复变思考题解答

自 64　　赵文亮　　2016011452[*]

2018 年 1 月 1 日

问题 1. 设分式线性变换

$$\omega = \frac{az+b}{cz+d} \tag{1}$$

其中 $a,b,c,d \in \mathbb{R}$ 且 $ad-bc \neq 0$。则式 (1) 保广义圆，且对于圆 $z = z_0 + re^{i\theta}$，变换后为 $\omega = \omega_0 + Re^{i\varphi}$，求 ω_0, R, φ 的表达式。

解：由已知 a, c 不同时为 0。$ac \neq 0$ 时，分式线性变换 (1) 可以写成

$$\omega = \frac{az+b}{cz+d} = \frac{a}{c} \cdot \frac{z+\dfrac{b}{a}}{z+\dfrac{d}{c}} = \frac{a}{c}\left(1+\frac{\dfrac{b}{a}-\dfrac{d}{c}}{z+\dfrac{d}{c}}\right) \tag{2}$$

$a=0, c\neq 0$ 时，分式线性变换 (1) 可以写成

$$\omega = \frac{b}{c} \cdot \frac{1}{z+\dfrac{d}{c}} \tag{2'}$$

$a \neq 0, c = 0$ 时，分式线性变换 (1) 可以写成

$$\omega = \frac{a}{d}z + \frac{b}{d} \tag{2''}$$

即总可以将(1)看成三种变换的复合：平移变换、倒数变换、放缩变换。下面对于圆 $z = z_0 + re^{i\theta}$ 在每种变换作用后的结果分别分析。

1. 平移变换

$$\omega_1 = z + z_{\mathrm{m}} \tag{3}$$

对于圆 $z = z_0 + re^{i\theta}$，变换后易得

$$\omega_1 = z_0 + z_m + re^{i\theta} \triangleq \omega_0 + Re^{i\varphi} \tag{4}$$

即对于平移变换，易得

$$\begin{cases} \omega_0 = z_0 + z_m \\ R = r \\ \varphi = \theta + 2k\pi \qquad (k \in \mathbb{Z}) \end{cases} \tag{5}$$

[*] zhaowl16@mails.tsinghua.edu.cn

2. 放缩变换

$$\omega_2 = sz \tag{6}$$

其中 $s \in \mathbb{R}$ 为放缩系数。则经放缩变换后

$$\omega_2 = s(z_0 + re^{i\theta}) = sz_0 + sre^{i\theta} \triangleq \omega_0 + Re^{i\varphi} \tag{7}$$

即

$$\begin{cases} w_0 = sz_0 \\ R = |s|r \\ \varphi = \theta + \arg s + 2k\pi \qquad (k \in \mathbb{Z}) \end{cases} \tag{8}$$

3. 倒数变换

$$\omega_3 = \frac{1}{z} \tag{9}$$

考虑复平面上圆的一般形式

$$z\bar{z} + \bar{\alpha}z + \alpha\bar{z} + \beta = 0 \tag{10}$$

不难推出式 (10) 对应的圆心和半径为:

$$\begin{cases} z_0 = -\alpha \\ r = \sqrt{|\alpha|^2 - \beta} \end{cases} \tag{11}$$

下面进行式 (21) 的变换，可以得到

$$\frac{1}{\omega_3\overline{\omega_3}} + \bar{\alpha}\frac{1}{\omega_3} + \alpha\frac{1}{\overline{\omega_3}} + \beta = 0$$

或

$$\beta\omega_3\overline{\omega_3} + \bar{\alpha}\overline{\omega_3} + \alpha\omega_3 + 1 = 0 \tag{12}$$

当 $\beta = 0$（即 $|z_0| = r$）时，上式退化为直线；$\beta \neq 0$ 时，上式改写为:

$$\omega_3\overline{\omega_3} + \frac{\bar{\alpha}}{\beta}\overline{\omega_3} + \frac{\alpha}{\beta}\omega_3 + \frac{1}{\beta} = 0 \tag{13}$$

对比式 (10) ，可知式 (13) 也表示一个圆，且有

$$\begin{cases} \omega_0 = -\dfrac{\bar{\alpha}}{\beta} = \dfrac{\overline{z_0}}{|z_0|^2 - r^2} \\ R = \sqrt{\dfrac{|\alpha|^2}{\beta^2} - \dfrac{1}{\beta}} = \dfrac{r}{|\beta|} = \dfrac{r}{||z_0|^2 - r^2|} \end{cases} \tag{14}$$

$$\omega_3 = \frac{1}{z_0 + re^{i\theta}} = \omega_0 + Re^{i\varphi} \tag{15}$$

将已经求得的 ω_0 和 R 的表达式代入求解 $e^{i\varphi}$。先考虑 $|z_0|^2 - r^2 > 0$ 的情况:

$$\begin{aligned} e^{i\varphi} = \frac{\omega_3 - \omega_0}{R} &= \frac{\dfrac{1}{z_0 + re^{i\theta}} - \dfrac{\overline{z_0}}{|z_0|^2 - r^2}}{\dfrac{r}{|z_0|^2 - r^2}} \\ &= -\frac{r + \overline{z_0}e^{i\theta}}{z_0 + re^{i\theta}} \end{aligned} \tag{16}$$

下面说明，$\forall\varphi,\exists!\theta\in[0,2\pi),s.t.$

$$e^{i\varphi}=-\frac{r+\overline{z_0}e^{i\theta}}{z_0+re^{i\theta}}$$

事实上，由上式等价于

$$e^{i\theta}=-\frac{r+z_0e^{i\varphi}}{\overline{z_0}+re^{i\varphi}} \tag{17}$$

计算等号右边的模方：

$$\begin{aligned}\left|-\frac{r+z_0e^{i\varphi}}{\overline{z_0}+re^{i\varphi}}\right|^2&=\frac{(r+z_0e^{i\varphi})(r+\overline{z_0}e^{-i\varphi})}{(\overline{z_0}+re^{i\varphi})(z_0+re^{-i\varphi})}\\&=\frac{r^2+r\overline{z_0}e^{-i\varphi}+rz_0e^{i\varphi}+|z_0|^2}{|z_0|^2+\overline{z_0}re^{-i\varphi}+z_0re^{i\varphi}+r^2}\\&=1\end{aligned} \tag{18}$$

则式 (17) 必有解

$$\begin{aligned}\theta&=\frac{1}{i}\mathrm{Ln}\left(-\frac{r+z_0e^{i\varphi}}{\overline{z_0}+re^{i\varphi}}\right)\\&=\frac{1}{i}\left(\ln\left|-\frac{r+z_0e^{i\varphi}}{\overline{z_0}+re^{i\varphi}}\right|+i\arg\left(-\frac{r+z_0e^{i\varphi}}{\overline{z_0}+re^{i\varphi}}\right)+2k\pi i\right)\\&=\arg\left(-\frac{r+z_0e^{i\varphi}}{\overline{z_0}+re^{i\varphi}}\right)+2k\pi\qquad(k\in\mathbb{Z})\end{aligned} \tag{19}$$

如果限定 $\theta\in[0,2\pi)$，则当 $e^{i\varphi}$ 取定后，由上式可以解出唯一的值。至此，我们已经可以得出，若 θ 在 $[0,2\pi)$ 变化，θ 从 0 增大到 2π 时，$e^{i\varphi}$ 这一复数也恰好绕单位圆走过了一圈，且不存在同一个 $e^{i\varphi}$ 值对应 $[0,2\pi)$ 中的两个或两个以上 θ 值的情况。

进一步可以求出 φ 的值。不难发现式 (16) 和式 (17) 之间存在对称性。类似可以求得：

$$\varphi=\arg\left(-\frac{r+\overline{z_0}e^{i\theta}}{z_0+re^{i\theta}}\right)+2k\pi\qquad(k\in\mathbb{Z}) \tag{20}$$

若 $|z_0|^2<r^2$，则

$$R=\frac{r}{r^2-|z_0|^2}$$

使用完全相同的推导方式（事实上只相差一个符号），可以得出

$$e^{i\varphi}=\frac{r+\overline{z_0}e^{i\theta}}{z_0+re^{i\theta}} \tag{16$'$}$$

同理可证 θ 从 0 增大到 2π 时，$e^{i\varphi}$ 恰好绕单位圆走过一圈。由式 (16′) 解出 φ：

$$\varphi=\arg\left(\frac{r+\overline{z_0}e^{i\theta}}{z_0+re^{i\theta}}\right)+2k\pi\qquad(k\in\mathbb{Z}) \tag{20$'$}$$

故可以得出结论，倒数变换将完整的圆映成完整的圆（或直线）。像为圆时（$r\neq|z_0|$），将上述结果整理：

$$\begin{cases}\omega_0=\dfrac{\overline{z_0}}{|z_0|^2-r^2}\\[2ex] R=\dfrac{r}{\left||z_0|^2-r^2\right|}\\[2ex] \varphi=\arg\left((r-|z_0|)\dfrac{r+\overline{z_0}e^{i\theta}}{z_0+re^{i\theta}}\right)+2k\pi\qquad(k\in\mathbb{Z})\end{cases} \tag{21}$$

上式巧妙地利用因子 $(r-|z_0|)$ 来实现符号的控制。

至此，我们已经推导出来三种特殊的分式线性变换下圆心、半径、辐角的变换关系。下面利用式 (5)(8)(21) 求解一般的分式线性变换下三者的变换关系。

- $ac \neq 0$，如式 (2) 所示。首先进行平移操作

  $$z_1 = z + \frac{d}{c}$$

  则

  $$\begin{cases} z_{10} = z_0 + \dfrac{d}{c} \\ r_1 = r \\ \theta_1 = \theta + 2k\pi \qquad (k \in \mathbb{Z}) \end{cases} \tag{22}$$

  再进行倒数变换

  $$z_2 = \frac{1}{z_1}$$

  则

  $$\begin{cases} z_{20} = \dfrac{\overline{z_{10}}}{|z_{10}|^2 - r_1^2} = \dfrac{\overline{z_0} + \dfrac{d}{c}}{\left|z_0 + \dfrac{d}{c}\right|^2 - r^2} \\ r_2 = \dfrac{r_1}{\left||z_{10}|^2 - r_1^2\right|} = \dfrac{r}{\left|\left|z_0 + \dfrac{d}{c}\right|^2 - r^2\right|} \\ \theta_2 = \arg\left((r_1 - |z_{10}|) \cdot \dfrac{r_1 + \overline{z_{10}} e^{i\theta_1}}{z_{10} + r_1 e^{i\theta_1}}\right) + 2k\pi \\ \quad\ = \arg\left(\left(r - \left|z_0 + \dfrac{d}{c}\right|\right) \cdot \dfrac{r + \left(\overline{z_0} + \dfrac{d}{c}\right) e^{i\theta}}{z_0 + \dfrac{d}{c} + re^{i\theta}}\right) + 2k\pi \qquad (k \in \mathbb{Z}) \end{cases} \tag{23}$$

  再进行放缩变换

  $$z_3 = \left(\frac{b}{a} - \frac{d}{c}\right) z_2$$

  则

  $$\begin{cases} z_{30} = \left(\dfrac{b}{a} - \dfrac{d}{c}\right) z_{20} = \left(\dfrac{b}{a} - \dfrac{d}{c}\right) \dfrac{\overline{z_0} + \dfrac{d}{c}}{\left|z_0 + \dfrac{d}{c}\right|^2 - r^2} \\ r_3 = \left|\dfrac{b}{a} - \dfrac{d}{c}\right| r_2 = \left|\dfrac{b}{a} - \dfrac{d}{c}\right| \dfrac{r}{\left|\left|z_0 + \dfrac{d}{c}\right|^2 - r^2\right|} \\ \theta_3 = \theta_2 + \arg\left(\dfrac{b}{a} - \dfrac{d}{c}\right) + 2k\pi \\ \quad\ = \arg\left(\left(\dfrac{b}{a} - \dfrac{d}{c}\right)\left(r - \left|z_0 + \dfrac{d}{c}\right|\right) \dfrac{r + \left(\overline{z_0} + \dfrac{d}{c}\right) e^{i\theta}}{z_0 + \dfrac{d}{c} + re^{i\theta}}\right) + 2k\pi \qquad (k \in \mathbb{Z}) \end{cases} \tag{24}$$

再进行平移变换 $z_4=z_3+1$，则

$$\begin{cases} z_{40}=z_{30}+1=\left(\dfrac{b}{a}-\dfrac{d}{c}\right)\dfrac{\overline{z_0}+\dfrac{d}{c}}{\left|z_0+\dfrac{d}{c}\right|^2-r^2}+1 \\ r_4=r_3=\left|\dfrac{b}{a}-\dfrac{d}{c}\right|\dfrac{r}{\left|\left|z_0+\dfrac{d}{c}\right|^2-r^2\right|} \\ \theta_4=\theta_3+2k\pi \\ \quad=\arg\left(\left(\dfrac{b}{a}-\dfrac{d}{c}\right)\left(r-\left|z_0+\dfrac{d}{c}\right|\right)\dfrac{r+\left(\overline{z_0}+\dfrac{d}{c}\right)e^{i\theta}}{z_0+\dfrac{d}{c}+re^{i\theta}}\right)+2k\pi \qquad (k\in\mathbb{Z}) \end{cases} \tag{25}$$

最后进行放缩变换 $z_5=\dfrac{a}{c}z_4$，则

$$\begin{cases} z_{50}=\dfrac{a}{c}z_{40}=\dfrac{a}{c}\left(\left(\dfrac{b}{a}-\dfrac{d}{c}\right)\dfrac{\overline{z_0}+\dfrac{d}{c}}{\left|z_0+\dfrac{d}{c}\right|^2-r^2}+1\right) \\ r_5=\left|\dfrac{a}{c}\right|r_4=\dfrac{|bc-ad|}{c^2}\cdot\dfrac{r}{\left|\left|z_0+\dfrac{d}{c}\right|^2-r^2\right|} \\ \theta_5=\theta_4+\arg\left(\dfrac{a}{c}\right)+2k\pi \\ \quad=\arg\left(\left(\dfrac{a}{c}\right)\left(\dfrac{b}{a}-\dfrac{d}{c}\right)\left(r-\left|z_0+\dfrac{d}{c}\right|\right)\dfrac{r+\left(\overline{z_0}+\dfrac{d}{c}\right)e^{i\theta}}{z_0+\dfrac{d}{c}+re^{i\theta}}\right)+2k\pi \\ \quad=\arg\left((bc-ad)\left(r-\left|z_0+\dfrac{d}{c}\right|\right)\dfrac{r+\left(\overline{z_0}+\dfrac{d}{c}\right)e^{i\theta}}{z_0+\dfrac{d}{c}+re^{i\theta}}\right)+2k\pi \qquad (k\in\mathbb{Z}) \end{cases} \tag{26}$$

z_{50}, r_5, θ_5 为所求。

- $a=0, c\neq 0$，如式 $(2')$ 所示。同样进行平移变换和倒数变换，结果同式 (23) 。再进行放缩变换

$$z_3=\frac{b}{c}z_2$$

可得:

$$\begin{cases} z_{30} = \dfrac{b}{c} z_{20} = \dfrac{b}{c} \cdot \dfrac{\overline{z_0} + \dfrac{d}{c}}{\left| z_0 + \dfrac{d}{c} \right|^2 - r^2} \\ r_3 = \left| \dfrac{b}{c} \right| \cdot r_2 = \left| \dfrac{b}{c} \right| \cdot \dfrac{r}{\left| z_0 + \dfrac{d}{c} \right|^2 - r^2} \\ \theta_3 = \theta_2 + 2k\pi = \arg \left(\left(\dfrac{b}{c} \right) \left(r - \left| z_0 + \dfrac{d}{c} \right| \right) \dfrac{r + \left(\overline{z_0} + \dfrac{d}{c} \right) e^{i\theta}}{z_0 + \dfrac{d}{c} + re^{i\theta}} \right) + 2k\pi \qquad (k \in \mathbb{Z}) \end{cases} \tag{27}$$

z_{30}, r_3, θ_3 为所求。

- $a \neq 0, c = 0$，如式 $(2'')$ 所示。只需进行简单的放缩和平移变换。经过放缩变换

$$z_1 = \frac{a}{d} z$$

后

$$\begin{cases} z_{10} = \dfrac{a}{d} z_0 \\ r_1 = \left| \dfrac{a}{d} \right| r \\ \theta_1 = \theta + \arg \left(\dfrac{a}{d} \right) + 2k\pi \qquad (k \in \mathbb{Z}) \end{cases} \tag{28}$$

再经过平移变换

$$z_2 = z_1 + \frac{b}{d}$$

有

$$\begin{cases} z_{20} = z_{10} + \dfrac{b}{d} = \dfrac{a}{d} z_0 + \dfrac{b}{d} \\ r_2 = r_1 = \left| \dfrac{a}{d} \right| r \\ \theta_2 = \theta_1 + 2k\pi = \theta + \arg \left(\dfrac{a}{d} \right) + 2k\pi \qquad (k \in \mathbb{Z}) \end{cases} \tag{29}$$

z_{20}, r_2, θ_2 为所求。

事实上，由式 (26) (27) (29) 可以化简出统一的表达式:

$$\begin{cases} \omega_0 = \dfrac{ac(|z_0| - r^2) + adz_0 + bc\overline{z_0} + bd}{|cz_0 + d|^2 - c^2 r^2} \\ R = \dfrac{|bc - ad| r}{||cz_0 + d|^2 - c^2 r^2|} \\ \varphi = \arg \left((bc - ad) \left(|c| r - |cz_0 + d| \right) \dfrac{cr + \left(c\overline{z_0} + d \right) e^{i\theta}}{cz_0 + d + cre^{i\theta}} \right) + 2k\pi \qquad (k \in \mathbb{Z}) \end{cases} \tag{30}$$

至此，关于复平面上圆的分式线性变换推导已经结束。需要补充的是，虽然式 (30) 的得出是通过圆推导而来的，但是它一样可以反映出变换结果为直线的情况。从式 (30) 的圆心和半径的表达式中不难得到，要想变换结果为一条直线，必须满足:

$$|cz_0 + d|^2 - c^2 r^2 = 0 \tag{31}$$

此时圆心和半径都取 ∞，符合直线的特点。而辐角的表达式应该稍作改写：

$$\varphi = \arg\left(|c|r - |cz_0 + d|\right) + \arg\left((bc - ad)\frac{cr + \left(c\overline{z_0} + d\right)e^{i\theta}}{cz_0 + d + cre^{i\theta}}\right) + 2k\pi \qquad (k \in \mathbb{Z}) \tag{32}$$

从上式可以看出，当 $cz_0 + d + cre^{i\theta} \neq 0$ 时辐角有确定的值，而当 $cz_0 + d + cre^{i\theta} = 0$ 时，考虑

$$\frac{cr + \left(c\overline{z_0} + d\right)e^{i\theta}}{cz_0 + d + cre^{i\theta}} \tag{33}$$

上式的分子分母恰好都为零，故采用洛必达法则求极限，不难得出极限为

$$\frac{c\overline{z_0} + d}{cr}$$

此时的辐角恰好与直线的倾斜角相等或差 π。 □

问题 2. *设圆 C:$z = z_0 + re^{i\theta}$ 内部有一点 z_1，其关于圆 C 的对称点为 z_2。证明：*

1. *当 $r \to \infty$ 时，圆 C 趋近于一条直线，记做 L。且直线 $L \perp \overline{z_0 z_1}$*
2. *当 $r \to \infty$ 时，z_1 和 z_2 到 L 的距离相等。*

解法 1： 示意图如图 1 所示。设 z_0 和 z_1 的连线叫圆于点 z_3。则由题意显然有 z_0, z_1, z_2, z_3 四点共线。设它们的辐角为 θ_0。下面讨论 $r \to \infty$ 时都假定 z_3 不动，这个假设是合理的，否则很难看出圆 C 的变化趋势。首先求出圆在 z_3 处切线的方程，记该切线为 L'。利用切线 L' 与半径垂直的条件，L' 上任意一点 z 满足：

$$z - z_3 = ke^{i\theta_0 + \frac{\pi}{2}} = kie^{i\theta_0} \qquad (k \in \mathbb{R}) \tag{34}$$

两边取模，则有

$$|z - z_3| = k$$

则

$$\begin{aligned} |z - z_3|^2 &= (z - z_3)(\overline{z - z_3}) = kie^{i\theta_0}(\overline{z - z_3}) \\ &= |z - z_3|\, ie^{i\theta_0}(\overline{z - z_3}) \end{aligned}$$

即

$$|z - z_3| = ie^{i\theta_0}(\overline{z - z_3}) = k$$

代入式 (34) 中，得到直线 L' 表达式：

$$z - z_3 = ie^{i\theta_0}(\overline{z - z_3})ie^{i\theta_0}$$

整理后得到：

$$(z - z_3)e^{-i\theta_0} + (\overline{z - z_3})e^{i\theta_0} = 0 \tag{35}$$

为 L' 的方程。

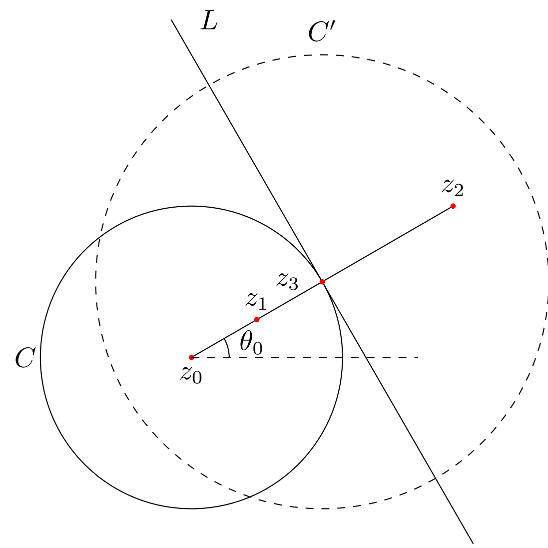


图 1: 问题 2 解法 1 示意图

下面求解圆 C 的方程。其一般形式应该为式 (10) ：

$$z\bar{z} + \bar{\alpha}z + \alpha\bar{z} + \beta = 0$$

对应的圆心和半径为：

$$\begin{cases} z_0 = -\alpha \\ r = \sqrt{|\alpha|^2 - \beta} \end{cases}$$

将 α 和 β 用 z_0 和 r 表示后代入式 (10) 中可得:

$$z\bar{z}-\overline{z_0}z-z_0\bar{z}+|z_0|^2-r^2=0$$

又有 $z_3=z_0+re^{i\theta}$，则

$$z\bar{z}-(\overline{z_3-re^{i\theta}})z-(z_3-re^{i\theta})\bar{z}+|z_3-re^{i\theta}|^2-r^2=0$$

或

$$z\bar{z}-(\overline{z_3-re^{i\theta}})z-(z_3-re^{i\theta})\bar{z}+(z_3-re^{i\theta})(\overline{z_3-re^{i\theta}})-r^2=0$$

最终化简为

$$(z-z_3)e^{-i\theta_0}+(\overline{z-z_3})e^{i\theta_0}=\frac{\overline{z_3}z+z_3\bar{z}-|z_3|^2-|z|^2}{r} \tag{36}$$

不难看出，式 (35) 和式 (36) 十分接近。下面证明当 $r\to\infty$ 时，C 趋近于直线 L'。以 z_3 为圆心，R 为半径作圆 C'。设圆 C 上在圆 C' 内的部分为 Arc，其上的任一点 ξ，必有

$$|\xi|=|\xi-z_3+z_3|\le|\xi-z_3|+|z_3|\le R+|z_3|$$

由已经假定 z_3 不动，故 $|z_3|$ 有界，因此 $\exists M_1>0,s.t.|z_3|<M_1$。则 $\exists M_2=M_1+R,s.t.|\xi|<M_2$

不难证明，复平面上任意一点 ω 到直线 $\bar{\alpha}z+\alpha\bar{z}+\beta=0$ 的距离为

$$\frac{|\bar{\alpha}z+\alpha\bar{z}+\beta|}{2|\alpha|} \tag{37}$$

则 ξ 点到 L' 的距离为

$$d=\frac{|(\xi-z_3)e^{-i\theta_0}+(\overline{\xi-z_3})e^{i\theta_0}|}{2} \tag{38}$$

注意到点 ξ 在 C 上，则有

$$(\xi-z_3)e^{-i\theta_0}+(\overline{\xi-z_3})e^{i\theta_0}=\frac{\overline{z_3}\xi+z_3\bar{\xi}-|z_3|^2-|\xi|^2}{r} \tag{39}$$

则

$$\begin{aligned}d&=\frac{|\overline{z_3}\xi+z_3\bar{\xi}-|z_3|^2-|\xi|^2|}{2r}\\&\le\frac{|\overline{z_3}\xi|+|z_3\bar{\xi}|+|z_3|^2+|\xi|^2}{2r}\\&\le\frac{M_1M_2+M_1M_2+M_1^2+M_2^2}{2r}\\&=\frac{(M_1+M_2)^2}{2r}\end{aligned} \tag{40}$$

则 $\forall\varepsilon>0,\exists r_1=\frac{(M_1+M_2)^2}{2\varepsilon}+1$，使得 $\forall r>r_1,\xi\in Arc$，均有 $d<\varepsilon$。则可知圆 C 在圆 C' 内的部分（Arc）在 $r\to\infty$ 时趋于直线 L'。另一方面，由于 C' 的半径是任意选取的，故得出结论：圆 C 在 $r\to\infty$ 时趋于直线 L'。即待求 L 和 L' 重合。

既然 L' 即为待求直线，而 L' 又是圆的切线，则自然有 $L'\perp\overline{z_0z_1}$，或 $L\perp\overline{z_0z_1}$ 成立。命题 1 得证。 □

下面证明命题 2。由于 z_2 和 z_1 是关于圆 C 的对称点，故有

$$z_2=z_0+\frac{r^2}{\overline{z_1-z_0}} \tag{41}$$

由命题 1 的证明可以看出，$r\to\infty$ 时圆 C 趋于直线 L，且直线 L 即为在 z_3 处的切线。设 $d_1=|z_3-z_1|, d_2=|z_3-z_2|$ 由于 z_0, z_1, z_2, z_3 四点共线，故有

$$\begin{cases} z_1 = z_0 + r_1 e^{i\theta_0} \\ z_2 = z_0 + r_2 e^{i\theta_0} \\ z_3 = z_0 + r e^{i\theta_0} \end{cases} \tag{42}$$

故有

$$\begin{aligned} \frac{d_2}{d_1} &= \frac{r_2-r}{r-r_1} = \frac{\dfrac{z_2-z_3}{e^{i\theta_0}}}{\dfrac{z_3-z_1}{e^{i\theta_0}}} = \frac{z_2-z_3}{z_3-z_1} = \frac{z_0+\dfrac{r^2}{\overline{z_1-z_0}}-z_3}{z_3-z_1} \\ &= \frac{-re^{i\theta_0}+\dfrac{r^2}{\overline{r_1e^{i\theta_0}}}}{(r-r_1)e^{i\theta_0}} = \frac{-re^{i\theta_0}+\dfrac{r^2}{r_1e^{-i\theta_0}}}{(r-r_1)e^{i\theta_0}} \\ &= \frac{-r+\dfrac{r^2}{r_1}}{r-r_1} = \frac{\dfrac{r(r-r_1)}{r_1}}{r-r_1} \\ &= \frac{r}{r_1} = \frac{r}{r-d_1} \end{aligned} \tag{43}$$

其中 d_1 为定值，则显然有

$$\lim_{r\to\infty}\frac{d_2}{d_1} = 1 \tag{44}$$

即 $r\to\infty$ 时 $d_1=d_2$，证毕。 □

解法 2： 事实上，本题中要求证明的结论都是几何关系，只与点之间的相对位置有关，故可以通过坐标变换简化。本题中的 z_0, z_1, z_2, z_3 均共线，故先将图形旋转使得 z_0, z_1, z_1, z_3 所在直线与实轴平行，再整体平移使得 z_3 与原点重合。由于平移变换与旋转变换不改变垂直关系和距离大小，故这样的变换是合理的。

如图 2 所示，经过平移和旋转变换后，可以在极坐标下求解。仍固定 z_3 和 z_1。此时圆 C 的极坐标方程为

$$\rho = -2r\cos\theta \tag{45}$$

其中 r 为圆 c 的半径。图中 L 为圆 C 在原点处的切线，下面证明当 $r\to\infty$ 时圆 C 的极限就是 L。

仍记圆 C 在单位圆 $\rho=R$ 中的部分为 Arc。不难得出出 Arc 上的点到直线 L 的距离为 $d=\rho\cos(\pi-\theta)=-\rho\cos\theta$。而当 $\rho=R$（图中所示情况）时，d 有最大值 $d_{\max}=-R\cos\theta$。下面固定 $\rho=R$ 不变，改变 r 的大小，则有

$$d_{\max} = -R\cdot\frac{\rho}{-2r} = \frac{R^2}{2r}$$

则 $\forall\varepsilon>0, \exists r_1=\max\left\{\dfrac{R^2}{2\varepsilon},\dfrac{R}{2}\right\}, s.t$ 当 $r>r_1$ 时 Arc 上的所有点到 L 的距离都满足 $d\le d_{\max}<\varepsilon$，

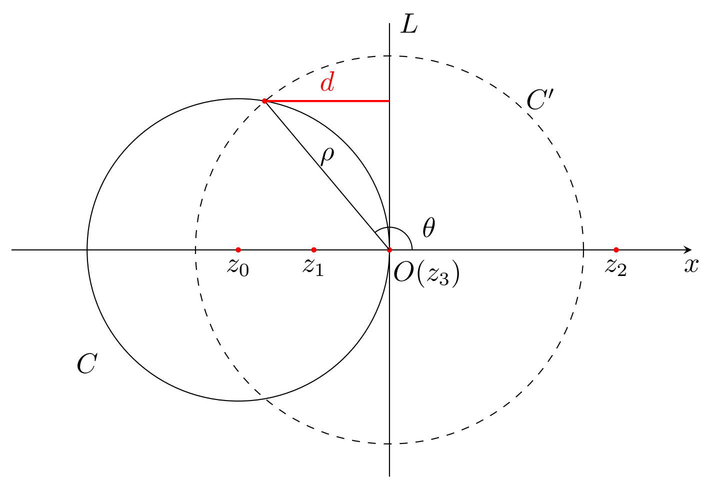
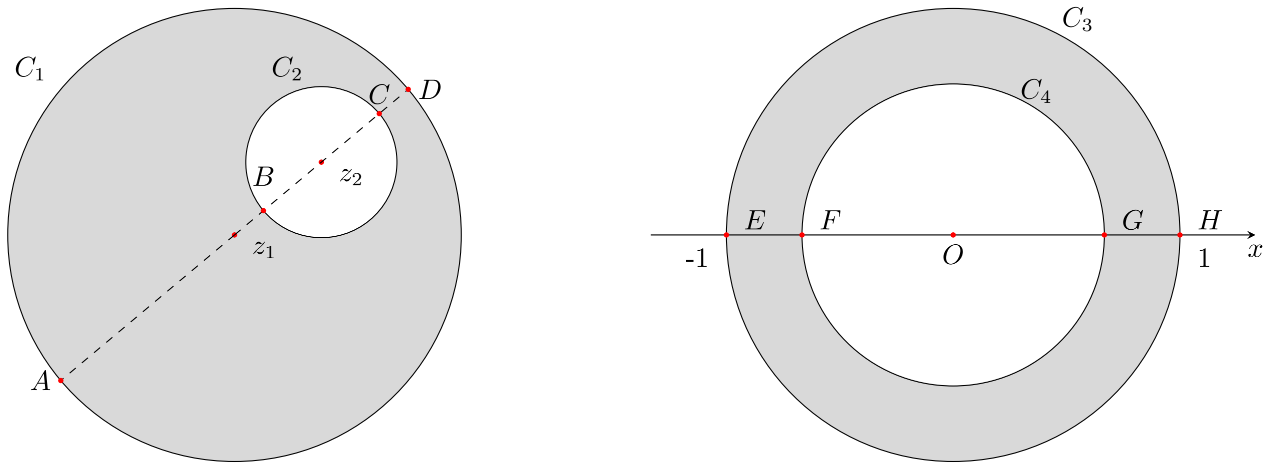


图 2: 问题 2 解法 2 示意图



(a) 异心圆环　　(b) 同心圆环

图 3: 思考题 3 示意图

则 Arc 在 $r \to \infty$ 时趋于 L。另一方面，由于 R 可以任意取，则圆 C 在 $r \to \infty$ 时趋于 L。且由于 L 为 C 在原点处的切线，显然有 $L \perp \overline{z_0 z_1}$，命题 1 得证。 □

下面证明命题 2。设 z_1 和 z_2 到直线 L 的距离分别为 d_1, d_2。事实上，$d_1 = |z_1|, d_2 = |z_2|$。由 z_1 和 z_2 关于圆 C 对称的定义，可知：

$$|z_0|^2 = |z_1 - z_0| \cdot |z_2 - z_0| \tag{46}$$

或

$$r^2 = (r - d_1)(r + d_2) \tag{47}$$

由式 (47) 立得：

$$r^2 = r^2 + r(d_2 - d_1) - d_1 d_2$$

进一步有

$$\frac{d_1}{d_2} = 1 - \frac{d_1}{r} \tag{48}$$

由于假定 z_1 固定，则 d_1 为定值，故对上式令 $r \to \infty$ 可得 $\lim\limits_{r\to\infty} \dfrac{d_1}{d_2} = 1$。即当 $r \to \infty$ 时，z_1 和 z_2 到 L 的距离相等。命题 2 得证。 □

问题 3. *求单值解析映射 $\omega = \omega(z)$ 将异心圆环之间部分映成同心圆环之间部分，且使内环或外环半径为 1.*

解：不妨先考虑将异心圆环之间部分映成单位同心圆环的分式线性映射。如图 3 所示。设两个异心圆 C_1, C_2 的圆心分别为 z_1 和 z_2，对应的半径分别为 r_1 和 r_2，圆心距为 $d = |z_1 - z_2|$。设过 z_1 和 z_2 的直线与两个圆依次交于 A, B, C, D 四个点。设 $\arg(z_2 - z_1) = \theta_0$。现考虑分式线性变换 $T_1(z)$

$$T_1(z) = k\frac{z - A}{z - D} \tag{49}$$

其中 $k \in \mathbb{C}$ 为待定常数。记 $T_1(z)$ 的像为 z'。则显然式 49 将 A 映到原点，将 D 映到 ∞。即 $A' = 0, D' = \infty$。由于分式线性变换保广义圆，故经变换后 C_1 变为一条直线，记做 L_1'。将 B 点代入，计算可得：

$$B' = k\frac{B - A}{B - D} = k\frac{|B - A|e^{i\theta_0}}{-|D - B|e^{i\theta_0}} = -k\frac{|B - A|}{|D - B|} = -k\frac{r_1 + d - r_2}{r_1 - d + r_2} \tag{50}$$

若取 k 为负实数，则可以保证 B' 位于正实轴。由于分式线性变换保广义圆，且 A,B,C,D 四点共线，则 $A'B'C'D'$ 四点共广义圆；而又由 A' 和 B' 都位于实轴，故直线 AB 经过式 49 映射后仍为直线，且为实轴。另一方面，由于分式线性变换具有保角性，故直线 AD 和圆 C_1 在 A 处的夹角经过映射之后保持不变，即也为 $90°$。综上，圆 C_1 经过映射后变为直线 L'，且 $L' \perp A'B'$。进而得出 L' 和虚轴重合。

同理不难得出

$$C' = k\frac{C-A}{C-D} = -k\frac{r_1+r_2+d}{r_1-r_2-d} \tag{51}$$

也位于正实轴上。考虑函数

$$y = \frac{2r_1+x-r_1}{r_1-x} = \frac{2r_1}{r_1-x} - 1$$

易知当 $x < r_1$ 时 y 为单调增函数。注意到 $d-r_2 < d+r_2 < r_1$，故有

$$\frac{r_1+(r_2+d)}{r_1-(r_2+d)} > \frac{r_1+(d-r_2)}{r_1-(d-r_2)}$$

即 $C' > B'$。则 T_1 将圆 C_2 映成过点 B', C' 的圆。又由分式线性变换的保角性，且圆 C_2 与直线 BC 在 B 处切线夹角为 $90°$，则圆 C_2' 与直线 $B'C'$ 的切线在 B' 处的夹角也为 $90°$，即 $B'C'$ 为圆 C_2' 的直径。这样，我们证明了 T_1 可以将圆 C_1 和 C_2 分别映成直线（虚轴）和位于右半平面且圆心在实轴的圆。如图 4(a) 所示。进一步地，我们需要证明 T_1 将图 3(a) 中的阴影部分映成图 4(a) 中的阴影部分。首先考虑圆 C_1 内部的任何一点 z，则必有 $\angle AzD > 90°$。由此可以得出：

$$\arg\left(\frac{z-A}{z-D}\right) \in \left(\frac{\pi}{2}, \frac{3\pi}{2}\right) \tag{52}$$

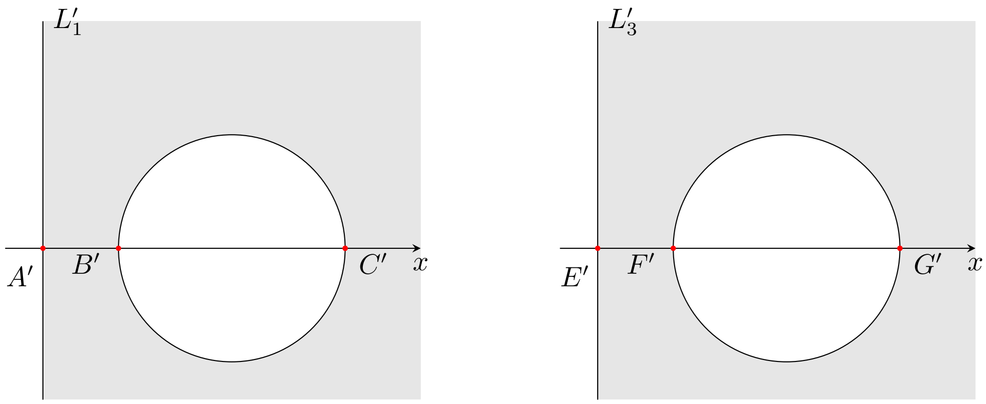
即 $\arg z' \in (-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2})$，故 $\mathrm{Re} z' > 0$。即 T_1 将 C_1 内部的点映成右半平面的点，同理将 C_1 外部的点映成左半平面的点。对于圆 C_2 外部的点 z，有 $\angle BzC < 90°$，或

$$\arg\left(\frac{z-B}{z-C}\right) \in \left(-\frac{\pi}{2}, 0\right) \cup \left(0, \frac{\pi}{2}\right) \tag{53}$$

而

$$\begin{aligned}
\arg\left(\frac{z'-B'}{z'-C'}\right) &= \arg\left(\frac{k\dfrac{z-A}{z-D} - k\dfrac{B-A}{B-D}}{k\dfrac{z-A}{z-D} - k\dfrac{C-A}{C-D}}\right) \\
&= \arg\left(\frac{\dfrac{zB-zD-AB+AD-zB+BD+Az-AD}{(z-D)(B-D)}}{\dfrac{zC-zD-AC+AD-zC+CD+Az-AD}{(z-D)(C-D)}}\right) \\
&= \arg\left(\frac{\dfrac{-zD-AB+BD+Az}{(z-D)(B-D)}}{\dfrac{-zD-AC+CD+Az}{(z-D)(C-D)}}\right) = \arg\left(\frac{\dfrac{(A-D)(z-B)}{(z-D)(B-D)}}{\dfrac{(A-D)(z-C)}{(z-D)(C-D)}}\right) \\
&= \ arg\left(\frac{z-B}{z-C}\cdot\frac{C-D}{B-D}\right) = \arg\left(\frac{z-B}{z-C}\right) + \arg\left(\frac{C-D}{B-D}\right) \\
&= \arg\left(\frac{C-D}{B-D}\right) \in \left(-\frac{\pi}{2}, 0\right) \cup \left(0, \frac{\pi}{2}\right)
\end{aligned} \tag{54}$$

上式中利用了 $\frac{C-D}{B-D}$ 为正实数这一事实。这样，我们证明了 T_1 将 C_2 外部的点映成 C_2' 外部的点。同理 T_1 将 C_2 内部的点映成 C_2' 内部的点。进而可以得出，T_1 将图 3(a) 中的阴影部分映成图 4(a) 中的阴影部分。先



(a) 异心圆环经 T_1 映射

(b) 同心圆环经 T_2 映射

图 4: 经分式线性变换 T_1, T_2 后示意图

假定目标同心圆的外径为 1，两个圆记做 C_3 和 C_4，半径分别为 r_3, r_4。实轴在水平方向上依次交两个圆于 E, F, G, H 四个点。对同心圆环，同理做分式线性变换 $T_2(\omega)$：

$$T_2(\omega) = l\frac{\omega - E}{\omega - H} \tag{55}$$

其中 $l \in \mathbb{C}$。记 $T_2(\omega)$ 的像为 ω'。则类似地，若令 l 为负实数，则有 $E' = 0$，$H' = \infty$。C_3 经过映射后变为垂直于实轴的直线 L_3'，且 F', G' 均在正实轴上。并有

$$\begin{cases} F' = l\dfrac{F - E}{F - H} = -l\dfrac{r_3 - r_4}{r_3 + r_4} \\ G' = l\dfrac{G - E}{G - H} = -l\dfrac{r_3 + r_4}{r_3 - r_4} \end{cases} \tag{56}$$

且同理可证 T_2 将图 3(b) 中的阴影部分映成图 4(b) 中的阴影部分。从图 4 中可以看到，原始的异心圆环与目标的同心圆环分别经过 $T_1(z)$ 和 $T_2(\omega)$ 的映射后的图形十分相似。故可以通过调整 k 和 l 的取值，从而在图 4(a) 和图 4(b) 中建立联系，使得 z' 和 ω' 表示的区域相同。令 $B' = F', C' = G'$ 可得：

$$\begin{cases} -k\dfrac{r_1 + d - r_2}{r_1 - d + r_2} = -l\dfrac{r_3 - r_4}{r_3 + r_4} \\ -k\dfrac{r_1 + r_2 + d}{r_1 - r_2 - d} = -l\dfrac{r_3 + r_4}{r_3 - r_4} \end{cases} \tag{57}$$

上述两个方程相乘再开根号（注意到 $k < 0, l < 0$），即可得到：

$$k\sqrt{\frac{r_1 + d - r_2}{r_1 - d + r_2} \cdot \frac{r_1 + r_2 + d}{r_1 - r_2 - d}} = l \tag{58}$$

由 $T_2(\omega)$ 的表达式 (55)，将 $E = -1, H = 1$ 代入，即有

$$\omega' = l\frac{\omega + 1}{\omega - 1}$$

从中将 ω 反解出来，即有：

$$\omega = \frac{\omega' + l}{\omega' - l} \tag{59}$$

即为 T_2^{-1} 的表达式。记

$$\begin{cases}\alpha=\sqrt{\dfrac{r_1+d-r_2}{r_1-d+r_2}}\\ \beta=\sqrt{\dfrac{r_1+r_2+d}{r_1-r_2-d}}\end{cases}$$

则 $l=k\alpha\beta$，可以写出 ω 与 z 的关系式如下：

$$\begin{aligned}\omega&=\frac{\omega'+l}{\omega'-l}=\frac{z'+l}{z'-l}\\&=\frac{k\dfrac{z-A}{z-D}+l}{k\dfrac{z-A}{z-D}-l}\\&=\frac{k(z-A)+k\alpha\beta(z-D)}{k(z-A)-k\alpha\beta(z-D)}\\&=\frac{(z-A)+\alpha\beta(z-D)}{(z-A)-\alpha\beta(z-D)}\end{aligned}\tag{60}$$

将 α 和 β 的值代入，即可得到所求表达式：

$$\omega(z)=\frac{(z-A)+\sqrt{\dfrac{r_1+d-r_2}{r_1-d+r_2}\cdot\dfrac{r_1+r_2+d}{r_1-r_2-d}}(z-D)}{(z-A)-\sqrt{\dfrac{r_1+d-r_2}{r_1-d+r_2}\cdot\dfrac{r_1+r_2+d}{r_1-r_2-d}}(z-D)}\tag{61}$$

事实上，上述构造的过程中已经保证了式 (61) 的正确性。且由于分式线性映射必为单值解析映射，故自然满足题中条件。下面对式 (61) 进行进一步的讨论。从中不难看出 $\omega(A)=-1$ 而 $\omega(D)=1$。另一方面由式 (50) 可知，

$$\frac{B-A}{B-D}=-\frac{r_1+d-r_2}{r_1-d+r_2}=-\alpha^2$$

同理由式 (51) 有

$$\frac{C-A}{C-D}=-\frac{r_1+r_2+d}{r_1-r_2-d}=-\beta^2$$

可以求得：

$$\begin{cases}\omega(B)=\dfrac{\dfrac{B-A}{B-D}+\alpha\beta}{\dfrac{B-A}{B-D}-\alpha\beta}=\dfrac{-\alpha^2+\alpha\beta}{-\alpha^2-\alpha\beta}=\dfrac{\alpha-\beta}{\alpha+\beta}\\ \omega(C)=\dfrac{\dfrac{C-A}{C-D}+\alpha\beta}{\dfrac{C-A}{C-D}-\alpha\beta}=\dfrac{-\beta^2+\alpha\beta}{-\beta^2-\alpha\beta}=\dfrac{\beta-\alpha}{\alpha+\beta}\end{cases}\tag{62}$$

可知 $\omega(z)$ 将 B 和 C 映射成实轴上关于原点对称的两点，且显然有 $|\omega(B)|=|\omega(C)|<1$。考虑使式 (61) 分母为零的点 z_0，必有

$$\frac{z_0-A}{z_0-D}=\alpha\beta\in\mathbb{R}$$

则说明 z_0 必然在直线 AD 上，则圆 C_1 和 C_2 上的任何一点都不会被映成无穷远点（$\omega(A),\omega(B),\omega(C),\omega(D)$ 已经求出，不是 ∞），所以圆 C_1 和 C_2 经过映射后仍为圆。显然 $\omega(z)$ 将直线 AD 映成直线 EH。由于分式线性变换保角，且圆 C_1 在 A 处切线垂直于 AD，故映射后 C_3 在 E 处切线垂直于 EH，即 EH 是圆 C_3 的直径，同理 FG 是圆 C_4 的直径，满足要求。

一般地，如果同心圆盘的圆心不在原点，不妨设为 ω_0，则只需在式 (61) 后面加上 ω_0 即可：

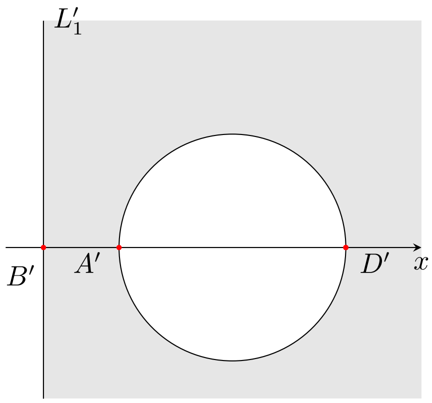
$$\omega_1(z)=\frac{(z-A)+\sqrt{\frac{r_1+d-r_2}{r_1-d+r_2}\cdot\frac{r_1+r_2+d}{r_1-r_2-d}}(z-D)}{(z-A)-\sqrt{\frac{r_1+d-r_2}{r_1-d+r_2}\cdot\frac{r_1+r_2+d}{r_1-r_2-d}}(z-D)}+\omega_0 \tag{61'}$$

□

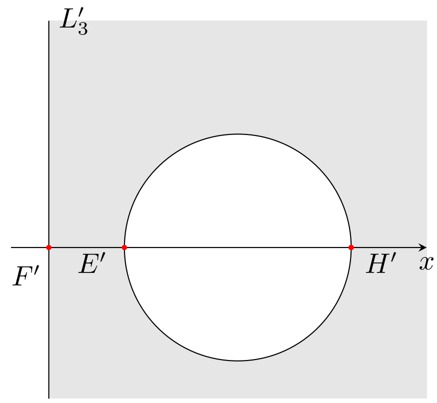
上述过程已经构造出将异心圆盘映成外径为 1 的同心圆盘的分式线性映射。事实上，将异心圆盘其映成内径为 1 的同心圆盘的原理类似。只需令

$$\begin{cases}\hat{T}_1(z)=\hat{k}\dfrac{z-B}{z-C}\\ \hat{T}_2(\omega)=\hat{l}\dfrac{\omega-F}{\omega-G}\end{cases} \tag{63}$$

此时同理可证，$\hat{T}_1$ 和 $\hat{T}_2$ 分别将异心圆环域和同心圆环域映成图 5(a) 和图 5(b) 。此时 $\hat{k}$ 和 $\hat{l}$ 取正实数。使



(a) 异心圆环经 $\hat{T}_1$ 映射



(b) 同心圆环经 $\hat{T}_2$ 映射

图 5: 经分式线性变换 $\hat{T}_1,\hat{T}_2$ 后示意图

用类似的推导方式，可以得出 $\hat{\omega}(z)$ 的表达式（详细过程从略）。设

$$\begin{cases}\hat{\alpha}=\sqrt{\dfrac{r_1+d-r_2}{r_1+d+r_2}}\\ \hat{\beta}=\sqrt{\dfrac{r_1-d+r_2}{r_1-d-r_2}}\end{cases} \tag{64}$$

则

$$\hat{\omega}(z)=\frac{(z-B)+\hat{\alpha}\hat{\beta}(z-C)}{(z-B)-\hat{\alpha}\hat{\beta}(z-C)} \tag{65}$$

且有

$$\begin{cases}\hat{\omega}(A)=\dfrac{\hat{\alpha}+\hat{\beta}}{\hat{\alpha}-\hat{\beta}}\\ \hat{\omega}(B)=\dfrac{\hat{\alpha}+\hat{\beta}}{\hat{\beta}-\hat{\alpha}}\end{cases}$$

一般地，若要求目标的同心圆盘中心位于 ω_0，则有

$$\hat{\omega}_1(z)=\frac{(z-B)+\hat{\alpha}\hat{\beta}(z-C)}{(z-B)-\hat{\alpha}\hat{\beta}(z-C)}+\omega_0 \tag{65'}$$

□