# 清华大学本科生考试试题专用纸

考试课程　　**一元微积分期末考题**

系名________________　班级______________　姓名______________　学号___________

**一．填空题**（每空 3 分，共 15 空）（请将答案直接填写在横线上！）

1．$\int \frac{\ln x}{(1-x)^2}dx =$____________________________。

2．$\int \frac{dx}{1+\cos^2 x} =$______________________________。

3．$\int_1^{+\infty} \frac{\arctan x}{x^2}dx =$__________________________。

4．若$\int xf(x)dx = \arctan x + C$，则$\int \frac{1}{f(x)}dx =$___________________________。

5．$\int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} \frac{(1+x)\cos x}{1+\sin^2 x}dx =$__________________________。

6．$\frac{d}{dx}\left(\int_x^{x^2} e^{t^2}dt\right) =$______________________________。

7．设 $f(x)$ 为连续函数，$f(0) \neq 0$，$F(x) = \int_0^x t^2 f(t)dt$，当 $x \to 0$ 时，$F(x)$ 与 $x^k$ 是同阶无穷小，则 $k =$__________。

8．将 $(x-3)^2 + y^2 = 1$ 绕 $y$ 轴转一圈，则所得图形围成的体积为______________________。

9．设 $m > 0$，且广义积分 $\int_0^{+\infty} \frac{dx}{\sqrt{x}+x^m}$ 收敛，则 $m$ 的范围为________________________。

10．幂级数 $\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{x^{2n}}{2^n + (-5)^n}$ 的收敛域为______________________。

11．若级数 $\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{(-1)^n \sin\frac{1}{n}}{n^p}$ 条件收敛，则参数 $p$ 的范围为__________________________。

12．在 $x_0 = 0$ 点，函数 $\int_0^x e^{-t^2}dt$ 的幂级数展开为________________________________。

13．微分方程 $y'=e^x+e^{x+y}$ 的通解是________________________________。

14．微分方程 $xdy+(x-2y)dx=0$ 满足 $y(1)=0$ 的解为________________________。

15．微分方程初值问题 $\begin{cases} y''+2x(y')^2=0 \\ y(0)=1, y'(0)=0 \end{cases}$ 的解为_________________________。

## 二．计算题（每题 10 分，共 40 分）

1．求 $p$ 的范围，使得 $\int_1^{+\infty}\left(\sin\dfrac{\pi}{x}\right)\dfrac{dx}{\ln^p x}$ 收敛。

2．计算摆线 $x=t-\sin t,\ y=1-\cos t\quad (t\in[0,2\pi])$ 绕 $x$ 轴旋转体的体积和表面积。

3．求级数 $\sum\limits_{n=1}^{+\infty}\dfrac{(-1)^n n^2}{2^n}$ 的和。

4．设 $f(x)\in C(0,+\infty)$，且对任意 $x>0$ 满足 $x\int_0^1 f(tx)dt=-2\int_0^x f(t)dt+xf(x)+x^4$，

$f(1)=0$，求 $f(x)$。

## 三．证明题

1.（8 分）已知函数 $y=f(x)=x\ln x+\sum\limits_{n=0}^{+\infty}\dfrac{x^{n+2}}{(n+1)\cdot(n+1)!}$，求 $f(x)$ 的定义域，并证明

$y=f(x)$ 满足微分方程 $xy'-y=xe^x$，并且 $\lim\limits_{x\to 0^+}y(0)=0$。

2．（7 分）设 $f(x)$ 在 $[0,1]$ 上可导，且 $f(0)=0,\ 0<f'(x)<1,\ \forall x\in[0,1]$。求证：

$$\left[\int_0^1 f(x)dx\right]^2>\int_0^1\left[f(x)\right]^3dx$$