[ j ];
        }
}
```

例2：离散对数计算

- 离散对数计算困难使其可用于密码算法，数字签名等
- 定义：设 $a=g^x \bmod p$，记 $\log_{g,p}a=x$，称x为a的(以g为底模除p)对数。 从p，g，a计算x称为离散对数问题。
- 简单算法

① 计算 g^x 对所有的x，最多计算 $0\le x\le p-1$ 或 $1\le x\le p$，因为实际上离散对数<g>是循环群；

② 验证 $a=g^x \bmod p$ 是否成立。

```
dlog(g, a, p) { // 当这样的对数不存在时，算法返回p
    x ← 0; y ← 1;
    do {    x++;
            y ← y*g; // 计算y=g^x
    } while ( a ≠ y mod p) and (x ≠ p);
     return x
}
```

例 $\log_{2,7}3$ 无解，不存在x使 $3=2^x \bmod 7$

例2：离散对数计算

- 问题：最坏O(p)

  循环次数难以预料，当满足一定条件时平均循环p/2次

  当p=24位十进制数，循环10^{24}次，千万亿次/秒 (10^{16}次/秒) 大约算1年(10^8秒/年)

  若p是数百位十进制？随机选择都可能无法在可行的时间内求解。

- 假设有一个平均时间性能很好，但最坏情况差的确定算法求$\log_{g,p}a$，怎样用Sherwood算法求解该问题？

  设p=19, g=2

i	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14	15	16	17	18	19
$a=g^i \bmod 19$	2	4	8	16	13	17	14	9	18	17	15	11	3	6	12	5	10	1	11

当a=14, 6时，$\log_{2,19}14 = 7$, $\log_{2,19}6=14$，即用dlog求14和6的离散对数时，分别要循环7和14次，执行时间与a的取值相关。

用sherwood算法应该使得与a无关，用随机预处理的方法计算$\log_{g,p}a$

§ 3.2 随机的预处理

- **定理(见p877, § 31.6)**

  ① $\log_{g,p}(st \bmod p) = (\log_{g,p} s + \log_{g,p} t) \bmod (p-1)$

  ② $\log_{g,p}(g^r \bmod p) = r \quad \text{for } 0 \le r \le p-2$

  dlogRH(g, a, p) { // 求$\log_{g,p}a$, $a = g^x \bmod p$，求x

  // Sherwood算法

  r ← uniform(0..p-2);

  b ← ModularExponent(g, r, p); //求幂模$b=g^r \bmod p$

  c ← ba mod p; //$((g^r \bmod p)(g^x \bmod p)) \bmod p = g^{r+x} \bmod p = c$

  y ← $\log_{g,p}c$; // 使用确定性算法求$\log_{p,g}c$, y=r+x

  return (y-r) mod (p-1); // 求x

  }

Ex. 分析dlogRH的工作原理，指出该算法相应的u和v

§ 3.2 随机的预处理

- 随机预处理提供了一种加密计算的可能性

　　假定你想计算某个实例x，通过f(x)计算，但你缺乏计算能力或是缺乏有效算法，而别人有相应的计算能力，愿意为你计算(可能会收费)，若你愿意别人帮你计算，但你不愿意泄露你的输入实例x，你将如何做？

可将随机预处理使用到f的计算上：

① 使用函数u将x加密为某一随机实例y

② 将y提交给f计算出f(y)的值

③ 使用函数v转换为f(x)

　　上述过程，他人除了知道你的实例大小外，不知道x的任何信息，因为u(x,r)的概率分布(只要r是随机均匀选择的)是独立于x的。

§ 3.3 搜索有序表

设两个数组val[1..n]和ptr[1..n]及head构成一个有序的静态链表：

$$val[head] \le val[ptr[head]] \le val[ptr[ptr[head]]] \le \ldots \le val[ptr^{n-1}[head]]$$

$$\text{即}: ptr[i] = \begin{cases} \text{给出下一个关键字的下标} & \text{if val[i]非最大关键字} \\ 0 & \text{if val[i]是最大关键字} \end{cases}$$

例：

i	1	2	3	4	5	6	7
val[i]	2	3	13	1	5	21	8
ptr[i]	2	5	6	1	7	0	3
rank	2	3	6	1	4	7	5

head=4　有序表：1，2，3，5，8，13，21

§ 3.3 搜索有序表

- **折半查找：** 若val[1..n]本身有序，可用折半查找找某个给定的key，时间为O(lgn)。
- **顺序查找：** 但此表为链式结构，故最坏时间是Ω(n)。尽管如此，我们能够找到一个确定性算法，平均时间为 $O(\sqrt{n})$ 。

相应的Sherwood算法的期望时间是 $O(\sqrt{n})$ ，它虽然并不比确定性算法快，但他消除了最坏实例。

假定表中元素互不相同，且所求的关键字在表中存在，则给定x，我们是求下标i，使val[i]=x，这里 $1 \le i \le n$。

任何实例可以由两个参数刻画：

①前n个整数的排列δ

②x的rank

§ 3.3 搜索有序表

设S_n是所有n!个排列的集合，设A是一个确定性算法

(1) **t_A(n，k，δ)**表示算法**A**的执行时间，此时间与被查找元素的秩**k**，以及**val**的排列δ相关。若A是一个概率算法，则**t_A(n，k，δ)**表示算法的期望值。无论算法是确定的还是概率的，**w_A(n)**和**m_A(n)**分别表示最坏时间和平均时间，因此有：

(2) $w_A(n) = \max\{t(n,k,\delta) \mid 1 \le k \le n \ and \ \delta \in S_n\}$

(3) $$m_A(n) = \frac{1}{n \times n!} \sum_{\delta \in S_n} \sum_{k=1}^{n} t_A(n,k,\delta)$$

$k = 1, 2, \ldots, n$的概率是$1/n$，在S_n中每个排列的概率是$\dfrac{1}{n!}$

§ 3.3 搜索有序表

1. 时间为O(n)的确定算法

■ 算法

设x≥val[i]且x在表中，则从位置i开始查找x的算法为

```
Search(x, i) {    //仍可改进
    while x > val[i] do
        i ← ptr[i];
    return i;
}
```

在表val[1..n]中查找x的算法为：

```
A(x) {
    return Search(x, head);
}
```

§ 3.3 搜索有序表

性能分析

设rank(x)=k, 则：

$\hat{t}_A(n,k)$—— 算法A在n个元素的表中查找x所需的访问数组元素的次数，显然与δ无关

$w_A(n)$ —— 算法A最坏时的访问次数

$m_A(n)$ —— 算法A平均的访问次数

① $\forall n \in N, \forall k \in [1,n], \hat{t}_A(n,k) = k$

② $\forall n \in N$,若$k = n$时为最坏情况，此时$w_A(n) = n$

③ $\forall n \in N$,设$k = 1,2,\ldots,n$的概率相等，则

$$m_A(n) = \frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n}\hat{t}_A(n,k) = \frac{n+1}{2}$$

综上所述，$T(n) = O(n)$

§ 3.3 搜索有序表

2. 时间为O(n)的概率算法

■ 算法

```
D(x) {
    i ← uniform(1..n);
    y ← val[i];
    case {
        x < y: return Search(x, head); // case1
        x > y: return Search(x, ptr[i]); // case2
        otherwise: return i; // case3,   x = y
    }
}
```

§ 3.3 搜索有序表

- **性能分析(D访问数组次数)**

① 一般情况

设rank(x)=k, rank(val[i])=j

若 k < j, 则 $\hat{t}_D(n,k)=k$，属于case1，从头搜索

若 k > j, 则 $\hat{t}_D(n,k)=k-j$，属于case2，从jth最小元之后搜索

若 k = j, 则 $\hat{t}_D(n,k)=0$，属于case3

② 最坏情况

$\forall n \in N, w_D(n)?$

当$j=1, k=n$时，Search执行次数为n-1， $w_D(n)=n-1$

§ 3.3 搜索有序表

③平均情况

$\forall n \in N, m_D(n)?$

$j=1,2,\ldots,n$及$k=1,2,\ldots,n$的概率均为$\dfrac{1}{n}$

$$m_D(n)=\frac{1}{n\times n}\sum_{j=1}^{n}\sum_{k=1}^{n}\hat{t}_D(n,k)=\frac{1}{n^2}\sum_{j=1}^{n}(\sum_{k=1}^{j-1}k+\sum_{k=j+1}^{n}(k-j))$$

$$=\frac{1}{n^2}\sum_{j=1}^{n}(\frac{j(j-1)}{2}+\frac{(n-j+1)(n-j)}{2})=\frac{1}{3}n-\frac{1}{3n}\approx\frac{n}{3}$$

显然平均时间性能优于确定算法

§ 3.3 搜索有序表

3. 平均时间为 $O(\sqrt{n})$ 的确定算法

■ 算法

```
B(x) { //设x在val[1..n]中
    i ← head;
    max ← val[i]; // max初值是表val中最小值
    for j ← 1 to ⌊√n⌋ do { // 在val的前⌊√n⌋个数中找不大于x
        y ← val[ j ];        // 的最大整数y相应的下标i
        if max < y ≤x then {
            i ← j;
            max ← y;
        } //endif
    } // endfor
    return Search(x, i); // 从y开始继续搜索
}
```

§ 3.3 搜索有序表

- **性能分析**

for循环的目的：找不超过x的最大整数y，使搜索从y开始，若将val[1..n]中的n个整数看作是均匀随机分布的，则在val[1..ℓ]中求y值就相当于在n个整数中，随机地取ℓ个整数，求这ℓ个整数中不大于x的最大整数y。

可用一个与ℓ和n相关的随机变量来分析，更简单的分析如下：

设n个整数的排列满足：$a_1 < a_2 < \ldots < a_n$

将其等分为ℓ个区间：

$$\underbrace{[a_1, \ldots, a_{\frac{n}{l}}][a_{\frac{n}{l}+1}, \ldots, a_{\frac{2n}{l}}] \ldots [a_{\frac{(l-1)n}{l}+1}, \ldots, a_n]}_{l\text{个区间}}$$

§3.3 搜索有序表

若均匀随机地从上述表中取L个数，则平均每个区间中被选到1个元素（注意：因为val的随机均匀性，这里所取的ℓ个数相当于val[1.. ℓ]中的ℓ个数），因此无论x是处在哪一个区间，其平均的执行时间为：

i) 若在x的同一区间中取到的数小于等于x，则它是算法中的y，那么Search的比较次数不超过区间长度n/l。

ii) 若在x的同一区间中取到的数大于x，则在x的前一区间中的取到的数必为算法中的y，它必定小于x，且x和y的距离平均为n/l，此时Search的比较次数平均为n/l。

§ 3.3 搜索有序表

注意，在Search前需执行ℓ次循环，故有

$$m_B(n) = l + \frac{n}{l}$$

$$\text{因为}(l + \frac{n}{l})' = 1 - \frac{n}{l^2},\ (l + \frac{n}{l})'' \ge 0$$

$$\therefore 1 - \frac{n}{l^2} = 0, \text{即} l = \sqrt{n} \text{时} m_B(n) \text{最小}, \text{其值为} 2\sqrt{n}$$

因此，确定性算法中for的次数为$\sqrt{n}$，此时算法的平均时间$2\sqrt{n}$最小。

Ex. 写一Sherwood算法C，与算法A, B, D比较，给出实验结果。

Ch.4 Las Vegas 算法

- **Las Vegas和Sherwood算法比较**

{ Sherwood算法一般并不比相应的确定算法的平均性能优
Las Vegas一般能获得更有效率的算法，有时甚至是对每个实例皆如此

{ Sherwood算法可以计算出一个给定实例的执行时间上界
Las Vegas算法的时间上界可能不存在，即使对每个较小实例的期望时间，以及对特别耗时的实例的概率较小可忽略不计时。

- **Las Vegas 特点**

可能不时地要冒着找不到解的风险，算法要么返回正确的解，要么随机决策导致一个僵局。

若算法陷入僵局，则使用同一实例运行同一算法，<u>有独立的机会求出解</u>。

成功的概率随着执行时间的增加而增加。

Ch.4 Las Vegas 算法

- **算法的一般形式**

LV(x, y, success) —— x是输入的实例，y是返回的参数，success是布尔值，true表示成功，false表示失败

p(x) —— 对于实例x，算法成功的概率

s(x) —— 算法成功时的期望时间

e(x) —— 算法失败时的期望时间

一个正确的算法，要求对每个实例x， p(x)>0，更好的情况是：

$$\exists \text{常数} \delta > 0, p(x) \geq \delta$$

Ch.4 Las Vegas 算法

```
Obstinate(x) {
    repeat
            LV(x, y, success);
    until success;
    return y;
}
```

设t(x)是算法obstinate找到一个正确解的期望时间，则

$$t(x) = p(x)s(x) + (1 - p(x))(e(x) + t(x))$$

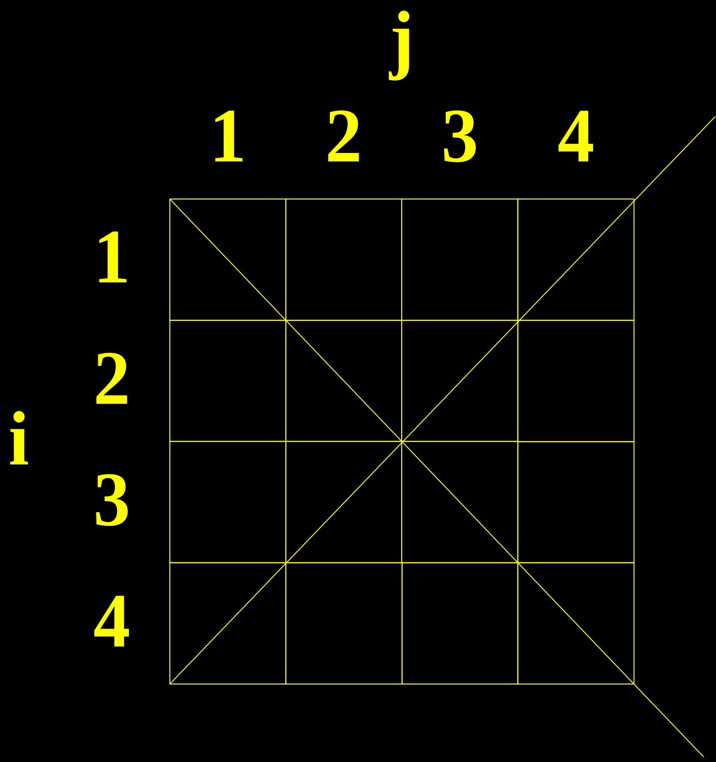
LV成功的概率　LV失败的概率

$$t(x) = s(x) + \frac{1 - p(x)}{p(x)} e(x)$$

若要最小化t(x)，则需在p(x)，s(x)和e(x)之间进行某种折衷，例如，若要减少失败的时间，则可降低成功的概率p(x)。

§4.1　8后问题

1. 传统的回溯法



i+j　135度对角线：同一条对角线上的元素的行列号之和相等

i-j或j-i　45度对角线：同一条对角线上的元素的行列号之差相等

§ 4.1 8后问题

```
置当前行为第1行，当前列为第1列，即i←j←1;
while i ≤ 8 do { // 当前行号i≤8
    检查当前行i：从当前列j起向后逐列试探，寻找安全列号；
    if 找到安全列号 then {
        放置皇后，将列号记入栈，并将下一行置为当前行(i++);
        j←1; //当前列置为1
    } else {
        退栈回溯到上一行，即i--；
        移去该行已放置的皇后，以该皇后所在列的下一列作为当
        前列；
    }
}
```

§ 4.1 8后问题

2.Las Vegas方法

- 向量try[1..8]中存放结果

  try[i]——表示第i个皇后放在（i，try[i])位置上

- try[1..k]称为k-promising是指：

  若k个皇后的位置(0≤k ≤8): (1,try[1]), (2,try[2]), …, (k,try[k])互相不攻击，则称try[1..k]是k-promising的.

  形式化：对$\forall i, j \in [1, k]$，若$i \neq j$有

  $$\text{try}[i]-\text{try}[j] \notin \{i-j, 0, j-i\} \qquad \text{(式1)}$$

  若式1成立，则：

  ① 无行冲突：无须考虑，因为第i个皇后放在第i行，故同一行不会有两皇后

§ 4.1 8后问题

② 无列冲突：若对任意不同的两行i、j，因为其列数之差不为0，故任意两皇后不可能在同一列上。

③ 135°对角线无冲突：$a_{i,try[i]}$ 和 $a_{j,try[j]}$ 冲突时有：

$i+try[i]=j+try[j]$ 即 $try[i]-try[j]=j-i$

故任两皇后不会在135°对角线上冲突。

④ 45°对角线无冲突：

$a_{i,try[i]}$ 和 $a_{j,try[j]}$ 冲突时有：$i-try[i]=j-try[j]$

即try[i]-try[j]=i-j

故任两皇后不会在45°对角线上冲突。

综上所述，式1成立时try[1..k]是k-promising。

显然，若k ≤1，则向量try[1..k]是k-promising的，对8后问题，解是8-promising的。

❖ 算法

```
QueensLv (success){ //贪心的LV算法，所有皇后都是随机放置
   //若Success=true，则try[1..8]包含8后问题的一个解。
  col,diag45,diag135←Φ；//列及两对角线集合初值为空
  k ←0；//行号
  repeat   //try[1..k]是k-promising，考虑放第k+1个皇后
    nb ←0；//计数器，nb值为（k+1)th皇后的open位置总数
    for i ←1 to 8 do { //i是列号, 试探（k+1,i）安全否？
      if (i∉col) and (i-k-1∉ diag45) and (i+k+1∉ diag135) then{
          //列i对（k+1）th皇后可用，但不一定马上将其放在第i列
          nb ←nb+1；
          if uniform(1..nb)=1 then //或许放在第i列
            j ←i；//注意第一次uniform一定返回1，即j一定有值i
      }//endif
    }//endfor，在nb个安全的位置上随机选择1个位置j放置之
```

§ 4.1 8后问题

```
    if(nb > 0) then{ //nb=0时无安全位置，第k+1个皇后尚未放好
    //在所有nb个安全位置上，(k+1)th皇后选择位置j的概率为1/nb
        k←k+1；//try[1..k+1]是(k+1)-promising
        try[k] ←j；//放置(k+1)th个皇后
        col ←col∪{ j }；
        diag45 ←diag45 ∪{ j-k }；
        diag135 ←diag135 ∪{ j+k }；
    } //endif
  until （nb=0）or（k=8）；//当前皇后找不到合适的位置或try是
                          // 8-promising时结束。
  success ← （nb>0）；
}
```

§ 4.1 8后问题

❖ 分析

设p是成功的概率（一次成功）

s：成功时搜索的结点的平均数(1个皇后放好算是搜索树上的1个结点)

e：失败时搜索的结点的平均数。

显然s=9（空向量try算在内），

p和e理论上难于计算，但实验用计算机可以计算出：

p=0.1293…

e=6.971…

在重复上述算法，直至成功时(相当于obstinate的时间），所搜索的平均结点数：

$$t = s + (1-p)e/p = 55.927\ldots$$

大大优于回溯法，回溯法约为114个结点才能求出一个解。

Ex.证明：当放置（k+1)th皇后时，若有多个位置是开放的,则算法QueensLV选中其中任一位置的概率相等。

§ 4.1 8后问题

- **问题及改进**
  - **消极：**LV算法过于消极，一旦失败，从头再来
  - **乐观：**回溯法过于乐观，一旦放置某个皇后失败，就进行系统回退一步的策略，而这一步往往不一定有效。
  - **折中：**会更好吗？一般情况下为此。

先用LV方法随机地放置前若干个结点，例如k个。

然后使用回溯法放置后若干个结点，但不考虑重放前k个结点。

若前面的随机选择位置不好，可能使得后面的位置不成功，如若前两个皇后的位置是1、3。

随机放置的皇后越多，则后续回溯阶段的平均时间就越少，失败的概率也就越大。

§ 4.1 8后问题

- **改进算法**

折中算法只需将QueensLV的最后两行改为：

```
until nb = 0 or k = stepVegas；
if （nb>0) then //已随机放好stepVegas个皇后
        backtrace (k, col, diag45, diag135,success);
else
        success ←false；
```

stepVegas——控制随机放置皇后的个数，如何选择？

改进算法的试验结果：

StepVegas	p	s	e	t	
					←搜索的平均节点数
0	1	114	—	114	←完全回溯
1	1	39.63	—	39.63	
2	0.875	22.53	39.67	28.20	
3	0.4931	13.48	15.10	29.01	
4	0.2618	10.31	8.79	35.10	
5	0.1624	9.33	7.29	46.92	
6	0.1357	9.05	6.98	53.50	
7	0.1293	9	6.97	55.93	
8	0.1293	9	6.97	53.93	←完全随机

纯回溯时间：40ms

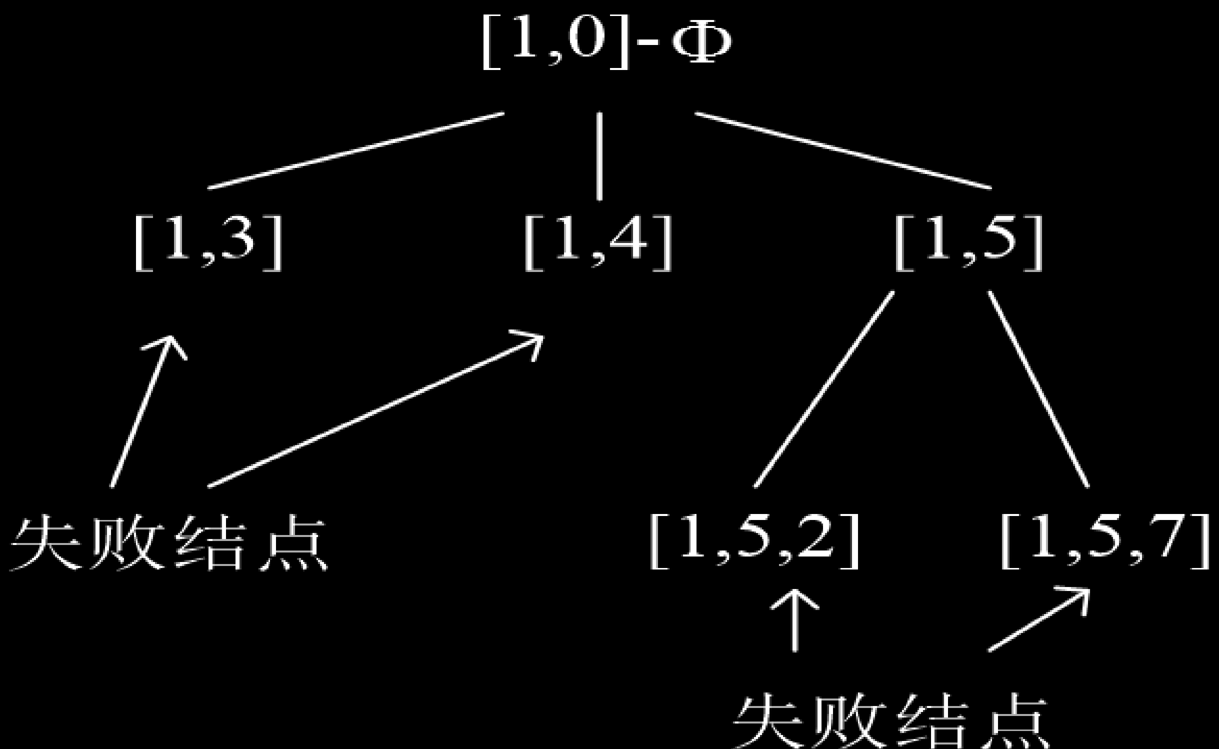
stepVegas=2 or 3：10ms（平均）

纯贪心LV：23ms（平均）

结论：一半略少的皇后随机放置较好。

§ 4.1 8后问题

-问题1：为什么仅随机放一个皇后，其效果就会大大优于纯回溯方法？



搜索树

§ 4.1 8后问题

-问题2：预先随机选几个皇后放置为好？

由于解缺乏规律性（至少在皇后数不等于4k+2，k为某整数时），故求出stepVegas的最优值较难，但是找到一个较好（不一定是最优）的stepVegas还是可以的。

12皇后：

StepVegas	p	s	e	t	时间
0	1	262	—	262	125ms
5	0.5039	33.88	47.23	80.39	37ms
12	0.0465	13	10.2	222.11	基本与纯回溯相同

§ 4.1 8后问题

在Apple II机器上，20个皇后：

① 确定性的回溯算法：找到第一个解的时间大于2个小时。

② 概率算法，随机地放置前10个皇后：5分半钟找到36个不同的解。

后者找一个解比前者大约快1000倍！

-Obstinate算法在何时无限循环？

当问题不存在解时。

对于n皇后，要求n>=4，即问题至少有一个解存在时，Obstinate算法才有可能结束。

Ex. 写一算法，求n=12~20时最优的StepVegas值。

§ 4.2 模p平方根

1. **定义1：**设p是一个奇素数，若整数x∈[1,p-1]且存在一个整数y，使 $$x \equiv y^2 \pmod{p}$$

   则称x为模p的二次剩余（quadratic residue），若y ∈[1,p-1]，则y称为x模p的平方根。

   ❖ 例：63是55模103的平方根，55是模103的二次剩余。

   $$\because\ 55 \bmod 103 = 55 \qquad 63^2 \bmod 103 = 3969 \bmod 103 = 55$$

   $$\therefore\ 55 \equiv 63^2 (\bmod 103),$$

2. **定义2：**若整数 $z \in [1, p-1]$，且z不是模p的二次剩余，则z是模p的非二次剩余。

§ 4.2 模p平方根

3. 定理1：任何一个模p的二次剩余至少有两个不同的平方根

pf：设x是模p的二次剩余，y是x模p的平方根。

因为 $(p-y)^2 = p^2 - 2py + y^2 \equiv y^2 \pmod{p}$

故 $x \equiv (p-y)^2 \pmod{p}$

只要证p-y≠y且1≤p-y≤p-1就可证明p-y是不同于y的x模p的另一个平方根。

∵p是奇数，∴ p-y≠y，否则p是偶数。

另一方面，

∵ 1≤y≤p-1，∴p-y ≥p –(p-1)=1 //y≤p-1

p-y≤p-1 //y≥1

§ 4.2 模p平方根

4. 定理2：任一模p的二次剩余至多有两个不同的平方根

pf：设∀a和b是x模p的平方根。

$\because\ a^2 \equiv b^2 \pmod p$　　$a^2 = k_1 p + r, b^2 = k_2 p + r$

$\therefore\ a^2 - b^2 \equiv 0 \pmod p$

即 $p \mid (a^2 - b^2)$ 成立。$a^2 - b^2 = k \cdot p$

① 若k=0，则a=b

② 若k>0，则a≠b

不妨设a>b. $\because\ 1 \le a-b < p$ ∴.p∤(a-b)

又 $\because\ p \mid (a+b)(a-b)$ ，∴由Th31.7知 $p \mid (a+b)$

即 $(a+b) = kp$　$\because\ (a+b) < 2p$ $\therefore\ k = 1$

即 $a+b = p$，$a = p - b$

也就是说任意两个不同的平方根，均只有b和(p-b)两种不同形式。

§ 4.2 模p平方根

5. **定理3：** 1到p-1之间的整数恰有一半是模p的二次剩余.

pf：由定理1和定理2知，任一模p的二次剩余恰有两个不同的平方根，即：任取二次剩余 $x\in[1,p-1]$ ，只有y和p-y这两个不同的平方根 $1\le y,\ p-y\le p-1$

$$\because \quad y^2\equiv(p-y)^2 \pmod p$$

$\therefore$在[1,p-1]中恰有(p-1)/2对不同的平方根，每对平方根对应的模p的余数x必定在[1,p-1]中，即此区间上恰有(p-1)/2个模p的二次剩余。

6. **定理4：** 对 $\forall x\in[1,p-1]$ ，p是任一奇素数，有$x^{(p-1)/2}\equiv\pm1 \pmod p$

且x是模p的二次剩余当且仅当 $x^{(p-1)/2}\equiv+1 \pmod p$

pf：略（可用费马定理）

§ 4.2 模p平方根

7. 如何判定x是否为模p的二次剩余？

   只要利用定理4和计算方幂模 $x^{(p-1)/2} \bmod p$ 即可。

8. 已知p是奇素数，x是模p的二次剩余，如何计算x模p的两个平方根？

   - 当 $p \equiv 3 \pmod 4$ 时，两平方根易求，分别是 $\pm x^{(p+1)/4}$
   - 当 $p \equiv 1 \pmod 4$ 时，没有有效的确定性算法，只能借助于Las Vegas算法。

§ 4.2 模p平方根

9. Las Vegas算法

用$\sqrt{x}$表示x的两个平方根中较小的一个。

- **Def：模p乘法（类似于复数乘法）**

  a，b，c，d∈[0,p-1]

$$(a+b\sqrt{x})(c+d\sqrt{x})\bmod p$$

$$=(ac+bdx+(ad+bc)\sqrt{x})\bmod p$$

$$=((ac+bdx)\bmod p+((ad+bc)\bmod p)\sqrt{x})\bmod p$$

//See p.863,(31.18)式

§ 4.2 模p平方根

❖ 例：设 $p=53\equiv 1 \pmod 4), x=7$.求7的平方根

$\because \quad 7^{26}\equiv 1 \pmod{53}$ //26=(53-1)/2

∴由定理4可知，7是模53的二次剩余，求7模53的平方根。

当省略模53符号时，$(1+\sqrt{7})^{26} \bmod 53$ 计算过程如下：

$$(1+\sqrt{7})^{2}=(1+\sqrt{7})(1+\sqrt{7})=8+2\sqrt{7}$$

$$(1+\sqrt{7})^{3}=(1+\sqrt{7})(8+2\sqrt{7})=22+10\sqrt{7}$$

$$(1+\sqrt{7})^{6}=(22+10\sqrt{7})(22+10\sqrt{7})=18+16\sqrt{7}$$

$$(1+\sqrt{7})^{12}=(18+16\sqrt{7})(18+16\sqrt{7})=49+46\sqrt{7}$$

$$(1+\sqrt{7})^{13}=(1+\sqrt{7})(49+46\sqrt{7})=0+42\sqrt{7}$$

$$(1+\sqrt{7})^{26}=(0+42\sqrt{7})(0+42\sqrt{7})=52+0\sqrt{7}$$

§ 4.2 模p平方根

注： $(1+\sqrt{7})^{26} \bmod 53 = (0+42\sqrt{7})(0+42\sqrt{7}) \bmod 53$

$$= (42\times 42\times 7 \bmod 53 + 0\sqrt{7}) \bmod 53$$

$$= (12348 \bmod 53 + 0\sqrt{7}) \bmod 53$$

$$= (52 + 0\sqrt{7}) \bmod 53$$

上例中, $(1+\sqrt{7})^{26} \equiv -1 (\bmod 53)$ ， $\because \quad 26 = (p-1)/2$

$\therefore$由定理4知， $1+\sqrt{7}$是模53的非二次剩余。

同样可知 $1-\sqrt{7}$ 亦是模53的非二次剩余。

§ 4.2 模p平方根

- 若计算知当 $(a+\sqrt{7})^{26} \equiv c+d\sqrt{7} \pmod{53}$ 时，已知 $(a+\sqrt{7}) \bmod 53$ 和 $(a-\sqrt{7}) \bmod 53$ 中有一个是模p的二次剩余，而另一个不是二次剩余，会怎样呢？

例如，假定

$c+d\sqrt{7} \equiv 1 \pmod{53}$ //即$(a+\sqrt{7}) \bmod 53$是二次剩余，定理4

$c-d\sqrt{7} \equiv -1 \pmod{53}$ //即$(a-\sqrt{7}) \bmod 53$不是二次剩余

两等式相加得：$2c \equiv 0 \pmod{53}$

$\because\ 0 \le c \le 52 \ \therefore\ c=0$

两式相减得：$2d\sqrt{7} \equiv 2 \pmod{53}$

$\therefore\ d\sqrt{7} \equiv 1 \pmod{53}$

§ 4.2 模p平方根

- 例：通过计算可知 $(2+\sqrt{7})^{26} \equiv 0+41\sqrt{7} \pmod{53}$

  为了获得7的一个平方根，需要找唯一的一个整数y使得 $1 \le y \le 52$，$41y \equiv 1 \bmod 53$。

  这可使用一个Euclid算法解决

  $\because$ $41 \times 22 \equiv 1 \pmod{53}$，故y=22. 它是7模53一个平方根

  $\because$ $7 \equiv 22^2 \pmod{53}$，另一平方根为53- 22=31

- 算法

  设x是模p的二次剩余，p是素数且

  $p \equiv 1 \pmod 4$，找$y^2 \equiv x \pmod p$)

§ 4.2 模p平方根

rootLV(x, p, y, success){//计算y

a ←uniform(1..p-1);//我们并不知道a应取多少

if $a^2 \equiv x \pmod p$ then { //可能性很小

success ← true; y ← a;

}else{

计算c，d使得 $0 \le c, d \le p-1, (a+\sqrt{x})^{(p-1)/2} \equiv c + d\sqrt{x} \pmod p;$

if d=0 then

success ← false; //无法求出$\sqrt{x}$

else{ //c=0

success ← true;

计算y使 $d \cdot y \equiv 1 \pmod p, 1 \le y \le p-1$ // 修改Euclid算法可求y

}

}

}

算法成功的概率>0.5,接近0.5。故平均调用两次即可求得x的平方根

§ 4.3 整数的因数分解

设n是一个大于1的整数，因数分解问题是找到n的一个唯一分解：$n = p_1^{m_1} p_2^{m_2} \cdots p_k^{m_k}$

这里 m_i 是正整数，且 $p_1 < p_2 < \cdots < p_k$ 均为素数。

若n是合数，则至少有1个非平凡的因数(不是1和n本身).

设n是一个合数，n的因数分解问题，即找n的非平凡因数，它由两部分构成：

① prime(n) ——判定n是否为素数，可由Monte Carlo算法确定。

② split(n)——当n为合数时，找n的一个非平凡的因数。

§ 4.3 整数的因数分解

1. 朴素的split算法

```
split(n) {
   //n是素数,返回1，否则返回找到的n的最小非平凡因数
   for  i←2  to  ⌊√n⌋  do
         if (n mod i)=0 then
                return i;   //i≥2
   return 1;  //返回平凡因数
}
```

§ 4.3 整数的因数分解

- 性能分析： $T(n)=\Omega(\sqrt{n})$ ——最坏情况。

  当n是一个中等规模的整数（如大约50位十进制整数）时，最坏情况的计算时间亦不可接受。

  $\because n$的位数 $m=\lceil \log_{10}(n+1) \rceil$

  $\therefore \sqrt{n}\approx 10^{m/2}$；当$m$=50时，上述算法的时间约为 10^{25}

  无论是确定性的还是概率的，没有算法能够在多项式时间$O(p(m))$内分解n。Dixon的概率算法分解n的时间为$O(2^{\sqrt{m\log_{10}m}})$

Note：无论k和b是何正常数，均有：

$$O(m^k)\subset O(2^{O(\sqrt{m\log_{10}m})})\subset O(10^{m/b})$$

§ 4.3 整数的因数分解

2. 合数的二次剩余（模素数到模合数的推广）

设n是任一正整数，整数x∈[1,n-1]。若x和n互素，且存在一整数y∈[1,n-1] 使$x \equiv y^2 \pmod{n}$，则称x为模n的二次剩余，称y为x模n的平方根。

一个模p的二次剩余，当p为素数时，恰有两个不同的平方根，但p为合数，且至少有两个奇素数因子时，不再为真。例：$8^2 \equiv 13^2 \equiv 22^2 \equiv 27^2 \equiv 29 \pmod{35}$,注意29应与35互素，才有可能是模35的二次剩余。

- 定理：若n=pq，p、q是两个互不相同的素数，则每一个模n的二次剩余恰有4个平方根。

§ 4.3 整数的因数分解

上节的测试x是否是模p的二次剩余及找x的平方根的方法是一个有效的算法（指rootLV），当n是一个合数，且n的因子分解给定时，同样存在有效的算法。但n的因数分解未给定时，目前还没有有效算法测试x是否为二次剩余及找x的平方根。

3. Dixon因数分解算法

基本思想，找两个与n互素的整数a和b，使 $a^2 \equiv b^2 \pmod{n}$ 但

$a \not\equiv \pm b \pmod{n}$ 蕴含着 $a^2 - b^2 = (a-b)(a+b) \equiv 0 \pmod{n}$ 即 $n \mid (a+b)(a-b)$

假定n∤(a+b)，n∤(a-b)，则n的某一非平凡因子x满足：

$$x \mid (a+b), (n/x) \mid (a-b)$$

∴ n和a+b的最大公因子是n的一个非平凡因子。

例如： $a = 8, b = 13, n = 35.$

$a + b = 21$和$n = 35$的gcd是$x = 7$，x是35的一个非平凡因子

§ 4.3 整数的因数分解

```
Dixon (n, x, success){//找合数n的某一非平凡因子x
   if  n是偶数 then{
     x←2；  success←true；
   }else{
     for i ←2 to ⌊log₃n⌋  do
       if    n^(1/i) 是整数 then{
          x ← n^(1/i) ；    success ←true;        return;
       } //∵n是合数且为奇数，现在知道它至少有2个不同的奇素数因子
     a， b←两个使得 a² ≡ b² (mod n)  的整数
     if a≡ ±b (mod n) then
          success ←false；
     else{
          x ←gcd (a+b,n); success ← true;
     }
   }
}
```

§ 4.3 整数的因数分解

4. 如何确定a和b使$a^2 \equiv b^2 \pmod{n}$，来对n因数分解。

- Def. k-平滑：

  若一个整数x的所有素因子均在前k个素数之中，则x称为k-平滑的。

- 例如：$120 = 2^3 \times 3 \times 5$是3-平滑的

  35=5×7不是3-平滑的，∵7是第四个素数

  ∴它是4-平滑的，也是5-平滑的…

当k较小时，k-平滑的整数可用朴素的split算法进行有效的因数分解。Dixon算法可以分为3步确定a和b。

§ 4.3 整数的因数分解

Step1：在1~n-1之间随机选择x

i)若x碰巧不与n互素，则已找到n的一个非平凡因子(即为x)

ii)否则设 $y = x^2 \bmod n$，若y是k-平滑，则将x和y的因数分解保存在表里。

此过程重复直至选择了k+1个互不相同的整数，并且这些整数的平方模n的因数已分解(当k较小时，用split(n)分解)

例1：设n=2537，k=7.

前7个整数为：2，3，5，7，11，13，17

若随机选取x=1769，$y = 1769^2 \bmod 2537 = 1240$

∵ $1240 = 2^3 \times 5 \times 31$

∴1240不是7-平滑的

§ 4.3 整数的因数分解

下述8个x的平方模n是7-平滑的：

$$x_1 = 2455, y_1 = 1650 = 2 \times 3 \times 5^2 \times 11$$

$$x_2 = 970, y_2 = 2210 = 2 \times 5 \times 13 \times 17$$

$$x_3 = 1105, y_3 = 728 = 2^3 \times 7 \times 13$$

$$x_4 = 1458, y_4 = 2295 = 3^3 \times 5 \times 17$$

$$x_5 = 216, y_5 = 990 = 2 \times 3^2 \times 5 \times 11$$

$$x_6 = 80, y_6 = 1326 = 2 \times 3 \times 13 \times 17$$

$$x_7 = 1844, y_7 = 756 = 2^2 \times 3^3 \times 7$$

$$x_8 = 433, y_8 = 2288 = 2^4 \times 11 \times 13$$

§ 4.3 整数的因数分解

Step2：在k+1个等式之中找一个非空子集，使相应的因数分解的积中前k个素数的指数均为偶数(包含0)

例2：在上例的8个等式中，有7个积符合要求：

$$y_1y_2y_4y_8 = 2^6\times3^4\times5^4\times7^0\times11^2\times13^2\times17^2\text{（解一）}$$

$$y_1y_3y_4y_5y_6y_7 = 2^8\times3^{10}\times5^4\times7^2\times11^2\times13^2\times17^2\text{（解二）}$$

- 可以证明，在k+1个等式中，至少存在这样一个解，如何找到一个解？

构造一个0-1矩阵A：(k+1) ×k

矩阵的行对应k+1个y_i，列对应前k个素数。

$$a_{ij}=\begin{cases}0 & \text{若}y_i\text{的第}j\text{个素数的指数为偶数}\\ 1 & \text{若}y_i\text{的第}j\text{个素数的指数为奇数}\end{cases}$$

§ 4.3 整数的因数分解

∵矩阵的行数大于列数。

∴在模2意义下，矩阵的行之间不可能均是相互独立的。

例如在例2中，第一个解就是线性相关的：

$$y_1 = 2^1 \times 3^1 \times 5^2 \times 7^0 \times 11^1 \times 13^0 \times 17^0$$

$$(1,1,0,0,1,0,0) + (1,0,1,0,0,1,1) +$$

$$(0,1,1,0,0,0,1) + (0,0,0,0,1,1,0) \equiv (0,0,0,0,0,0,0) (\bmod 2)$$

使用Gauss-Jordan消去法可找到线性相关的行。

Step3：在step2中找到线性相关的行后：

1）令a为相应x_i的乘积

2）令b是y_i的乘积开平方

若 $a \not\equiv \pm b (\bmod n)$ ，则只需求a+b和n的最大公因子即可获得n的非平凡因子。

§ 4.3 整数的因数分解

例3：对于例2中的第1个解有：

$$a = x_1 x_2 x_4 x_8 \bmod n = 2455 \times 970 \times 1458 \times 433 \bmod 2537 = 1127$$

$$b = 2^3 \times 3^2 \times 5^2 \times 7^0 \times 11 \times 13 \times 17 \bmod 2537 = 2012 \not\equiv \pm a \pmod{n}$$

a+b=3139和n=2537的最大公因子是43，它是n的一个非平凡因子。

对于例2中的第2个解有：

$$a = x_1 x_3 x_4 x_5 x_6 x_7 \bmod n = 564$$

$$b = 2^4 \times 3^5 \times 5^2 \times 7 \times 11 \times 13 \times 17 \bmod n = 1973 \equiv -a \pmod{n}$$

此解不能求因子。

实际上 $a \not\equiv \pm b \pmod{n}$ 的概率至少为1/2

§ 4.3 整数的因数分解

5.时间分析

如何选择k.

1)k越大，$x^2 \bmod n$ 是k-平滑的可能性越大(x是随机选取的)

2)k越小，测试k-平滑及因数分解y_i的时间越小，确定y_i是否线性相关的时间也越少，但$x^2 \bmod n$ 不是k-平滑的概率也就较大。

设 $L = e^{\sqrt{\ln n \ln \ln n}}, b \in R^+$

通常取 $k \approx \sqrt{L}$ 时较好，此时Dixon算法分裂n的期望时间为$O(L^2) = O(e^{2\sqrt{\ln n \ln \ln n}})$，成功的概率至少为1/2.

Ch.5 Monte Carlo算法

存在某些问题，无论是确定的还是概率的，均找不到有效的算法获得正确的答案。

Monte Carlo算法偶然会犯错，但它无论对何实例均能以高概率找到正确解。当算法出错时，没有警告信息。

1. 基本概念

- **Def1**：设p是一个实数，且1/2<p<1，若一个MC算法以不小于p的概率返回一个正确的解，则该MC算法称为p-正确，算法的优势（advantage）是 p-1/2.
- **Def2**：若一个MC算法对同一实例决不给出两个不同的正确解，则该算法称是相容的（consistent）或一致的。

某些MC算法的参数不仅包括被解的实例，还包括错误概率的上界。因此，这样算法的时间被表示为实例大小及相关可接受的错误概率的函数。

- 基本思想：为了增加一个一致的、p-正确算法成功的概率，只需多次调用同一算法，然后选择出现次数最多的解。

例：设MC(x)是一个一致、75%-correct的MC算法，考虑下述算法：

```
MC3(x){
    t←MC(x); u←MC(x); v←MC(x);
    if  t=u or t=v then return t;
    else return v;
}
```

Ch.5 Monte Carlo算法

该算法是一致的和27/32-correct的(约84%)

pf: 相容性（一致性）易证。

∵ t、u、v正确的概率为75%=3/4=p

∴ 错误的概率为q=1/4.

1)若t、u、v均正确，∵MC是一致的∴ t=u=v，则MC3返回的t正确，此概率为：$(3/4)^3$

2)若t、u、v恰有两个正确则MC3返回 $\begin{cases} t\text{正确} \ \text{if} \ t=u \ or \ t=v \\ v\text{正确} \ \text{if} \ u=v \end{cases}$

此概率为：$C_3^2 p^2 q^1 = 3\times(3/4)^2(1/4)$

3)若t、u、v恰有一个正确，则只有v正确时，MC3返回正确答案，此概率为：$pq^2 = (3/4)\ (1/4)^2$

Ch.5 Monte Carlo算法

严格的说，当v正确，只有两个错误的解t和u不相等时，才有可能成功，因此MC3成功的概率为：

$$\left(\frac{3}{4}\right)^3+3\left(\frac{3}{4}\right)^2\left(\frac{1}{4}\right)+\frac{3}{4}\left(\frac{1}{4}\right)^2=\frac{27}{32}+\frac{3}{64}>\frac{27}{32}\approx 84\%$$

多运行2次（共3次）使成功率 75%□ 84%

- **Theorem**：设2个正实数之和ε+δ<0.5，MC(x)是一个一致的、(0.5+ε)-correct的蒙特卡洛算法，设 $C_\varepsilon=-2/\lg(1-4\varepsilon^2)$ ，x是某一被解实例，若调用MC(x)至少 $\lceil C_\varepsilon \lg(1/\delta)\rceil$ 次，并返回出现频数最高的解，则可得到一个解同样实例的一致的(1–δ)-correct的新MC算法

Ch.5 Monte Carlo算法

由此可见，无论原算法MC(x)的赢面(优势)ε>0是多小，均可通过反复调用来扩大其优势，使得最终的算法具有可接受的错误概率δ，可达到任意小（选定的）。

pf：设 $n \geq C_\varepsilon \lg 1/\delta$ **是调用MC(x)的次数，** $m = \lfloor n/2 \rfloor + 1$

$p = 1/2 + \varepsilon$ //MC成功的概率

$q = 1 - p = 1/2 - \varepsilon$ //MC失败的概率

当重复调用MC(x)算法n次时，若正确解至少出现m次，则新算法返回频度最高的解必为正确解；若正确解出现的次数不超过n/2时，不能保证新算法找到了正确解。因此，出错概率至多为：

$$\sum_{i=0}^{m-1} \Pr[n次调用中出现i次正确解]$$

Ch.5 Monte Carlo算法

$$\le \sum_{i=0}^{m-1}\binom{n}{i}p^i q^{n-i}$$

□实际上，当正确解出现次数<m时，

□亦可能返回正确解。

$$=(pq)^{n/2}\sum_{i=0}^{m-1}\binom{n}{i}(q/p)^{n/2-i}$$

$$\le (pq)^{n/2}\sum_{i=0}^{n}\binom{n}{i}$$

□ $q<p, n/2-i\ge 0$

$$=(pq)^{n/2}\times 2^n$$

$$=(4pq)^{n/2}=\left(1-4\varepsilon^2\right)^{n/2}$$

$$\le\left(1-4\varepsilon^2\right)^{(C_\varepsilon/2)\lg(1/\delta)}$$

□ $0\le 1-4\varepsilon^2<1$，用 $C_\varepsilon \lg(1/\delta)$ 取代n

$$=2^{-\lg(1/\delta)}$$

□ $C_\varepsilon/2=-1/\lg(1-4\varepsilon^2)$，对任意 $x>0, x^{1/\lg x}=2$

$=2^{\lg\delta}=\delta$ **由此可知，重复MC(x) n次成功的概率至少为1-δ。**

Ch.5 Monte Carlo算法

例： 假定有一个一致的5%赢面的MC算法，若希望获得一个错误概率小于5%的算法，则相当于将55%-correct的算法改造成95%-correct的算法。

上述定理告诉我们：大约要调用MC算法600次才能达到相应的精度（在同一实例上，$n \geq C_\varepsilon \lg 1/\delta$）

上述证明太过粗略，更精确的证明表示：

如果重复调用一个一致的，(1/2+ε)-correct的MC算法2m-1次，则可得到一个(1-δ)-correct的最终算法，其中：

$$\delta = 1/2 - \varepsilon \sum_{i=0}^{m-1} \binom{2i}{i} \left(\frac{1}{4} - \varepsilon^2\right)^i \leq \frac{\left(1-4\varepsilon^2\right)^m}{4\varepsilon\sqrt{\pi m}}$$

$m = \lceil x/4\varepsilon^2 \rceil$，须先确定x使$e^x\sqrt{x} \geq 1/\left(2\delta\sqrt{\pi}\right)$

Ch.5 Monte Carlo算法

2.有偏算法

重复一个算法几百次来获得较小的出错概率是没有吸引力的，幸运地，大多数MC算法实际上随着重复次数的增加，正确概率增长会更快。

- **Def：(偏真算法)**为简单起见，设MC(x)是解某个判定问题，对任何x，若当MC(x)返回true时解总是正确的，仅当它返回false时才有可能产生错误的解，则称此算法为偏真的(true-biased)。

显然，在偏真的MC算法里，没有必要返回频数最高的解，因为一次true超过任何次数的false.

对于偏真的MC算法，重复调用4次，就可将55%-正确的算法改进到95%正确。6次重复就可得到99%正确的算法，且对p>1/2的要求可以放宽到p>0即可。

Ch.5 Monte Carlo算法

Def：(偏y_0算法)更一般的情况不再限定是判定问题，一个MC是偏y_0的(y_0是某个特定解)，如果存在问题实例的子集X使得：

① 若被解实例 $x \notin X$，则算法MC(x)返回的解总是正确的(无论返回y_0还是非y_0)

② 若$\forall x \in X$，正确解是y_0，但MC并非对所有这样的实例x都返回正确解。

虽然y_0是必须知道的，但无需测试x是否是X的成员，下面解释若算法返回y_0时，它总是正确的。

即算法返回y_0时总是正确的，返回非y_0时以p为概率正确。

Ch.5 Monte Carlo算法

设MC是一个一致的、p-correct和偏y_0的蒙特卡洛算法，x是一个实例，y是MC(x)返回的解，可分为如下2种情形讨论：

case1：$y = y_0$

- 若 $x \notin X$，则算法MC总是返回正确解，因此y_0确实是正确的。
- 若 $x \in X$，算法返回的正确解必定是y_0

这两种情况均可得到结论：y_0是一个正确解。

case2：$y \neq y_0$

- 若 $x \notin X$，则y是正确解。
- 若 $x \in X$，因为正确解是y_0，故y是错误解，此出错概率不超过1-p。

Ch.5 Monte Carlo算法

- **有偏算法重复调用MC：优先返回y_0**

若k次调用MC(x)所返回解依次是 $y_1, y_2, \cdots, y_k$ ，则：

(1) 若存在i使 $y_i = y_0$ ，则前面的讨论已知，它是一个正确解(y_i是正确解).

(2) 若存在 $i \neq j$ 使 $y_i \neq y_j$ ，由于MC是一致的，故必有 $x \in X$。因此正确解仍是y_0。

(3) 若对所有的i均有$y_i = y$，但 $y \neq y_0$，则y_0仍有可能是正确解。实际上，若 $x \in X$ ，则y_0是正确解，此时y是错误的，其错误概率不超过$(1-p)^k$。

由上面的讨论可知，重复调用一个一致的，p-正确的，偏y_0的MC算法k次，可得到一个$(1-(1-p)^k)$-正确的算法(对偏真算法亦适合).

例：p=0.55，k=4，即可将算法正确率提高到95%

§5.1 主元素问题

Def： 设T[1..n]是n个元素的数组，若T中等于x的元素个数大于n/2(即 $|\{i \mid T[i]=x\}| > n/2$)，则称x是数组T的主元素。

(Note：若存在，则只可能有1个主元素)

1. 判T是否有主元素

```
maj(T) {   //测试随机元素x∈T 是否为T的主元素
      i←uniform(1..n);
      x←T [ i ] ;
      k←0;
      for j←1 to n do
            if T [ j ]=x then
                  k←k+1;
      return (k>n/2);
}
```

§5.1 主元素问题

- 若算法返回true，则T含有主元素，所选择的元素即为主元素，算法一定正确。
- 若算法返回false，则T仍有可能含有主元素，只是所选元素x不是T的主元素而已。
- 若T确实包含一个主元素，则随机选择到一个非主元的概率小于1/2，这是因为主元素占T的一半以上。
- 算法是一个偏真的1/2正确的算法：

① 若maj返回true，则T必有主元素，解一定正确。因为随机选中主元素的概率大于1/2，故该算法是1/2-correct.

② 若maj返回false，则T可能没有主元素。当然，若T没有主元素，则必返回false。

§5.1 主元素问题

实际使用时，50%的错误概率是不可容忍的。而对有偏算法，可以通过重复调用技术来使错误概率降低到任何值。

```
maj2(T) {
    if  maj (T)  then
        return true;    //1次成功
    else //1次失败后调用第2次
        return maj(T);  //调用2次
}
```

§5.1 主元素问题

2. 分析：

1) 若T无主元素，则maj每次均返回false，maj2亦肯定返回false。此时算法返回值正确（成功）。

2) 若T有主元素，则：

① 第一次调用maj返回真的概率是p>1/2，此时maj2亦返回真。

② 第一次调用maj返回fasle的概率为1-p，第2次调用maj仍以概率p返回true，maj2亦返回真，其概率为:(1-p)p. 此时算法返回值正确（成功）。

总结：当T有主元时，maj2返回真的概率是：

$$p+(1-p)p = 1-(1-p)^2 > 3/4.$$

即：maj2是一个偏真的3/4正确的MC算法。

§ 5.1 主元素问题

3.算法改进

错误的概率能够迅速减小，主要是因为重复调用maj的结果是相互独立的，即：对同一实例T，某次maj返回fasle，并不会影响继续调用返回true的概率。

因此，当T含有主元素时，k次重复调用maj均返回false的概率小于2^{-k}。

另一方面，在k次调用中，只要有一次maj返回真，即可判定T有主元素。

§ 5.1 主元素问题

- 当需要控制算法出错概率小于ε>0时，相应算法调用maj的次数为：

$$\varepsilon = 2^{-k} \Rightarrow k = \left\lceil \lg \frac{1}{\varepsilon} \right\rceil$$

```
majMC (T, ε) {
        k←⌈lg(1/ε)⌉;
        for i ←1  to  k  do
                if  maj (T) then return true;   //成功
        return false;   //可能失败
}
```

该算法的时间为$O(n\lg(1/\varepsilon))$。注意，这里只是用此问题来说明MC算法，实际上对于判定主元素问题存在$O(n)$的确定性算法。

§ 5.2 素数测定(数的素性测定)

　判定一个给定的整数是否为素数，到目前为止尚未找到有效的确定性算法或Las Vegas算法。

1. 简单的概率算法。

```
prime(n) {
        d ← uniform(2..⌊√n⌋);
        return (n mod d) ≠ 0;
}
```

$$d \leftarrow uniform(2..\lfloor\sqrt{n}\rfloor);\quad \text{return } (n \bmod d) \neq 0;$$

- 若返回false，则算法幸运地找到了n的一个非平凡因子，n为合数。
- 若返回true，则未必是素数。实际上，若n是合数，prime亦以高概率返回true。

§ 5.2 素数测定(数的素性测定)

例如： $n = 2623 = 43 \times 61, \left\lfloor \sqrt{2623} \right\rfloor = 51$

prime在2~51内随机选一整数d

❖成功：d=43，算法返回false(概率为2%)，结果正确

❖失败：d≠43，算法返回true(概率为98%)，结果错误

当n增大时，情况更差。

2. Fermat小定理

若n是素数，则∀a∈[1，n-1]，有$a^{n-1} \bmod n = 1$

■ 变换命题（逆否定理）

设n和a是整数，若∃a ∈ [1，n-1]使 $a^{n-1} \bmod n \neq 1$，则n不是素数。

§ 5.2 素数测定(数的素性测定)

- 素性测定算法（偏假的）：

```
Fermat(n) {
    a ←uniform(1..n-1);
    if a^(n-1) mod n = 1 then
        return true;  //未必正确，n未必为素数
    else
        return false；//正确，n一定是合数
}
```

(条件为 $a^{n-1} \bmod n = 1$)

- Fermat定理的逆命题成立吗？

即是否只要 $a^{n-1} \bmod n = 1$ for all a∈[1，n−1]成立，n就是素数？早期学者认为成立，甚至认为只要验证了a=2即可。

§ 5.2 素数测定(数的素性测定)

当n为合数，对∀a∈[1，n-1]，有 $a^{n-1} \bmod n \neq 1$ 吗？

若成立，则只要n是合数，$\forall a \in [1, n-1]$，均有$a^{n-1} \bmod n \neq 1$

否则n为素数。遗憾的是此命题亦不成立。

❖**结论：**我们不能通过验证$a^{n-1} \bmod n$是否为1来判定n是否为素数

例如：

$$1^{n-1} \bmod n = 1 \quad for \quad all \quad n \geq 1$$

$$(n-1)^{n-1} \bmod n = 1 \quad \text{if} \quad n \geq 3.$$

若是 $a \in [2, n-2]$ 时呢？

设n=15(合数)，$a = 4,\ 4^{14} \bmod 15 = 1.$

§5.2 素数测定(数的素性测定)

3.伪素数和素性伪证据

设2≤a≤n-2，一个满足 $a^{n-1} \bmod n = 1$（即n可整除$a^{n-1}-1$）的合数n称为以a为底的**伪素数**，a称为n的素性**伪证据**。

实 际 上， 符 合 费 马 小 定 理 逆 命 题 的 数， 我 们 称 为 拟 素 数 (Probable Prime) 。 拟素數一是素數，二是伪素數。

后来数学家渐把符合一些素数性质的逆命题的合数称为伪素数

- **伪素数有多少?**

在前10亿个自然数中，有50,847,534个素数，而以2为底的伪素数则只有5597个。 因此在n整除2^{n-1} -1的情况下，出现合数的机会仅有5597/(5597+50847534) = 0.00011 。

而我们同时考虑以2和3为底的伪素数，则只有1272个。 因此n同时可以整除2^{n-1} -1和整除3^{n-1} -1的情况下，碰上合数的机会便更低了，仅有1272/(1272+50847534) = 0.000025。

若我们把该测试扩张至其他底，自然会将找到伪素数的机会降低，会降至0吗？**否！**

§ 5.2 素数测定(数的素性测定)

若将Fermat测试改为从2~n-2之间随机选a，则只有选到一个伪证据时，对合数的测试失败(返回true).

- 伪证据有多少?
  - 总体情况是伪证据相当少

    1000之内的奇合数测试误差概率<3.3%。n较大时，概率更小。
  - 有些合数伪证据比例相当高

    如561，有318个伪证据，超过证据数的一半（2~559）。极端情况：Fermat(651693055693681)返回true的概率>99.9965%
  - 一般地，对$\forall \delta > 0$，存在无穷多个合数，使得Fermat测试发现他们是合数的概率小于δ

    即：对任意的p>0， Fermat测试都不是p-正确的。因此，以前将Fermat测试重复固定次数，并不能将误差降到任意小的ε内。

§ 5.2 素数测定(数的素性测定)

4. Fermat测试改进

■ 强伪素数

设n是一个大于4的奇整数，s和t是使得 $n-1=2^s t$ 的正整数，其中t为奇数，设B(n)是如下定义的整数集合：

$a \in B(n)$ 当且仅当2≤a≤n-2且满足下述2个条件之一：

① $a^t \bmod n = 1$ $\quad a^t \equiv 1 \pmod n$

或

② ∃ 整数i，$0 \le i < s$满足$a^{2^i t} \bmod n = n-1$ $\quad a^{2^i t} \equiv -1 \pmod n$

当n为素数时，$\forall a \in [2, n-2]$，均有$a \in B(n)$

当n为合数时，若$a \in B(n)$，则称n为一个以a为底的强伪素数，称a为n素性的强伪证据。

n为素数，说明它对所有底均为强伪素数。

§ 5.2 素数测定(数的素性测定)

```
Btest(a, n){//n为奇数, a∈[2,n−2],返回true ⇔ a∈B(n)。即返回
    //真说明n是强伪素数或素数
        s←0;  t ←n-1;  // t开始为偶数
        repeat
            s++;  t ← t÷2;
        until t mod 2 = 1;  //n-1=2^s t ,  t为奇数
        x ←a^t mod n;
        if x=1 or x=n-1 then  return true;  //满足①or②, a∈B(n)
        for i ←1 to s-1 do{ //验证 a^(2^i t) mod n = n−1
            x ← x^2 mod n;
            if x=n-1 then return true;  //满足②, a∈B(n)
        }
        return false;
}
```

§ 5.2 素数测定(数的素性测定)

例：$158 \in B(289)?$

$\because n-1=288=2^5 \times 9$ //289=17×17为合数

$\therefore s=5, t=9.$

计算 $x=a^t \bmod n=158^9 \bmod 289=131$

执行for循环4次(只要3次)。

$a^{2t} \bmod n=131^2 \bmod 289=110$

$a^{2^2 t} \bmod n=110^2 \bmod 289=251$

$a^{2^3 t} \bmod n=251^2 \bmod 289=288$

$\therefore 158 \in B(289).$ 158是一强伪证据

§ 5.2 素数测定(数的素性测定)

- **强伪证据数目比伪证据数目少很多**

  强伪证据是伪证据，但反之不然。

  例：4是15的素性伪证据 $4^{14} \bmod 15 = 1$

  但它不是一个强伪证据，∵ $4^7 \bmod 15=4$ //$a \notin B(n)$

  561有318个伪证据，但只有8个是强伪证据。

  小于1000的奇合数中，随机选到一个强伪证据的概率小于1%

  更重要的是，对任一奇合数，强伪证据比例都很小。

§ 5.2 素数测定(数的素性测定)

- **Th1.**设n是任一大于4的奇素数。

  ① 若n是素数，则 $B(n)=\{a \mid 2 \le a \le n-2\}$

  ② 若n是合数，则 $|B(n)| \le (n-a)/4$

  即，当n为合数时，强伪证据数目<1/4。因此，当随机选a时，它返回false的概率>3/4，正确的概率>75%。

  当n为素数时，Btest总返回真。

- **Miller-Rabin测试**

```
MillRab(n) {  //奇n>4，返回真时表示素数，假表示合数
    a←uniform(2..n-2);
    return Btest(a,n);   //测试n是否为强伪素数
}
```

§ 5.2 素数测定(数的素性测定)

说明：该算法是3/4-正确，偏假的。

① 返回真时，它可能是伪素数，但是随机选到的强伪证据的概率<1/4，出错概率<1/4

② 返回假时，n为合数，它必正确。

∵若n是素数，由定理1知，它必定返回真，任何 $a \in B(n)$.

∴n必定是一个合数。

```
RepeatMillRob(n,k){
    for i ←1 to k do
        if MillRob(n) =false then
            return false;  //一定是合数
    return true;
}
```

§ 5.2 素数测定(数的素性测定)

重复调用k次之后返回true，若错误则表示连续k次碰到强伪证据，概率<(1/4)^k。只要取k=10，错误概率<百万分之一

即RepeatMillRob(●, k)是(1-4^{-k})-正确的MC算法。

- 时间

若要求出错概率不超过ε，则4^{-k}≤ε，2^{2k}≥1/ε，重复Miller-Rabin测试次数：$k = \lceil \lg(1/\varepsilon)/2 \rceil$

每次调用MillRab时间：

① 模幂运算:$a^t \bmod n$ ——模乘法和模平方运算次数O(lg t)

② s-1次模平方运算：$x^2 \bmod n$ ——模平方与乘法类似

§ 5.2 素数测定(数的素性测定)

$\because \lg n > \lg(n-1) = \lg 2^s t = s + \lg t$

$\therefore$一次MillRab执行时间主要是进行O(lg n)次模乘法。

通过传统的算法实现，每次模乘时间为O($\lg^2$ n).

-结论：确定n素性时间为：$O(\lg^3 n \lg \frac{1}{\varepsilon})$

应用中，n为上千位数字,$\varepsilon = 10^{-100}$，该时间完全合理。

- 问题

$\because$Miller-Rabin测试是偏假的

$\therefore$当返回false肯定正确，即判定n是合数是完全正确的。

但返回真时，只能说n是以高概率为素数。

例如，k=10，出错概率 $\varepsilon = 4^{-10} = 2^{-20} <$ 百万分之一

§ 5.2 素数测定(数的素性测定)

可以说n是素数，但有2^{-20}的概率它可能是一个伪素数(合数)不能令人放心。即我们对这类判定问题不能100%相信，可能会冒风险，因此，是否采用确定性算法更好呢？

-分析：

取k=150，概率算法出错概率 $4^{-150} \approx 10^{-100}$.

用一个确定性算法花费更多的时间是完全能确定n是否为素数，但是长时间计算过程中，硬件错误率可能高于4^{-150}.

§ 5.3 矩阵乘法验证

- **问题**

  设A，B，C为n×n矩阵，判定AB=C?通过$A \cdot B$的结果与C比较。

  -传统方法 $O(n^3)$

  -当n非常大时，确定型算法的时间 $\Omega(n^{2.37})$

  -用MC算法，可在$O(n^2)$内解此问题，但要接受一个很小的误差ε。

- **MC算法**

  设X是一个长度为n的二值向量(0/1行向量).

  将判断AB=C改为判断XAB=XC？

§ 5.3 矩阵乘法验证

① 先计算XA　$X_{1n}A_{nn} \Rightarrow 1\times n$向量　n^2次数乘

② 再计算XA与B乘积。　n^2次数乘

③ 计算XC　n^2次数乘

$\left.\begin{matrix} n^2\text{次数乘} \\ n^2\text{次数乘} \\ n^2\text{次数乘} \end{matrix}\right\} 3n^2\text{次乘法}$

- 时间：$O(n^2)$

```
goodproduct( A, B, C, n){
    for i←1 to n do
        x [ i ] ←uniform(0..1);
    if (XA)B=XC then
        return true;
    else return false;
}
```

§ 5.3 矩阵乘法验证

- **分析**

-例：

$$A=\begin{bmatrix}1 & 2 & 3\\ 4 & 5 & 6\\ 7 & 8 & 9\end{bmatrix}\quad B=\begin{bmatrix}3 & 1 & 4\\ 1 & 5 & 9\\ 2 & 6 & 5\end{bmatrix}\quad C=\begin{bmatrix}11 & 29 & 37\\ 29 & 65 & 91\\ 47 & \underset{\substack{\uparrow\\ 101}}{99} & \underset{\substack{\uparrow\\ 145}}{45}\end{bmatrix}$$

$$AB\rightarrow 101 \quad 145$$

① **设X=(1, 1, 0)**

XA相当于将A的第1行和第2行相加：XA=(5, 7, 9)

(XA)B=(40, 94, 128)，相当于是AB的第1行+第2行。(满足结合率)。

XC相当于将C的第1行和第2行相加：XC=(40,94,128).

算法返回true，错误！

§ 5.3 矩阵乘法验证

② 设X=(0, 1, 1)

XA=(11, 13, 15)　　　(A的第2行+第3行)

(XA)B=(76, 166, 236). (AB的第2行+第3行)

XC=(76,164,136).　　　(C的第2行+第3行)

∵AB和C的第3行不等，即AB≠C

∴算法返回false，**正确！**

-考虑两种情况

① 设AB=C，则无论X为何值，必有XAB=XC

② 设AB≠C，若AB与C的第i行不同，且X_i=0则**出错！**即误判AB=C，出错概率≤1/2；否则无论X_i为何值，不影响判定结果。

§ 5.3 矩阵乘法验证

偏真还是偏假？

- 若算法返回false，则存在向量X使

  $XAB \neq XC \Rightarrow AB \neq C$，必正确。

- 若算法返回true，则

$$\begin{cases} \text{当}AB = C\text{时，正确} \\ \text{当}AB \neq C\text{时，错误，发生在}AB\text{与}C\text{的第}i\text{行不等，但}x_i = 0\text{时} \end{cases}$$

- 结论：偏假的，1/2-correct.

§ 5.3 矩阵乘法验证

- 改进

```
RepeatGoodProduct( A, B, C, n, k) {
   for i←1 to k do  //重复k次
         if  GoodProduct(A, B, C, n) = false then
               return false;//偏假的，有一次假即可返回
   return true;
}
```

此算法是偏假的$(1-2^{-k})$-correct的

当k=10，0.99-正确。

k=20，出错概率<1/百万。

§ 5.3 矩阵乘法验证

若给出出错概率ε，则$2^{-k}=\varepsilon$：

GP(A, B, C, n, ε) {

$$k \leftarrow \left\lceil \lg \frac{1}{\varepsilon} \right\rceil;$$

return RepeatGoodProduct (A, B, C, n, k);

}

时间：$O(n^2 \log \frac{1}{\varepsilon})$

∵计算XAB和XC需要$3n^2$次数字乘，若k=20，则共需$60n^2$次数乘。

∴当n很大时(n>>60)，它远远快于确定性算法。

§ 5.3 矩阵乘法验证

- **习题**

```
PrintPrimes{  //打印1万以内的素数
    print 2，3；
    n ←5；
    repeat
        if RepeatMillRab(n, ⌊lgn⌋ )  then print n;
        n ←n+2;
    until  n=10000;
}
```

与确定性算法相比较，并给出100~10000以内错误的比例。