1. 设 $a_0, a_1, \cdots, a_{n-1} \in \mathbb{C}$. 求下列矩阵

$$A = \begin{pmatrix} 0 & & & & -a_0 \\ 1 & 0 & & & -a_1 \\ & 1 & \ddots & & -a_2 \\ & & \ddots & & \vdots \\ & & \ddots & 0 & -a_{n-2} \\ & & & 1 & -a_{n-1} \end{pmatrix},$$

的极小多项式.(注:第二次习题课⑨)

2. 设 $T: \mathbb{C}^n \longrightarrow \mathbb{C}^n$, $x \longmapsto Ax$, $v \in \mathbb{C}^n$

证明 (a) 存在唯一次数最小的首一多项式 $P(x)$, $P(A)\cdot v = 0$;

(b) 求包含 v 的关于 T 的最小 T-不变子空间(记作 C_v)

(c) $\dim C_v = \deg p(x) = k+1$.

(d) $A^k v, A^{k-1} v, \cdots, Av, v$ 是 C_v 的一组基. 求 $T|_{C_v}$ 关于上述基的矩阵.

(e) $p(x) \mid m_A(x)$.

3. 设 $A \in M_n(\mathbb{C})$, 证明:

A 可对角化 $\Longleftrightarrow \forall \lambda_0 \in \mathbb{C}$, $\operatorname{rank}(A-\lambda_0 I_n) = \operatorname{rank}(A-\lambda_0 I_n)^2$

4. 设 $A, B \in M_n(\mathbb{C})$, $AB=BA$. 且 A 可对角化, 证明:

存在可逆阵 P, $P^{-1}AP$ 是对角阵, $P^{-1}BP$ 是 Jordan 标准型.

5. 设 $A=(\alpha_1, \alpha_2, \cdots, \alpha_n) \in M_n(\mathbb{C})$ 可逆, $B=(\alpha_2, \alpha_3, \cdots, \alpha_n, 0)$

求 $A^{-1}B$ 和 $B^{-1}A$ 的 Jordan 标准型.

6. 设 $A, B \in M_n(\mathbb{C})$，且 $r(AB-BA)=1$

证明：$(AB-BA)^2=O$.

（提示：考虑 $AB-BA$ 的 Jordan 标准型的结构）.

7. 设 $A \in M_m(\mathbb{C})$，$B \in M_n(\mathbb{C})$ 没有公共特征值，$C \in M_{m\times n}(\mathbb{C})$

证明：$AX-XB=C$ 有唯一解 $X \in M_{m\times n}(\mathbb{C})$.

（提示：设 $P^{-1}BP=J_B$（B 的 Jordan 标准型），令 $A_1=P^{-1}AP$，$X_1=P^{-1}XP$

$C_1 = P^{-1}CP$，则问题等价于

$A_1X_1 - X_1J_B = C_1$ 有唯一解 X_1

设 $J_B = \begin{pmatrix} \lambda_1 & 1 & & & & \\ & \ddots & \ddots & 1 & & \\ & & & \lambda_1 & & \\ & & & & \lambda_2 & x \\ & & & & & \ddots \end{pmatrix}$ $C_1 = (\beta_1, \cdots, \beta_n)$

$X_1 = (\alpha_1, \cdots, \alpha_n)$

则 $A_1\alpha_1 - \lambda_1\alpha_1 = \beta_1$，但 $A_1 - \lambda_1 I_m$

可逆)

8. A, B, C 正如第7题

设 A, B 的 Jordan 标准型分别

是 J_A, J_B.

证明：$\begin{pmatrix} A & C \\ O & B \end{pmatrix}$ 的 Jordan 标准型是 $\begin{pmatrix} J_A & O \\ O & J_B \end{pmatrix}$

(注：本题展示 $\begin{pmatrix} A & C \\ O & B \end{pmatrix}$ 和 $\begin{pmatrix} A & O \\ O & B \end{pmatrix}$ 相似，若 A, B 无公共特征值)

(提示：应用习题 7 求过渡阵).

9. 设 N_1, N_2 是 6 阶幂零阵，它们有相同的极小多项式，且 $r(N_1)=r(N_2)$。证明：N_1 和 N_2 相似。

举例说明，这对 7 阶阵不成立。

（提示：分析 N_1, N_2 可能的 Jordan 标准型是否相同）。