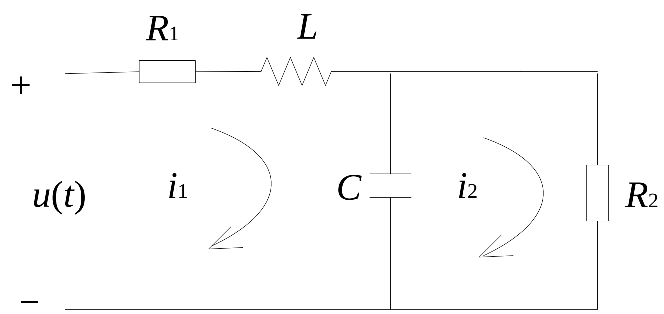
杭州电子科技大学信息工程学院考试卷（A）卷

考试课程	现代控制理论基础		考试日期	2016 年 1 月 7 日		成 绩	
课程号	X0602340	教师号	04175	任课教师姓名	陈云		
考生姓名		学号（8 位）		年级	1309	专业	自动化

1. （15 分）求给定 RLC 系统的状态空间实现。输入为$u(t)$，输出为$i_2(t)$，状态变量为

$x_1(t)=i_1(t),\ \ x_2(t)=u_C(t)$。



解： 如图，由电路知识易得

$$\begin{cases} u(t)=R_1 i_1(t)+L\dfrac{\mathrm{d}\,i_1(t)}{\mathrm{d}\,t}+u_C(t) \\ i_1(t)=\dfrac{u_C(t)}{R_2}+C\dfrac{\mathrm{d}\,u_C(t)}{\mathrm{d}\,t} \end{cases}$$ （6 分）

选择状态变量为$x_1(t)=i_1(t),\ \ x_2(t)=u_C(t)$，输入为$u(t)$，输出为$i_2(t)$，则有

$$\begin{cases} L\dot{x}_1(t)=-R_1x_1(t)-x_2(t)+u(t) \\ C\dot{x}_2(t)=x_1(t)-\dfrac{x_2(t)}{R_2} \end{cases}$$

即

$$\begin{cases} \dot{x}_1(t)=-\dfrac{R_1}{L}x_1(t)-\dfrac{1}{L}x_2(t)+\dfrac{1}{L}u(t) \\ \dot{x}_2(t)=\dfrac{1}{C}x_1(t)-\dfrac{1}{R_2C}x_2(t) \end{cases}$$ （6 分）

写成矩阵形式为

$$\dot{x}=\begin{bmatrix} -\dfrac{R_1}{L} & -\dfrac{1}{L} \\ \dfrac{1}{C} & -\dfrac{1}{R_2C} \end{bmatrix}x+\begin{bmatrix} \dfrac{1}{L} \\ 0 \end{bmatrix}u(t),$$ （5 分）

$$y=i_2(t)=\frac{1}{R_2}u_C(t)=\begin{bmatrix} 0 & \dfrac{1}{R_2} \end{bmatrix}x$$

2.（20 分）给定线性定常连续系统$\begin{cases} \dot{\boldsymbol{x}}(t)=A\boldsymbol{x}(t)+Bu(t) \\ y(t)=C\boldsymbol{x}(t) \end{cases}$，其中：

$$\boldsymbol{x}(t)=\begin{bmatrix} x_1(t) \\ x_2(t) \end{bmatrix},\quad A=\begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -2 & -3 \end{bmatrix},\quad B=\begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix},\quad C=\begin{bmatrix} 1 & -1 \end{bmatrix},$$

（1）求系统的特征多项式及特征值；

（2）求系统的状态转移矩阵$\Phi(t)$；

（3）设$u(t)=1(t)$，$x_1(0)=x_2(0)=0$，求$x_1(t)$，$x_2(t)$和$y(t)$。

解：（1）由$|sI-A|$得系统的特征多项式为s^2+3s+2。

由$s^2+3s+2=0$得特征值为$\lambda_1=-1,\lambda_2=-2$。 （5 分）

（2）将$\lambda_1=-1,\lambda_2=-2$代入

$$(\lambda_i I-A)p_i=0(i=1,2)$$

可得两个特征向量$p_1=[1\quad -1]^T, p_2=[1\quad -2]^T$及非奇异矩阵$P$

$$P=\begin{bmatrix} 1 & 1 \\ -1 & -2 \end{bmatrix},\quad P^{-1}=\begin{bmatrix} 2 & 1 \\ -1 & -1 \end{bmatrix}$$

所以有

$$A'=P^{-1}AP=\begin{bmatrix} 2 & 1 \\ -1 & -1 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -2 & -3 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 1 & 1 \\ -1 & -2 \end{bmatrix}=\begin{bmatrix} -1 & 0 \\ 0 & -2 \end{bmatrix}$$

因此，状态转移矩阵为

$$\Phi(t)=e^{At}=Pe^{A't}P^{-1}=\begin{bmatrix} 1 & 1 \\ -1 & -2 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} e^{-t} & 0 \\ 0 & e^{-2t} \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 2 & 1 \\ -1 & -1 \end{bmatrix}=\begin{bmatrix} 2e^{-t}-e^{-2t} & e^{-t}-e^{-2t} \\ -2e^{-t}+2e^{-2t} & -e^{-t}+2e^{-2t} \end{bmatrix}$$ （10 分）

（3）由条件得

$$\boldsymbol{x}(t)=e^{At}\boldsymbol{x}(0)+\int_0^t e^{A(t-\tau)}B\boldsymbol{u}(\tau)d\tau=\int_0^t e^{A(t-\tau)}Bd\tau$$

$$=\int_0^t\begin{bmatrix}2e^{-(t-\tau)}-e^{-2(t-\tau)} & e^{-(t-\tau)}-e^{-2(t-\tau)}\\ -2e^{-(t-\tau)}+2e^{-2(t-\tau)} & -e^{-(t-\tau)}+2e^{-2(t-\tau)}\end{bmatrix}\begin{bmatrix}0\\1\end{bmatrix}d\tau=\begin{bmatrix}\frac{1}{2}-e^{-t}+\frac{1}{2}e^{-2t}\\ e^{-t}-e^{-2t}\end{bmatrix}$$

即 $x_1(t)=\frac{1}{2}-e^{-t}+\frac{1}{2}e^{-2t}$， $x_2(t)=e^{-t}-e^{-2t}$

$y(t)=Cx(t)=\frac{1}{2}-2e^{-t}+\frac{3}{2}e^{-2t}$ （5 分）

3.（15 分）线性定常连续系统 $\sum(A,B,C)$ 在线性变换 $\tilde{x}=P^{-1}x$ 下对应的系统记为 $\tilde{\Sigma}(\tilde{A},\tilde{B},\tilde{C})$，求 $\tilde{A},\tilde{B},\tilde{C}$ 。系统 $\sum(A,B,C)$ 和 $\tilde{\Sigma}(\tilde{A},\tilde{B},\tilde{C})$ 的传递函数有什么关系？并证明你的结论。

解： $\tilde{A}=P^{-1}AP,\tilde{B}=P^{-1}B,\tilde{C}=CP$

传递函数 $\tilde{G}(s)$ 与 $G(s)$ 相同，特征值也相同。 （5 分）

证明：$\tilde{G}(s)=\tilde{C}[(sI-\tilde{A})^{-1}]\tilde{B}+\tilde{D}=C[(sI-A)^{-1}]B+D=G(s)$ （5 分）

$|\lambda I-\tilde{A}|=|\lambda I-P^{-1}AP|=|P^{-1}(\lambda I-A)P|=|P^{-1}|\bullet|\lambda I-A|\bullet|P|=|\lambda I-A|$ （5 分）

4. （10 分）求下述状态方程的离散化方程（保持器是零阶的，$\boldsymbol{T}$=1s）

$$\dot{x}=\begin{bmatrix}0 & 1\\0 & 0\end{bmatrix}x+\begin{bmatrix}1\\0\end{bmatrix}u$$

解： 首先，$(sI-A)^{-1}=\begin{bmatrix}s & -1\\0 & s\end{bmatrix}^{-1}=\frac{1}{s^2}\begin{bmatrix}s & 1\\0 & s\end{bmatrix}$ （3 分）

$$G=e^{AT}=L^{-1}(sI-A)^{-1}\Big|_{t=T}=L^{-1}\begin{bmatrix}\frac{1}{s} & \frac{1}{s^2}\\ 0 & \frac{1}{s}\end{bmatrix}_{t=T}=\begin{bmatrix}1 & t\\0 & 1\end{bmatrix}_{t=T}=\begin{bmatrix}1 & 1\\0 & 1\end{bmatrix}$$ （3 分）

$$H=\int_0^T e^{At}dtB=\int_0^1\begin{bmatrix}1 & t\\0 & 1\end{bmatrix}\begin{bmatrix}1\\0\end{bmatrix}dt=\begin{bmatrix}1\\0\end{bmatrix}$$ （3 分）

所以离散化方程为：

$$x(k+1)=\begin{bmatrix}1 & 1\\0 & 1\end{bmatrix}x(k)+\begin{bmatrix}1\\0\end{bmatrix}u(k)$$ （1 分）

5. （10 分）给定系统

$$\dot{x}=\begin{bmatrix}0 & 1 & 0\\0 & 0 & 1\\-2 & -1 & -3\end{bmatrix}x+\begin{bmatrix}-1\\0\\1\end{bmatrix}u$$

$$y=\begin{bmatrix}a & 0 & 0\end{bmatrix}x$$

1）给出系统的可控性判别矩阵 Q_c 并判定系统是否可控。

2）确定使系统完全可观测时 a 的取值范围。

解： 1）系统的可控性矩阵 Q_c 为

$$Q_c=\begin{bmatrix}B & AB & A^2B\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}-1 & 0 & 1\\0 & 1 & -1\\1 & -1 & 2\end{bmatrix}$$ （3 分）

显然 rank $Q_c=3$，即 Q_c 满秩，因此系统可控。 （2 分）

2）系统的可观性矩阵 Q_o 为

$$Q_o=\begin{bmatrix}C\\CA\\CA^2\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}a & 0 & 0\\0 & a & 0\\0 & 0 & a\end{bmatrix}$$ （3 分）

Q_c 列满秩时系统可观，显然只要 $a\neq 0$ 即可满足。 （2 分）

6.（20 分）给定系统为：

$$\dot{\boldsymbol{x}}=\begin{bmatrix}0 & 1\\0 & -1\end{bmatrix}\boldsymbol{x}+\begin{bmatrix}0\\1\end{bmatrix}u$$

$$y=\begin{bmatrix}1 & 0\end{bmatrix}\boldsymbol{x}$$

其状态不能直接测得，试设计一个观测器——状态反馈系统，使其具有期望的闭环极点–1+j 和–1–j，且观测器的特征值为–4 和–5，并计算整个闭环系统的传递函数。

解： 1) 首先检查控制对象的可控性和可观性

由于系统可控矩阵和可观矩阵的秩分别为

$$\text{rank}\begin{bmatrix}B & AB\end{bmatrix}=\text{rank}\begin{bmatrix}0 & 1\\1 & -5\end{bmatrix}=2=n$$

$$\text{rank}\begin{bmatrix}C\\CA\end{bmatrix}=\text{rank}\begin{bmatrix}1 & 0\\0 & 1\end{bmatrix}=2=n$$

所以系统是状态完全可控、可观的，从而存在矩阵 K、G 使得系统及观测器的极点可以任意配置。 （4 分）

2）其次，设计状态反馈矩阵 K

设 $K=\begin{bmatrix}k_2 & k_1\end{bmatrix}$，引入状态反馈后系统的特征多项式为

$$|sI-(A-BK)|=s^2+(1+k_1)s+k_2$$

由系统希望配置的极点确定的特征多项式为

$$(s+1-j)(s+1+j)=s^2+2s+2$$

令上述两个特征多项式对应系数相等，可得

$$k_1=1, k_2=2$$

即状态反馈矩阵为

$$K=\begin{bmatrix}k_2 & k_1\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}2 & 1\end{bmatrix}$$ （6 分）

3）设计状态观测器的反馈矩阵 G

取状态观测器的极点为 $s_1=-4, s_2=-5$，则希望的状态观测器具有的特征多项式为

$$(s+4)(s+5)=s^2+9s+20$$

设反馈矩阵 G 为

$$G=\begin{bmatrix}g_2 & g_1\end{bmatrix}^T$$

则状态观测器子系统的特征多项式为

$$|sI-(A-GC)|=s^2+(1+g_2)s+g_2+g_1$$

令两个多项式相等，解得

$$g_1=12, g_2=8$$

即

$$G=\begin{bmatrix}g_2 & g_1\end{bmatrix}^T=\begin{bmatrix}8\\12\end{bmatrix}$$ （6 分）

4）状态观测器不改变闭环系统的传递函数，因此

$$\begin{aligned}G_{K,G}(s)&=C(sI-A+BK)^{-1}B\\&=[1\quad 0]\begin{bmatrix}s & -1\\2 & s+2\end{bmatrix}^{-1}\begin{bmatrix}0\\1\end{bmatrix}\\&=\frac{1}{s^2+2s+2}\end{aligned}$$

（4 分）

7.（10 分）求下列系统的平衡态，并通过选取合适的李亚普诺夫函数判断其稳定性。

$$\dot{x}_1=x_2-2x_1(x_1^2+x_2^2),$$
$$\dot{x}_2=-x_1-x_2(x_1^2+x_2^2)$$

解： 原点（0,0）为系统的平衡点。

选取李亚普诺夫函数 $V(x)=\frac{1}{2}(x_1^2+x_2^2)$ （4 分）

它是正定的，且有

$$\begin{aligned}\dot{V}(x)&=x_1\dot{x}_1+x_2\dot{x}_2\\&=x_1[x_2-2x_1(x_1^2+x_2^2)]+x_2[-x_1-x_2(x_1^2+x_2^2)]\\&=-(2x_1^2+x_2^2)(x_1^2+x_2^2)\end{aligned}$$

显然，$\dot{V}(x)<0$，即系统是渐近稳定的。 （6 分）