第三周作业

1. 设 $T_1, T_2: \mathbb{C}^n \longrightarrow \mathbb{C}^n$ 是Hermite变换，$i(T_1T_2 - T_2T_1)$ 是否Hermite变换？解释原因.（这里 $i^2=-1$）.

2. 设 $T: \mathbb{C}^n \longrightarrow \mathbb{C}^n$ 在一组标准正交基 $B=\{f_1, \cdots, f_n\}$ 下矩阵是 A，则 T^* 在这组基下矩阵是 A^H.（两种方法：(1) $A=(a_{ij})$，则 $a_{ij} = \langle e_i, T(e_j)\rangle = \overline{\langle T(e_j), e_i\rangle}$ $= \overline{\langle e_j, T^*(e_i)\rangle}$；(2) T, T^* 在 B。

$=\left\{\begin{pmatrix}1\\0\\\vdots\\0\end{pmatrix},\cdots,\begin{pmatrix}0\\\vdots\\0\\1\end{pmatrix}\right\}$ 下矩阵关系是 Hermitian，再使用不同基下矩阵 画相似)

3. 设 $\{\vec{v}_1,\cdots,\vec{v}_n\}\overset{=B}{}$ 是 $\mathbb{C}^n$ 的一组基

证明：① $\forall v, w\in\mathbb{C}^n$.

$$\langle v,w\rangle=[v]_B^H G_B[w]_B$$

其中 $$G_B=\begin{pmatrix}\langle\vec{v}_1,\vec{v}_1\rangle & \cdots & \langle\vec{v}_1,\vec{v}_n\rangle\\ \vdots & & \vdots\\ \langle\vec{v}_n,\vec{v}_1\rangle & \cdots & \langle\vec{v}_n,\vec{v}_n\rangle\end{pmatrix}$$

② $G_B^H=G_B$

③ 若 $B'=\{w_1,\cdots,w_n\}$ 是另一组基，且从 B 到 B' 过渡阵 P，则 G_B 和 $G_{B'}$ 有何关系？

4. 设 $T: \mathbb{C}^2 \longrightarrow \mathbb{C}^2$ 是如下线性变换 $T\left[\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix}\right]=\begin{pmatrix} 1 & i \\ i & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix}$

证明：T 是一个正规变换，求 $\mathbb{C}^2$ 的一组标准正交基，使得 T 在这组基下矩阵是对角阵.

5. 设 $T: \mathbb{C}^n \longrightarrow \mathbb{C}^n$ 是一个Hermite变换满足 $\forall v \in \mathbb{C}^n$,

$$\langle v, T(v) \rangle = 0$$

则 $T = O$ (零变换).

定义内积 $\langle f, g \rangle = \int_0^{2\pi} \overline{f(t)}\, g(t)\, dt$

6. 设 $V_2 = \{ c_0 + c_1 e^{it} + c_2 e^{i(2t)} + c_{-1} e^{-it} + c_{-2} e^{-i(2t)} \mid c_i \in \mathbb{C} \}$

证明: $\frac{1}{\sqrt{2\pi}}, \frac{\cos x}{\sqrt{\pi}}, \frac{\sin x}{\sqrt{\pi}}, \frac{\cos 2x}{\sqrt{\pi}}, \frac{\sin 2x}{\sqrt{\pi}}$ 是 V_2 的一组标准正交基.

7. 设 $f(x)$ 是一个 $\mathbb{R}$ 上周期 $=2$ 的函数, 且 $f(x) = |x|$, $-1 \le x \le 1$. 求 $f(x)$

的Fourier级数展开的实形式.