清华大学本科生考试试题专用纸

考试课程　随机数学方法 （A 卷）　　年　月　日

学号：＿＿＿＿＿　姓名：＿＿＿＿＿　班级：＿＿＿＿＿

一. 填空题（**28** 分，每空 **4** 分，将计算结果直接写在横线上）

(1) 设事件 A,B,C 两两独立，且 $ABC=\phi, P(A)=P(B)=P(C)<\frac{1}{2}$，

$P(A\bigcup B\bigcup C)=\frac{2}{3}$，则 $P(A)=$ ＿＿＿＿＿ 。

(2) 在 1,2,3 中任取一数记为 X，再从 1 至 X 中任取一数记为 Y，则

$P(X=3|Y=2)=$ ＿＿＿＿＿ 。

(3) 设 X 和 Y 相互独立，均服从参数为 p 的几何分布，则

$P(X=1|X+Y=4)=$＿＿＿＿ 。

(4) 设 X 的概率密度为 $f(x)=\frac{1}{2}e^{-|x|}, -\infty<x<+\infty$，则 $E(|X|)=$＿＿＿＿＿ 。

(5) 设 (X,Y) 的密度函数为 $\frac{1}{2\pi}e^{-\frac{1}{2}(x^2+y^2)}, -\infty<x,y<+\infty$，则 $E(\frac{X+3Y}{X+Y})=$＿＿＿＿ 。

(6) 设 $X_1,\cdots,X_n,\cdots$ 独立同分布，均服从指数分布，且 $D(X_1)=4$，则当 $n\to\infty$ 时，

$\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}X_i^2$ 依概率收敛到＿＿＿＿ 。

(7) 设 $X_t=xe^{(\mu-\frac{\sigma^2}{2})t+\sigma B_t}$，其中 $x,\ \mu,\sigma>0$ 均为常数，B_t 为标准 Brown 运动，则

$E(X_t^2)=$＿＿＿＿＿ 。

二.（12 分） 设随机变量 $X_1,\cdots,X_n$ 独立同分布，满足

$P(X_1=1)=P(X_1=-1)=P(X_1=0)=\frac{1}{3}$，

（1）试求概率 $P(X_1=X_2)$；

（2）试求 $Y=X_1^2-X_2^2$ 的特征函数 $\varphi_Y(\theta)$；

（3）试求概率 $P(\sum_{i=1}^{n}X_i^2=3)$。

三.（15 分）设随机变量 $X_1,\cdots,X_n,\cdots$ 独立同分布，均服从 $(0,1)$ 上的均匀分布。记

$U_n=\max\limits_{1\le i\le n}X_i$,， $\overline{X}=\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}X_i$ ，

（1）试求概率 $P(|X_1-X_2|\le\frac{1}{3})$；

（2）试求 $E(\overline{X}-U_n)$；

（3）试证明： $n(1-U_n)$ 依分布收敛到参数为 1 的指数分布。

四.（20 分）设随机变量 X 和 Y 的服从以点(1,0)，(0,1)，(1,1)为顶点的三角形区域 D 上的二维均匀分布，

（1）试问 X 和 Y 是否相互独立，为什么？

（2）求 $Z=X+Y$ 分布函数 $F_Z(z)$；

（3）用 X 来预测 Y 时，其最佳的均方预测是否为线性预测，为什么？

（4）记 $\xi=\begin{cases}1, & Y>X,\\ -1, & Y\le X.\end{cases}$ 设 $\xi_1,\xi_2,\cdots$ 相互独立，且均与 ξ 同分布，令

$U_n=U_0+\sum_{i=1}^{n}\xi_i$ ， $U_0=0$ ，求 $Cov(U_5,U_8)$。

五.（15 分）设四维正态随机变量 $\boldsymbol{X}=(X_1,X_2,X_3,X_4)^T\sim N(\mu,\Sigma)$，

$$\text{其中 }\mu=(1,1,0,0)^T,\quad \Sigma=\begin{pmatrix}4&0.5&0&0\\0.5&4&0&0\\0&0&1&0\\0&0&0&1\end{pmatrix},$$

（1）求 $Y=X_1+2X_2+3X_3$ 的密度函数 $f_Y(y)$。

（2）试问 X_1 与 $X_2-E(X_2|X_1)$ 是否相互独立，为什么？

（3）求 $Z=\dfrac{X_1X_3+X_4}{\sqrt{X_1^2+1}}$ 的分布函数 $F_Z(z)$。

六.（10 分）设 $\{N_t:t\ge 0\}$ 是强度为 $\lambda>0$ 的 Poisson 过程，

（1）求条件期望 $E(2^{N_t}|N_s=2)$，这里 $s<t$；

（2）设 γ_i 为独立同分布随机变量，且与 N_t 相互独立，若 $E(\gamma_i)=\alpha, E(\gamma_i^2)=\beta,$

试求 $E[\prod_{i=1}^{N_t}(1+\gamma_i)^2]$。