第二周作业

1. 写出2阶实正规阵的结构.

2. 设 $u \neq 0, v \neq 0 \in \mathbb{R}^n$，且 $\|u\| = \|v\|$.
定义 $\langle u, v \rangle = u^T v$，证明：$\langle u+v, u-v \rangle = 0$
说明：当 $u, v \neq 0 \in \mathbb{C}^n$，且 $\langle u, v \rangle = u^H v$，则 $\langle u+v, u-v \rangle = 0$ 不成立.

3. 若 $u, v \in \mathbb{C}^n$，且 $\langle u, v \rangle = u^H v = 0$
则 $\|u+v\|^2 = \|u\|^2 + \|v\|^2$.

4. 设 $u, v \in \mathbb{C}^n$，$v \neq 0$，求 $c \in \mathbb{C}$.
使得 $u - cv \perp v$.

5. 设 $A=\begin{pmatrix} z_1 & z_2 \\ z_3 & z_4 \end{pmatrix}$ 是可逆阵，$z_1, z_2, z_3, z_4 \in \mathbb{C}$. 求主对角线元素为正数的上三角阵 $T$，使得 $U=AT$ 是一个酉阵.（提示：考虑 $A$ 的列的 Gram-Schmidt 正交化得到 $A=UR$，则 $U=AR^{-1}$）.

6. 设 $D=\begin{pmatrix} A & B \\ O & C \end{pmatrix}$，$A\in M_m(\mathbb{C})$，$C\in M_n(\mathbb{C})$，试证明：$D$ 为酉阵 $\Longleftrightarrow B=0$，且 $A, C$ 是酉阵.

7.（使用Hermite阵特征值性质的证明方法）设 $A$ $n$阶复方阵，$A^H=-A$，则 $A$的非零特征值是纯虚数.