杭州电子科技大学学生考试卷（A）卷

考试课程	现代控制理论		考试日期	2012 年 6 月 日		成 绩	
课程号	B0601630	教师号		任课教师姓名			
考生姓名		学号（8 位）		年级	090628	专业	自动化

1. （18 分，每题 3 分）判断题（1~4 题，若正确则在括号里打√，反之打×）与填空题。

（1） 状态变量是用于完全描述系统动态行为的一组变量，因此都具有实际的物理意义。

（ × ）

（2） 可控性和可观性是揭示动态系统本质特征的两个基本结构特性，因此利用传递函数和状态空间描述的动态系统都涉及可控性和可观性问题。 （ × ）

（3） 状态反馈控制可改变系统的稳定性和动态性能，但不改变系统的可控性和可观性。

（ × ）

（4） 设n维线性时不变系统的可观性矩阵为Q_O，且rank $Q_O=n_o<n$，则存在线性非奇异变换，可将系统分解为$n-n_o$维的可观子系统和n_o维的不可观子系统。 （ × ）

（5） 在离散时间状态方程中，系统在k时刻的状态只取决于所有此时刻以前的输入采样值，而与k时刻的输入采样无关，因为__惯 性__是一切物理系统的基本特性。

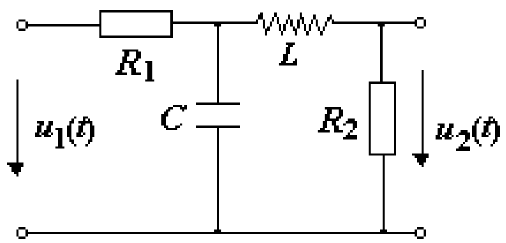
（6） 已知系统为 $\dot{\boldsymbol{x}}=\begin{bmatrix}0 & 1\\ -3 & 4\end{bmatrix}\boldsymbol{x}+\begin{bmatrix}1\\1\end{bmatrix}u,\ y=\begin{bmatrix}1 & -1\end{bmatrix}\boldsymbol{x}$，则该系统的对偶系统为：

$$\dot{\boldsymbol{x}}=\begin{bmatrix}0 & -3\\ 1 & 4\end{bmatrix}\boldsymbol{x}+\begin{bmatrix}1\\-1\end{bmatrix}u \qquad (2分)$$

$$y=\begin{bmatrix}1 & 1\end{bmatrix}\boldsymbol{x} \qquad (1分)$$

____。

2. （10 分）RLC网络如下图所示，$u_1(t)$为输入量，$u_2(t)$为输出量，若选择电容C两端的电压$u_c(t)$和电感L两端的电流$i_L(t)$为状态变量，试求系统状态空间表达式。



解：如图，由电路知识易得

$$\begin{cases} u_1(t)=u_C(t)+R_1\left(C\dfrac{\mathrm{d}u_C(t)}{\mathrm{d}t}+i_L(t)\right)\\ u_C(t)=i_L(t)R_2+L\dfrac{\mathrm{d}i_L(t)}{\mathrm{d}t}\end{cases} \qquad （4 分）$$

及

$$u_2=R_2 i_L \qquad （2 分）$$

选择电容C两端的电压$u_c(t)$和电感L两端的电流$i_L(t)$为状态变量，得

$$\begin{cases}\begin{bmatrix}\dot{u}_c\\ \dot{i}_L\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}-\dfrac{1}{R_1C} & -\dfrac{1}{C}\\ \dfrac{1}{L} & -\dfrac{R_2}{L}\end{bmatrix}\begin{bmatrix}u_c\\ i_L\end{bmatrix}+\begin{bmatrix}\dfrac{1}{R_1C}\\ 0\end{bmatrix}u_1\\ u_2=\begin{bmatrix}0 & R_2\end{bmatrix}\begin{bmatrix}u_c\\ i_L\end{bmatrix}\end{cases} \qquad （4 分）$$

或

$$\begin{cases}\begin{bmatrix}\dot{x}_1\\ \dot{x}_2\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}-\dfrac{1}{R_1C} & -\dfrac{1}{C}\\ \dfrac{1}{L} & -\dfrac{R_2}{L}\end{bmatrix}\begin{bmatrix}x_1\\ x_2\end{bmatrix}+\begin{bmatrix}\dfrac{1}{R_1C}\\ 0\end{bmatrix}u_1\\ y=\begin{bmatrix}0 & R_2\end{bmatrix}\begin{bmatrix}x_1\\ x_2\end{bmatrix}\end{cases}$$

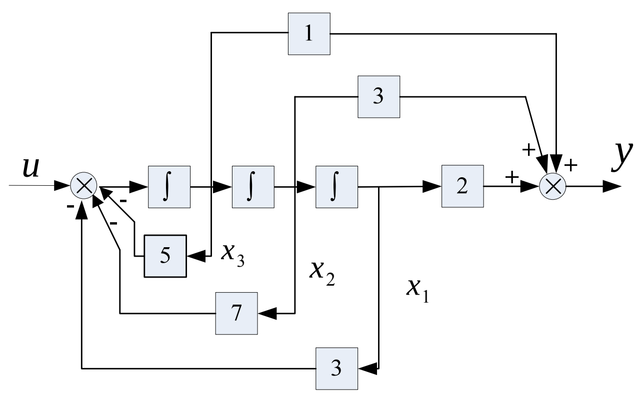
3.（15 分）已知系统的传递函数如下，求状态空间表达式，并画出相应的模拟结构图。

$$\frac{Y(s)}{U(s)}=G(s)=\frac{s^2+3s+2}{s^3+5s^2+7s+3}$$

解：

$$\begin{bmatrix}\dot{x}_1\\ \dot{x}_2\\ \dot{x}_3\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}0 & 1 & 0\\ 0 & 0 & 1\\ -3 & -7 & -5\end{bmatrix}\begin{bmatrix}x_1\\ x_2\\ x_3\end{bmatrix}+\begin{bmatrix}0\\ 0\\ 1\end{bmatrix}u$$ （10 分）

$$y=\begin{bmatrix}2 & 3 & 1\end{bmatrix}\begin{bmatrix}x_1\\ x_2\\ x_3\end{bmatrix}$$



（画图 5 分）

解法 2： $b_0=0$， $b_1=1$， $b_2=3$， $b_3=2$，然后计算

$$\beta_0=b_0=0$$

$$\beta_1=b_1-a_1\beta_0=1-0=1$$

$$\beta_2=b_2-a_1\beta_1-a_2\beta_0=3-5*1-0=-2$$ （4 分）

$$\beta_3=b_3-a_1\beta_2-a_2\beta_1-a_3\beta_0=2-5*(-2)-7*1-0=5$$

于是可得状态空间方程（**相应的模拟结构图应根据下式画出，省略**）:

$$\dot{x}=\begin{bmatrix}0 & 1 & 0\\ 0 & 0 & 1\\ -3 & -7 & -5\end{bmatrix}x+\begin{bmatrix}1\\ -2\\ 5\end{bmatrix}u,$$ （6 分）

$$y=\begin{bmatrix}1 & 0 & 0\end{bmatrix}x$$

4. （10 分）设系统状态空间表达式 $\dot{x}=Ax+Bu$， $y=Cx$。引入状态变换 $x=P\tilde{x}$ 对系统进行线性变换，其中 P 为非奇异矩阵。证明：

1）变换前后系统的特征值不变。

2）变换前后系统的传递函数矩阵不变。

证明：首先，变换之后的矩阵变量为 $\tilde{A}=P^{-1}AP,\tilde{B}=P^{-1}B,\tilde{C}=CP$

1） $$|\lambda I-\tilde{A}|=|\lambda I-P^{-1}AP|=|P^{-1}(\lambda I-A)P|=|P^{-1}|\bullet|\lambda I-A|\bullet|P|=|\lambda I-A|$$

即变换前后系统的特征值不变。 （5 分）

2） $$\begin{aligned}\tilde{G}(s)&=\tilde{C}(sI-\tilde{A})^{-1}\tilde{B}=CP(sI-P^{-1}AP)^{-1}P^{-1}B\\&=CP[P^{-1}(sI-A)P]^{-1}P^{-1}B=C[(sI-A)]^{-1}B=G(s)\end{aligned}$$

即变换前后系统的传递函数矩阵不变。 （5 分）

5.（10 分）已知系统的状态空间表达式为

$$\dot{x}=\begin{bmatrix}1 & 1\\ 0 & 0\end{bmatrix}x+\begin{bmatrix}1\\ 1\end{bmatrix}u$$

若状态完全可控，试将其化为可控标准型；若不完全可控，写出其可控子系统。

解：系统的可控性矩阵 Q_c 为

$$Q_c=\begin{bmatrix}B & AB\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}1 & 2\\ 1 & 0\end{bmatrix}$$

显然 $\text{rank}\,Q_c=2$，即 Q_c 满秩，因此系统可控。 （2 分）

另外， $Q_C^{-1}=\begin{bmatrix}0 & 1\\ \frac{1}{2} & -\frac{1}{2}\end{bmatrix}$， $p_1=\begin{bmatrix}\frac{1}{2} & -\frac{1}{2}\end{bmatrix}$，

及 $$P=\begin{bmatrix}p_1\\ p_1A\end{bmatrix}=\frac{1}{2}\begin{bmatrix}1 & -1\\ 1 & 1\end{bmatrix},P^{-1}=\begin{bmatrix}1 & 1\\ -1 & 1\end{bmatrix}$$ （4 分）

因此系统的可控标准型为

$$\dot{\tilde{x}}=\tilde{A}\tilde{x}+\tilde{B}u=PAP^{-1}\tilde{x}+PBu=\begin{bmatrix}0 & 1\\ 0 & 1\end{bmatrix}x+\begin{bmatrix}0\\ 1\end{bmatrix}u$$ （4 分）

6. （10 分）设系统的状态方程为

$$\dot{\boldsymbol{x}}(t)=\begin{bmatrix}-a & 0\\ 0 & -b\end{bmatrix}\boldsymbol{x}(t)+\begin{bmatrix}1\\1\end{bmatrix}u(t),\ x(0)=\begin{bmatrix}1\\1\end{bmatrix},a>0,b>0$$

试求出在输入为 $u=1(t)\ (t\ge 0)$ 时系统的状态响应。（10 分）

解：状态转移矩阵为

$$\Phi(t)=e^{At}=\begin{bmatrix}e^{-at} & 0\\ 0 & e^{-bt}\end{bmatrix}\qquad（4 分）$$

状态响应为

$$\boldsymbol{x}(t)=\Phi(t)\boldsymbol{x}(0)+\int_0^t\Phi(t)\boldsymbol{B}u(\tau)\mathrm{d}\tau$$

$$=\begin{bmatrix}e^{-at} & 0\\ 0 & e^{-bt}\end{bmatrix}\times 1+\int_0^t\begin{bmatrix}e^{-a(t-\tau)} & 0\\ 0 & e^{-b(t-\tau)}\end{bmatrix}\times 1\times\mathrm{d}\tau\qquad（6 分）$$

$$=\begin{bmatrix}e^{-at}+\frac{1}{a}\left(1-e^{-at}\right)\\ e^{-bt}+\frac{1}{b}\left(1-e^{-bt}\right)\end{bmatrix}$$

7.（17 分）已知系统的状态方程为

$$\dot{x}=\begin{bmatrix}0 & 1\\ 0 & -2\end{bmatrix}x+\begin{bmatrix}0\\1\end{bmatrix}u$$

$$y=\begin{bmatrix}2 & 0\end{bmatrix}x$$

设计带全维状态观测器的状态反馈系统，并使得：

1）闭环系统的极点配置在 $-4\pm j2$；

2）状态观测器的极点配置在 $-8,-10$。

3）求出闭环传递函数。

解：首先，系统是可控标准型，且

$$\operatorname{rank}\begin{bmatrix}C\\ CA\end{bmatrix}=\operatorname{rank}\begin{bmatrix}2 & 0\\ 0 & 2\end{bmatrix}=2=n$$

所以系统是状态完全可控、可观的，从而存在矩阵 K、G 使得系统及观测器的极点可以任意配置。（4 分）

1）其次，设计状态反馈矩阵 K

设 $K=\begin{bmatrix}k_2 & k_1\end{bmatrix}$，引入状态反馈后系统的特征多项式为

$$\left|sI-(A-BK)\right|=s^2+(k_1+2)s+k_2$$

由系统希望配置的极点确定的特征多项式为

$$(s+4-j2)(s+4+j2)=s^2+8s+20$$

令上述两个特征多项式对应系数相等，可得

$$k_1=6,k_2=20$$

即状态反馈矩阵为

$$K=\begin{bmatrix}k_2 & k_1\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}20 & 6\end{bmatrix}\qquad（5 分）$$

2）设计状态观测器的反馈矩阵 G

取状态观测器的极点为 $s_1=-8, s_2=-10$，则希望的状态观测器具有的特征多项式为

$$(s+8)(s+10)=s^2+18s+80$$

设反馈矩阵 G 为

$$G=[g_2 \quad g_1]^T$$

则状态观测器子系统的特征多项式为

$$|sI-(A-GC)|=s^2+(2g_2+2)s+(2g_1+4g_2)$$

令两个多项式相等，解得

$$g_1=24, g_2=8$$

即

$$G=[g_2 \quad g_1]^T=\begin{bmatrix}8\\24\end{bmatrix}$$ （5 分）

3）状态观测器不改变闭环系统的传递函数，因此

$$G_{K,G}(s)=G_K(s)=C(sI-A+BK)^{-1}B$$
$$=\frac{1}{s^2+8s+20}$$ （3 分）

8.（10 分）请用**两种方法**判定下述系统在原点（0，0）的稳定性：

$$\begin{cases}\dot{x}_1=-x_1+x_2\\ \dot{x}_2=-x_1-3x_2\end{cases}$$

解：方法 1： $A=\begin{bmatrix}-1 & 1\\ -1 & -3\end{bmatrix}$，$|sI-A|=\begin{vmatrix}s+1 & -1\\ 1 & s+3\end{vmatrix}=0$

得 A 的两个特征根为 $s_{1,2}=\dfrac{-3\pm j\sqrt{7}}{2}$

即，两个特征根均具有负实部，因而系统稳定。

方法 2： 选取李亚普诺夫函数 $V(x)=\dfrac{1}{2}(x_1^2+x_2^2)$

它是正定的，且有

$$\begin{aligned}\dot{V}(x)&=x_1\dot{x}_1+x_2\dot{x}_2\\ &=x_1(-x_1+x_2)+x_2(-x_1-3x_2)\\ &=-x_1^2-3x_2^2\end{aligned}$$

显然，$\dot{V}(x)<0$，即系统是渐近稳定的。

方法 3： 求解李亚普诺夫方程 $PA+A^TP=-I$，得

$$P=\frac{1}{16}\begin{bmatrix}7 & 1\\ 1 & 3\end{bmatrix}$$

P 正定，因此系统在原点处是稳定的。

给出任意一种判定方法得 5 分。若只给出一种方法，可视情况给 5~7 分。