第六章　选 择 公 理

6.1　良序定理和选择公理

如果集合 A 上存在良序关系，则称 A 是可良序的。良序定理是说任何集合都可良序。

如果良序定理成立，则由良序集基本定理可知，任给两个集合，总可以建立从其中一个集合到另一个集合的单射，从而任何基数都可以比较大小了。这样，基数作为元素个数的数就更令人满意了。因此，良序定理是否成立是集合论中的一个重要问题。

首先给出良序定理的严格表述。

6.1.1　良序定理　任给集合 A，存在 A 上二元关系 R，使得 $\langle A, R\rangle$是良序集。

Zermelo 在 1904 年提出了选择公理，并用它证明了良序定理。选择公理有许多不同的形式，我们采用最一般的集合族的形式。

6.1.2　选择公理　任何非空集合的集合族上都存在选择函数。详细地说就是：

如果Γ是集合族且$\varnothing\notin\Gamma$，则存在Γ到$\bigcup\Gamma$的映射 f，满足任给$X\in\Gamma$，都有 $f(X)\in X$。

选择公理的直观意义是：对于任意多个非空集合，可以同时指定属于每个集合自身的一个元素。选择函数 f 就是这样的一个指定，$f(X)$就是属于 X 的一个元素。

对于每个确定的非空集合，指定属于它自身的一个元素总是可以做到的，如果这些集合的个数有限，则一个一个指定就行了。所以选择公理的关键在于：对**无限多个**非空集合，**同时**指定属于

每个集合自身的一个元素。

因此，在没有选择公理的情况下，除非另有标准外，一般不能保证这样的元素同时被指定。

Russell 曾经举过一个通俗的例子：无限多双鞋子，可以同时对每双鞋子取一只，而无限多双袜子，就不能做到这一点。因为鞋子有左右之分，我们可以同时取左边一只，而袜子没有左右之分，我们没有任何标准同时在两只中取一只。

在良序集基本定理的证明中，重要的一步是：

如果任给 $i\in I$，A_i 都是 A 的前段，B_i 都是 B 的前段且 $A_i\cong B_i$，则$\bigcup A_i\cong\bigcup B_i$。

因为任给 $i\in I$，A_i 到 B_i 的相似映射只有一个，所以可以对每个 $i\in I$ 同时找到 A_i 到 B_i 的相似映射 f_i，从而去构造$\bigcup A_i$ 到$\bigcup B_i$ 的相似映射。

设$\{A_i \mid i\in I\}$和$\{B_i \mid i\in I\}$都是不交的，我们一般不能证明：

如果任给 $i\in I$，都有$|A_i| = |B_i|$，则$|\bigcup A_i| = |\bigcup B_i|$。

因为任给 $i\in I$，A_i 到 B_i 的双射一般不止一个，所以无法保证对每个 $i\in I$ 同时找到 A_i 到 B_i 的双射 f_i，在没有其它条件时，一般无法构造$\bigcup A_i$ 到$\bigcup B_i$ 的双射。

选择公理是对集合性质的一种假设。虽然对于有限多个集合来说，它是正确的，但我们并不能就此说对于无限多个集合，它也是正确的。因为有限的性质不能随意地推广到无限。

由于选择公理的假设性，它一提出来就遭到了一些人的反对，但它在数学中有很大的用处。经过长期的争论，它得到了大多数人的公认。

在证明任何无限集都有可数子集时，是需要用选择公理的。在一些和选择公理相反的假设下，可以证明存在没有可数子集的无限集。这样的集合的存在，破坏了数学中一些基本的性质，所以虽然它们在逻辑上是无矛盾的，但在数学中是难以接受的。

以下从选择公理证明良序定理。

6.1.3 引理 $A \neq \varnothing$，取 $\mathsf{P}(A) \setminus \{\varnothing\}$上的选择函数 h，取 $b \notin A$。对每个序数α，归纳定义 $A_\alpha \subseteq A \cup \{b\}$和 $a_\alpha \in A \cup \{b\}$如下：

$$A_\alpha = \{a_\tau \mid \tau < \alpha\}$$

$$a_\alpha = \begin{cases} h(A \setminus A_\alpha) & \text{如果 } A \setminus A_\alpha \neq \varnothing \\ b & \text{如果 } A \setminus A_\alpha = \varnothing, \end{cases}$$

则它们有以下性质：

(1) 如果$\beta \leq \alpha$，则 $A_\beta \subseteq A_\alpha$。

(2) $a_\alpha \neq b$ 当且仅当 $A \setminus A_\alpha \neq \varnothing$。

(3) 如果 $a_\alpha \neq b$，则 $a_\alpha \in A \setminus A_\alpha$。

(4) 如果$\beta < \alpha$，则 $a_\beta \in A_\alpha$。

证 (1) 任给 $a_\tau \in A_\beta$，都有$\tau < \beta$，由$\beta \leq \alpha$得

$$\tau < \alpha,$$

所以

$$a_\tau \in A_\alpha,$$

因此 $A_\beta \subseteq A_\alpha$。

(2) 由 a_α的定义直接可得。

(3) 如果 $a_\alpha \neq b$，则 $a_\alpha = h(A \setminus A_\alpha)$，因为 h 是选择函数，所以

$$h(A \setminus A_\alpha) \in A \setminus A_\alpha,$$

即 $a_\alpha \in A \setminus A_\alpha$。

(4) 如果$\beta < \alpha$，则由 A_α的定义得 $a_\beta \in A_\alpha$。■

6.1.4 定理 选择公理可以推出良序定理。

证 空集是能良序的，以下设 $A \neq \varnothing$。按引理 6.1.3 定义 A_α 和 a_α。取 $B = \{\alpha \mid a_\alpha \neq b\} = \{\alpha \mid A \setminus A_\alpha \neq \varnothing\}$。

任给$\alpha \in B$，如果$\beta \leq \alpha$，则由引理 6.1.3(1)得

$$A_\beta \subseteq A_\alpha$$

由 $A \setminus A_\alpha \neq \varnothing$和 $A_\beta \subseteq A_\alpha$得

$$A \setminus A_\beta \neq \varnothing,$$

所以

$$\beta \in B。$$

因此 B 是序数的前段，由定理 5.3.11 得

存在序数γ，使得 $B = \mathbf{O}(\gamma)$。

任给 $a_\alpha \in A_\gamma$，都有$\alpha < \gamma$，由 $B = \mathbf{O}(\gamma)$得$\alpha \in B$，所以

$$a_\alpha \neq b,$$

由引理 6.1.3(3)得 $a_\alpha \in A \setminus A_\alpha$，更有 $a_\alpha \in A$，因此

$$A_\gamma \subseteq A。$$

又因为$\gamma \notin B$，所以 $a_\gamma = b$，由引理 6.1.3(2)得

$$A \setminus A_\gamma = \varnothing,$$

因此

$$A \subseteq A_\gamma。$$

最终得 $A = A_\gamma = \{a_\alpha \mid \alpha < \gamma\}$。

任给$\alpha \in B$，都有$\alpha < \gamma$，由引理 6.1.3(1)得

$$a_\alpha \in A_\gamma = A,$$

因此可以构造 B 到 A 的映射：

$$f: B \to A \quad f(\alpha) = a_\alpha。$$

任给$\alpha, \beta \in B$，如果$\alpha \neq \beta$，不妨假设$\beta < \alpha$，则由引理 6.1.3(4)和(2)得

$$a_\beta \in A_\alpha \text{且 } a_\alpha \in A \setminus A_\alpha,$$

所以 $a_\alpha \neq a_\beta$，即

$$f(\alpha) \neq f(\beta),$$

因此 f 是单射。

任给 $a_\alpha \in A$，都有$\alpha < \gamma$，所以

$$\alpha \in B \text{ 且 } f(\alpha) = a_\alpha,$$

因此 f 是满射。

由习题 3.3.1 得$\langle B, \leq \rangle$相似于$\langle A, \leq(f) \rangle$，再由定理 5.1.13 得$\langle A, \leq(f) \rangle$是良序集。■

这个证明的直观想法是用序数一个一个数集合 A 中的元素，a_α就是第α个元素。每次在剩下的子集中取元素是由选择公理预先

指定的，在定理中表示为

$$a_\alpha = h(A\setminus A_\alpha)。$$

我们用超穷归纳定义描述这样的过程，但又不知道到哪个序数为止可以把集合 A 中的元素数完。所以引进 $b\notin A$，使得当集合 A 的元素数完后，就重复地数 b。

有个值得注意的现象，对于任何集合，总是可以到某个序数为止，将集合中所有的元素数完。这个现象的产生是因为序数集合的一个性质(定理 5.3.12)：

> 任给序数的集合，总有一个序数比集合中每个序数都大。

由良序定理可知，只要我们需要，任何集合都可以将它看作良序集。从良序定理的证明中还可得到，任何集合总可以无重复地表示成$\{a_\alpha \mid \alpha<\gamma\}$。

如果γ是无限序数，则由习题 5.4.3 可知，存在极限序数σ和自然数 n，使得$\gamma = \sigma+\mathrm{n}$。这时集合$\{a_\alpha \mid \alpha<\gamma\}$的直观形象如下：

$$a_0,\cdots, a_{\mathrm{n}-1}, a_{\mathrm{n}}, a_{\mathrm{n}+1},\cdots\cdots, a_\omega,\cdots\cdots, a_\sigma,\cdots, a_{\sigma+\mathrm{n}-1}$$

对于小于 n 的自然数 m，令 $b_{\mathrm{m}} = a_{\sigma+\mathrm{m}}$，对于大于等于 n 的自然数 m，令 $b_{\mathrm{m}} = a_{\mathrm{m}-\mathrm{n}}$，对于小于$\sigma$的其它序数$\alpha$，令 $b_\alpha = a_\alpha$，直观形象如下：

$$\begin{array}{l} a_\sigma,\cdots, a_{\sigma+\mathrm{n}-1}, a_0, a_1,\ \cdots\cdots, a_\omega,\cdots\cdots \\ b_0,\cdots, b_{\mathrm{n}-1},\quad b_{\mathrm{n}}, b_{\mathrm{n}+1},\cdots\cdots, b_\omega,\cdots\cdots \end{array}$$

则$\{b_\alpha \mid \alpha<\sigma\} = \{a_\alpha \mid \alpha<\gamma\}$。

这说明了任何无限集总可以无重复地表示成$\{a_\alpha \mid \alpha<\sigma\}$，其中$\sigma$是极限序数。

通过这种表示，我们可以用序数的性质和超穷归纳法取证明集合的性质了。

首先，我们在选择公理的假设下严格证明任何无限集都有可数子集。

6.1.5 定理 任何无限集都有可数子集。

证 设 A 是无限集，将 A 表示为$\{a_\alpha \mid \alpha<\gamma\}$，则$\gamma$是无限序数。因为$\omega$是最小的无限序数，所以$\omega\le\gamma$。令

$$B = \{a_\alpha \mid a_\alpha\in A \text{ 且}\alpha<\omega\}，$$

则 B 就是 A 的可数子集。■

其次，我们来证明有重要应用的极大链存在定理。

6.1.6 定义 极大链 A 是偏序集，M 是 A 的线形链，如果

> 任给 $x\in A\setminus M$，都有 $M\cup\{x\}$不是 A 的线形链，

则称 M 是 A 的极大线形链，简称 M 是 A 的极大链。

6.1.7 引理 设 $A = \{a_\alpha \mid \alpha<\sigma\}$是偏序集，$B$ 是 A 的线形链，归纳构造 $B_\alpha(\alpha<\sigma)$如下：

① $\alpha = 0$，$B_\alpha = B$；

② $\alpha = \delta^+$，$B_\alpha = \begin{cases} B_\delta & \text{如果 } B_\delta\cup\{a_\delta\}\text{不是线形链} \\ B_\delta\cup\{a_\delta\} & \text{如果 } B_\delta\cup\{a_\delta\}\text{是线形链；} \end{cases}$

③ α是极限序数，$B_\alpha = \bigcup_{\beta<\alpha}B_\beta$。

则：

(1) 任给$\alpha<\sigma$，都有如果$\beta<\alpha$，则 $B_\beta\subseteq B_\alpha$。

(2) 任给$\alpha<\sigma$，B_α都是线形链。

(3) $\bigcup\{B_\alpha \mid \alpha<\sigma\}$是线形链。

证 (1) 对α使用超穷归纳法。

① $\alpha = 0$。因为没有比 0 小的序数，所以$\beta<\alpha$为假，因此如果$\beta<\alpha$，则 $B_\beta\subseteq B_\alpha$。

② α是后继序数，则存在序数δ，使得$\alpha = \delta^+$。由定义得

$$B_\alpha = B_\delta\cup\{a_\delta\}\text{或 } B_\alpha = B_\delta，$$

所以

$$B_\delta\subseteq B_\alpha。$$

如果$\beta<\alpha$，则 $\beta<\delta^+$，所以

$$\beta<\delta\text{或}\beta = \delta，$$

当$\beta<\delta$时，由归纳假设得 $B_\beta \subseteq B_\delta$，当$\beta=\delta$时有 $B_\beta = B_\delta$，所以

$$B_\beta \subseteq B_\delta,$$

因此 $B_\beta \subseteq B_\alpha$。

③ α是极限序数。如果$\beta<\alpha$，则 $B_\beta \subseteq \bigcup_{\beta<\alpha} B_\beta \subseteq B_\alpha$。

(2) 对α使用超穷归纳法。

① $\alpha=0$，则 $B_\alpha = B$ 是线形链。

② α是后继序数，则存在序数δ，使得$\alpha=\delta^+$，由归纳假设得B_δ是线形链。由定义得

$$B_\alpha = B_\delta \cup \{a_\delta\} \text{或} B_\alpha = B_\delta,$$

当 $B_\alpha = B_\delta \cup \{a_\delta\}$时，由定义得 B_α是线形链，当 $B_\alpha = B_\delta$时，就有 $B_\alpha = B_\delta$是线形链。

③ α是极限序数。由(1)得$\{B_\beta \mid \beta<\alpha\}$是单调的，由习题 3.4.7 得 $B_\alpha \subseteq \bigcup_{\beta<\alpha} B_\beta$是线形链。

(3) 由(1)得$\{B_\alpha \mid \alpha<\sigma\}$是单调的，由习题 3.4.7 得$\bigcup\{B_\alpha \mid \alpha<\sigma\}$是线形链。■

6.1.8 定理 A 是偏序集，B 是 A 的线形链，则存在 A 的极大线形链 M，使得是 $B \subseteq M$。

证 将 A 表示为$\{a_\alpha \mid \alpha<\sigma\}$，按引理 6.1.7 构造 B_α，取

$$M = \bigcup\{B_\alpha \mid \alpha<\sigma\},$$

则由引理 6.1.7(3)得 M 是线形链，显然 $B \subseteq M$，以下证 M 是极大线形链。

任给 $a_\delta \in A$，如果 $a_\delta \notin M$，则 $a_\delta \notin B_{\delta^+}$，由 B_{δ^+}的定义得

$$B_\delta \cup \{B_\delta\} \text{不是线形链},$$

所以

$$M \cup \{B_\delta\} \text{不是线形链}。$$

因此 M 是 A 的极大线形链。■

在例 2.1.19 中，我们用自然数的最小数原理构造了 $\mathrm{P}(\mathbf{N}) \setminus \{\varnothing\}$上的选择函数。良序集有最小元原理，所以如果$\Gamma$是良序集 A 的子集族且$\varnothing \notin \Gamma$，则可以用类似的方法构造$\Gamma$上的选择函数。注意到$\Gamma$

总是$\bigcup\Gamma$的子集族，所以由良序定理可以推出选择公理，因而它们是等价。

6.1.9 定理 良序定理可以推出选择公理。

证 Γ是集合族且$\varnothing \notin \Gamma$，由良序定理，可设$\bigcup\Gamma$是良序集。任给 $X \in \Gamma$，都有 $X \subseteq \bigcup\Gamma$，所以 X 有最小元，因此可以构造Γ到$\bigcup\Gamma$的映射：

$$h: \Gamma \to \bigcup\Gamma \quad h(X) = X \text{ 的最小元},$$

h 就是Γ上的选择函数。■

设$\{A_i \mid i \in I\}$和$\{B_i \mid i \in I\}$都是不交的。在选择公理的假设下，我们就可以从

$$\text{任给 } i \in I\text{，都有} |A_i| = |B_i|$$

得到$|\bigcup_{i\in I} A_i| = |\bigcup_{i\in I} B_i|$。

因为我们可以用选择公理对每个 i，取定一个 A_i 到 B_i 的双射，它们的并映射就是$\bigcup_{i\in I} A_i$ 到$\bigcup_{i\in I} B_i$ 的双射。具体步骤如下：

任给 $i \in I$，令

$$D_i = \{f \mid f \text{ 是 } A_i \text{ 到 } B_i \text{ 的双射}\},$$

因为$|A_i| = |B_i|$，所以 $D_i = \varnothing$。令

$$\Gamma = \{D_i \mid i \in I\},$$

取Γ上的选择函数 h，构造映射族

$$\Sigma = \mathrm{ran}(h) = \{h(D_i) \mid i \in I\}。$$

可以证明并映射 f_Σ存在且是$\bigcup_{i\in I} A_i$ 到$\bigcup_{i\in I} B_i$ 的双射。

如果我们用指标集 I 将Γ表示为$\{A_i \mid i \in I\}$，则Γ上的选择函数就属于$\prod_{i\in I} A_i$。所以由选择公理很容易得到卡氏积定理：

$$\text{如果任给 } i \in I\text{，都有 } A_i \neq \varnothing\text{，则}\prod_{i\in I} A_i \neq \varnothing。$$

设 h 是Γ上选择函数，因为任给 $X \in \Gamma$，都有 $h(X) \in X$，所以

$$\text{任给 } X \in \Gamma\text{，都有 } X \cap \mathrm{ran}(h) \neq \varnothing。$$

当Γ是不交时，$X \cap \mathrm{ran}(h)$中恰有一个元素 $h(X)$。因此由选择公理可以得到交点惟一定理：

如果Γ是一个不交的集合族且$\varnothing \notin \Gamma$，则存在集合 A，

使得任给 $X\in\Gamma$，都有$|X\cap A|=1$。

这两个定理的详细证明留给读者。

习题 6.1

6.1.1　卡氏积定理　证明：如果任给 $\mathrm{i}\in\mathrm{I}$，都有 $A_\mathrm{i}\neq\varnothing$，则 $\prod_{\mathrm{i}\in\mathrm{I}}A_\mathrm{i}\neq\varnothing$。

6.1.2　交点惟一定理　证明：如果

Γ是一个不交的集合族且$\varnothing\notin\Gamma$，则

存在集合 A，使得任给 $X\in\Gamma$，都有$|X\cap A|=1$。

6.1.3　$\{A_\mathrm{i}\mid\mathrm{i}\in\mathrm{I}\}$和$\{B_\mathrm{i}\mid\mathrm{i}\in\mathrm{I}\}$都是两两不交的。证明：如果

任给 $\mathrm{i}\in\mathrm{I}$，都有$|A_\mathrm{i}|=|B_\mathrm{i}|$，

则$|\bigcup_{\mathrm{i}\in\mathrm{I}}A_\mathrm{i}|=|\bigcup_{\mathrm{i}\in\mathrm{I}}B_\mathrm{i}|$。

6.1.4　证明：如果任给 $\mathrm{i}\in\mathrm{I}$，都有$|A_\mathrm{i}|=|B_\mathrm{i}|$，则$|\prod_{\mathrm{i}\in\mathrm{I}}A_\mathrm{i}|=|\prod_{\mathrm{i}\in\mathrm{I}}B_\mathrm{i}|$。

6.1.5　$\{A_\mathrm{i}\mid\mathrm{i}\in\mathrm{I}\}$是两两不交的，任给 $\mathrm{i}\in\mathrm{I}$，都有$\kappa_\mathrm{i}=|A_\mathrm{i}|$，定义

$\sum_{\mathrm{i}\in\mathrm{I}}\kappa_\mathrm{i}=|\bigcup_{\mathrm{i}\in\mathrm{I}}A_\mathrm{i}|$，

由习题 6.1.3，这定义是合理的。$\sum_{\mathrm{i}\in\mathrm{I}}\kappa_\mathrm{i}$称为$\{\kappa_\mathrm{i}\mid\mathrm{i}\in\mathrm{I}\}$的广义和。证明：如果任给 $\mathrm{i}\in\mathrm{I}$，都有$\kappa_\mathrm{i}=\kappa$，则$\sum_{\mathrm{i}\in\mathrm{I}}\kappa_\mathrm{i}=|\mathrm{I}|\cdot\kappa$。

6.1.6　任给 $\mathrm{i}\in\mathrm{I}$，都有$\kappa_\mathrm{i}=|A_\mathrm{i}|$，定义

$\prod_{\mathrm{i}\in\mathrm{I}}\kappa_\mathrm{i}=|\prod_{\mathrm{i}\in\mathrm{I}}A_\mathrm{i}|$，

由习题 6.1.4，这定义是合理的。$\prod_{\mathrm{i}\in\mathrm{I}}\kappa_\mathrm{i}$称为$\{\kappa_\mathrm{i}\mid\mathrm{i}\in\mathrm{I}\}$的广义积。证明：如果任给 $\mathrm{i}\in\mathrm{I}$，都有$\kappa_\mathrm{i}=\kappa$，则$\prod_{\mathrm{i}\in\mathrm{I}}\kappa_\mathrm{i}=\kappa^{|\mathrm{I}|}$。

6.2　基数的进一步性质

在选择公理的假设下，基数就有许多类似于序数的性质。首先我们将序数和基数联系起来。

两个相似的良序集一定等势，所以任何序数都可以确定一个基数。

6.2.1　定义　序数的基数　α是任意序数，取良序集 A，使得 $\alpha=\overline{A}$，称 A 的基数$|A|$是序数α的基数，记为$|\alpha|$。

两个不同的序数可以有相同的基数，如ω，$\omega+1$，$\omega+\omega$是不同的序数，但它们有相同的基数$\aleph_0$。

有了选择公理(也就有了良序定理)，每个基数都是序数的基数。任给基数κ，取集合 A，使得$\kappa=|A|$，由良序定理可使 A 是良序集，令$\alpha=\overline{A}$，则$\kappa=|\alpha|$。

既然每个基数都是序数的基数，就可以使用序数的性质来讨论基数的性质。

6.2.2　定理　如果$\beta\leq\alpha$，则$|\beta|\leq|\alpha|$。因此如果$|\alpha|<|\beta|$，则$\alpha<\beta$。

证　因为$\beta\leq\alpha$，所以可取良序集 A, B，使得

$\overline{A}=\alpha$，$\overline{B}=\beta$且 B 是 A 的前段，

由 B 是 A 的前段得 $B\subseteq A$，因此

$|B|\leq|A|$，

即$|\beta|\leq|\alpha|$。■

6.2.3　定理　基数可比较定理　任给基数κ, λ，都有$\kappa\leq\lambda$或$\lambda\leq\kappa$。

证　取序数α,β，使得

$\kappa=|\alpha|$且$\lambda=|\beta|$。

由定理 5.3.3(4)得

$\alpha\leq\beta$或$\beta\leq\alpha$，

由定理 6.2.2 得

$$|\alpha|\le|\beta|\text{或}|\beta|\le|\alpha|,$$

即$\kappa\le\lambda$或$\lambda\le\kappa$。■

6.2.4 定理 任何基数的非空集合都有最小数。

证 设 A 是基数的非空集合，取

$$B=\{\beta\mid\beta\text{是序数且}|\beta|\in A\},$$

则 B 是序数的非空集合，由定理 5.3.9 得 B 有最小数α，以下证明$|\alpha|$就是 A 的最小数。

任给$\kappa\in A$，存在$\beta\in B$，使得$|\beta|=\kappa$，由α是 B 的最小数和$\beta\in B$得

$$\alpha\le\beta,$$

所以

$$|\alpha|\le|\beta|=\kappa。$$

因此$|\alpha|$就是 A 的最小数。■

6.2.5 定理 A 是基数的集合，则存在基数λ，使得任给$\kappa\in A$，都有$\kappa<\lambda$。

证 取 $B=\{\beta\mid\beta$是序数，存在$\kappa\in A$，使得$|\beta|\le\kappa\}$，则 B 是序数的集合，由定理 5.3.12 得

存在序数γ，使得任给$\beta\in B$，都有$\beta<\gamma$。

令$\lambda=|\gamma|$。如果存在$\kappa\in A$，使得$\lambda\le\kappa$，则$|\gamma|\le\kappa$，由 B 的定义得$\gamma\in B$，矛盾。

因此任给$\kappa\in A$，都有$\kappa<\lambda$。■

设 $A=\{\kappa_{\mathrm{i}}\mid \mathrm{i}\in\mathrm{I}\}$是基数的集合，由定理 6.2.5，

存在基数κ，使得任给 $\mathrm{i}\in\mathrm{I}$，都有$\kappa_{\mathrm{i}}<\kappa$。

对照习题 4.4.5，在那里，对于集合族$\{A_{\mathrm{i}}\mid \mathrm{i}\in\mathrm{I}\}$，证明了

存在κ，使得κ大于每一个$|A_{\mathrm{i}}|$。

如果没有选择公理，只给定 $A=\{\kappa_{\mathrm{i}}\mid \mathrm{i}\in\mathrm{I}\}$，就无法对每个 i 同时找到 A_{i}，使得$\kappa_{\mathrm{i}}=|A_{\mathrm{i}}|$，从而无法使用那里的方法证明

存在κ，使得κ大于每一个κ_{i}。

和序数类似，由定理 6.2.4 可知，任何基数的集合 A 都有上确界，这个上确界记为 $\sup A$。

也和序数类似，由定理 6.2.5 可定义基数的后继，进而定义后继基数和极限基数。

6.2.6 定义 基数的后继 κ是基数，则 $A=\{\lambda\mid\lambda>\kappa\}$是基数的非空集合，$A$ 的最小数称为基数κ的后继，记为κ^+。

6.2.7 定义 后继基数和极限基数 如果存在λ，使得$\kappa=\lambda^+$，则称κ是后继基数，如果$\kappa\ne0$且κ不是后继基数，则称κ是极限基数。

基数的后继、后继基数和极限基数和序数中相应的概念有许多类似的性质。

6.2.8 定理 后继基数的性质

(1) $\kappa<\kappa^+$。

(2) 如果$\lambda<\kappa$，则$\lambda^+\le\kappa$。因此如果$\kappa<\lambda^+$，则$\kappa\le\lambda$。

(3) 如果$\kappa^+=\lambda^+$，则$\kappa=\lambda$。

证 类似于定理 5.3.18，详细证明留给读者。■

6.2.9 定理 极限序数的性质

(1) κ是极限基数，如果$\lambda<\kappa$，则$\lambda+<\kappa$。

(2) A 是基数的集合，$\kappa=\sup A$，如果$\kappa\notin A$，则κ是极限序数。

(3) 如果$\kappa\ne0$，则κ是极限序数当且仅当$\kappa=\{\lambda\mid\lambda<\kappa\}$。

证 类似于习题 5.3.2，详细证明留给读者。■

因为有基数的最小数原理(定理 6.2.4)，所以也有基数的超穷归纳法。

6.2.10 定理 基数的超穷归纳法 设$\phi(\kappa)$是基数κ的一个命题，并且满足：

如果任给$\kappa_0\le\lambda<\kappa$，$\phi(\lambda)$都成立，则$\phi(\kappa)$成立。

那么，任给基数$\kappa\ge\kappa_0$，$\phi(\kappa)$都成立。

证 类似于定理 5.3.19，详细证明留给读者。■

和序数的超穷归纳法类似，条件中蕴涵着$\phi(\kappa_0)$成立，在应用

时经常需要补上$\phi(\kappa_0)$的证明。另外，κ_0 经常取$\aleph_0$。

基数的超穷归纳法也有分κ_0，后继基数和极限基数三种情况的第二形式，它的叙述和证明留给读者。

由 Cantor 定理，$\kappa<2^\kappa$，所以$\kappa^+\leq 2^\kappa$。是否有$\kappa^+=2^\kappa$呢？因为κ^+是大于κ的最小基数，所以这也是问在κ和 2^κ之间是否还有其它基数。这就是著名的连续统假设和广义连续统假设。

6.2.11 连续统假设 $\aleph_0{}^+=2^{\aleph_0}$。

6.2.12 广义连续统假设 任给无限基数κ，都有$\kappa^+=2^\kappa$。

这两个假设推动了关于基数性质的更为深入的研究，但对于这两个假设及相关的研究不是本书所能讨论的。

由定理 6.2.3 和定理 6.2.4，基数的大小不但是全序而且是良序。所以可以形象地利用序数将所有无限基数按大小排列。

6.2.13 定义 超穷归纳定义基数$\aleph_\alpha$如下：

(1) $\aleph_0=|\omega|$；

(2) $\aleph_{\alpha^+}=\aleph_\alpha{}^+$；

(3) σ是极限序数，$\aleph_\sigma=\sup\{\aleph_\tau\mid\tau<\sigma\}$。

下面证明这样的表达式正是我们所需要的。

6.2.14 引理 如果$\alpha<\beta$，则$\aleph_\alpha<\aleph_\beta$。因此如果$\alpha\leq\beta$，则$\aleph_\alpha\leq\aleph_\beta$。

证 对β作超穷归纳证明。

① 没有比 0 小的序数。

② 如果$\alpha<\beta^+$，则$\alpha<\beta$或$\alpha=\beta$，由归纳假设得

$$\aleph_\alpha<\aleph_\beta\text{或}\aleph_\alpha=\aleph_\beta,$$

所以$\aleph_\alpha\leq\aleph_\beta<\aleph_\beta{}^+=\aleph_{\beta^+}$。

③ σ是极限序数。如果$\alpha<\sigma$，则$\alpha^+<\sigma$，所以

$$\aleph_{\alpha^+}\in\{\aleph_\tau\mid\tau<\sigma\},$$

因此$\aleph_\alpha<\aleph_\alpha{}^+=\aleph_{\alpha^+}\leq\sup\{\aleph_\tau\mid\tau<\sigma\}=\aleph_\sigma$。■

6.2.15 定理 任给无限基数κ，存在序数α，使得$\kappa=\aleph_\alpha$。

证 反证法。假设存在无限基数κ，使得

$$\text{任给序数}\alpha\text{，都有}\kappa\neq\aleph_\alpha,$$

则由引理 6.2.3，具有这样性质的基数中有最小数，设这个最小数为λ。

取 $A=\{\tau\mid\aleph_\tau<\lambda\}$，则任给$\alpha\in A$，任给$\beta\leq\alpha$，都有$\aleph_\beta<\aleph_\alpha<\lambda$，所以

$$\beta\in A,$$

因此 A 是序数的前段。由定理 5.3.11 得存在序数γ，使得

$$A=\mathbf{O}(\gamma),$$

所以

$$\gamma\notin A,$$

因此$\lambda\leq\aleph_\gamma$。

① 如果$\gamma=0$，则$\aleph_\gamma=\aleph_0\leq\lambda$。

② 如果$\gamma=\beta^+$，则$\beta\in A$，所以$\aleph_\beta<\lambda$，因此$\aleph_\gamma=\aleph_{\beta^+}=\aleph_\beta{}^+\leq\lambda$。

③ 如果γ是极限序数，则

$$\aleph_\gamma=\sup\{\aleph_\tau\mid\tau<\gamma\}=\sup\{\aleph_\tau\mid\tau\in A\}$$
$$=\sup\{\aleph_\tau\mid\aleph_\tau<\lambda\}\leq\lambda。$$

在三种情况下都有$\aleph_\gamma\leq\lambda$，所以$\aleph_\gamma=\lambda$，矛盾。■

由定理 6.2.15，如果在基数的超穷归纳法中$\kappa_0=\aleph_0$，则可以用序数的超穷归纳法代替基数的超穷归纳法。

A 是任何集合，由良序定理，A 可以表示成$\{a_\alpha\mid\alpha<\gamma\}$。取

$$\sigma=\{\beta\mid|\beta|=|\gamma|\}\text{的最小数}$$

则 A 也可以表示成$\{a_\alpha\mid\alpha<\sigma\}$，既然$\sigma$是$\{\beta\mid|\beta|=|\gamma|\}$的最小数，所以

$$\text{任给}\gamma<\sigma\text{，都有}|\gamma|<|\sigma|,$$

因此

$$\text{任给}\gamma<\sigma\text{，都有}|\{a_\alpha\mid\alpha<\gamma\}|=|\gamma|<|\sigma|=|A|。$$

这是一个非常有用的性质。

习题 6.2

6.2.1　证明定理 6.2.8，即证明：

(1) $\kappa<\kappa^+$。

(2) 如果$\lambda<\kappa$，则$\lambda^+\leq\kappa$。因此如果$\kappa<\lambda^+$，则$\kappa\leq\lambda$。

(3) 如果$\kappa^+=\lambda^+$，则$\kappa=\lambda$。

6.2.2　证明定理 6.2.9，即证明：

(1) κ是极限基数，如果$\lambda<\kappa$，则$\lambda^+<\kappa$。

(2) A 是基数的集合，$\kappa=\sup A$，如果$\kappa\notin A$，则κ是极限序数。

(3) 如果$\kappa\neq 0$，则κ是极限序数当且仅当$\kappa=\{\lambda\mid\lambda<\kappa\}$。

6.2.3　证明基数的超穷归纳法，即证明：

$\phi(\kappa)$是基数κ的一个命题，并且满足：

　　如果任给$\kappa_0\leq\lambda<\kappa$，$\phi(\lambda)$都成立，则$\phi(\kappa)$成立。

那么，任给基数$\kappa\geq\kappa_0$，$\phi(\kappa)$都成立。

6.2.4　叙述并证明基数的超穷归纳法第二形式。

6.2.5　κ是无限基数，σ是$\{\alpha\mid|\alpha|=\kappa\}$的最小数。证明$\sigma$是极限序数。

6.2.6　证明：如果$\alpha\neq 0$，则α是极限序数当且仅当$\aleph_\alpha$的极限基数。

6.2.7　在没有选择公理的情况下，不能证明每个基数都是序数的基数，但能证明：

(1) 任给基数κ，如果$\kappa\leq|\alpha|$，则存在序数β，使得$\kappa=|\beta|$。

(2) 任给基数κ，$\{\alpha\mid|\alpha|<\kappa\}$是序数的前段。

(3) 任给基数κ，如果κ不是序数的基数，则存在序数γ，使得κ和$|\gamma|$不可比较(即$\kappa\not\leq|\gamma|$且$|\gamma|\not\leq\kappa$)。

6.3　Zorn 引理

选择公理有许多等价命题，其中经常使用的一个是 Zorn 引理。

6.3.1　Zorn 引理　A 是非空偏序集，如果 A 的任何线形链都有上界，则 A 有极大元。

选择公理可以推出 Zorn 引理。直观的想法是这样的：因为偏序集 A 的每个线形链都有上界，所以可由选择公理在所有上界中取定一个不在这个线形链中的元素，将这个元素加在原来的线形链中就得到一个新的线形链，再用同样的方法找元素，得到又一个线形链，直至不能做为止。这时得到的线形链的上界必定属于自己，所以它只有一个上界，这个上界就是偏序集 A 的极大元。

我们用序数来数这些找出来的元素，以便使用超穷归纳法。又类似于良序定理的证明，引进 $b\notin A$，当符合条件的元素数完后，重复数 b。

也类似于良序定理的证明，先证明一个引理。

6.3.2 引理　A 是非空偏序集，偏序关系为$\leq_A$，取 $\mathrm{P}(A)\setminus\{\varnothing\}$ 上的选择函数 h，取 $b\notin A$。

对每个序数α，归纳定义 $A_\alpha\subseteq A\cup\{b\}$，$B_\alpha\subseteq A$ 和 $a_\alpha\in A\cup\{b\}$ 如下：

$$A_\alpha=\{a_\tau\mid\tau<\alpha\},$$

$$B_\alpha=\{x\mid x\in A\setminus A_\alpha \text{且 } x \text{ 是 } A_\alpha\setminus\{b\}\text{的上界}\},$$

$$a_\alpha=\begin{cases}h(B_\alpha) & \text{如果 } B_\alpha\neq\varnothing\\ b & \text{如果 } B_\alpha=\varnothing,\end{cases}$$

则它们有以下性质：

(1) 如果$\beta\leq\alpha$，则 $A_\beta\subseteq A_\alpha$且 $B_\alpha\subseteq B_\beta$。

(2) $a_\alpha\neq b$ 当且仅当 $B_\alpha\neq\varnothing$。

(3) 如果 $a_\alpha \neq b$ 且 $b \notin A_\alpha$，则 a_α是 A_α的上界。

(4) 如果 $a_\alpha \neq b$，$b \notin A_\alpha$且$\beta \leq \alpha$，则 $a_\beta \leq_A a_\alpha$。

证 (1) 任给 $a_\tau \in A_\beta$，都有$\tau < \beta$，由$\beta \leq \alpha$得

$$\tau < \alpha,$$

所以

$$a_\tau \in A_\alpha,$$

因此 $A_\beta \subseteq A_\alpha$。

由 $A_\beta \subseteq A_\alpha$得 $A \setminus A_\alpha \subseteq A \setminus A_\beta$且 $A_\beta \setminus \{b\} \subseteq A_\alpha \setminus \{b\}$。

任给 $x \in B_\alpha$，都有

$$x \in A \setminus A_\alpha \text{且 } x \text{ 是 } A_\alpha \setminus \{b\}\text{的上界},$$

由 $x \in A \setminus A_\alpha$和 $A \setminus A_\alpha \subseteq A \setminus A_\beta$得

$$x \in A \setminus A_\beta,$$

由 x 是 $A_\alpha \setminus \{b\}$的上界和 $A_\beta \setminus \{b\} \subseteq A_\alpha \setminus \{b\}$得

$$x \text{ 是 } A_\beta \setminus \{b\}\text{的上界},$$

所以

$$x \in B_\beta。$$

因此 $B_\alpha \subseteq B_\beta$。

(2) 由 a_α的定义直接可得。

(3) 由 $a_\alpha \neq b$ 和(2)得 $B_\alpha \neq \varnothing$，所以 $a_\alpha \in B_\alpha$，因此

$$a_\alpha\text{是 } A_\alpha \setminus \{b\}\text{的上界。}$$

又因为 $b \notin A_\alpha$，所以

$$A_\alpha \setminus \{b\} = A_\alpha,$$

因此 a_α是 A_α的上界。

(4) $\beta = \alpha$时显然，以下设$\beta < \alpha$。由$\beta < \alpha$和 A_α的定义得

$$a_\beta \in A_\alpha,$$

由 $a_\alpha \neq b$，$b \notin A_\alpha$和(3)得

$$a_\alpha\text{是 } A_\alpha\text{的上界。}$$

因此 $a_\beta \leq_A a_\alpha$。 ■

下面由选择公理证明 Zorn 引理。

6.3.3 定理 选择公理可以推出 Zorn 引理。

证 设 A 是非空偏序集，A 的任何线形链都有上界。按引理 6.3.2 定义 A_α，B_α和 a_α。取 $C = \{\alpha \mid a_\alpha \neq b\} = \{\alpha \mid B_\alpha \neq \varnothing\}$。

任给$\alpha \in C$，都有 $B_\alpha \neq \varnothing$，如果$\beta \leq \alpha$，则引理 6.3.2(1)得

$$B_\alpha \subseteq B_\beta,$$

由 $B_\alpha \neq \varnothing$和 $B_\alpha \subseteq B_\beta$得 $B_\beta \neq \varnothing$，所以

$$\beta \in C。$$

因此 C 是序数的前段，由定理 5.3.11 得

存在序数γ，使得 $C = \mathbf{O}(\gamma)$。

任给 $a_\alpha, a_\beta \in A_\gamma$，不妨设$\beta \leq \alpha$，就有

$$\beta \leq \alpha < \gamma。$$

任给 $a_\delta \in A_\alpha$，都有$\delta < \alpha$，所以

$$\delta < \gamma,$$

由 $C = \mathbf{O}(\gamma)$得$\delta \in C$，所以

$$a_\delta \neq b,$$

因此

$$b \notin A_\alpha。$$

由$\beta \leq \alpha$，$b \notin A_\alpha$和引理 6.3.2(4)得

$$a_\beta \leq_A a_\alpha。$$

所以 A_γ是线形链，因此 A_γ有上界。

由 $C = \mathbf{O}(\gamma)$得$\gamma \notin C$，所以 $a_\gamma = b$，因此

$$B_\gamma = \varnothing。$$

这说明了 A_γ没有属于 $A \setminus A_\alpha$的上界，所以 A_γ只有属于 A_γ的上界，因此 A_γ的上界只有一个，由习题 3.4.4，这个上界就是 A 的极大元。■

要应用 Zorn 引理，首先要根据需要构造一个非空偏序集，使得它的每个线形链都有上界，这样它就有极大元，其次就是证明这个极大元有我们所需要的性质。

应用最多的偏序集是有序对$<X, f>$的集合，其中 X 是集合，f

是定义域为 X 的映射。为了以后使用方便，先证明以下引理。

6.3.4 引理 B 是集合，Σ是有序对$<X, f>$的集合，其中 X 是集合，f 是 X 到 B 的映射。在Σ上定义二元关系$\leq$如下：

$$\leq = \{<<X_1, f_1>, <X_2, f_2>> \mid X_1 \subseteq X_2 \text{ 且 } f_2\mid_{X_1} = f_1\},$$

即

$$<X_1, f_1>\leq<X_2, f_2>\text{当且仅当 } X_1 \subseteq X_2 \text{ 且 } f_2\mid_{X_1} = f_1,$$

则有：

(1) $\leq$是Σ上偏序关系。

(2) 如果$\Phi = \{<X_i, f_i> \mid i\in I\}$是$\Sigma$的线形链，令 $X = \bigcup_{i\in I} X_i$，则

存在 X 到 B 的映射 f，使得任给 $i\in I$，都有 $f\mid_{X_i} = f_i$。

因此，如果$<X, f>\in\Sigma$，则$<X, f>$是Φ的上界。

(3) 在(2)中，如果每个 f_i 是单射，则 f 是单射。

证 (1) 证明$\leq$具有自返性、反对称性和传递性。

自返性。任给$<X, f>\in\Sigma$，都有

$$X \subseteq X \text{ 且 } f\mid_X = f,$$

所以$<X, f>\leq<X, f>$。

反对称性。如果$<X_1, f_1>\leq<X_2, f_2>$且$<X_2, f_2>\leq<X_1, f_1>$，则

$$X_1 \subseteq X_2，X_2 \subseteq X_1，f_2\mid_{X_1} = f_1 \text{ 且 } f_1\mid_{X_2} = f_2,$$

所以

$$X_1 = X_2，f_1 = f_2\mid_{X_1} = f_2\mid_{X_2} = f_2,$$

因此$<X_1, f_1> = <X_2, f_2>$。

传递性。如果$<X_1, f_1>\leq<X_2, f_2>$且$<X_2, f_2>\leq<X_3, f_3>$，则

$$X_1 \subseteq X_2，X_2 \subseteq X_3，\quad f_2\mid_{X_1} = f_1 \text{ 且 } f_3\mid_{X_2} = f_2,$$

所以

$$X_1 = X_2，f_3\mid_{X_1} = (f_3\mid_{X_2})\mid_{X_1} = f_2\mid_{X_1} = f_1,$$

因此$<X_1, f_1>\leq<X_3, f_3>$。

(2) 考虑映射族$\Gamma = \{f_i \mid i\in I\}$。显然

$$\{X_i \mid i\in I\}$$

是单调的，又任给 $i, j\in I$，如果 $X_i \subseteq X_j$，则 $f_j\mid_{X_i} = f_i$，所以

任给 $x\in X_i$，都有 $f_j(x) = f_j\mid_{X_i}(x) = f_i(x)$。

由定理 2.5.11(2)，存在Γ的并映射 f，由并映射的定义得

f 是 X 到 B 的映射

且

任给 $i\in I$，都有 $f\mid_{X_i} = f_i$。

(3) 由定理 2.5.12(2)。■

现在证明由 Zorn 引理可以推出选择公理，从而它们是等价的。

证明的思路是这样的：考虑有序对$<X, f>$组成的集合，其中 X 是Γ的子集，f 是 X 上的选择函数，由引理 6.3.4 在这个集合上构造偏序关系，然后用 Zorn 引理证明它有极大元$<X_0, f_0>$，最后证明 $X_0 = \Gamma$，所以 f_0 就是Γ的选择函数。

6.3.5 定理 Zorn 引理可以推出选择公理。

证 设Γ集合族且$\varnothing\notin\Gamma$，取

$$\Sigma = \{<X, f> \mid X \subseteq \Gamma, f: X\to\bigcup\Gamma, \text{任给 } Y\in X, \text{都有 } f(Y)\in Y\}。$$

取 $A\in\Gamma$和 $a\in A$，令

$$f:\{A\}\to\bigcup\Gamma \quad f(A) = a,$$

则$<\{A\}, f>\in\Sigma$，所以Σ非空。

由引理 6.3.4 可在Σ定义偏序关系如下：

$$<X_1, f_1>\leq<X_2, f_2>\text{当且仅当 } X_1 \subseteq X_2 \text{ 且 } f_2\mid_{X_1} = f_1$$

则Σ是非空偏序集。

任给Σ的线形链

$$\Phi = \{<X_i, f_i> \mid i\in I\},$$

取 $X = \bigcup_{i\in I} X_i$，则 $X \subseteq \Gamma$。由引理 6.3.4，存在 X 到$\bigcup\Gamma$的映射 f，使得

任给 $i\in I$，都有 $f\mid_{X_i} = f_i$。

又

任给 $Y\in X$，存在 $i\in I$，使得 $Y\in X_i$，

所以

$f(Y) = f_i(Y)\in Y$，

由Σ的定义得

$<X, f>\in\Sigma$，

因此$<X, f>$是Φ的上界。

这说明Σ的任何线形链都有上界，由 Zorn 引理，Σ有极大元$<X_0, f_0>$。

如果 $X_0 \neq \Gamma$，则取 $A\in\Gamma\setminus X_0$，取 $a\in A$，构造 $X_0\cup\{Y_0\}$到$\bigcup\Gamma$的映射

$$f: X_0\cup\{Y_0\}\to\bigcup\Gamma \quad f(Y) = \begin{cases} f_0(Y) & \text{如果 } Y\in X_0 \\ a & \text{如果 } Y = X_0, \end{cases}$$

则任给 $Y\in X_0\cup\{Y_0\}$，都有 $f(Y)\in Y$，所以

$<X_0\cup\{Y_0\}, f>\in\Sigma$。

显然有

$<X_0, f_0> < <X_0\cup\{Y_0\}, f>$，

和$<X_0, f_0>$是极大元矛盾。

因此 $X_0 = \Gamma$，f_0就是Γ的选择函数。■

另一类常用的偏序集是由集合族Σ和Σ上的包含关系组成的偏序集。对于这样的偏序集Σ，任给$\Phi\subseteq\Sigma$，Φ是线形链当且仅当Φ是单调的。显然，任给$\Phi\subseteq\Sigma$，$\bigcup\Phi$是Φ的上界。

所以，只要任给单调的$\Phi\subseteq\Sigma$，都有$\bigcup\Phi\in\Sigma$，就能用 Zorn 引理证明Σ有极大元。

6.3.6 例 用 Zorn 引理重新证明极大链存在定理。

设 B 是 A 的线形链，取

$\Sigma = \{X \mid X$ 是 A 的线形链且 $B\subseteq X\}$，

则：

(1) Σ非空。

(2) 任给单调的$\Phi\subseteq\Sigma$，$\bigcup\Phi$还是线形链，所以$\bigcup\Phi\in\Sigma$。

因此，由 Zorn 引理得Σ有极大元 M。M 就是 A 的极大线形链，并

且 $B\subseteq M$。

习题 6.3

6.3.1 用 Zorn 引理证明基数可比较定理 A, B 是非空集合，

$\Sigma = \{<X, f> \mid X\subseteq A$，$f$ 是 X 到 B 的单射$\}$，

由引理 6.3.4 可在Σ定义偏序关系如下：

$<X_1, f_1>\le<X_2, f_2>$当且仅当 $X_1\subseteq X_2$ 且 $f_2|_{X_1} = f_1$

证明：

(1) Σ非空。

(2) 任给Σ的线形链$\Phi = \{<X_i, f_i> \mid i\in I\}$，Φ都有上界，因此Σ有极大元。

(3) 如果$<X_0, f_0>$是极大元，则 $X_0 = A$ 或 $f[X_0] = B$

(4) 存在 A 到 B 的单射，或存在 B 到 A 的单射。

6.3.2 用良序定理证明 Zorn 引理 A 非空偏序集，A 的任何线形链都有上界。由良序定理，可设 $A = \{a_\tau \mid \tau<\gamma\}$，任给$\tau<\gamma$，归纳定义 A_τ如下：

(1) $A_0 = \varnothing$；

(2) $A_{\alpha^+} = \begin{cases} A_\alpha\cup\{a_\alpha\} & \text{如果 } a_\alpha \text{是 } A_\alpha \text{的上界} \\ A_\alpha & \text{如果 } a_\alpha \text{不是 } A_\alpha \text{的上界；} \end{cases}$

(3) σ是极限序数，$A_\sigma = \bigcup\{A_\alpha \mid \alpha<\sigma\}$。

令 $B = \bigcup\{A_\tau \mid \tau<\gamma\}$，证明：

(1) 任给$\tau<\gamma$，A_τ是线形链。

(2) B 是线形链。

(3) B 的上界都在 B 中，因此 A 有极大元。

6.4　倍等定理和幂等定理

在选择公理的假设下，无限基数有两个重要定理，倍等定理和幂等定理。我们用 Zorn 引理来证明它们。

倍等定理是说：任给无限基数κ，都有$\kappa+\kappa = \kappa$。

证明的思路是这样的：取集合 A, B，满足

$$|A| = |B| = \kappa \text{且} A\cap B = \varnothing,$$

取 A 到 B 的双射 g。考虑有序对$<X, f>$组成的集合，其中 X 是 A 的子集，f 是 X 到 $A\cup B$ 的单射，且有 $f[X] = X\cup g[X]$，这样的 X 满足

$$|X|+|X| = |X|。$$

然后由引理 6.3.4 和 Zorn 引理证明它有极大元$<X_0, f_0>$，最后证明

$$|X_0| = |A| = \kappa,$$

所以$\kappa+\kappa = |X_0|+|X_0| = |X_0| = \kappa$。

6.4.1 定理　无限基数的倍等定理　任给无限基数κ，都有$\kappa+\kappa = \kappa$。

证　取集合 A, B，满足$|A| = |B| = \kappa$且 $A\cap B = \varnothing$，取 A 到 B 的双射 g。取

$$\Sigma = \{<X, f> \mid X \subseteq A，f \text{是} X \text{到} A\cup B \text{的单射且} f[X] = X\cup g[X]\}。$$

显然任给$<X, f>\in\Sigma$，都有

$$|X|+|X| = |X\cup g[X]| = |f[X]| = |X|。$$

取 A 的可数子集 X，则 $X\cup g[X]$也是可数集，取 X 到 $X\cup g[X]$ 的双射 h，令

$$f：X\to A\cup B \quad f(x) = h(x)$$

则$<X, f>\in\Sigma$，所以Σ非空。

由引理 6.3.4 可在Σ定义偏序关系如下：

$$<X_1, f_1>\le<X_2, f_2>\text{当且仅当} X_1 \subseteq X_2 \text{且} f_2|_{X_1} = f_1$$

则Σ是非空偏序集。

任给Σ的线形链$\Phi = \{<X_i, f_i> \mid i\in I\}$，取 $X = \bigcup_{i\in I} X_i$，则 $X \subseteq A$。由引理 6.3.4，存在 X 到 $A\cup B$ 的单射 f，使得

$$\text{任给 } i\in I，\text{都有 } f|_{X_i} = f_i。$$

又

$$\begin{aligned} f[X] &= f[\textstyle\bigcup_{i\in I} X_i] = \bigcup_{i\in I} f[X_i] \\ &= \textstyle\bigcup_{i\in I} f_i[X_i] = \bigcup_{i\in I} (X_i\cup g[X_i]) \\ &= (\textstyle\bigcup_{i\in I} X_i)\cup(\bigcup_{i\in I} g[X_i]) \\ &= X\cup g[X], \end{aligned}$$

所以

$$<X, f>\in\Sigma,$$

因此$<X, f>$是Φ的上界。

这说明Σ的任何线形链都有上界，由 Zorn 引理，Σ有极大元$<X_0, f_0>$。

如果我们证明了$|X_0| = |A|$，就有$\kappa+\kappa = |X_0|+|X_0| = |X_0| = \kappa$。以下用反证法证明$|X_0| = |A|$。

假设$|X_0| \ne |A|$，则 $A\setminus X_0$ 是无限的，可取 $A\setminus X_0$ 的可数子集 Y，取 Y 到 $Y\cup g[Y]$的双射 h，构造 $X_0\cup Y$ 到 $A\cup B$ 的映射

$$f：X_0\cup Y\to A\cup B \quad f(x) = \begin{cases} f_0(x) & \text{如果 } Y\in X_0 \\ h(x) & \text{如果 } Y = X_0, \end{cases}$$

则 f 是单射，又

$$\begin{aligned} f[X_0\cup Y] &= f[X_0]\cup f[Y] = (X_0\cup g[X_0])\cup(Y\cup g[Y]) \\ &= (X_0\cup Y)\cup(g[X_0]\cup g[Y]) \\ &= (X_0\cup Y)\cup g[X_0\cup Y], \end{aligned}$$

所以

$$<X_0\cup\{Y_0\}, f>\in\Sigma。$$

显然有

$$<X_0, f_0> < <X_0\cup\{Y_0\}, f>,$$

和$<X_0, f_0>$是极大元矛盾。■

设κ, λ都是无限基数，由定理 6.3.5 可知，

如果$\kappa, \lambda<\mu$，则$\kappa+\lambda<\mu$。

这个结果将用在以下定理的证明中。

幂等定理是说：任给无限基数κ，都有$\kappa\cdot\kappa = \kappa$。

证明的思路是这样的：取集合 A 满足

$$|A| = \kappa。$$

考虑有序对$<X, f>$组成的集合，其中 X 是 A 的子集，f 是 X 到 $A\times A$ 的单射，且有 $f[X] = X\times X$，这样的 X 满足

$$|X|\cdot|X| = |X|。$$

然后由引理 6.3.4 和 Zorn 引理证明它有极大元$<X_0, f_0>$，最后证明

$$|X_0| = |A| = \kappa,$$

所以$\kappa\cdot\kappa = |X_0|\cdot|X_0| = |X_0| = \kappa$。

6.4.2 定理　无限基数的幂等定理　任给无限基数κ，都有$\kappa\cdot\kappa = \kappa$。

证　取集合 A 满足$|A| = \kappa$。取

$$\Sigma = \{<X, f> \mid X\subseteq A，f \text{ 是 } X \text{ 到 } A\times A \text{ 的单射且 } f[X] = X\times X\}$$

显然

任给$<X, f>\in\Sigma$，都有$|X|\cdot|X| = |X\times X| = |X|$。

取 A 的可数子集 X，则 $X\times X$ 也是可数集，取 X 到 $X\times X$ 的双射 h，令

$$f：X\to A\times A \quad f(x) = h(x)$$

则$<X, f>\in\Sigma$，所以Σ非空。

由引理 6.3.4 可在Σ定义偏序关系如下：

$$<X_1, f_1>\leq<X_2, f_2> \text{当且仅当 } X_1\subseteq X_2 \text{ 且 } f_2|_{X_1} = f_1$$

则Σ是非空偏序集。

任给Σ的线形链

$$\Phi = \{<X_i, f_i> \mid i\in I\},$$

取 $X = \bigcup_{i\in I}X_i$，则 $X\subseteq A$。由引理 6.3.4，存在 X 到 $A\times A$ 的单射 f，使得

任给 $i\in I$，都有 $f|_{X_i} = f_i$。

又

$$\begin{aligned} f[X] &= f[\textstyle\bigcup_{i\in I}X_i] = \bigcup_{i\in I}f[X_i] \\ &= \textstyle\bigcup_{i\in I}f_i[X_i] = \bigcup_{i\in I}(X_i\times X_i) \\ &= (\textstyle\bigcup_{i\in I}X_i)\times(\bigcup_{i\in I}X_i) \\ &= X\times X, \end{aligned}$$

所以

$$<X, f>\in\Sigma,$$

因此$<X, f>$是Φ的上界。

这说明Σ的任何线形链都有上界，由 Zorn 引理，Σ有极大元$<X_0, f_0>$。

如果我们证明了$|X_0| = |A|$，就有$\kappa\cdot\kappa = |X_0|\cdot|X_0| = |X_0| = \kappa$。以下用反证法证明$|X_0| = |A|$。

如果$|X_0| \neq |A|$，则$|X_0|<|A|$，由定理 6.4.1 得

$$|A\setminus X_0| = |A|$$

(否则由$|X_0|<|A|$和$|A\setminus X_0|<|A|$得$|A| = |X_0\cup(A\setminus X_0)|<|A|$，矛盾)。

可取 $B_1\subseteq A\setminus X_0$，使得$|B_1| = |X_0|$，则 B_1 和 X_0 不交，由定理 6.4.1 得

$$|X_0\cup B_1| = |X_0|+|B_1| = |X_0|+|X_0| = |X_0|,$$

所以

$$|A\setminus(X_0\cup B_1)| = |A|,$$

又可取 $B_2\subseteq A\setminus(X_0\cup B_1)$，使得

$$|B_2| = |X_0|,$$

类似地还可取 $B_3\subseteq A\setminus(X_0\cup B_1)$，使得

$$|B_3| = |X_0|。$$

这样 X_0, B_1, B_2, B_3 两两不交，且$|B_1| = |B_2| = |B_3| = |X_0|$。

取 $B = B_1\cup B_2\cup B_3$，则由定理 6.4.1 得

$$|B| = |B_1|+|B_2|+|B_3| = |X_0|+|X_0|+|X_0| = |X_0|,$$

又因为$|X_0\times X_0| = |X_0|$，所以

$$|X_0\times B| = |B\times X_0| = |B\times B| = |X_0|。$$

取 B_1 到 $X_0\times B$ 的双射 h_1，取 B_2 到 $B\times X_0$ 的双射 h_2，取 B_3 到 $B\times B$ 的双射 h_3，令

$$X = X_0\cup B = X_0\cup B_1\cup B_2\cup B_3,$$

构造 X 到 $A\times A$ 的映射

$$f：X\to A\times A \quad f(x) = \begin{cases} f_0(x) & 如果\ x\in X_0 \\ h_1(x) & 如果\ x\in B_1 \\ h_2(x) & 如果\ x\in B_2 \\ h_3(x) & 如果\ x\in B_3, \end{cases}$$

则 f 是单射，又

$$\begin{aligned} f[X] &= f[X_0\cup B_1\cup B_2\cup B_3] \\ &= f[X_0]\cup f[B_1]\cup f[B_2]\cup f[B_3] \\ &= f_0[X_0]\cup h_1[B_1]\cup h_2[B_2]\cup h_3[B_3] \\ &= (X_0\times X_0)\cup(X_0\times B)\cup(B\times X_0)\cup(B\times B) \\ &= (X_0\cup B)\times(X_0\cup B) = X\times X, \end{aligned}$$

所以

$$<X_0\cup\{Y_0\}, f>\in\Sigma。$$

显然有

$$<X_0, f_0> \,<\, <X, f>,$$

和$<X_0, f_0>$是极大元矛盾。■

习题 6.4

6.4.1　κ, λ是无限基数。证明：如果$\kappa<\mu$且$\lambda<\mu$，则$\kappa+\lambda<\mu$。

6.4.2　κ, λ是无限基数。证明：如果$\kappa<\mu$且$\lambda<\mu$，则$\kappa\cdot\lambda<\mu$。

6.4.3　λ是无限基数。证明：如果 $2\le\kappa\le\lambda$，则$\kappa^{\lambda} = 2^{\lambda}$。

6.5　选择公理的其他等价命题

前面证明了良序定理、Zorn 引理都和选择公理等价。又用选择公理推出了以下三个定理。

(1) 卡氏积定理　如果任给 $\mathrm{i}\in\mathrm{I}$，都有 $A_\mathrm{i}\ne\varnothing$，则$\prod_{\mathrm{i}\in\mathrm{I}}A_\mathrm{i}\ne\varnothing$。

(2) 交点惟一定理　如果Γ是一个不交的集合族且$\varnothing\notin\Gamma$，则存在集合 A，使得任给 $X\in\Gamma$，都有$|X\cap A| = 1$。

(3) 基数可比较定理　任给基数κ, λ，都有$\kappa\le\lambda$或$\lambda\le\kappa$。

以下证明这三个定理都和选择公理等价。

6.5.1 定理　卡氏积定理可以推出选择公理。

证　设Γ集合族且$\varnothing\notin\Gamma$。取 $\mathrm{I} = \Gamma$，任给 $\mathrm{i}\in\mathrm{I}$，取 $A_\mathrm{i} = \mathrm{i}$，则

$$任给\ \mathrm{i}\in\mathrm{I}，都有\ A_\mathrm{i}\ne\varnothing,$$

由卡氏积定理得

$$\prod_{\mathrm{i}\in\mathrm{I}}A_\mathrm{i}\ne\varnothing,$$

取 $f\in\prod_{\mathrm{i}\in\mathrm{I}}A_\mathrm{i}$，则 f 是 I 到$\bigcup_{\mathrm{i}\in\mathrm{I}}A_\mathrm{i}$ 的映射，并且满足

$$任给\ \mathrm{i}\in\mathrm{I}，都有\ f(\mathrm{i})\in A_\mathrm{i}。$$

因为$\Gamma = \mathrm{I}$ 且$\bigcup\Gamma = \bigcup_{\mathrm{i}\in\mathrm{I}}A_\mathrm{i}$，所以 f 是Γ到$\bigcup\Gamma$的映射，又

$$任给\ X\in\Gamma，存在\ \mathrm{i}\in\mathrm{I}，使得\ X = \mathrm{i} = A_\mathrm{i},$$

所以

$$f(X) = f(\mathrm{i})\in A_\mathrm{i} = X,$$

因此 f 是Γ上的选择函数。■

6.5.2 定理　交点惟一定理可以推出选择公理。

证　设Γ集合族且$\varnothing\notin\Gamma$。任给 $X\in\Gamma$，令

$$A(X) = \{X\}\times X = \{<X, x> \mid x\in X\}，\Sigma = \{A(X)\mid X\in\Gamma\},$$

就有

$$任给\ X, Y\in\Gamma，如果\ X\ne Y，则\ A(X)\cap A(Y) = \varnothing,$$

所以Σ是不交的集合族，由交点惟一定理，存在集合 A，使得

$|A\cap A(X)| = 1$。

构造Γ到⋃Γ的映射

$$h：\Gamma\to\bigcup\Gamma \quad h(X) = x\ (<X, x>\text{是 } A\cap A(X)\text{中惟一的元素})$$

则 h 是Γ上的选择函数。■

6.5.3 定理 基数可比较定理可以推出良序定理。

证 证明如果良序定理不成立，则基数可比较定理不成立。

如果良序定理不成立，则存在集合 A 不能良序，所以$\kappa = |A|$就不是序数的基数，由习题 6.2.7(2)，存在基数λ，使得κ和λ不可比较，因此基数可比较定理不成立。■

下面再介绍一个选择公理的等价命题——Tukey 引理。先引进有限特征的概念。用 $\mathsf{F}(A)$表示 A 的所有有限子集组成的集合，即 $\mathsf{F}(A) = \{X \mid X\subseteq A \text{ 且 } X \text{ 是有限的}\}$。

6.5.4 定义 有限特征 Γ是集合族，如果任给集合 A，都有

$$A\in\Gamma\text{当且仅当 } A \text{ 的任何有限子集属于}\Gamma，$$

即

$$A\in\Gamma\text{当且仅当 } \mathsf{F}(A)\subseteq\Gamma，$$

则称Γ具有有限特征。

6.5.5 Tukey 引理 Γ是集合族，如果Γ具有有限特征，则Γ有极大元。

Γ有极大元的意思是指Γ在包含关系下的极大元，也就是Γ的极大集。详细地说，X_0是极大元是指：任给 $X\in\Gamma$，如果 $X_0\subseteq X$，则 $X_0 = X$。

我们来证明 Zorn 引理和 Tukey 引理等价。

6.5.6 定理 Zorn 引理可以推出 Tukey 引理。

证 设Γ是具有有限特征的集合族。

任给Γ的线形链Σ，令 $A = \bigcup\Sigma$。任给 A 的有限子集 X，因为Σ是单调的，所以存在 $Y\in\Sigma$，使得 $X\subseteq Y$ (由习题 1.5.5 和数学归纳法)，由 $Y\in\Gamma$和 X 是 Y 的有限子集得

$$X\in\Gamma。$$

这证明了

$$\text{任给 } A \text{ 的有限子集 } X\text{，都有 } X\in\Gamma，$$

由Γ具有有限特征得

$$A\in\Gamma，$$

所以 A 是Σ的上界。

因此，Γ的任何线形链都有上界，由 Zorn 引理，Γ有极大元。■

6.5.7 定理 Tukey 引理可以推出 Zorn 引理。

证 设 A 是非空偏序集，A 的任何线形链都有上界。

如果 X 是线形链，则 X 的任何有限子集都是线形链，反之如果 X 的任何有限子集都是线形链，则任给 $x, y\in X$，由$\{x, y\}$得

$$x\le y \text{ 或 } y\le x，$$

所以 X 是线形链。

因此$\Gamma = \{X \mid X \text{ 是 } A \text{ 的线形链}\}$具有有限特征，由 Tukey 引理，Γ有极大元 X_0。因为 X_0是线形链，所以 X_0有上界，但 X_0的上界都在 X_0中，所以 X_0只有一个上界，这个上界就是 A 的极大元。■

Tukey 引理也称为第二极大原理。

习题 6.5

6.5.1 选择公理第二形式 任给非空集合 A，存在 $\mathsf{P}(A)\setminus\{\varnothing\}$上的选择函数。显然选择公理第二形式是选择公理的特例。

证明：选择公理第二形式可以推出选择公理。

6.5.2 第一极大原理 Γ是集合族，如果Γ的线形链都有上界，则Γ有极大元。显然第一极大原理是 Zorn 引理的特例。

(1) A 是偏序集，任给 $a\in A$，令 $A[a] = \{x \mid x\in A \text{ 且 } x\le a\}$，再令$\Gamma = \{A[a] \mid a\in A\}$，证明：$A\cong\Gamma$。

(2) 证明：第一极大原理可以推出 Zorn 引理。