



清华大学

Tsinghua University

离散数学(1) Discrete Mathematics

第十章 关系

刘世霞

shixia@tsinghua.edu.cn



第十章 关系

- 10.1 二元关系
- 10.2 关系矩阵和关系图
- 10.3 关系的逆、合成、(限制和象)
- 10.4 关系的性质
- 10.5 关系的闭包
- 10.6 等价关系和划分
- 10.7 相容关系和覆盖
- 10.8 偏序关系



复习： 二元关系(Binary Relations)

定义10.1.1 A到B的二元关系

- 设 A, B 为集合， $A \times B$ 的**任一子集**所定义的二元关系称为 A 到 B 的二元关系。
- 特别当 $A = B$ 时， $A \times A$ 的**任一子集**称为 A 上的一个二元关系。
- 例4 $A = \{0, 1\}$, $B = \{1, 2, 3\}$, $R_1 = \{ \langle 0, 2 \rangle \}$, $R_2 = A \times B$, $R_3 = \emptyset$, $R_4 = \{ \langle 0, 1 \rangle \}$.
- 那么 R_1, R_2, R_3, R_4 是从 A 到 B 的二元关系,
- R_3 和 R_4 同时也是 A 上的二元关系.



复习：n元关系

定义10.1.2 n 元关系 (n 元组的集合)

- 若 $n \in N$ 且 $n > 1$, A_1, A_2, \dots, A_n 是 n 个集合, 则

$$A_1 \times A_2 \times \dots \times A_n$$

的任一子集称为从 A_1 到 A_n 上的一个 n 元关系。

复习：三个特殊的关系



恒等关系、全域关系和空关系

- 对任意的集合 A ,
 A 上的**恒等关系** I_A 定义为 $I_A = \{ \langle x, x \rangle \mid x \in A \}$
 A 上的**全域关系**(全关系) E_A 定义为
$$E_A = \{ \langle x, y \rangle \mid x \in A \wedge y \in A \}$$
- 对任意的集合 A ,
 空集 \emptyset 是 $A \times A$ 的子集, 定义为 A 上的**空关系**。
- 例如, $A = \{1, 2\}$, 则
 - $E_A = \{ \langle 1, 1 \rangle, \langle 1, 2 \rangle, \langle 2, 1 \rangle, \langle 2, 2 \rangle \}$
 - $I_A = \{ \langle 1, 1 \rangle, \langle 2, 2 \rangle \}$

Multiple Choice(single)

Points: 1

Setting



思考：若 $|A| = n$

A 上 共可定义多少个不同的二元关系？

- ☐ A $2n$
- ☐ B n^2
- ☒ C 2^{n^2}
- ☐ D $2n^2$

提交

复习：定义域和值域(domain & range)



- 设R是A到B的二元关系

(1)R中所有有序对的第一元素构成的集合称为R的定义域，记作 $\text{dom}(\mathbf{R})$ 。形式化表示为：

$$\text{dom}(R) = \{ x \mid (\exists y)(\langle x, y \rangle \in R) \}$$

复习：定义域和值域(domain & range)



(2) R 中所有有序对的第二元素构成的集合称为 R 的值域，记作 $\text{ran}(R)$ 。形式化表示为：

$$\text{ran}(R) = \{ y \mid (\exists x)(\langle x, y \rangle \in R) \}$$

(3) R 的定义域和值域的并集称为 R 的域(field)，记作 $\text{fld}(R)$ 。形式化表示为：

$$\text{fld}(R) = \text{dom}(R) \cup \text{ran}(R)$$



复习：关系的逆、合成、限制和象

定义10.3.1 关系的逆、合成、限制和象

- 对 X 到 Y 的关系 R ， Y 到 Z 的关系 S ，定义：

(1) R 的**逆(inversion)** R^{-1} 为 Y 到 X 的关系

$$R^{-1} = \{ \langle x, y \rangle \mid \langle y, x \rangle \in R \}$$

- 例1 令 $A=\{1,2,3,4\}$,

$$R = \{ \langle 1, 2 \rangle, \langle 2, 3 \rangle, \langle 1, 4 \rangle, \langle 2, 2 \rangle \}$$

$$R^{-1} = \{ \langle 2, 1 \rangle, \langle 3, 2 \rangle, \langle 4, 1 \rangle, \langle 2, 2 \rangle \}$$

- 显然有：设 R 是任意的关系，则 $(R^{-1})^{-1} = R$



10.3 关系的逆、合成、限制和象

(2) R 与 S 的 **合成 (composite relation)** $S \circ R$
(也称之为**关系的复合**) 为 X 到 Z 的关系

$$S \circ R = \{\langle x, y \rangle \mid (\exists z)(\langle x, z \rangle \in R \wedge \langle z, y \rangle \in S)\}$$

先 R 后 S , 先右后左



复习：关系的运算

优先顺序：

- 逆运算优先于其他运算
- 关系运算优先于集合运算
- 没有规定优先权的运算以括号决定运算顺序



复习：关系的运算

- 定理：设 R, S, Q 是任意的关系

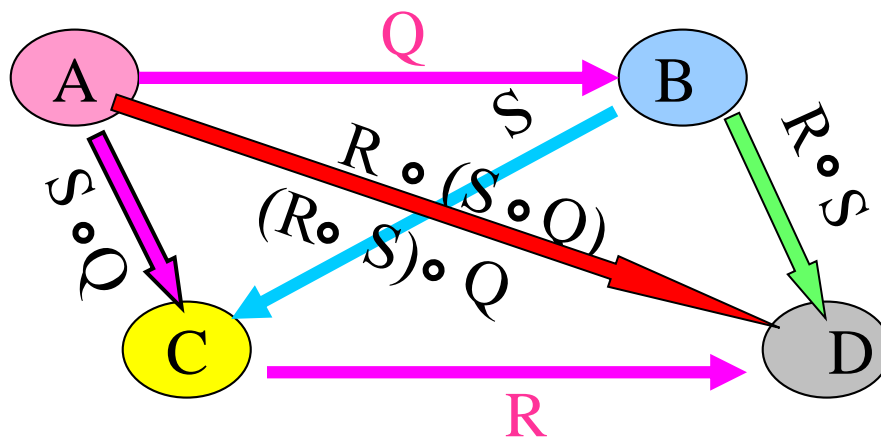
$$\textcircled{1} (R \circ S) \circ Q = R \circ (S \circ Q)$$

$$\textcircled{2} (R \circ S)^{-1} = S^{-1} \circ R^{-1}$$

令 $Q \subseteq A \times B$

$$\underline{S} \subseteq B \times C$$
$$R \subseteq C \times D$$

可以形象表示:



复习：关系的性质



- 自反性
 - $\forall a \in A$, 有 $\langle a, a \rangle \in R$, 则 R 为 A 上的自反关系
- 反自反性
 - $\forall a \in A$, 有 $\langle a, a \rangle \notin R$, R 为 A 上的反自反关系
- 例 $A = \{a, b, c\}$
 - $R_1 = \{\langle a, a \rangle, \langle b, b \rangle, \langle c, c \rangle, \langle a, b \rangle, \langle c, a \rangle\}$
 - $R_2 = \{\langle a, b \rangle, \langle b, c \rangle, \langle c, a \rangle\}$

复习：关系的性质



- 关系矩阵的特点？
 - 自反关系的关系矩阵的对角元素均为1
 - 反自反关系的关系矩阵的对角元素均为0
- 关系图的特点？
 - 自反关系的关系图中每个顶点都有环
 - 反自反关系的关系图中每个顶点都没有环
- 定理：R是A上的关系，则：
 - R是自反关系的充要条件是 $I_A \subseteq R$
 - R是反自反关系的充要条件是 $R \cap I_A = \Phi$



复习：对称关系 R

- $\forall a, b \in A$, 如果 $\langle a, b \rangle \in R$, 则必有 $\langle b, a \rangle \in R$
- 例
 - $R_1 = \{\langle 1, 1 \rangle, \langle 2, 3 \rangle, \langle 3, 2 \rangle\}$
 - R_1 是对称的
 - $R_2 = \{\langle 1, 1 \rangle, \langle 3, 3 \rangle\}$
 - R_2 是对称的
 - $R_3 = \{\langle 2, 2 \rangle, \langle 2, 3 \rangle, \langle 3, 2 \rangle, \langle 3, 1 \rangle\}$
 - R_3 不是对称的

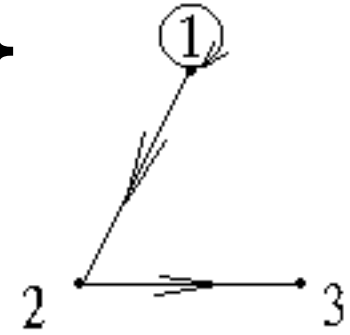
Choice

Points: 1

Setting

(multipl

e) $R_2 = \{ \langle 1, 1 \rangle, \langle 1, 2 \rangle, \langle 2, 3 \rangle \}$



A

自反

B

反自反

C

反对称

D

传递

E

对称

提交

复习：对称关系



- 关系矩阵特点？
 - 对称关系的关系矩阵是对称矩阵
- 关系图特点？
 - 如果两个顶点之间有边，一定是一对方向相反的边（无单边）
- 定理： R 在 A 上对称当且仅当 $R=R^{-1}$

证明：必要性 $\langle x, y \rangle \in R \Leftrightarrow \langle y, x \rangle \in R \Leftrightarrow \langle x, y \rangle \in R^{-1}$

充分性 $\langle x, y \rangle \in R \Leftrightarrow \langle y, x \rangle \in R^{-1} \Leftrightarrow \langle y, x \rangle \in R$

复习：反对称关系R



- $\forall a, b \in A$, 如果 $\langle a, b \rangle \in R$ 且 $\langle b, a \rangle \in R$, 则必有 $a = b$
- $\forall a, b \in A$, 如果 $a \neq b$, $\langle a, b \rangle \in R$, 则必有 $\langle b, a \rangle \notin R$
- 例: $A = \{a, b, c\}$
 - $R = \{\langle a, a \rangle, \langle b, b \rangle\}$
 - $S = \{\langle a, b \rangle, \langle a, c \rangle\}$
 - $T = \{\langle a, c \rangle, \langle b, a \rangle, \langle a, b \rangle\}$
 - R, S是反对称的, T不是反对称的

10.4 关系的性质



- 例: 实数集合上 \leq 关系是反对称关系
 - $\forall x, y \in \text{实数集}$, 如 $x \neq y$, 且 $x \leq y$, 则 $y \leq x$ 不成立
- 例: $\geq, <, >$ 关系, 均是反对称关系
- 反对称关系矩阵和关系图特点?
 - 若 $r_{ij}=1$, 且 $i \neq j$, 则 $r_{ji}=0$
 - 如果两个顶点之间有边, 一定是一条有向边 (无双向边)
- 定理: R 在 A 上反对称当且仅当 $R \cap R^{-1} \subseteq I_A$

复习：传递关系

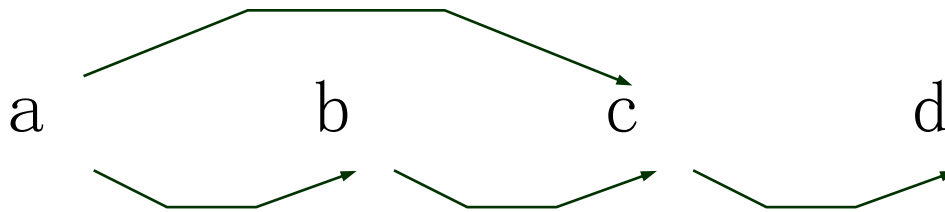


- $\forall a, b, c \in A$, 如果 $\langle a, b \rangle \in R, \langle b, c \rangle \in R$, 必有 $\langle a, c \rangle \in R$
- 例
 - $R_1 = \{\langle x, y \rangle, \langle z, x \rangle, \langle z, y \rangle\}$
 - 是传递关系
 - $R_2 = \{\langle a, b \rangle, \langle c, d \rangle\}$
 - 是传递关系
 - $R_3 = \{\langle a, b \rangle, \langle b, a \rangle\}$
 - 不是传递关系

复习：传递关系



- 传递关系关系图特点？
 - 如果结点a能通过有向弧组成的有向路径通向结点x,则a必须有有向弧直接指向x,否则R就不是传递的
- 例： $R = \{ \langle a, b \rangle, \langle b, c \rangle, \langle c, d \rangle, \langle a, c \rangle \}$



- 定理：R在A上传递当且仅当 $R \circ R \subseteq R$



复习：关系的性质

自反： $\forall x(x \in X \rightarrow xRx)$

反自反： $\forall x(x \in X \rightarrow x \not R x)$


对称： $\forall x \forall y(x \in X \wedge y \in X \wedge xRy \rightarrow yRx)$

反对称： $\forall x \forall y(x \in X \wedge y \in X \wedge xRy \wedge yRx \rightarrow x = y)$

传递：

$\forall x \forall y \forall z(x \in X \wedge y \in X \wedge z \in X \wedge xRy \wedge yRz \rightarrow xRz)$

	自反 Reflexive (10.4.1)	反自反 Irreflexive (10.4.1)	对称 Symmetric (10.4.2)	反对称 Antisymmetric (10.4.2)	传递 Transitive (10.4.3)
定义要点	$x \in A \rightarrow xRx$	$x \in A \rightarrow x \not R x$ $\langle x, x \rangle \notin R$	$xRy \rightarrow yRx$ $\langle x, y \rangle \in R \rightarrow$ $\langle y, x \rangle \in R$	$xRy \wedge x \neq y$ $\rightarrow y \not R x$ $xRy \wedge yRx$ $\rightarrow x = y$	$xRy \wedge yRz$ $\rightarrow xRz$ $\langle x, y \rangle \in R \wedge$ $\langle y, z \rangle \in R \rightarrow$ $\langle x, z \rangle \in R$
关系矩阵的特点	$r_{ii} = 1$;主 对角元均 为1	$r_{ii} = 0$;主 对角元均 为0	对称矩阵 $r_{ij} = r_{ji}$	若 $r_{ij} = 1 \wedge$ $i \neq j$ $\rightarrow r_{ji} = 0$	无直观特点 或难以直接 判断
关系图的特点	每个结点 都有自圈	每个结点 都没有自 圈	若两个结 点之间有 边，一定 是一对方 向相反的 边	若两个结 点之间有 边，一定 是一条有 向边	若从结点 x_i 到 x_j 有边， x_j 到 x_k 有边，则从 x_i 到 x_k 一定有 边



性质 运算	自反性	反自反性	对称性	反对称性	传递性
R^{-1}	√	√	√	√	√
$R_1 \cap R_2$	√	√	√	√	√
$R_1 \cup R_2$	√	√	√	×	×
$R_1 - R_2$	×	√	√	√	×
$R_1 \circ R_2$	√	×	×	×	×

注：√表示经过左端的运算仍保持原来的性质，×则表示原来的性质不再满足。

需按纵列理解，不能按横向。如不存在一个关系，它既是自反的又是反自反的。

复习： $R_1 \circ R_2$: 反自反性



- $A = \{1, 2, 3\}$

$$R_1 = \{ \langle 1, 2 \rangle, \langle 2, 3 \rangle \}$$

$$R_2 = \{ \langle 2, 1 \rangle, \langle 3, 2 \rangle \}$$

$$R_1 \circ R_2 = \{ \langle 2, 2 \rangle, \langle 3, 3 \rangle \}$$

复习：传递性

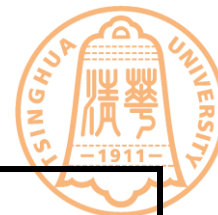


$$R_1 = \{ \langle 1, 2 \rangle, \langle 2, 3 \rangle, \langle 1, 3 \rangle \}$$

$$R_2 = \{ \langle 3, 1 \rangle, \langle 1, 2 \rangle, \langle 3, 2 \rangle \}$$

$$R_1 \circ R_2 = \{ \langle 3, 2 \rangle, \langle 3, 3 \rangle, \langle 1, 3 \rangle \}$$

复习：几个主要关系的性质



A是非空的

性质 关系	自反性	反自反性	对称性	反对称性	传递性
恒等关系 I_A	√	×	√	√	√
全域关系 E_A	√	×	√	×	√
A上的空 关系 \emptyset	×	√	√	√	√
N上的整 除关系	√	×	×	√	√
包含关系 \subseteq	√	×	×	√	√
真包含关 系 \subset	×	√	×	√	√



10.4 关系的性质

- $R_3 = \{ \langle 1, 1 \rangle, \langle 2, 2 \rangle, \langle 3, 3 \rangle \}$
- 自反, 对称, 反对称, 可传递的



- $R_4 = E_x$
- 自反, 对称, 可传递的



10.4 关系的性质

- $X = \{1, 2, 3\}$, $R_5 = \emptyset$
 - 反自反的, 对称的, 反对称的, 可传递的

1

2

3

- 若 $X = \emptyset$, X 上的空关系
 - 自反的, 反自反的, 对称的, 反对称的, 可传递的



第十章 关系

- 10.1 二元关系
- 10.2 关系矩阵和关系图
- 10.3 关系的逆、合成、(限制和象)
- 10.4 关系的性质
- 10.5 关系的闭包
- 10.6 等价关系和划分
- 10.7 相容关系和覆盖
- 10.8 偏序关系



10.5.1 多个关系的合成举例

例

$$A = \{a, b, c, d\}$$

$$R^0 = \{\langle a, a \rangle, \langle b, b \rangle, \langle c, c \rangle, \langle d, d \rangle\}$$

$$R^1 = \{\langle a, b \rangle, \langle b, a \rangle, \langle b, c \rangle, \langle c, d \rangle\}$$

$$R^2 = \{\langle a, a \rangle, \langle a, c \rangle, \langle b, b \rangle, \langle b, d \rangle\}$$

$$R^3 = \{\langle a, b \rangle, \langle a, d \rangle, \langle b, a \rangle, \langle b, c \rangle\} = R^2 \circ R$$

$$R^4 = R^3 \circ R = \{\langle a, a \rangle, \langle a, c \rangle, \langle b, b \rangle, \langle b, d \rangle\} = R^2$$

.....

- 对于此例 $R^2 = R^4 = R^6 = \dots$, $R^3 = R^5 = R^7 = \dots$, 是否具有普遍规律?

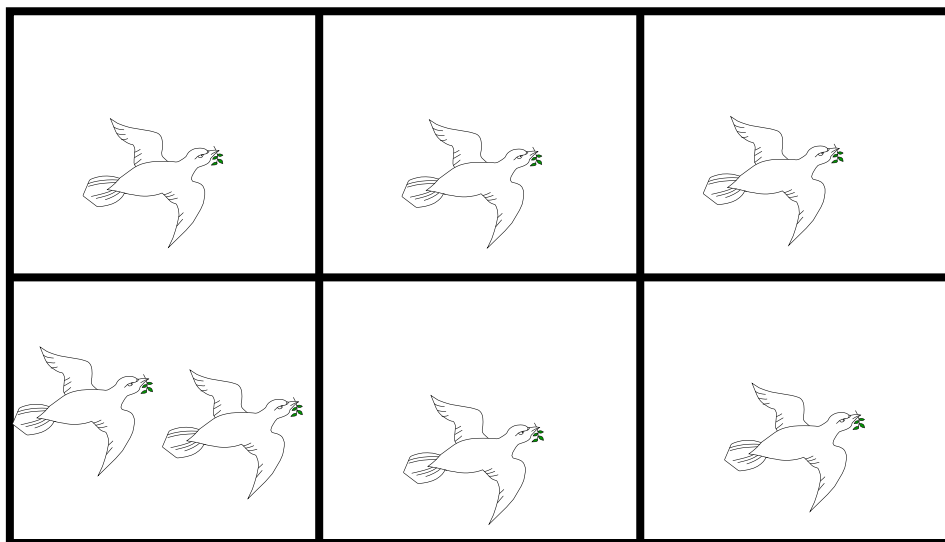
10.5 关系的闭包 (closure)



定理10.5.1

- 设 A 是有限集合, $|A| = n$, R 是 A 上的关系, 则存在自然数 s 和 $t, s \neq t$ 使得 $R^s = R^t$ 。

鸽巢原理



10.5 关系的闭包 (closure)



定理10.5.3 有限集合上关系的幂序列具有周期性

• 设 A 是有限集合, R 是 A 上的关系, 若存在自然数 s 和 t ($s < t$), 使得 $R^s = R^t$, 则

(1) $R^{s+k} = R^{t+k}$, 其中 $k \in N$;

(2) $R^{s+kp+i} = R^{s+i}$, 其中 $k, i \in N$ $p = t - s$;

(3) 令 $B = \{R^0, R^1 \dots R^{t-1}\}$, 则 R 的各次幂均为 B 的元素, 即对任意的 $q \in N$, 有 $R^q \in B$

10.5 关系的闭包 (closure)



定理10.5.3 有限集合上关系的幂序列具有周期性

- 例 $A = \{a, b, c, d\}$,

$$R = \{\langle a, b \rangle, \langle b, a \rangle, \langle b, c \rangle, \langle c, d \rangle\}$$

$$R^2 = \{\langle a, a \rangle, \langle a, c \rangle, \langle b, b \rangle, \langle b, d \rangle\} = R^4$$

- 对应 $s = 2, t = 4$,

$$R^{2+k} = R^{4+k}, R^{2+2k+i} = R^{2+i}$$

$$B = \{R^0, R^1, R^2, R^3\},$$

- R 的幂中不相同的只有以上4种。

10.5 关系的闭包 (closure)



定理10.5.3 有限集合上关系的幂序列具有周期性

- 设 A 是有限集合, R 是 A 上的关系, 若存在自然数 s 和 t

($s < t$), 使得 $R^s = R^t$, 则

(1) $R^{s+k} = R^{t+k}$, 其中 $k \in N$;

证明: $R^{s+k} = R^s \cdot R^k$

$$= R^t \cdot R^k$$

$$= R^{t+k}$$

有限集合上关系的幂序列具有周期性



- 设 A 是有限集合， R 是 A 上的关系，若存在自然数 s 和 t ($s < t$), 使得 $R^s = R^t$, 则
(2) $R^{s+kp+i} = R^{s+i}$, 其中 $k, i \in N$ $p = t - s$;

证明：数学归纳法。对 k 进行归纳：

$$k = 0: R^{s+0+i} = R^{s+i}$$

$$\text{假设 } k = n \text{ 时有 } R^{s+np+i} = R^{s+i}$$

则当 $k = n + 1$ 时,

$$\begin{aligned} R^{s+(n+1)p+i} &= R^{s+np+p+i} = R^{s+np+i} \cdot R^p \\ &= R^{s+i} \cdot R^p = R^{s+(t-s)+i} = R^{t+i} = R^{s+i} \end{aligned}$$



有限集合上关系的幂序列具有周期性

- 设 A 是有限集合， R 是 A 上的关系，若存在自然数 s 和 t ($s < t$)，使得 $R^s = R^t$ ，则

(3) 令 $B = \{R^0, R^1 \dots R^{t-1}\}$ ，则 R 的各次幂均为 B 的元素，即对任意的 $q \in N$ ，有 $R^q \in B$

证什么？

证明： $q < t$ ： 则 $R^q \in B$

$$R^{s+kp+i} = R^{s+i}$$

$q \geq t$ ： 则有 $q > s$ 。一定存在 $q = s + kp + i$,

其中 $0 \leq i \leq p - 1$ ， $R^q = R^{s+kp+i} = R^{s+i}$

$s + i \leq s + p - 1 = t - 1$ ， 所以 $R^q \in B$



定义10.5.2 闭包的定义

- 设 R 是非空集合 A 上的关系，如果 A 上有另一个关系 R' 满足：

(1) R' 是自反的（对称的或传递的）；

满足性质

(2) $R \subseteq R'$ ；

包含关系

(3) 对 A 上任何自反的（对称的或传递的）

关系 R'' ， $R \subseteq R'' \rightarrow R' \subseteq R''$ 。

最小的那个

- 则称关系 R' 为 R 的自反（对称或传递）闭包

闭包

- 一般将 R 的自反闭包记作 $r(R)$ ，

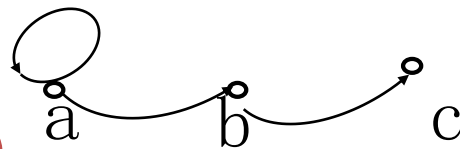
对称闭包记作 $s(R)$ ，传递闭包记作 $t(R)$ 。

10.5 关系的闭包 (closure)



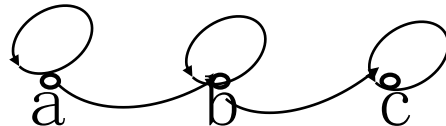
- 例 $A = \{a, b, c\}$, $R = \{ \langle a, a \rangle, \langle a, b \rangle, \langle b, c \rangle \}$

– 自反闭包 $r(R)$



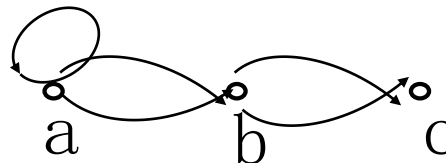
– $\{ \langle a, a \rangle, \langle a, b \rangle, \langle b, c \rangle, \langle b, b \rangle, \langle c, c \rangle \}$

– 对称闭包 $s(R)$

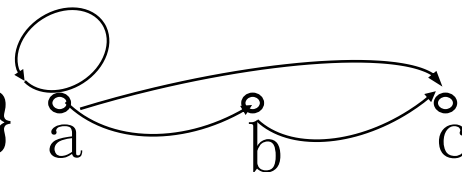


– $\{ \langle a, a \rangle, \langle a, b \rangle, \langle b, a \rangle, \langle b, c \rangle, \langle c, b \rangle \}$

– 传递闭包 $t(R)$



– $\{ \langle a, a \rangle, \langle a, b \rangle, \langle b, c \rangle, \langle a, c \rangle \}$



10.5 关系的闭包 (closure)



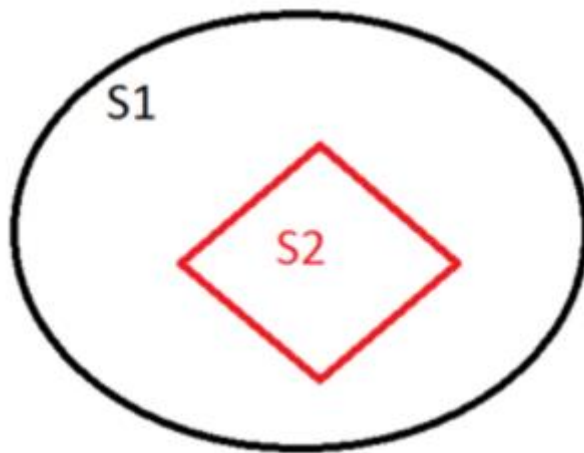
- 自反闭包 $r(R)$,
是具有自反性的 R 的 “最小” 超集合
- 对称闭包 $s(R)$,
是具有对称性的 R 的 “最小” 超集合
- 传递闭包 $t(R)$,
是具有传递性的 R 的 “最小” 超集合

若 R 已经是自反 (对称、传递) 的, 那么 R 的自反 (对称、传递) 闭包就是它自身。



超集合 (Superset)

- 定义：如果一个集合 S_2 中的每一个元素都在集合 S_1 中，且集合 S_1 中可能包含 S_2 中没有的元素，则集合 S_1 就是 S_2 的一个**超集**。 S_1 是 S_2 的超集，若 S_1 中一定有 S_2 中没有的元素，则 S_1 是 S_2 的**真超集**， S_2 是 S_1 的**真子集**。





定理10.5.4 闭包的性质1

- 对非空集合 A 上的关系 R ,
 - (1) R 是自反的 $\Leftrightarrow r(R) = R$;
 - (2) R 是对称的 $\Leftrightarrow s(R) = R$;
 - (3) R 是传递的 $\Leftrightarrow t(R) = R$ 。



定理10.5.5 闭包的性质2

• 对非空集合 A 上的关系 R_1, R_2 , 若 $R_1 \subseteq R_2$ 则

$$(1) \quad r(R_1) \subseteq r(R_2)$$

$$(2) \quad s(R_1) \subseteq s(R_2)$$

$$(3) \quad t(R_1) \subseteq t(R_2)$$

定理10.5.6 闭包的性质3




对非空集合 A 上的关系 R_1, R_2 ,

$$(1) \quad r(R_1) \cup r(R_2) = r(R_1 \cup R_2)$$

$$(2) \quad s(R_1) \cup s(R_2) = s(R_1 \cup R_2)$$

$$(3) \quad t(R_1) \cup t(R_2) \subseteq t(R_1 \cup R_2)$$



性质 运算	自反性	反自反性	对称性	反对称性	传递性
R^{-1}	√	√	√	√	√
$R_1 \cap R_2$	√	√	√	√	√
$R_1 \cup R_2$	√	√	√	×	×
$R_1 - R_2$	×	√	√	√	×
$R_1 \circ R_2$	√	×	×	×	×

注：√表示经过左端的运算仍保持原来的性质，×则表示原来的性质不再满足。

需按纵列理解，不能按横向。如不存在一个关系，它既是自反的又是反自反的。



$$r(R_1) \cup r(R_2) = r(R_1 \cup R_2)$$

$r(R_1)$ 和 $r(R_2)$ 是A上的自反关系，所以
 $r(R_1) \cup r(R_2)$ 是A上的自反关系

$R_1 \subseteq r(R_1)$, $R_2 \subseteq r(R_2)$, 所以 $R_1 \cup R_2 \subseteq$
 $r(R_1) \cup r(R_2)$

根据自反闭包的定义 $r(R_1 \cup R_2) \subseteq r(R_1) \cup r(R_2)$

$R_1 \subseteq R_1 \cup R_2$, 有 $r(R_1) \subseteq r(R_1 \cup R_2)$

同理, $r(R_2) \subseteq r(R_1 \cup R_2)$

因此 $r(R_1) \cup r(R_2) \subseteq r(R_1 \cup R_2)$

$$t(R_1) \cup t(R_2) \subseteq t(R_1 \cup R_2)$$



$$t(R_1) \subseteq t(R_1 \cup R_2)$$

$$t(R_2) \subseteq t(R_1 \cup R_2) \quad \text{因而}$$

$$t(R_1) \cup t(R_2) \subseteq t(R_1 \cup R_2)$$

若 $R_1 \subseteq R_2$ 则 $t(R_1) \subseteq t(R_2)$



定理： R 是非空集合 A 上的关系, 则 $r(R) = R \cup I_A$

证明： $R \subseteq R \cup I_A$, $R \cup I_A$ 是自反的

- 设 R'' 满足 $R \subseteq R''$, R'' 是自反的

$$\forall \langle a, b \rangle \in R \cup I_A$$

- 则 $\langle a, b \rangle \in R$ 或 $\langle a, b \rangle \in I_A$
- 如 $\langle a, b \rangle \in R$, 由 $R \subseteq R''$ 知 $\langle a, b \rangle \in R''$
- 如 $\langle a, b \rangle \in I_A$, 由 R'' 的自反性知 $\langle a, b \rangle \in R''$
- 均有 $\langle a, b \rangle \in R''$

$$\therefore R \cup I_A \subseteq R''$$

对 A 上任何自反的关系 R'' , $R \subseteq R'' \rightarrow R' \subseteq R''$



$$r(R_1) \cup r(R_2) = r(R_1 \cup R_2)$$

$$\begin{aligned} r(R_1 \cup R_2) &= (R_1 \cup R_2) \cup I_A \\ &= (R_1 \cup I_A) \cup (R_2 \cup I_A) \\ &= r(R_1) \cup r(R_2) \end{aligned}$$

$$r(R) = R \cup I_A$$

10.5 关系的闭包(closure)



例：整数集 \mathbb{Z} 上 $<$ （小于）关系的自反闭包是 \leq （小于等于）关系；

- \neq 关系的自反闭包是全关系；
- 空关系的自反闭包是恒等关系；
- \mathbb{Z} 上定义关系： $R = \{(x, y) \mid x + y = 2\}$ ，则 R 的自反闭包 $r(R) = \{(x, y) \mid x + y = 2 \text{ 或 } x = y\}$ 。



定理: R 是非空集合 A 上的关系, 则 $s(R) = R \cup R^{-1}$

证明: $R \subseteq R \cup R^{-1}$ 满足闭包定义第2条

$$\forall \langle a, b \rangle \in R \cup R^{-1}$$

$$\Leftrightarrow \langle a, b \rangle \in R \vee \langle a, b \rangle \in R^{-1}$$

$$\Leftrightarrow \langle b, a \rangle \in R^{-1} \vee \langle b, a \rangle \in R$$

$$\Leftrightarrow \langle b, a \rangle \in R \cup R^{-1}$$

$\therefore R \cup R^{-1}$ 是对称的

满足性质



定理： R 是非空集合 A 上的关系, 则 $s(R) = R \cup R^{-1}$

- 如 $R \subseteq R''$, 且 R'' 是对称的

$$\forall \langle a, b \rangle \in R \cup R^{-1}$$

$$\langle a, b \rangle \in R \text{ 或 } \langle a, b \rangle \in R^{-1}$$

如 $\langle a, b \rangle \in R$, 由 $R \subseteq R''$, 则 $\langle a, b \rangle \in R''$

如 $\langle a, b \rangle \in R^{-1}$, 则 $\langle b, a \rangle \in R$, 则 $\langle b, a \rangle \in R''$

因 R'' 对称

$$\therefore \langle a, b \rangle \in R'', \therefore R \cup R^{-1} \subseteq R''$$

- 满足定义第3条

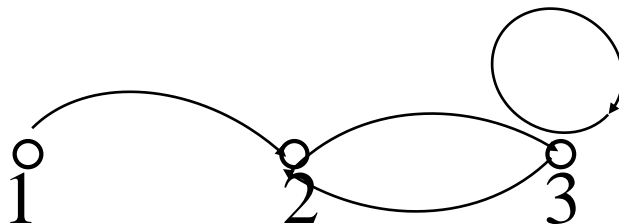


$$s(R_1) \cup s(R_2) = s(R_1 \cup R_2)$$

$$\begin{aligned} s(R_1 \cup R_2) &= (R_1 \cup R_2) \cup (R_1 \cup R_2)^{-1} \\ &= (R_1 \cup R_2) \cup (R_1)^{-1} \cup (R_2)^{-1} \\ &= (R_1 \cup (R_1)^{-1}) \cup (R_2 \cup (R_2)^{-1}) \\ &= s(R_1) \cup s(R_2) \end{aligned}$$



例： 设 $A = \{1,2,3\}$, A 上的关系 R 如图, 求 $r(R)$, $s(R)$



- 解: $R = \{ \langle 1, 2 \rangle, \langle 2, 3 \rangle, \langle 3, 2 \rangle, \langle 3, 3 \rangle \}$
 $r(R) = R \cup I_A$
 $= \{ \langle 1, 2 \rangle, \langle 2, 3 \rangle, \langle 3, 2 \rangle, \langle 3, 3 \rangle, \langle 2, 2 \rangle, \langle 1, 1 \rangle \}$
 $s(R) = R \cup R^{-1}$
 $= \{ \langle 1, 2 \rangle, \langle 2, 3 \rangle, \langle 3, 2 \rangle, \langle 3, 3 \rangle, \langle 2, 1 \rangle \}$

定理： R 是非空集合 A 上的关系，则

$$t(R) = R^1 \cup R^2 \cup \dots$$



证明：首先证明 $R^1 \cup R^2 \cup \dots \subseteq t(R)$ ，使用归纳法。

$n = 1$ ，显然 $R^1 = R \subseteq t(R)$

假设 $R^k \subseteq t(R)$ ，对任意 $\langle x, y \rangle$ 有

$$\langle x, y \rangle \in R^{k+1} = R^k \circ R^1$$

$$\Leftrightarrow \exists t (\langle x, t \rangle \in R \wedge \langle t, y \rangle \in R^k)$$

$$\Rightarrow \exists t (\langle x, t \rangle \in t(R) \wedge \langle t, y \rangle \in t(R)) \Rightarrow \langle x, y \rangle \in t(R)$$

其次， $t(R) \subseteq R^1 \cup R^2 \cup \dots$ 即证 $R^1 \cup R^2 \cup \dots$ 传递

推论：设 A 是非空有限集， R 是集合 A 上的二元关系，

则存在正整数 n ，使得 $t(R) = R \cup R^2 \cup \dots \cup R^n$

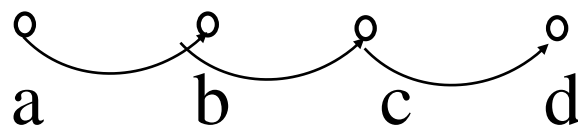
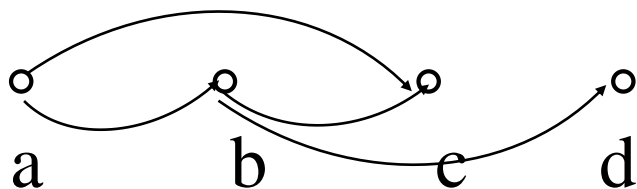


实例

$$A = \{a, b, c, d\}$$

$$R = \{ \langle a, b \rangle, \langle a, c \rangle, \langle b, c \rangle, \langle b, d \rangle \}$$

$$S = \{ \langle a, b \rangle, \langle b, c \rangle, \langle c, d \rangle \}, \text{ 求 } t(R), t(S)$$



$$\text{解: } R^2 = \{ \langle a, c \rangle, \langle a, d \rangle \}, R^3 = \emptyset$$

$$\therefore t(R) = R \cup \{ \langle a, c \rangle, \langle a, d \rangle \}$$

$$S^2 = \{ \langle a, c \rangle, \langle b, d \rangle \}, S^3 = \{ \langle a, d \rangle \}, S^4 = \emptyset$$

$$\therefore t(S) = S \cup \{ \langle a, c \rangle, \langle b, d \rangle \} \cup \{ \langle a, d \rangle \}$$

10.5 关系的闭包(closure)



给定关系 R , $r(R)$, $s(R)$, $t(R)$ 的关系矩阵分别为 M , M_r , M_s , M_t , 那么:

- $M_r = M + I$
- $M_s = M + M^T$
- $M_t = M + M^2 + M^3 + \dots$

10.5 关系的闭包(closure)



关系图分别为 G , G_r , G_s , G_t , 那么:

- 考察 G 的每个顶点, 如果没有环就加上一个环, 最终得到的是 G_r
- 考察 G 的每一条边, 如果有一条从 x_i 到 x_j 的单向边, 则在 G 中加一条 x_j 到 x_i 的反方向边, 最终得到 G_s
- 考察 G 的每个顶点 x_i , 找出从 x_i 出发的所有2步, 3步, ..., n 步长的路径。设路径的终点为 x_{j1} , x_{j2} , ..., x_{jk} 。如果没有从 x_i 到 x_{jl} 的边, 就加上这条边, 最终得到 G_t

例子



$A = \{a, b, c\}$, $R = \{< a, b >, < b, c >, < c, a >\}$, 求
闭包 $r(R), s(R), t(R)$

$$r(R) = R \cup \{< a, a >, < b, b >, < c, c >\}$$

$$s(R) = R \cup \{< b, a >, < c, b >, < a, c >\}$$

$$t(R) = R \cup R^2 \cup R^3$$

$$\text{其中 } R^2 = \{< a, c >, < b, a >, < c, b >\}$$

$$R^3 = \{< a, a >, < b, b >, < c, c >\}$$



实例

- 设 $A = \{a, b, c, d\}$ 上的关系

$$R = \{ \langle a, b \rangle, \langle b, a \rangle, \langle b, c \rangle, \langle c, d \rangle, \langle d, b \rangle \}$$

- (1) 写出 $R, r(R), s(R), t(R)$ 的关系图。
- (2) 计算 $r(R), s(R), t(R)$ 。
- (3) 写出 $R, r(R), s(R), t(R)$ 的关系矩阵。

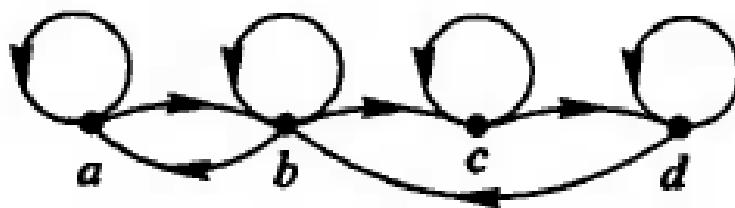


实例

- 设关系 $R, r(R), s(R), t(R)$ ，关系图如下图



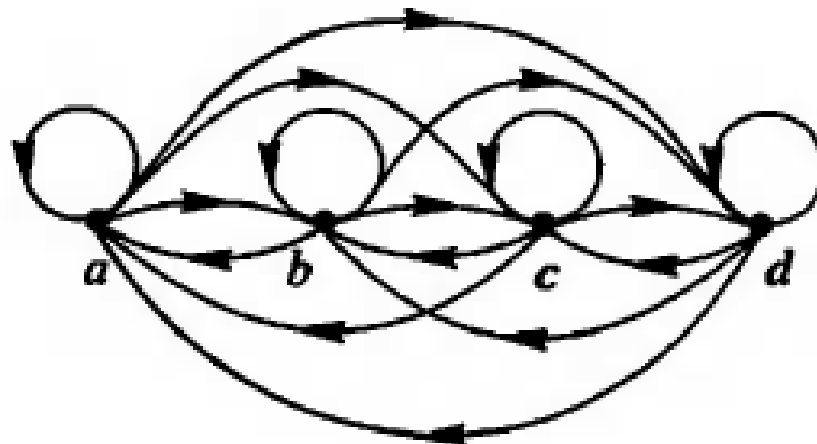
R



$r(R)$



$s(R)$



$t(R)$



10.5 关系的闭包(closure)

解 $R = \{ \langle a, b \rangle, \langle b, a \rangle, \langle b, c \rangle, \langle c, d \rangle, \langle d, b \rangle \}$

$$M = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \end{bmatrix}, \quad M_r = M + I = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

$$M_s = M + M^T = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & 0 \end{bmatrix}, \quad M_t = M + M^2 + M^3 + M^4 = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 1 \end{bmatrix}$$

定理10.5.10 传递闭包的有限构造方法



- A 为非空有限集合, $|A| = n$, R 为 A 上的关系, 则存在正整数 $k \leq n$, 使得

$$t(R) = R^+ = R \cup R^2 \cup \dots \cup R^k$$



传递闭包的求解

- 图论中一个非常重要的问题
 - 给定了一个城市的交通地图，可利用求传递闭包的方法获知任意两个地点之间是否有路相连接通。
- 求传递闭包的方法
 - 直接利用关系矩阵相乘来求传递闭包
 - 在计算矩阵相乘的时候用分治方法降低时间复杂度
 - 利用基于动态规划的Warshall算法来求传递闭包



Warshall算法

计算有限集合上关系的传递闭包的一种有效算法

对Warshall算法的解说



- 设关系 R 的关系图为 G ，设图 G 的所有顶点为 v_1, v_2, \dots, v_n ，则 $t(R)$ 的关系图可用该方法得到：若 G 中任意两顶点 v_i 和 v_j 之间有一条路径且没有 v_i 到 v_j 的弧，则在图 G 中增加一条从 v_i 到 v_j 的弧，将这样改造后的图记为 G' ，则 G' 即为 $t(R)$ 的关系图。 G' 的邻接矩阵 A 应满足：若图 G 中存在从 v_i 到 v_j 路径，即 v_i 与 v_j 连通，则 $B[i, j]=1$ ，否则 $B[i, j]=0$ 。
- 求 $t(R)$ 的问题就变为求图 G 中每一对顶点间是否连通的问题。

对Warshall算法的解说



- 这样，求 $t(R)$ 的问题就变为求图 G 中每一对顶点间是否连通的问题。
- 定义一个 n 阶方阵序列 $B(0), B(1), B(2), \dots, B(n)$ ，每个方阵中的元素值只能取0或1。 $B(m)[i, j]=1$ 表示存在从 v_i 到 v_j 且中间顶点序号不大于 m 的路径
($m=1..n$)， $B(m)[i, j]=0$ 表示不存在这样的路径。
而 $B(0)[i, j]=1$ 表示存在从 v_i 到 v_j 的弧， $B(0)[i, j]=0$ 表示不存在从 v_i 到 v_j 的弧。
- 这样， $B(n)[i, j]=1$ 表示 v_i 与 v_j 连通， $B(n)[i, j]=0$ 表示 v_i 与 v_j 不连通。故 $B(n)$ 即为 $t(R)$ 的关系矩阵。



$B(0)=M$ (M 为 R 的关系矩阵)。

若 $B(0)[i,1]=1$ 且 $B(0)[1,j]=1$ ，或 $B(0)[i,j]=1$ ，当且仅当存在从 v_i 到 v_j 且中间顶点序号不大于1的路径，此时应将 $B(1)[i,j]$ 置为1，否则置为0。

一般地，若 $B(k-1)[i,k]=1$ 且 $B(k-1)[k,j]=1$ ，或 $B(k-1)[i,j]=1$ ，当且仅当存在从 v_i 到 v_j 且中间顶点序号不大于 k 的路径，此时应将 $B(k)[i,j]$ 置为1，否则置为0

$$B(k)[i,j]=(B(k-1)[i,k] \wedge B(k-1)[k,j]) \vee B(k-1)[i,j]$$

这样，就可得计算 $B(k)$ 的方法：先将 $B(k)$ 赋为 $A(k-1)$ ；再对所有 $i=1..n$ ，若 $B(k)[i,k]=1$ （即 $B(k-1)[i,k]=1$ ），则对所有 $j=1..n$ ，执行：

$$B(k)[i,j] \leftarrow B(k)[i,j] \vee B(k-1)[k,j]$$



令 $B[j, i]$ 表示矩阵 B 第 j 行第 i 列的元素,

(1) 令矩阵 $B = M(R)$;

(2) 令 $i = 1, n = |A|$; // 外循环对列进行

(3) *for* $j = 1$ *to* n

if ($B[j, i] = 1$) *then*

for $k = 1$ *to* n

$B[j, k] = B[j, k] \vee B[i, k]$

 // 将第 i 行的元素加到第 j 行上 (逻辑加)

(4) $i = i + 1$;

(5) *if* ($i \leq n$) *then go to* (3)

else stop 且 $M(R^+) = B$



Warshall算法

算法 Warshall ($A[1..n, 1..n]$)

//实现计算传递闭包的Warshall算法

//输入：包括n个节点有向图的邻接矩阵

//输出：该有向图的传递闭包

$R^{(0)} \leftarrow A$

for($k \leftarrow 1; k \leq n; k++$)

for($i \leftarrow 1; i \leq n; i++$)

for($j \leftarrow 1; j \leq n; j++$)

$R^{(k)}[i, j] \leftarrow R^{(k-1)}[i, j] \text{ or } R^{(k-1)}[i, k] \text{ and } R^{(k-1)}[k, j]$

return $R^{(n)}$

10.5 关系的闭包(closure)



定理： 设 A 是集合， R_1 和 R_2 是 A 上的二元关系， $R_1 \subseteq R_2$ ，则有：

- $r(R_1) \subseteq r(R_2)$
- $s(R_1) \subseteq s(R_2)$
- $t(R_1) \subseteq t(R_2)$

$$r(R_1) \subseteq r(R_2)$$

证明： $r(R_1) = R_1 \cup I_A$, $r(R_2) = R_2 \cup I_A$

10.5 关系的闭包(closure)



定理： 设 X 是一集合， R 是 X 上的二元关系，则有：

- 若 R 是自反的，则 $s(R), t(R)$ 也自反
- 若 R 是对称的，则 $r(R), t(R)$ 也对称
- 若 R 是可传递的，则 $r(R)$ 也可传递

定理：设 X 是一集合， R 是 X 上的二元关系，则有：若 R 是对称的，则 $t(R)$ 也对称

证明：归纳法证明若 R 是对称，则 R^n 也对称

$n = 1$ ，显然成立

假设 R^n 对称，对任意 $\langle x, y \rangle$

$$\langle x, y \rangle \in R^{n+1}$$

$$\Leftrightarrow \exists t (\langle x, t \rangle \in R \wedge \langle t, y \rangle \in R^n)$$

$$\Rightarrow \exists t (\langle t, x \rangle \in R \wedge \langle y, t \rangle \in R^n)$$

$$\Rightarrow \langle y, x \rangle \in R \circ R^n \Rightarrow \langle y, x \rangle \in R^{n+1}$$

定理：设 X 是一集合， R 是 X 上的二元关系，则有：若 R 是对称的，则 $t(R)$ 也对称

证明： $\dots \Rightarrow \langle y, x \rangle \in R \circ R^n \Rightarrow \langle y, x \rangle \in R^{n+1}$

任取 $\langle x, y \rangle$ ，有

$$\langle x, y \rangle \in t(R)$$

$$\Rightarrow \exists n (\langle x, y \rangle \in R^n)$$

$$\Rightarrow \exists n (\langle y, x \rangle \in R^n)$$

$$\Rightarrow \langle y, x \rangle \in t(R)$$



若 R 是传递的, $s(R)$ 不一定是传递的

反例: $R = \{ \langle a, b \rangle, \langle c, b \rangle \},$

R 是传递的

$$s(R) = \{ \langle a, b \rangle, \langle b, a \rangle, \langle c, b \rangle, \langle b, c \rangle \}$$

$s(R)$ 不是传递的

若 R 是可传递的, 则 $r(R)$ 也可传递

定理10.5.11 闭包同时具有多种性质1



对非空集合 A 上的关系 R ,

- (1) 若 R 是自反的, 则 $s(R)$ 和 $t(R)$ 是自反的;
- (2) 若 R 是对称的, 则 $r(R)$ 和 $t(R)$ 是对称的;
- (3) 若 R 是传递的, 则 $r(R)$ 是传递的。

定理10.5.12 闭包同时具有多种性质2



对非空集合 A 上的关系 R ,

$$(1) \quad rs(R) = sr(R)$$

$$(2) \quad rt(R) = tr(R)$$

$$(3) \quad st(R) \subseteq ts(R)$$

其中 $rs(R) = r(s(R))$, 其它类似。

$$\begin{aligned} r(R) &\rightarrow sr(R) \rightarrow tsr(R) \\ r(R) &\rightarrow tr(R) \rightarrow str(R) ? \end{aligned}$$



传递闭包的应用

- 传递闭包在关系数据库中有很多应用
 - 最短路径选择
 - 最省时加工流程



关系的性质

- 自反？ 对称？ 传递？
- 日常生活中的关系？

同龄人

同班同学

.....



10.6 等价关系和划分

定义10.6.1 等价关系

- 设 R 为非空集合 A 上的关系，如果 R 是自反的、
对称的、
传递的，
• 则称 R 为 A 上的等价关系。



典型的等价关系

- 平面几何中三角形间的相似关系
- 同学集合中同班同学的关系
- 同学集合中同年龄的关系
- 同学集合中的老乡关系
- 但朋友关系并非等价关系（不满足传递）
- 非空集合 A 上的恒等关系、全域关系
- 空关系不是等价关系（满足反自反故不满足自反性）



以下哪些关系是等价关系？

- ☒ A 平面几何中三角形间的相似关系
- ☒ B 同学集合中同班同学的关系
- ☐ C 朋友关系
- ☒ D 恒等关系、全域关系
- ☐ E 非空集合上的空关系

例：整数集上的同余关系



- 整数集上关系 $R = \{ \langle x, y \rangle \mid x - y \text{ 能被 } m \text{ 整除} \}$ 。
- 关系 R 是等价关系。
- 证明： R 有自反性；对称性；传递性。

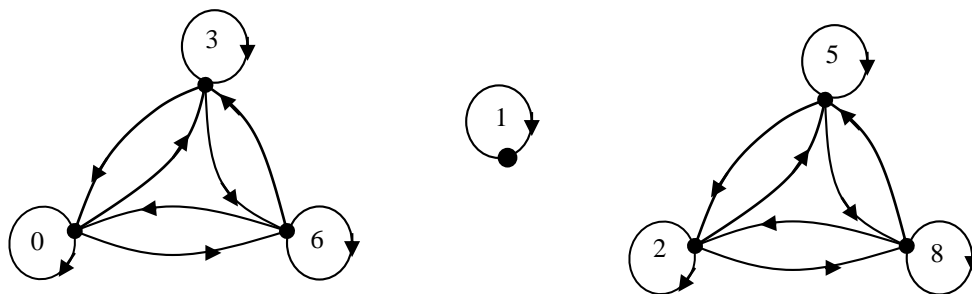


例：模为3的同余关系

- 设 $A = \{0,1,2,3,5,6,8\}$, R 为 A 上的模3等价关系, 则

$$R = \{ \langle 0,0 \rangle, \langle 1,1 \rangle, \langle 2,2 \rangle, \langle 3,3 \rangle, \langle 5,5 \rangle, \langle 6,6 \rangle, \langle 8,8 \rangle, \langle 0,3 \rangle, \langle 3,0 \rangle, \langle 0,6 \rangle, \langle 6,0 \rangle, \langle 2,5 \rangle, \langle 5,2 \rangle, \langle 2,8 \rangle, \langle 8,2 \rangle, \langle 3,6 \rangle, \langle 6,3 \rangle, \langle 5,8 \rangle, \langle 8,5 \rangle \}.$$

R 的关系图见图





10.6 等价关系与划分

等价类

设 R 是非空 A 集合上的等价关系，对于任何 $x \in A$ ，令：

- $[x]_R = \{y | y \in A \wedge xRy\}$
- $[x]_R$ 是由 $x \in A$ 生成的 R 等价类
- x 为等价类 $[x]_R$ 的表示元素



等价类

- 定义：设 R 是 X 上等价关系，对任意 x 可以构造 X 的子集 $[x]_R = \{y | y \in X \text{ 且 } xRy\}$, 称之为 x 对于 R 的等价类。
- $[x]_R$ 是 X 内所有与 x 有等价关系 R 的元素构成的集合。有如下性质：
 - (1) $\forall x \in X, x \in [x]_R, [x]_R \neq \emptyset$
 - (2) 若 $y \in [x]_R$, 则 $[x]_R = [y]_R$
 - (3) $y \in [y]_R$, 若 $y \notin [x]_R$, 则 $[x]_R \neq [y]_R$

定理 设 A 是一个集合， R 是 A 上的等价关系， xRy 当且仅当 $[x]_R = [y]_R$



证明：

- 充分性，因为 $x \in [x]_R = [y]_R$ ，即 $x \in [y]_R$ ，所以 xRy 。
- 必要性，已知 xRy ，考虑 $[x]_R$ 的任意元素 z ，有 zRx 。根据 R 的传递性，有 zRy ，因此 $z \in [y]_R$ 。证明 $[x]_R \subseteq [y]_R$ 。类似可证明 $[y]_R \subseteq [x]_R$ ，所以 $[x]_R = [y]_R$ 。



谢谢！