2019-2020春季期末试题

考试课程　　线性代数II　　A卷　　2020 年 06 月 10 日

姓名: ____________　学号: ____________　班级: ____________

注：填空题请直接在答题纸上写答案, 解答题请写清步骤。

1. (33分) 填空题(每空3分)：

   (1) 设F_3是三阶Fourier矩阵，则$F_3^2 =$ ____, $F_3^4 =$ ____.

   (2) 设$P = \begin{pmatrix} 0 & i & 0 \\ 0 & 0 & i \\ i & 0 & 0 \end{pmatrix}$, 则$P^{2020} =$ ____ (提示：计算P^3). 存在酉阵(unitary matrix)$U =$ ____, 使得$U^H PU$是一个对角阵.

   (3) 一个点$P = (1, 1, 1)$ 关于平面$2x+2y+z = 0$的反射点坐标是____. 相应的反射矩阵是____.

   (4) 已知矩阵$A = \begin{pmatrix} 0.4 & 0.2 & 0.3 \\ 0.2 & 0.4 & 0.3 \\ 0.4 & 0.4 & 0.4 \end{pmatrix}$是不可逆矩阵，则$A$的特征值是____. 设$u_0 = (10, 0, 0)^T$, $lim_{k\to\infty} A^k u_0 =$ ____.

   (5) 设A是关于一个连通图的10×7阶关联矩阵(incidence matrix). 一个列向量f满足____使得$A^T y = f$. $A^T A$的对角线元素之和是____.

   (6) 考虑四个质体通过五根弹簧相连，上下两端固定的弹簧模型. 假设弹簧弹性系数均为1, 则相应的刚度矩阵$K =$ ____.

2. (15分) 设N_1, N_2是两个5阶幂零阵，有相同的秩和极小多项式，N_1和N_2是否相似？解释原因.

3. (16分)设$A = \begin{pmatrix} 4 & 2 & 2 \\ -2 & 0 & -4 \\ 0 & 0 & 4 \end{pmatrix}$，求$\frac{dx(t)}{dt} = Ax(t)$的一般解和这个方程组关于$x(0) = (0, 1, 1)^T$ 的特解.

4. (12分) 设$f(x)$是一个$(-\infty,+\infty)$上周期是2π的函数，当$-\pi \le x < \pi$, $f(x)=x$. 求$f(x)$的Fourier级数展开的实形式，并证明

$$\frac{\pi}{4} = 1 - \frac{1}{3} + \frac{1}{5} - \frac{1}{7} + \cdots = \sum_{k=0}^{+\infty} (-1)^k \frac{1}{2k+1}.$$

5. (10分) 假设$A=(a_{ij})_{n\times n}$是正矩阵，即$a_{ij}>0$, $i,j=1,\cdots,n$.

   (1) 假设存在$y=(y_1,y_2,\cdots,y_n)\neq 0\in\mathbb{R}^n$和$c\in\mathbb{R}$满足$y\ge 0$ 且$Ay\le cy$. 应用Perron-Frobenius定理证明：$\rho(A)\le c$, 其中$\rho(A)$ 表示矩阵A 的特征值长度的最大值. (注：设$\alpha=(x_1,\cdots,x_n)^T,\beta=(y_1,\cdots,y_n)^T\in\mathbb{R}^n$, 如果$x_i\ge y_i$, $i=1,\cdots,n$, 则写$\alpha\ge\beta$. 如果$x_i>y_i$, $i=1,\cdots,n$, 则写$\alpha>\beta$.)

   (2) 令$\bar{A}=\frac{1}{\rho(A)}A$, 说明$lim_{k\to+\infty}\bar{A}^k$是否存在并证明.

6. (6分) 设A是n阶复方阵，$\lambda_1,\cdots,\lambda_s$是$A$的全部的互异特征值，$A$的极小多项式是$m_A(x)=(x-\lambda_1)^{m_1}\cdots(x-\lambda_s)^{m_s}$. 令$B=\begin{pmatrix} A & I_n \\ 0 & A \end{pmatrix}$. 判断$B$的极小多项式$m_B(x)$是否等于$m_A(x)=(x-\lambda_1)^{m_1+1}\cdots(x-\lambda_s)^{m_s+1}$ 并说明原因.

7. (8分) 设$A=(a_{ij})$是n阶复方阵，$\lambda_1,\lambda_2,\cdots,\lambda_n$是其$n$个特征值.

   (1) 求证：A是复正规阵当且仅当$\sum_{i=1}^n |\lambda_i|^2=\sum_{i,j=1}^n |a_{ij}|^2$.

   (2) 设A,B和AB均是n阶复正规阵，求证：BA也是复正规阵.