近世代数

计算机科学与技术学院
苏敬勇

内容

第二章 群

- 群同态与同构的简单性质
- 正规子群和商群
- 群同态基本定理
- 群的同构定理
- 群的自同构群
- *Sylow定理
- *有限交换群

群同态基本定理

- **定理1**：设N是群G的任一正规子群，则

$$G \sim G/N\text{，}$$

即任何群均与其商群同态。

证明：在群G与商群 G/N 间建立以下映射：

$$\tau : a \to aN \qquad (\forall a \in G)\text{。}$$

这是G到 G/N 的一个满射。

又任取 $a,b \in G$，则有

$$ab \to (ab)N = (aN)(bN),$$

即 τ 是G到 G/N 的一个同态满射。故 $G \sim G/N$ 。

称群G到商群 G/N 的这个同态满射 τ 为G到商群 G/N 的**自然同态**。

群同态基本定理

- **定义**：设 φ 是群G到群 $\bar{G}$ 的一个同态映射，$\bar{G}$ 的单位元在 φ 之下所有逆象作成的集合，叫做 φ 的**核**，记为 $Ker\varphi$。群G中所有元在 φ 之下的像作成的集合 $\varphi(G)$，称为 φ 的像集。记为 $\operatorname{Im}\varphi$ 。

- $Ker\varphi \leq G$，$\operatorname{Im}\varphi \leq \bar{G}$

- 定理1中同态映射 τ 的核就是N。

•**定理2**：（**群同态基本定理**）设 φ 是群G到群 $\bar{G}$ 的一个同态满射。则

$N = Ker\varphi \trianglelefteq G$，且

$$G/N \cong \bar{G}。$$

证明：首先，$\bar{G}$ 的单位元群是 $\bar{G}$ 的一个正规子群，故 $N = Ker\varphi$ 是群G的一个正规子群。

其次，证明同构。设

$$\varphi : a \to \bar{a} \qquad \left(a \in G, \bar{a} \in \bar{G}\right)$$

则在 G/N 和 $\bar{G}$ 之间建立以下映射：

群同态基本定理

$$\sigma : aN \to \bar{a} = \varphi(a)。$$

1）是映射：对于$\forall aN \in G/N$，$a \in G, \varphi(a)$ 唯一的存在于$\bar{G}$，即 G/N 中每个元素在 σ 下都有唯一的元素与之对应。

2）满射：任取 $\bar{a} \in \bar{G}$，则因φ 是满射，故有$a \in G$ 使 $\varphi(a) = \bar{a}$ 。从而在 σ 之下元素 $\bar{a}$ 在 G/N中有逆像aN，即σ为 G/N 到$\bar{G}$的一个满射。

3）单射：若$aN \neq bN$，则 $a^{-1}b \notin N$，从而 $\bar{a}^{-1}\bar{b} \neq \bar{e}$，即$\bar{a} \neq \bar{b}$。即 σ 为 G/N 到 $\bar{G}$ 的一个单射。

故，σ 为G/N 到$\bar{G}$的一个**双射**。

又由于

$$(aN)(bN) = abN \to \overline{ab} = \bar{a}\bar{b}$$ ，

故 σ 保持运算，从而为同构映射，于是有$G/N \cong \bar{G}$ 。

群同态基本定理

- **注**：本定理中 φ 为一同态满射。若 φ 只是一个同态映射（不一定是满射），虽然也有$Ker\varphi \lhd G$，但最后结论应改为

$$G/Ker\varphi \cong \varphi(G) = \operatorname{Im}\varphi。$$

- **总结**：由定理1和定理2可知：

$G \xrightarrow{\varphi} \bar{G}$，　　　　　　　　$G \xrightarrow{\tau} G/N \xrightarrow{\sigma} \bar{G}$

$a \to \bar{a} = \varphi(a)$；　　　　　　　　$a \to aN \to \bar{a} = \varphi(a)$；

其中$N = Ker\varphi$ 。因此，$\varphi = \sigma\tau$，交换图如下

$$\begin{tikzcd}
G \arrow[r, "\varphi"] \arrow[d, "\tau"'] & \bar{G} \\
G/N \arrow[ur, "\sigma"'] &
\end{tikzcd}$$

群同态基本定理

- **注：每个群能且只能同它的商群同态。（同构意义下）**
- 若$G \sim \overline{G}$，且同态核为N，则 $\overline{G}$ 中每一个元素的全体逆象恰好都是关于N的一个陪集。$\overline{G}$ 中元素与陪集的这种对应**不仅是一个双射，而且还是同构映射**。
- **推论1**：设G与$\overline{G}$是两个有限群。如果 $G \sim \overline{G}$，则

$$\left|\overline{G}\right| \Big| \left|G\right| 。$$

证明：因为 $G \sim \overline{G}$，设此同态核为N，则由定理2知，

$$G / N \cong \overline{G}，$$

从而$\left|G / N\right| = \left|\overline{G}\right|$，由Lagrange定理知 $\left|G / N\right| \Big| \left|G\right|$，故有上结论成立。

群同态基本定理

- **定理3**：设G与$\bar{G}$是两个群且$G\sim\bar{G}$。若G是循环群，则$\bar{G}$也是循环群。即循环群的同态像必为循环群。

证明：设$G=\langle a\rangle$。由于$G\sim\bar{G}$，设在此同态下G的生成元a在$\bar{G}$中的像是$\bar{a}$，下证$\bar{G}=\langle\bar{a}\rangle$。

实际上，$\langle\bar{a}\rangle\subseteq\bar{G}$显然，取$\forall\bar{x}\in\bar{G}$令

$$x\to\bar{x}\qquad\left(x\in G=\langle a\rangle\right),$$

且$x=a^m$，有

$$a^m\to\bar{a}^m,$$

故$\bar{x}=\bar{a}^m\in\langle\bar{a}\rangle$，于是有$\bar{G}\subseteq\langle\bar{a}\rangle$，故得 $\bar{G}=\langle\bar{a}\rangle$。

- **注：同态满射下，循环群的生成元的像也是生成元。**
- **推论2**：循环群的商群也是循环群。

群同态基本定理

- **引理**：设 φ 是群G到群$\overline{G}$的一个同态映射，又$H \le G$ 。如果$H \supseteq Ker\varphi$，则

$$\varphi^{-1}\left[\varphi\left(H\right)\right] = H \text{ 。}$$

证明：首先，

$$H \subseteq \varphi^{-1}\left[\varphi\left(H\right)\right] \text{ 。}$$

其次，任取 $x \in \varphi^{-1}\left[\varphi\left(H\right)\right]$，则$\varphi\left(x\right) \in \varphi\left(H\right)$。于是有$h \in H$ 使

$$\varphi\left(h\right) = \varphi\left(x\right), \quad \varphi\left(h^{-1}x\right) = \overline{e} \text{ ，}$$

从而 $h^{-1}x \in Ker\varphi$，但由假设 $Ker\varphi \subseteq H$，故

$$h^{-1}x \in H, \quad x \in H \text{ 。}$$

于是又有 $\varphi^{-1}\left[\varphi\left(H\right)\right] \subseteq H$，故原结论成立：$\varphi^{-1}\left[\varphi\left(H\right)\right] = H$。

群同态基本定理

- **定理4**：设 φ 是群G到 $\bar{G}$ 的一个同态满射，核是K，则G的包含K的所有子群与 $\bar{G}$ 的所有子群间可建立一个保持包含关系的双射。

证明：设M是G的含K的所有子群作成的集合,$\bar{M}$ 是 $\bar{G}$ 的所有子群的集合，则易知

$$f: H \to \varphi(H) \quad (\forall H \in M)$$

是M到$\bar{M}$的一个**映射**；其次任取 $\bar{H} \in \bar{M}$，并令$H = \varphi^{-1}(\bar{H})$，则由第一节的定理2可知，H是G的一个子群且包含核K，故$H \in M$。再由于φ是满同态，故

$$\varphi(H) = \varphi\left[\varphi^{-1}(\bar{H})\right] = \bar{H},$$

即 f 是M到$\bar{M}$的一个**满射**。

最后，任取$H_1, H_2 \in M$，若$f(H_1) = f(H_2)$，即

$$\varphi(H_1) = \varphi(H_2),$$

则 $\varphi^{-1}\left[\varphi(H_1)\right] = \varphi^{-1}\left[\varphi(H_2)\right]$，由引理知,$H_1 = H_2$。即 f 是**单射**。

因此,f 是 M到$\bar{M}$的一个**双射**。

群同态基本定理

又有对M中H_1与H_2，$H_1 \subseteq H_2$当且仅当$\varphi(H_1) \subseteq \varphi(H_2)$，即双射$f$还保持M与$\bar{M}$中子群间的包含关系。

作业

- P66. 1、设群$G \sim \bar{G}$,且同态核是K。证明：G 中二元素在 $\bar{G}$ 中有相同的像，当且仅当它们在 K 的同一陪集中。

2、证明：单群的同态像是单群或单位元群（即只含一个元素的群）。