





近世代数

计算机科学与技术学院
唐琳琳



内容

- 1. 集合
- 2. 映射与变换
- 3. 代数运算
- 4. 运算律
- 5. 同态与同构
- 6. 等价关系与集合的分类

以下关于代数运算和运算律说法正确的是（）

- ☒ A 整数集上的加、减、乘都是其上的代数运算。
- ☐ B 一个集合上的代数运算也是其子集上的代数运算。
- ☒ C 代数运算满足结合律后只要同一组元素的顺序不变，随便加括号其结果都一样。
- ☐ D 代数运算满足结合律就满足交换律

提交

同态

• 定义

➤ 集合 M 上有代数运算 \circ , 集合 \bar{M} 上有代数运算 $\bar{\circ}$, 若存映射 $\varphi, \varphi: M \rightarrow \bar{M}$, 若满足:

$$\varphi: a \rightarrow \bar{a}, \quad b \rightarrow \bar{b}$$

$$\varphi: a \circ b \rightarrow \bar{a} \bar{\circ} \bar{b}$$

即, $\overline{a \circ b} = \bar{a} \bar{\circ} \bar{b}$ 或 $\varphi(a \circ b) = \varphi(a) \bar{\circ} \varphi(b)$

那么, φ 被成为代数系统 M 到 \bar{M} 的一个同态映射。若其为一满射, 就称代数系统 M 与 \bar{M} 同态。记为: $M \sim \bar{M}$

同态

• 例子

➤ 1. \circ 是数域 F 上全体 n 阶方阵的集合 M 上的矩阵乘法代数运算, \cdot 是数域 $F = \bar{M}$ 上的普通数乘代数运算。即:

$$\varphi: M \rightarrow \bar{M}$$

$$\varphi: A \rightarrow |A|$$

问 φ 是不是一个同态映射?

Yes $|AB| = |A| \cdot |B|$ $\varphi(AB) = \varphi(A) \cdot \varphi(B)$

它是不是个满射?

Yes

$$\forall a \in \bar{M}$$

$$\exists A = \begin{bmatrix} a & & & \\ & 1 & & \\ & & \ddots & \\ & & & 1 \end{bmatrix} \in M$$

$$M \sim \bar{M}$$

同态

• 定理1

➤ 代数系统 M 和 \bar{M} 分别有代数运算 \circ 和 $\bar{\circ}$ ，若 $M \sim \bar{M}$ 则会有以下结论成立：

(1) \circ 满足结合律, 那么 $\bar{\circ}$ 也满足结合律。

(2) \circ 满足交换律, 那么 $\bar{\circ}$ 也满足交换律。

证明：(1) 设 φ 为两代数系统之间的满同态映射, 则有

$$\begin{aligned} \varphi: \quad (a \circ b) \circ c &\rightarrow \left(\overline{a \circ b} \right) \bar{\circ} \bar{c} = (\bar{a} \bar{\circ} \bar{b}) \bar{\circ} \bar{c} \\ a \circ (b \circ c) &\rightarrow \bar{a} \bar{\circ} \left(\overline{b \circ c} \right) = \bar{a} \bar{\circ} (\bar{b} \bar{\circ} \bar{c}) \end{aligned} \quad a \rightarrow \bar{a}, b \rightarrow \bar{b}, c \rightarrow \bar{c}$$

$$(a \circ b) \circ c = a \circ (b \circ c) \quad (\bar{a} \bar{\circ} \bar{b}) \bar{\circ} \bar{c} = \bar{a} \bar{\circ} (\bar{b} \bar{\circ} \bar{c})$$

同态

$$(2) \quad \forall \bar{a}, \bar{b} \in \bar{M}$$

设 $\varphi: \quad a \rightarrow \bar{a}, \quad b \rightarrow \bar{b}$

那么 $a \circ b \rightarrow \bar{a} \circ \bar{b} \quad b \circ a \rightarrow \bar{b} \circ \bar{a}$

$$a \circ b = b \circ a \quad \rightarrow \quad \bar{a} \circ \bar{b} = \bar{b} \circ \bar{a}$$

同态

• 定理2

➤ \circ 和 \oplus 是代数系统 M 上的两个代数运算, $\bar{\circ}$ 和 $\bar{\oplus}$ 是代数系统 \bar{M} 上的两个代数运算; φ 是 M 到 \bar{M} 的一个满射, 且对 \circ 与 $\bar{\circ}$, \oplus 与 $\bar{\oplus}$ 同态; 那么如果 \circ 关于 \oplus 满足左 (右) 分配律那么 $\bar{\circ}$ 对 $\bar{\oplus}$ 也将满足左 (右) 分配律。

证明: $\forall \bar{a}, \bar{b}, \bar{c} \in \bar{M}, \quad \exists a, b, c \in M$

$$\varphi: a \rightarrow \bar{a}, b \rightarrow \bar{b}, c \rightarrow \bar{c}$$

$$\varphi(a \circ (b \oplus c)) = \varphi(a) \bar{\circ} \varphi(b \oplus c) = \varphi(a) \bar{\circ} [\varphi(b) \bar{\oplus} \varphi(c)] = \bar{a} \bar{\circ} (\bar{b} \bar{\oplus} \bar{c})$$

$$\because a \circ (b \oplus c) = (a \circ b) \oplus (a \circ c)$$

$$\begin{aligned} \therefore \varphi(a \circ (b \oplus c)) &= \varphi[(a \circ b) \oplus (a \circ c)] = \varphi(a \circ b) \bar{\oplus} \varphi(a \circ c) \\ &= (\bar{a} \bar{\circ} \bar{b}) \bar{\oplus} (\bar{a} \bar{\circ} \bar{c}) \end{aligned}$$

同构

- 定义

➤ φ 是代数系统 M 到 \bar{M} 关于代数运算 \circ 的同态满射，如果 φ 同时也是一个单射（即双射），那么它就是 M 到 \bar{M} 的一个同构映射。称 M 与 \bar{M} 同构，记为：

$$M \cong \bar{M}$$

- 1. 如果没有这种同构映射，则称 M 与 \bar{M} 不同构。
- 2. M 到其自身的同态映射叫做 M 的自同态映射，简称为 M 的自同态。
- 3. M 到其自身的同构映射叫做 M 的自同构映射，简称为 M 的自同构。

同构

• 例子

➤ 1. $M = \mathbb{Z}$, \bar{M} 是偶数集, $\varphi: n \rightarrow 2n$, 是否是他们之间的同构映射?

注: 要对一定的运算来讲

➤ 2. $M = \mathbb{Q}_+$ 是正有理数集, \circ 若是普通数乘运算 “ \times ”, 那么下面法则是否是一个 $M = \mathbb{Q}_+$ 上的自同构?

$$\varphi: a \rightarrow \frac{1}{a}$$

➤ 若 \circ 是普通数的加法 “+”, 那么法则此时还是不是原集合上的自同构?

$$\varphi(2+3) = \varphi(5) = \frac{1}{5}$$

$$\varphi(2) + \varphi(3) = \frac{1}{2} + \frac{1}{3} = \frac{5}{6} \neq \frac{1}{5}$$

$$\varphi(2+3) \neq \varphi(2) + \varphi(3)$$

同构

➤性质

- 1. $M \cong M$ 反身性
- 2. 若 $M_1 \cong M_2$, 那么 $M_2 \cong M_1$ 对称性
- 3. 若 $M_1 \cong M_2$ 且 $M_2 \cong M_3$, 那么 $M_1 \cong M_3$ 传递性

构造一个同构映射.

- 1. I 恒等映射
- 2. 若 φ_1 是 $M_1 \cong M_2$ 的同构映射, 那么 φ_1^{-1} 就是 $M_2 \cong M_1$ 的同构映射。
- 3. 若 φ_1 是 $M_1 \cong M_2$ 的同构映射, φ_2 是 $M_2 \cong M_3$ 的同构映射, 那么 $\varphi_3 = \varphi_2 \varphi_1$ 是 $M_1 \cong M_3$ 的同构映射。

同构

• 意义

➤ \circ 是 $M = \{a, b, c, \dots\}$ 的代数运算, $\bar{\circ}$ 是 $\bar{M} = \{\bar{a}, \bar{b}, \bar{c}, \dots\}$ 的代数运算, 若 $M \cong \bar{M}$, 同构映射如下:

$$\varphi: \quad a \rightarrow \bar{a}, \quad b \rightarrow \bar{b}, \quad c \rightarrow \bar{c}, \dots$$

$$a \circ b = c \quad \Leftrightarrow \quad \bar{a} \bar{\circ} \bar{b} = \bar{c}$$

那么代数系统 M 上所有的运算性质都可以自动的传递给所有与 M 同构的代数系统上。

同态与同构

• 练习

➤ 1. (1) $x \rightarrow |x|$, (2) $x \rightarrow 2x$, (3) $x \rightarrow x^2$, (4) $x \rightarrow -x$ for \mathbb{R} , “ \times ”

自同态? 自同态满射? 自同构?

$$(1) \quad \varphi(ab) = |ab| = |a||b| = \varphi(a)\varphi(b)$$

$$(2) \quad \varphi(ab) = 2ab \neq 2a \cdot 2b = \varphi(a)\varphi(b)$$

$$(3) \quad \varphi(ab) = (ab)^2 = a^2 \cdot b^2 = \varphi(a)\varphi(b)$$

$$(4) \quad \varphi(ab) = -ab \neq (-a) \cdot (-b) = \varphi(a)\varphi(b)$$

同态与同构

• 练习

- 2. 给出有理数集 Q 上一个不同于恒等映射的自同构。
代数运算是普通加法“+”。

➤ 映射、保持运算

$$\varphi: x \rightarrow -x$$

$$a \rightarrow -a, b \rightarrow -b$$

$$\varphi(a \circ b) = -(a + b) = (-a) + (-b) = \varphi(a) \circ \varphi(b)$$

➤ 双射

对 $\forall x \in Q \exists -x \in Q$ 有 $\varphi(-x) = -(-x) = x$ 满

对 $\forall x, y \in Q, x \neq y$, 有 $\varphi(x) = -x \neq -y = \varphi(y)$ 单

自同构

同态与同构

• 练习

➤ 3. \circ 和 $\bar{\circ}$ 分别是 M 和 \bar{M} 上的代数运算, $M \sim \bar{M}$, 若 $\bar{\circ}$ 在 \bar{M} 上满足结合律, 则 \circ 是否在 M 上也满足结合律?

➤ 设 φ 是两代数系统之间的满同态映射, 已知对 $\forall \bar{a}, \bar{b}, \bar{c} \in \bar{M}$,
 $\exists a, b, c \in M, \quad s.t. \quad \varphi(a) = \bar{a}, \varphi(b) = \bar{b}, \varphi(c) = \bar{c}$

$$\therefore (\bar{a} \bar{\circ} \bar{b}) \bar{\circ} \bar{c} = \bar{a} \bar{\circ} (\bar{b} \bar{\circ} \bar{c})$$

$$\therefore \varphi((a \circ b) \circ c) = \varphi(a \circ (b \circ c))$$

➤ 即便 φ 是一个同态满射, 还是没办法从 $\varphi((a \circ b) \circ c) = \varphi(a \circ (b \circ c))$

得到 $(a \circ b) \circ c = a \circ (b \circ c)$

$$M = \mathbb{Z}$$

$$\circ \rightarrow "-"$$

$$\varphi: \quad x \rightarrow 1$$

$$\bar{M} = \{1\}$$

$$\bar{\circ} \rightarrow "\times"$$

同态与同构

• 练习

➤4. (1) 若 $M_1 \cong M_2$, 那么 $M_2 \cong M_1$

(2) 若 $M_1 \cong M_2$, $M_2 \cong M_3$, 那么 $M_1 \cong M_3$

$$(1) \quad \forall \bar{a}, \bar{b} \in M_2 \quad \varphi(a \circ b) = \varphi(a) \bar{\circ} \varphi(b) = \bar{a} \bar{\circ} \bar{b}$$

$$\varphi^{-1}(\bar{a}) = a, \varphi^{-1}(\bar{b}) = b$$

$$\varphi^{-1}(\bar{a} \bar{\circ} \bar{b}) = \varphi^{-1}(\varphi(a \circ b)) = a \circ b = \varphi^{-1}(\bar{a}) \circ \varphi^{-1}(\bar{b})$$

$$(2) \quad \forall a, b \in M_1, \varphi_1(a \circ b) = \varphi_1(a) \bar{\circ} \varphi_1(b), \varphi_2(\varphi_1(a) \bar{\circ} \varphi_1(b)) = \varphi_2(\varphi_1(a)) \bar{\circ} \varphi_2(\varphi_1(b))$$

$$\varphi_3 = \varphi_2 \varphi_1$$

$$\varphi_2(\varphi_1(a \circ b)) = \varphi_2(\varphi_1(a)) \bar{\circ} \varphi_2(\varphi_1(b))$$

$$\varphi_3(a \circ b) = \varphi_3(a) \bar{\circ} \varphi_3(b)$$

作业

- P23. 1 ——ppt上“练习1”，要求：证明过程书写清楚。