数值分析习题课（三）

2019年春季学期

助教：谢雨洋

第五章8题

Problem

用Householder变换将下述矩阵进行正交三角化，写出计算步骤，包括Householder变换对应的$\boldsymbol{v}$向量以及结果$\boldsymbol{R}$矩阵。

$$\boldsymbol{A}=\begin{bmatrix}4&0&0\\4&5&5\\2&5&5\end{bmatrix}$$

$$\sigma_1=6,\boldsymbol{v}_1=\boldsymbol{a}_1+\sigma_1\boldsymbol{e}_1=\begin{bmatrix}10\\4\\2\end{bmatrix},\boldsymbol{H}_1\boldsymbol{a}_1=\boldsymbol{a}_1-2\frac{\boldsymbol{v}_1^T\boldsymbol{a}_1}{\boldsymbol{v}_1^T\boldsymbol{v}_1}\boldsymbol{v}_1=\begin{bmatrix}-6\\0\\0\end{bmatrix}$$

$$\boldsymbol{A}'=\boldsymbol{H}_1\boldsymbol{A}=\begin{bmatrix}-6&-5&-5\\0&3&3\\0&4&4\end{bmatrix}$$

$$\sigma_2=5,\boldsymbol{v}_2=\boldsymbol{a}_2+\sigma_2\boldsymbol{e}_2=\begin{bmatrix}0\\8\\4\end{bmatrix},\boldsymbol{H}_2\boldsymbol{a}_2=\boldsymbol{a}_2-2\frac{\boldsymbol{v}_2^T\boldsymbol{a}_2}{\boldsymbol{v}_2^T\boldsymbol{v}_2}\boldsymbol{v}_2=\begin{bmatrix}-5\\-5\\0\end{bmatrix}$$

$$\boldsymbol{R}=\boldsymbol{H}_2\,\boldsymbol{H}_1\boldsymbol{A}=\begin{bmatrix}-6&-5&-5\\0&-5&-5\\0&0&0\end{bmatrix}$$

第五章11题

Problem

用 *Givens* 旋转变换对上 *Hessenberg* 矩阵 $\mathbf{A}_1$ 做 *QR* 分解，然后将得到的矩阵 $\mathbf{Q}$ 和 $\mathbf{R}$ 颠倒次序相乘得到矩阵 $\mathbf{A}_2$，证明 $\mathbf{A}_2$ 仍然是上 *Hessenberg* 矩阵。

第五章11题

Solution

首先对原 *Hessenberg* 矩阵做 *GivensQR* 分解：

$$\mathbf{G}_{n-1}\cdots\mathbf{G}_2\mathbf{G}_1\mathbf{A}_1=\mathbf{R},\ \ \mathbf{Q}=\mathbf{G}_1^\top\mathbf{G}_2^\top\cdots\mathbf{G}_{n-1}^\top$$

然后求 $\mathbf{A}_2$：

$$\mathbf{A}_2=\mathbf{R}\mathbf{Q}=\mathbf{R}\mathbf{G}_1^\top\mathbf{G}_2^\top\cdots\mathbf{G}_{n-1}^\top$$

首先观察 $\mathbf{R}$ 和 $\mathbf{G}_1^\top$

$$\mathbf{R}=\begin{bmatrix} * & * & * & * \\ 0 & * & * & * \\ 0 & 0 & * & * \\ 0 & 0 & 0 & * \end{bmatrix},\ \mathbf{G}_1^\top=\begin{bmatrix} \hat{\mathbf{G}}_1^\top & 0 \\ 0 & \mathbf{I}_{n-2} \end{bmatrix}$$

Givens 矩阵 $\mathbf{G}_1^\top$ 只对 $\mathbf{R}$ 的前两列做变换，并且变换结果为

第五章11题

$$\mathbf{R}\mathbf{G}_1^\top = \begin{bmatrix} * & * & * & * \\ * & * & * & * \\ 0 & 0 & * & * \\ 0 & 0 & 0 & * \end{bmatrix}$$

类似地，

$$\mathbf{R}\mathbf{G}_1^\top\mathbf{G}_2^\top = \begin{bmatrix} * & * & * & * \\ * & * & * & * \\ 0 & * & * & * \\ 0 & 0 & 0 & * \end{bmatrix}, \quad \mathbf{R}\mathbf{G}_1^\top\mathbf{G}_2^\top\mathbf{G}_3^\top = \begin{bmatrix} * & * & * & * \\ * & * & * & * \\ 0 & * & * & * \\ 0 & 0 & * & * \end{bmatrix}$$

故最终 $\mathbf{A}_2 = \mathbf{R}\mathbf{G}_1^\top\mathbf{G}_2^\top\cdots\mathbf{G}_{n-1}^\top$ 是一个 Hessenberg 矩阵。

Note: https://www.zib.de/groetschel/Project-Quito/cursos/curso_2005_2/qr_iteration.pdf

第五章16题

Problem

双向对称阵(persymmetric matrix)是一种关于正对角线和反对角线都对称的矩阵，一些通信理论问题的解涉及双向对称阵的特征值和特征向量，下面的4×4双向对称阵就是一个例子：

$$\boldsymbol{A}=\begin{bmatrix}2 & -1 & 0 & 0\\ -1 & 2 & -1 & 0\\ 0 & -1 & 2 & -1\\ 0 & 0 & -1 & 2\end{bmatrix}$$

（1）用圆盘定理证明，若λ是矩阵$\boldsymbol{A}$的最小特征值，则$|\lambda-4|=\rho(\boldsymbol{A}-4\boldsymbol{I})$.

（2）计算矩阵$\boldsymbol{A}-4\boldsymbol{I}$的所有特征值与谱半径，并根据它们求$\boldsymbol{A}$的最小特征值以及对应的特征向量。

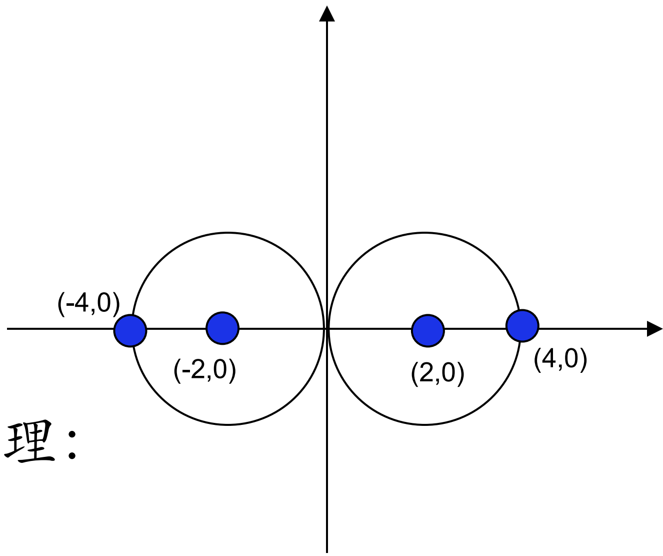
第五章16题

Solution

(1)

先对$\boldsymbol{A}$（$\boldsymbol{A}$为实对称阵）应用圆盘定理:

$$D_4, D_1: |\lambda - 2| \le 1$$
$$D_3, D_2: |\lambda - 2| \le 2$$



再对$\boldsymbol{A} - 4\boldsymbol{I}$（$\boldsymbol{A} - 4\boldsymbol{I}$为实对称阵）用圆盘定理:

$$D_4, D_1: |\lambda + 2| \le 1$$
$$D_3, D_2: |\lambda + 2| \le 2$$

所以$\lambda_A \in [0,4], \lambda_{A-4I} \in [-4,0]$

$$\boldsymbol{A}\text{与}\boldsymbol{A} - 4\boldsymbol{I}\text{特征值相差}\mathbf{4}$$

$\rho(\boldsymbol{A} - 4\boldsymbol{I}) = \max\{|x| \,|\, x\text{是}\boldsymbol{A} - \mathbf{4}\boldsymbol{I}\text{的特征值}\}$
$= \max\{-x | x\text{是}\boldsymbol{A} - \mathbf{4}\boldsymbol{I}\text{的特征值}\} = -min\{x | x + 4\text{是}\boldsymbol{A}\text{的特征值}\}$
$= -(\lambda - 4) = |\lambda - 4|$

第五章16题

Solution

(2)

直接求解矩阵$\boldsymbol{A}-4\boldsymbol{I}$的特征值即可:

$$|\lambda\boldsymbol{I}-(\boldsymbol{A}-4\boldsymbol{I})|=0$$

求解得到所有的特征值为:

$$\lambda=\frac{-5-\sqrt{5}}{2},\frac{-5+\sqrt{5}}{2},\frac{-3+\sqrt{5}}{2},\frac{-3-\sqrt{5}}{2}$$

$$\rho(\boldsymbol{A}-4\boldsymbol{I})=\left|\frac{-5-\sqrt{5}}{2}\right|=\frac{5+\sqrt{5}}{2}$$

设$\boldsymbol{A}$的最小特征值为λ，由（1）的结论，可以得到

$$4-\lambda=\rho(\boldsymbol{A}-4\boldsymbol{I})$$

解得$\lambda=\frac{3-\sqrt{5}}{2}$

Solution

$$\lambda = \frac{3-\sqrt{5}}{2}$$

按照$\boldsymbol{A}x = \lambda x$求解，即：

$$(\boldsymbol{A} - \lambda \boldsymbol{I})\ x = 0$$

$$\begin{bmatrix} \frac{\sqrt{5}+1}{2} & -1 & 0 & 0 \\ -1 & \frac{\sqrt{5}+1}{2} & -1 & 0 \\ 0 & -1 & \frac{\sqrt{5}+1}{2} & -1 \\ 0 & 0 & -1 & \frac{\sqrt{5}+1}{2} \end{bmatrix} \boldsymbol{x} = 0$$

解得对应$\lambda = \frac{3-\sqrt{5}}{2}$的一个特征向量为$\boldsymbol{x} = \begin{bmatrix} \sqrt{5}-1 \\ 2 \\ 2 \\ \sqrt{5}-1 \end{bmatrix}$

第六章3题

Problem

对于下列线性空间 $C[0,1]$ 中的函数 $f(x)$，计算 $\|f\|_\infty$，$\|f\|_1$ 与 $\|f\|_2$：

(1) $f(x) = (x-1)^3$; *(2)* $f(x) = |x - \frac{1}{2}|$.

Solution

(1)

$$\|f\|_\infty = \max_{0\le x\le 1} |(x-1)^3| = 1$$

$$\|f\|_1 = \int_0^1 (x-1)^3 \, dx = \frac{1}{4}$$

$$\|f\|_2 = \left(\int_0^1 (x-1)^6 \, dx\right)^{1/2} = \frac{\sqrt{7}}{7}$$

(2)

$$\|f\|_\infty = \max_{0\le x\le 1} |x - \frac{1}{2}| = \frac{1}{2}$$

$$\|f\|_1 = \int_0^1 |x - \frac{1}{2}| \, dx = \frac{1}{4}$$

$$\|f\|_2 = \left(\int_0^1 (x - \frac{1}{2})^2 \, dx\right)^{1/2} = \frac{\sqrt{3}}{6}$$

□

第六章4题

Problem

对 $f(x), g(x) \in C^2[a,b]$，定义

(1)$\langle f, g\rangle = \int_a^b f'(x)g'(x)dx$, (2) $\langle f, g\rangle = \int_a^b f'(x)g'(x)dx + f(a)g(a)$。

问它们是否构成内积？

Solution

要验证内积，即检验 4 条性质。容易验证可交换性、线性性 1、线性性 2 两者均满足，故只需验证非负性。

(1) 当 f, g 为常函数时，有 $\langle f, g\rangle = 0$。故不构成内积。

(2)$\langle f, f\rangle = 0 \Leftrightarrow f'(x) = 0, f(a) = 0$，故当且仅当 $f(x) = 0$ 时，内积为 0。故构成内积。 $\square$

第六章6题

Problem

在子空间 $\Phi = span\{1, t\}$ 中，求下列函数 $f(t)$ 的最佳平方逼近多项式：

(1) $f(t) = e^t, t \in [0, 1]$; (2)$f(t) = \cos(\pi t), t \in [0, 1]$

第六章6题

Solution

(1) 设为 $S(t) = a_0 + a_1 t$

$$(1,1) = 1,\quad (1,t) = \int_0^1 t dt = \frac{1}{2},\quad (1,t) = \int_0^1 t^2 dt = \frac{1}{3}$$

$$(f,1) = \int_0^1 e^t dt = e - 1,\quad (f,t) = \int_0^1 e^t t dt = 1$$

$$\begin{bmatrix} 1 & \frac{1}{2} \\ \frac{1}{2} & \frac{1}{3} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} a_0 \\ a_1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} e-1 \\ 1 \end{bmatrix}$$

解得

$$a_0 = 4e - 10,\quad a_1 = 18 - 6e$$

故所求最佳平方逼近多项式为：$S(t) = 4e - 10 + (18 - 6e)t$

第六章6题

(2) 设为 $S(t)=a_0+a_1 t$

$$(1,1)=1,\quad (1,t)=\int_0^1 t dt=\frac{1}{2},\quad (1,t)=\int_0^1 t^2 dt=\frac{1}{3}$$

$$(f,1)=\int_0^1 \cos(\pi t)dt=0,\quad (f,t)=\int_0^1 t\cos(\pi t)dt=-\frac{2}{\pi^2}$$

$$\begin{bmatrix} 1 & \frac{1}{2} \\ \frac{1}{2} & \frac{1}{3} \end{bmatrix}\begin{bmatrix} a_0 \\ a_1 \end{bmatrix}=\begin{bmatrix} 0 \\ -\frac{2}{\pi^2} \end{bmatrix}$$

解得

$$a_0=\frac{12}{\pi^2},\quad a_1=-\frac{24}{\pi^2}$$

故所求最佳平方逼近多项式为：$S(t)=\frac{12}{\pi^2}-\frac{24}{\pi^2}t$

第六章8题

Problem

设 $f(t)=\sin\left(\frac{\pi}{2}t\right), t\in[-1,1]$，利用勒让德多项式求 $f(t)$ 的三次最佳逼近多项式。

Solution

勒让德多项式：

$$P_{(0)}(t)=1; P_{(1)}(t)=t; P_{(2)}(t)=\frac{3t^2-1}{2}; P_{(3)}=\frac{5t^3-3t}{2};$$

由于勒让德多项式是正交多项式函数，故直接求解得系数：

$$a_0=a_2=0; a_1=\frac{\int_{-1}^{1}\sin(\frac{\pi}{2}t)t dt}{\int_{-1}^{1}t^2 dt}=\frac{12}{\pi^2};$$

$$a_3=\frac{\int_{-1}^{1}\sin(\frac{\pi}{2}t)\frac{5t^3-3t}{2}dt}{\int_{-1}^{1}\left(\frac{5t^3-3t}{2}\right)^2 dt}=\frac{168(\pi^2-10)}{\pi^4}$$

第六章8题

故最佳三次逼近多项式为

$$
\begin{aligned}
S_3(t)^* &= a_1 P_{(1)}(t) + a_3 P_{(3)}(t) \\
&= \frac{12}{\pi^2} t + \frac{168(\pi^2 - 10)}{\pi^4} \frac{5t^3 - 3t}{2} \\
&\approx 1.553191t - 0.562228t^3
\end{aligned}
$$

第六章8题

Problem

改变定义域为[0,1]，再利用勒让德多项式求$f(t)$的三次最佳逼近多项式

Solution

先求对应的勒让德多项式，作代换：

$$s = \frac{a+b}{2} + \frac{b-a}{2}t = \frac{1}{2}(t+1)$$

$$t = 2s - 1$$

则有$Q_{(0)}(s) = P_{(0)}(2s-1) = 1, Q_{(1)}(s) = P_{(1)}(2s-1) = 2s-1,$

$$Q_{(2)}(s) = P_{(2)}(2s-1) = 6s^2 - 6s + 1,$$

$$Q_{(3)}(s) = P_{(3)}(2s-1) = 20s^3 - 30s^2 + 12s - 1$$

Solution

继而再求对应的系数

$$a_0=\frac{<f(s),Q_0(s)>}{<Q_0(s),Q_0(s)>}=\frac{2}{\pi}$$

$$a_1=\frac{<f(s),Q_1(s)>}{<Q_1(s),Q_1(s)>}=\frac{24-6\pi}{\pi^2}$$

$$a_2=\frac{<f(s),Q_2(s)>}{<Q_2(s),Q_2(s)>}=\frac{10\pi^2+120\pi-480}{\pi^3}$$

$$a_3=\frac{<f(s),Q_3(s)>}{<Q_3(s),Q_3(s)>}=\frac{-14\pi^3+336\pi^2+3360\pi-13440}{\pi^4}$$

最后可以得到:

$$S_3(s)^*=a_0Q_{(0)}(s)+a_1Q_{(1)}(s)+a_2Q_{(2)}(s)+a_3Q_{(3)}(s)$$

第六章9题

Problem

已知实验数据如下：

t_i	19	25	31	38	44
y_i	19.0	32.3	49.0	73.3	97.8

用最小二乘法求形如 $y = a + bt^2$ 的经验公式，并计算均方误差。

第六章9题

Solution

基函数为 $\Phi=\{1,t^2\}$，故求解法方程 $\mathbf{Gx}=\mathbf{b}$。其中 $\mathbf{G}$ 中元素为

$$\langle\varphi_0,\varphi_0\rangle=\sum_{i=1}^{5}1=5;$$

$$\langle\varphi_0,\varphi_1\rangle=\sum_{i=1}^{5}t_i^2=5327=\langle\varphi_1,\varphi_0\rangle;$$

$$\langle\varphi_1,\varphi_1\rangle=\sum_{i=1}^{5}t_i^4=7277699;$$

$\mathbf{b}$ 中元素为

$$\langle\varphi_0,y\rangle=\sum_{i=1}^{5}y_i=271.4,\langle\varphi_1,y\rangle=\sum_{i=1}^{5}t_i^2y_i=369321.5,$$

第六章9题

故求解

$$\begin{bmatrix} 5 & 5327 \\ 5327 & 7277699 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_0 \\ x_1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 271.4 \\ 369321.5 \end{bmatrix}$$

得

$$x_0 \approx 0.9726046; \quad x_1 \approx 0.0500351$$

故所求经验公式为

$$y = 0.9726046 + 0.0500351t^2.$$

均方误差为

$$\sigma = \sqrt{\frac{1}{5}\sum_{i=1}^{5}[y(t_i) - y_i]^2} \approx 0.0548.$$

☐ Note: ：均方误差不是逼近误差 $\|\delta\|_2 = \sqrt{\|f\|_2^2 - \sum_{i=1}^{n} x_i\langle\varphi_i, f\rangle}$

第六章11题

Problem

将例 6.5 的问题转化为标准的线性最小二乘问题式 (6.30)，然后使用算法 6.2 求解。

Solution

按照权值扩展为 8 个样本点

t_i	1	1	2	3	3	3	4	5
B_i	4	4	4.5	6	6	6	8	8.5

$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 2 & 3 & 3 & 3 & 4 & 5 \end{bmatrix}^\top$$

$$\mathbf{G} = \mathbf{A}^\top \mathbf{A} = \begin{bmatrix} 8 & 22 \\ 22 & 74 \end{bmatrix}$$

第六章11题

$$\mathbf{b} = \mathbf{A}^\top \mathbf{f} = \begin{bmatrix} 47 \\ 145.5 \end{bmatrix}$$

对矩阵 $\mathbf{G}$ 进行 Cholesky 分解 $\mathbf{G} = \mathbf{L}\mathbf{L}^\top$

$$\mathbf{L} = \begin{bmatrix} 2.8284 & 0 \\ 7.7782 & 3.6742 \end{bmatrix}$$

求解方程 $\mathbf{L}\mathbf{L}^\top \mathbf{x} = \mathbf{b}$，得到

$$\mathbf{x} = \begin{bmatrix} 2.5648 \\ 1.2037 \end{bmatrix}$$

故所求函数为

$$f(t) = 2.5648 + 1.2037t.$$

第六章11题

Problem

再使用算法6.3（矩阵的QR分解求解最小二乘）求解

Solution

对$\boldsymbol{A}$作HouseHolder变换，$\sigma_1 = 2\sqrt{2}$，$\boldsymbol{v_1} = \boldsymbol{a_1} + \sigma_1 \boldsymbol{e_1} = \begin{bmatrix} 2\sqrt{2}+1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \end{bmatrix}^T$

$$\boldsymbol{H_1 A} = \begin{bmatrix} -\frac{11\sqrt{2}}{2} & -2+\frac{\sqrt{2}}{2} & -1+\frac{\sqrt{2}}{2} & \frac{\sqrt{2}}{2} & \frac{\sqrt{2}}{2} & \frac{\sqrt{2}}{2} & 1+\frac{\sqrt{2}}{2} & 2+\frac{\sqrt{2}}{2} \\ -2\sqrt{2} & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}^T$$

再求得$\sigma_2 = -\frac{3\sqrt{6}}{2}$，$\boldsymbol{v_2} = \boldsymbol{a_2} + \sigma_2 \boldsymbol{e_2} =$

$$\begin{bmatrix} 0 & -2+\frac{\sqrt{2}}{2}-\frac{3\sqrt{6}}{2} & -1+\frac{\sqrt{2}}{2} & \frac{\sqrt{2}}{2} & \frac{\sqrt{2}}{2} & \frac{\sqrt{2}}{2} & 1+\frac{\sqrt{2}}{2} & 2+\frac{\sqrt{2}}{2} \end{bmatrix}^T$$

得到

$$\boldsymbol{R} = \boldsymbol{H_2 H_1 A} = \begin{bmatrix} -\frac{11\sqrt{2}}{2} & \frac{3\sqrt{6}}{2} & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ -2\sqrt{2} & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}^T$$

第六章11题

Solution

有$\boldsymbol{Q}^T = \boldsymbol{H}_2\boldsymbol{H}_1$，对$\boldsymbol{f}$依次用$\boldsymbol{v}_1, \boldsymbol{v}_2$做HouseHolder变换，得到$\tilde{\boldsymbol{f}} = Q^T f = \begin{bmatrix} -\frac{47\sqrt{2}}{4} & \frac{65\sqrt{6}}{36} & * & * & * & * & * & * \end{bmatrix}^T$

其中$\boldsymbol{b} = \tilde{\boldsymbol{f}}(1:2) = \begin{bmatrix} -\frac{47\sqrt{2}}{4} \\ \frac{65\sqrt{6}}{36} \end{bmatrix}$,$\boldsymbol{R}_1 = \boldsymbol{R}[1:2,:]$

最后求解

$$\begin{bmatrix} -2\sqrt{2} & -\frac{11\sqrt{2}}{2} \\ 0 & \frac{3\sqrt{6}}{2} \end{bmatrix} \boldsymbol{x} = \begin{bmatrix} -\frac{47\sqrt{2}}{4} \\ \frac{65\sqrt{6}}{36} \end{bmatrix}$$

得$\boldsymbol{x} = [2.5648 \quad 1.2037]^T$

所求函数为$f(t) = 2.5648 + 1.2037t$

第六章12题

Problem

已知 $\cos(x), 0^\circ \leq x \leq 90^\circ$ 的函数表，其中自变量取值的步长 $h = 1' = (1/60)^\circ$，函数值具有 5 位有效数字，求利用该函数表以及线性插值技术计算 $\cos(x)$ 的总误差界（包括截断误差，舍入误差）。

第六章12题

Solution

存在 $x_0, x_1 \in [0°, 90°], x_1 - x_0 = 1'$, $s.t,\ x \in [x_0, x_1]$。利用函数值插值的插值函数 $L_1(x) = \frac{x-x_1}{x_0-x_1}\cos x_0 + \frac{x-x_0}{x_1-x_0}\cos x_1$；利用函数值近似值插值的插值函数 $L_1^*(x) = \frac{x-x_1}{x_0-x_1}\cos^* x_0 + \frac{x-x_0}{x_1-x_0}\cos^* x_1$.

$$
\begin{aligned}
|\cos x - L_1^*(x)| &= |\cos x - L_1(x) + L_1(x) - L_1^*(x)| \\
&\leq |\cos x - L_1(x)| + |L_1(x) - L_1^*(x)|
\end{aligned}
$$

则由定理 6.7，截断误差

$$
\begin{aligned}
|\cos x - L_1(x)| = |R_1(x)| &= |\frac{\cos''(\xi)}{2!}(x - x_0)(x - x_1)| \\
&= \frac{1}{2}|\cos\xi||x - x_0||x - x_1| \\
&\leq \frac{1}{2}(\frac{h}{2})^2 \approx 1.0577 \times 10^{-8}
\end{aligned}
$$

第六章12题

舍入误差：

$$
\begin{aligned}
|L_1(x) - L_1^*(x)| &= |(\cos x_0 - \cos^* x_0)\frac{x - x_1}{x_0 - x_1} + (\cos x_1 - \cos^* x_1)\frac{x - x_0}{x_1 - x_0}| \\
&\le |e(\cos^* x_0)|\frac{x - x_1}{x_0 - x_1} + |e(\cos^* x_1)|\frac{x - x_0}{x_1 - x_0} \\
&\le \max\{|e(\cos^* x_0)|, |e(\cos^* x_1)|\} \cdot \left(\frac{x - x_1}{x_0 - x_1} + \frac{x - x_0}{x_1 - x_0}\right) \\
&= \max\{|e(\cos^* x_0)|, |e(\cos^* x_1)|\} \\
&\le 0.5 \times 10^{-5}
\end{aligned}
$$

故总误差界为

$$
|\cos x - L_1^*(x)| \le 1.0577 \times 10^{-8} + 0.5 \times 10^{-5} = 0.50106 \times 10^{-5}.
$$

第六章13题

Problem

设 $x_j(j=0,1,\cdots,n)$ 为互异节点，对应的拉格朗日插值多项式为 $L_n(x)$，$l_j(x)(j=0,1,\cdots,n)$ 为拉格朗日插值基函数。求证：

1. $\sum_{j=0}^{n} x_j^k l_j(x) \equiv x^k, \quad (k=0,1,\cdots,n);$
2. $\sum_{j=0}^{n} (x_j - x)^k l_j(x) \equiv 0, \quad (k=1,2,\cdots,n).$

第六章13题

Solution

(1) 令 $f(x)=x^k,(k=0,1,\cdots,n)$，则其 n 次插值多项式为

$$L_n(x)=\sum_{j=0}^{n}x_j^k l_j(x)$$

插值余项为

$$R_n(x)=f(x)-L_n(x)=\frac{1}{(n+1)!}f^{(n+1)}(\xi)\omega_{n+1}\equiv 0$$

故

$$\sum_{j=0}^{n}x_j^k l_j(x)\equiv x^k,\quad (k=0,1,\cdots,n)$$

第六章13题

第六章习题 13

(2) 由 (1) 知 $\forall k=1,2,\cdots,n$

$$
\begin{aligned}
\sum_{j=0}^{n}(x_j-x)^k l_j(x) &= \sum_{j=0}^{n}\left[\sum_{i=0}^{k}\binom{k}{i}x_j^i(-x)^{k-i}\right]l_j(x)\\
&= \sum_{i=0}^{k}\binom{k}{i}(-x)^{k-i}\sum_{j=0}^{n}x_j^i l_j(x)\\
&= \sum_{j=0}^{k}\binom{k}{i}(-x)^{k-i}x^i\\
&= (x-x)^k \equiv 0
\end{aligned}
$$

第六章15题

在$-4 \le x \le 4$上给出$f(x) = e^x$的等距节点函数表，若用二次插值求e^x的近似值，要使截断误差不超过10^{-6}，问使用函数表的步长h应取多少?

解:

取三个点x_{i-1}，x_i，$x_{i+1} \in [-4, 4]$并满足

$$x_i = x_{i-1} + h, x_{i+1} = x_i + h$$

则截断误差为

$$R_2(x) = \frac{1}{3!} f'''(\xi)(x - x_{i-1})(x - x_i)(x - x_{i+1}), \xi \in (x_{i-1}, x_{i+1})$$

由于

$$|R_2(x)| \le \frac{1}{6} \max_{x_{i-1}<\xi<x_{i+1}} |f'''(\xi)| \max_{x_{i-1}<x<x_{i+1}} |(x - x_{i-1})(x - x_i)(x - x_{i+1})|$$

且

$$\max_{x_{i-1}<\xi<x_{i+1}} |f'''(\xi)| = e^4$$

第六章15题

$$\max_{x_{i-1}<x<x_{i+1}} |(x-x_{i-1})(x-x_i)(x-x_{i+1})|$$

设

$$x-x_i = t\times h, (-1\le t\le 1)$$

则

$$(x-x_{i-1})(x-x_i)(x-x_{i+1}) = t(t-1)(t+1)h^3$$

对$f(t)=t(t-1)(t+1)$求导，可知当$f'(t)=3t^2-1=0$时取得最大值。

比较端点和导数为零的点，可得

$$\max_{-1<t<1} |f(t)| = f\left(\frac{\sqrt{3}}{3}\right) = \frac{2\sqrt{3}}{9}$$

所以$|R_2(x)|\le \frac{\sqrt{3}}{27}e^4h^3\le 10^{-6}$，即$h\le 0.006585$。

第六章16题

若$f(x)=a_0+a_1x+\cdots+a_{n-1}x^{n-1}+a_nx^n=0$，有$n$个不同的实零点$x_1,x_2,\dots,x_n$，证明：

$$\sum_{j=1}^{n}\frac{{x_j}^k}{f'(x_j)}=\begin{cases}0, 0\le k\le n-2\\ {a_n}^{-1}, k=n-1\end{cases}$$

证明：

$f(x)$可写为

$$f(x)=a_n(x-x_1)(x-x_2)\dots(x-x_n)$$

$$\Longrightarrow f'(x_j)=a_n(x_j-x_1)\dots(x_j-x_{j-1})(x_j-x_{j+1})\dots(x_j-x_n)$$

设$g(x)=x^k$，则其k阶差商可表示为：

$$g[x_1,x_2,\dots,x_n]=\sum_{j=1}^{n}\frac{{x_j}^k}{(x_j-x_1)\dots(x_j-x_{j-1})(x_j-x_{j+1})\dots(x_j-x_n)}$$

定理6.8

第六章16题

$$g[x_1,\ldots,x_n]=\sum_{j=1}^{n}\frac{{x_j}^k}{(x_j-x_1)\ldots(x_j-x_{j-1})(x_j-x_{j+1})\ldots(x_j-x_n)}$$

$$\Rightarrow\sum_{j=1}^{n}\frac{{x_j}^k}{f'(x_j)}=\frac{1}{a_n}g[x_1,\ldots,x_n]=\frac{1}{a_n}\times\frac{g^{(n-1)}(\xi)}{(n-1)!}$$

推论(6.63)

$$f[x_0,\ldots,x_n]=\frac{f^{(n)}(\xi)}{n!}$$

因此，

当$0\le k\le n-2$时，$g^{(n-1)}(\xi)=0$；

当$k=n-1$时，$g^{(n-1)}(\xi)=(\mathrm{n}-1)!$

第六章17题

$f(x)=x^7+x^4+3x+1$，求$f[2^0,2^1,\dots,2^7]$及$f[2^0,2^1,\dots,2^8]$。

解：

由于对于任意x，$f^{(7)}(x)=7!$且$f^{(8)}(x)=0$

因此存在$\xi_1\in(2^0,2^7)$、$\xi_2\in(2^0,2^8)$，使得

$$f[2^0,2^1,\dots,2^7]=\frac{f^{(7)}(\xi_1)}{7!}=\frac{7!}{7!}=1$$

$$f[2^0,2^1,\dots,2^8]=\frac{f^{(8)}(\xi_2)}{8!}=0$$

推论(6.63)

第六章19题

证明两点三次埃尔米特差值余项是

$$R_3(x)=\frac{f^4(\xi)(x-x_k)^2(x-x_{k+1})^2}{4!},\xi\in(x_k,x_{k+1})$$

并由此求出分段三次埃尔米特差值的误差限

解：

Hermite插值条件为

$$H_3(x_k)=f(x_k)\quad H_3(x_{k+1})=f(x_{k+1})$$

$$H_3'(x_k)=f'(x_k)\quad H_3'(x_{k+1})=f'(x_{k+1})$$

设插值余项函数$R_3(x)=f(x)-H_3(x)$，有

$$R_3(x_k)=0\quad R_3(x_{k+1})=0$$

$$R_3'(x_k)=0\quad R_3'(x_{k+1})=0$$

因此，x_k,x_{k+1}是$R_3(x)$的二重零点，从而可以把差值余项看作与x有关的待定函数，即设

$$R_3(x)=f(x)-H_3(x)=K(x)(x-x_k)^2(x-x_{k+1})^2$$

其中$K(x)$是与x有关的待定函数，只要解出$K(x)$即可。

第六章19题

把x看作是插值区间$[x_k, x_{k+1}]$上的一个固定点，作函数

$$\varphi(t) = f(t) - H_3(t) - K(x)(t - x_k)^2(t - x_{k+1})^2$$

根据插值条件及余项定义，可知

$$\varphi(x) = \varphi(x_k) = \varphi(x_{k+1}) = 0$$

$$\varphi'(x_k) = \varphi'(x_{k+1}) = 0$$

在区间$[x_k, x]$和$[x, x_{k+1}]$上对$\varphi(t)$应用Rolle定理，可知存在$\eta_1 \in (x_k, x)$及$\eta_2 \in (x, x_{k+1})$，使得$\varphi'(\eta_1) = \varphi'(\eta_2) = 0$

在区间(x_k, η_1)，(η_1, η_2)，(η_2, x_{k+1})上对$\varphi'(t)$应用Rolle定理，可知存在$\eta_{k1} \in (x_k, \eta_1)$，$\eta_{12} \in (\eta_1, \eta_2)$，$\eta_{2(\mathrm{k}+1)} \in (\eta_2, x_{k+1})$，使得$\varphi''(\eta_{k1}) = \varphi''(\eta_{12}) = \varphi''\left(\eta_{2(k+1)}\right) = 0$

第六章19题

在区间(η_{k1},η_{12})和$\left(\eta_{12},\eta_{2(k+1)}\right)$上对$\varphi''(t)$应用Rolle定理，可知存在$\eta_{k12}\in(\eta_{k1},\eta_{12})$及$\eta_{12(k+1)}\in(\eta_{12},\eta_{2(k+1)})$，使得$\varphi'''(\eta_{k12})=\varphi'''\left(\eta_{12(k+1)}\right)=0$

最后，在区间$\left(\eta_{k12},\eta_{12(k+1)}\right)$上对$\varphi'''(t)$应用Rolle定理，可知存在$\xi\in(\eta_{k12},\eta_{12(k+1)})\subset(x_k,x_{k+1})$，使得$\varphi^{(4)}(\xi)=0$。

由于

$$\varphi^{(4)}(t)=f^{(4)}(t)-4!\,K(x)$$

所以

$$\varphi^{(4)}(\xi)=f^{(4)}(\xi)-4!\,K(x)=0$$

即

$$K(x)=\frac{1}{4!}f^{(4)}(\xi)$$

第六章19题

最终

$$R_3(x) = K(x)(x-x_k)^2(x-x_{k+1})^2 = \frac{1}{4!}f^{(4)}(\xi)(x-x_k)^2(x-x_{k+1})^2$$

$$,\xi \in (x_k, x_{k+1})$$

求误差限

$$\max_{x_k \le x \le x_{k+1}} |(x-x_k)^2(x-x_{k+1})^2| = \max_{x_k \le x \le x_{k+1}} |(x-x_k)(x-x_{k+1})|^2$$

$$\le \left|\left(\frac{x_{k+1}-x_k}{2}\right)^2\right|^2 = \frac{h^4}{16}$$

因此

$$|R_3(x)| \le \frac{1}{384}h^4 \max_{a \le x \le b} |f^{(4)}(\xi)|$$

第六章20题

求一个次数不高于4次的多项式$P(x)$，使它满足$P(0)=P'(0)=0$，$P(1)=P'(1)=1$，$P(2)=1$。

解：

设$f(x)=a_4x^4+a_3x^3+a_2x^2$

则由已知条件可得

$$\begin{cases} a_4+a_3+a_2=1 \\ 16a_4+8a_3+4a_2=1 \\ 4a_4+3a_3+2a_2=1 \end{cases} \Longrightarrow \begin{cases} a_4=\dfrac{1}{4} \\ a_3=-\dfrac{3}{2} \\ a_2=\dfrac{9}{4} \end{cases}$$

因此，

$$P(x)=\frac{1}{4}x^4-\frac{3}{2}x^3+\frac{9}{4}x^2$$

第六章20题

求一个次数不高于4次的多项式$P(x)$，使它满足$P(0) = P'(0) = 0$，$P(1) = P'(1) = 1$，$P(2) = 1$。

解：

使用埃尔米特插值 $$H_3(x) = \sum [f_i \alpha_i(x) + f_i' \beta_i(x)]$$

$$\alpha_0(x) = (1 - 2\frac{x - x_0}{x_0 - x_1})(\frac{x - x_1}{x_0 - x_1})^2 = (1 + 2x)(x - 1)^2$$

$$\alpha_1(x) = (1 - 2\frac{x - x_1}{x_1 - x_0})(\frac{x - x_0}{x_1 - x_0})^2 = (3 - 2x)x^2$$

$$\beta_0(x) = (x - x_0)(\frac{x - x_1}{x_0 - x_1})^2 = x(x - 1)^2$$

$$\beta_1(x) = (x - x_1)(\frac{x - x_0}{x_1 - x_0})^2 = (x - 1)x^2$$

$$P(x) = H_3(x) + A(x - 1)^2 x^2 \quad P(2) = 0 \quad A = \frac{1}{4}$$

$$P(x) = \frac{1}{4}x^2(x - 3)^2$$

第七章1题

Problem

确定下列求积公式中的积分系数或积分节点的待定值，使其代数精度尽量高，并指明所构造的求积公式所具有的代数精度：

$$(1)\int_{-2h}^{2h} f(x)dx \approx A_{-1}f(-h) + A_0 f(0) + A_1 f(h)$$

$$(2)\int_{-1}^{1} f(x)dx \approx [f(-1) + 2f(x_1) + 3f(x_2)]/3$$

Solution

按照精度的定义，确定一个求积公式的代数精度，只要验证公式 $f(x) = x^n$何时不成立即可。

（1）将$f(x) = 1, x, x^2$分别代入求积公式

$$\begin{cases} 4h = A_{-1} + A_0 + A_1) \\ 0 = -2hA_{-1} + 2h A_1 \\ \dfrac{16}{3}h^3 = h^2 A_{-1} + h^2 A_1 \end{cases}$$

第七章1题

Solution

解得

$$A_{-1} = A_1 = \frac{8}{3}h \qquad A_0 = -\frac{4}{3}h$$

所以，原求积公式至少具有2次代数精度。

再将$f(x) = x^3$代入求积公式

$$\text{左边} = 0 = \text{右边}$$

再将$f(x) = x^4$代入求积公式

$$\text{左边} = \frac{64}{5}h^5 \neq \text{右边} = \frac{16}{3}h^5$$

所以，原求积公式的代数精度是3。

第七章1题

Solution

（2）将$f(x)=1,x,x^2$分别代入求积公式

$$\begin{cases} 2=2 \\ 0=-1+2x_1+3x_2 \\ \dfrac{2}{3}=1+2x_1+3x_2^2 \end{cases}$$

解，得

$$\begin{cases} x_1=\dfrac{1-\sqrt{6}}{5}\approx -0.289898 \\ x_2=\dfrac{3+2\sqrt{6}}{15}\approx 0.526599 \end{cases} \text{或} \begin{cases} x_1=\dfrac{1+\sqrt{6}}{5}\approx 0.689898 \\ x_2=\dfrac{3-2\sqrt{6}}{15}\approx -0.126599 \end{cases}$$

再将$f(x)=x^3$代入求积公式，得

$$\text{左边}=0\neq\text{右边}$$

所以，原求积公式具有2次代数精度。

第七章2题

Problem

若积分节点$x_k, k = 0, \cdots, n$给定，要求机械求积公式的积分系数，使得求积公式至少具有n次代数精度，请根据定理7.1列出待求解的线性方程组，并判断解的存在性和唯一性。

Solution

方程组：

$$
\begin{cases}
\displaystyle\int_a^b 1dx = \sum_{k=0}^{n} A_k \\
\displaystyle\int_a^b xdx = \sum_{k=0}^{n} A_k x_k \\
\vdots \\
\displaystyle\int_a^b x^n dx = \sum_{k=0}^{n} A_k x_k^n
\end{cases}
$$

第七章2题

Solution

得到：

$$\begin{bmatrix} x_0^0 & x_1^0 & \cdots & x_n^0 \\ x_0^1 & x_1^1 & \cdots & x_n^1 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ x_0^n & x_1^n & \cdots & x_n^n \end{bmatrix} \begin{bmatrix} A_0 \\ A_1 \\ \vdots \\ A_n \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \int_a^b 1dx \\ \int_a^b xdx \\ \vdots \\ \int_a^b x^n dx \end{bmatrix}$$

系数矩阵为范德蒙德矩阵（6.4.2小节），由机械求积公式的定义有积分节点x_i互不相等，故有系数矩阵是非奇艺矩阵，故解向量存在且唯一。

第七章4题

用辛普森公式求积分$\int_0^1 e^{-x}dx$并估计误差。

解：

辛普森公式(课本243页)为

$$S(f)=\frac{b-a}{6}\left[f(a)+4f\left(\frac{a+b}{2}\right)+f(b)\right]$$

因此有

$$S=\frac{1-0}{6}[e^{-0}+4e^{-\frac{1}{2}}+e^{-1}]\approx 0.6323337$$

课本246页7.21

误差

$$|R[f]|=|-\frac{(b-a)^5}{2880}f^{(4)}(\eta)|\leq\frac{1}{2880}\times e^0\approx 0.0003472$$

第七章6题

对积分$\int_0^1 \frac{x}{4+x^2}dx$, $n=8$分别用复合梯形公式和复合辛普森公式计算，其中n表示计算中使用$n+1$个区间等分点上的函数值，然后比较两种方法计算结果的准确度:

解：

利用复合梯形公式，有$h=\frac{1}{8}, x_k=\frac{1}{8}k\ (k=1,2,\ldots.7)$

因此

$$T_8=\frac{h}{2}[f(0)+2\sum_{k=1}^{7}f(x_k)+f(1)]\approx 0.1114024$$

利用复合辛普森公式，有$h=\frac{1}{8}, x_k=\frac{1}{8}k\ (k=1,2,\ldots.7), x_{k+\frac{1}{2}}=\frac{1}{8}k+\frac{1}{16}$

$$S_8=\frac{h}{6}[f(0)+4\sum_{k=0}^{7}f\left(x_{k+\frac{1}{2}}\right)+2\sum_{k=1}^{7}f(x_k)+f(1)]\approx 0.1115718$$

因$\int_0^1 \frac{x}{4+x^2}dx=\left(\frac{ln(x^2+4)}{2}+c\right)\Big|_0^1=\frac{1}{2}(ln5-ln4)\approx 0.1115717757$

因此复合辛普森公式计算精度更高。

第七章7题

若用复合梯形公式计算积分$I=\int_0^1 e^x dx$，问区间[0,1]应该分成多少等分才能使截断误差不超过$\frac{1}{2}\times10^{-5}$？若改用复合辛普森公式，要达到同样精度区间[0,1]应该分多少等分？

解：假设应为n等分，则步长$h=\frac{1}{n}$

复化梯形公式的积分余项是

$$R_n(f)=-\frac{b-a}{12}h^2f''(\eta)$$

(课本247页)

此时

$$|R_n(f)|=\left|-\frac{b-a}{12}h^2f''(\eta)\right|=\left|-\frac{e^\eta}{12n^2}\right|=\frac{e^\eta}{12n^2}\le\frac{1}{2}\times10^{-5},\eta\in(0,1)$$

因此

$$n\ge\sqrt{\frac{e}{6}\times10^5}\approx212.8$$

所以应该至少分成213等分，方可满足题意。

第七章7题

复化Simpson公式的积分余项是（课本248页）

$$R_n(f) = -\frac{b-a}{2880}h^4 f^{(4)}(\eta)$$

此时

$$|R_n(f)| = \left|-\frac{b-a}{2880}h^4 f^{(4)}(\eta)\right| = \left|-\frac{1}{2880}\times\frac{e^\eta}{n^2}\right| \le \frac{1}{2}\times 10^{-5},$$

$$\eta \in (0,1)$$

因此

$$n \ge \sqrt[4]{\frac{e}{1440}\times 10^5} \approx 3.7$$

所以应该至少分成4等分，方可满足题意。

第七章8题

如果$f''(x)>0$，证明用梯形公式计算积分$I=\int_a^b f(x)dx$所得结果比准确值I大，并说明其几何意义。

解：

若有$f''(x)>0$，因梯形公式的余项为

$$R_T=I(f)-T(f)=-\frac{f''(\eta)}{12}(b-a)^3$$

（课本247页）

因$(b-a)^3>0$，故$R_T<0$，即有$I(f)<T(f)$。

几何意义为：$f''(x)>0$，$f(x)$为下凸函数，曲线在梯形弦的下方，故梯形面积大。

第七章11题

用$n=1,2$的高斯-勒让德公式分别计算积分

$$\int_1^3 e^x sinxdx$$

1阶和2阶高斯勒让德求积公式为(261页表7-7)

$$\int_{-1}^1 f(x)dx = f(-0.5773503) + f(0.5773503)$$

$$\int_{-1}^1 f(x)dx = 0.3478548\times f(-0.8611363)$$

$$+0.6521452\times f(-0.3399810)$$

$$+0.6521452\times f(0.3399810) + 0.3478548\times f(0.8611363)$$

因为$x\in[1,3]$,令$t=x-2$，则$t\in[-1,1]$，故

$$\int_1^3 e^x sinxdx = \int_{-1}^1 e^{t+2}\sin(t+2)\,dt$$

第七章11题

经过变换以后的本题求积结果为：

$$G_1 = f(-0.5773503) + f(0.5773503) \approx 11.1415$$

$$G_2 \approx 10.9484$$

理论值：

$$\frac{1}{2}(e^x sinx - e^x cosx)|_1^3 = 10.9502$$

第七章13题

假定$h=0.2$时用向前差分公式得到导数的近似值为-0.8333，在$h=0.1$时用向前差分公式得到导数的近似值为-0.9091，用理查森外推方法求导数的更好的近似值。

假定$h=0.2$时向前差分公式导数近似值-0.8333，$h=0.1$时导数近似值-0.9091，用理查森外推方法求导数可得到更好近似值。

向前差分公式的展开式为（课本265页）

$$D_f(h)=\frac{f(x+h)-f(x)}{h}=f'(x)+\frac{h}{2}f''(x)+\frac{h^2}{6}f'''(x)\ldots$$

$$D_f\left(\frac{h}{2}\right)=f'(x)+\frac{h}{4}f''(x)+\frac{h^2}{24}f'''(x)\ldots$$

第七章13题

由以上两式可得

$$f'(x) = \left[2D_f\left(\frac{h}{2}\right) - D_f(h)\right] + O(h^2)$$

$$D_f^1(h) = 2D_f\left(\frac{h}{2}\right) - D_f(h)$$

更好的近似值为

$$D_f^1(0.2) = 2\times(-0.9091) - (-0.8333) = -0.9849$$

很多同学误用了中心差分公式的外推式:

$$f'(x) = \frac{1}{3}\left[4D_c\left(\frac{h}{2}\right) - D_c(h)\right] = -0.9344$$

第八章2题

Problem

确定下列求积利用欧拉方法计算积分

$$\int_0^x e^{t^2} dt$$

在点$x = 0.5, 1, 1.5, 2$的近似值。

Solution

按照精度的定义Euler计算公式为

$$y_{n+1} = y_n + hf(x_n, y_n)$$

设$y(x) = \int_0^x e^{t^2} dt$，$y(0) = 0$，则

$$y' = f(x, y) = e^{x^2}$$

取步长$h = 0.5$，则

$$y_{n+1} = y_n + 0.5e^{x_n^2}$$

$$y(0.5) \approx y_1 = 0.50000 \quad y(1) \approx y_2 = 1.14201$$

$$y(1.5) \approx y_3 = 2.50115 \quad y(2) \approx y_4 = 7.24502$$

第八章3题

Problem

确定用梯形法解初值问题

$$\begin{cases} y' + y = 0, \\ y(0) = 1。 \end{cases}$$

证明其近似解为

$$y_n = (\frac{2-h}{2+h})^n,$$

并证明当$h \to 0$时，它收敛于原初值问题的准确解$y = e^{-x}$。

Solution

按照梯形法计算公式为

$$y_{n+1} = y_n + \frac{1}{2}h[f(x_n, y_n) + f(x_{n+1}, y_{n+1})]$$

将$f(x,y) = -y$代入上式，得

$$y_{n+1} = y_n + \frac{1}{2}h(-y_n - y_{n+1})$$

第八章3题

Solution

整理，得

$$y_{n+1} = \frac{2-h}{2+h} y_n = \cdots = (\frac{2-h}{2+h})^{n+1} y_0$$

而$y_0 = 1$，所以近似解为

$$y_n = (\frac{2-h}{2+h})^n$$

$$\lim_{h \to 0} y_n = \lim_{h \to 0} (\frac{2-h}{2+h})^n = \lim_{h \to 0} (1 + \frac{-2h}{2+h})^n$$

$$= \lim_{h \to 0} \left[(1 + \frac{-2h}{2+h})^{\frac{2+h}{-2h}} \right]^{\frac{-2x}{2+h}} = e^{-x}$$

得证！

第八章4题

Problem

在向后欧拉法的计算中，一般需求解关于y_{n+1}的非线性方程（8.19），若使用牛顿法求解，试推导相应的递推计算公式。

Solution

向后欧拉法:

$$y_{n+1} = y_n + h_n f(t_{n+1}, y_{n+1})$$

令$G(y) = y - y_n - h_n f(t_{n+1}, y)$，有

$$G'(y) = 1 - h_n \frac{\partial f(t_{n+1}, y)}{\partial y}$$

令y_k为第k轮迭代值，有牛顿法可得:

$$y_{k+1} = y_k - \frac{y_k - y_n - h_n f(t_{n+1}, y_k)}{1 - h_n \frac{\partial f(t_{n+1}, y_k)}{\partial y}}$$

第八章8题

Problem

根据模型问题（8.7），验证4阶经典龙格-库塔公式（8.38）具有4阶准确度，并推导其保持稳定时满足的不等式（8.41）。

Solution

$$\begin{cases} y' = \lambda y, \quad t \geq t_0 \\ y(t_0) = y_0 \end{cases}$$

应用于龙格-库塔公式：

$$\begin{cases} K_1 = \lambda y_n \\ K_2 = \lambda\left(y_n + \dfrac{h}{2}K_1\right) = \lambda y_n + \lambda^2 \dfrac{h}{2} y_n \\ K_3 = \lambda\left(y_n + \dfrac{h}{2}K_2\right) = \lambda y_n + \lambda^2 \dfrac{h}{2} y_n + \lambda^3 \dfrac{h^2}{4} y_n \\ K_4 = \lambda(y_n + hK_3) = \lambda y_n + \lambda^2 h y_n + \lambda^3 \dfrac{h^2}{2} y_n + \lambda^4 \dfrac{h^3}{4} y_n \end{cases}$$

第八章8题

Solution

因此有

$$y_{n+1} = y_n + \frac{1}{6}(K_1 + 2K_2 + 3K_3 + 4K_4)$$
$$= y_n\left[1 + \lambda h + \frac{(\lambda h)^2}{2} + \frac{(\lambda h)^3}{6} + \frac{(\lambda h)^4}{24}\right]$$

基于$y_n = y(t_n)$的前提假设，有

$$y_{n+1} = y(t_n)\left[1 + \lambda h + \frac{(\lambda h)^2}{2} + \frac{(\lambda h)^3}{6} + \frac{(\lambda h)^4}{24}\right]$$

$y(t_{n+1})$在t_n处泰勒展开：

$$y(t_{n+1}) = y(t_n)\left[1 + \lambda h + \frac{(\lambda h)^2}{2} + \frac{(\lambda h)^3}{6} + \frac{(\lambda h)^4}{24} + O(h^5)\right]$$

根据局部截断误差公式，可知龙格库塔公式具有4阶准确度。

第八章8题

Solution

如果存在扰动:

$$\sigma_{n+1} = \sigma_n \left[1 + \lambda h + \frac{(\lambda h)^2}{2} + \frac{(\lambda h)^3}{6} + \frac{(\lambda h)^4}{24} \right]$$

稳定时要求

$$\left| \frac{\sigma_{n+1}}{\sigma_n} \right| \leq 1$$

则

$$\left| 1 + \lambda h + \frac{(\lambda h)^2}{2} + \frac{(\lambda h)^3}{6} + \frac{(\lambda h)^4}{24} \right| \leq 1$$

第八章11题

Problem

根据对于初值问题

$$y' = -100(y - t^2) + 2t，y(0) = 1。$$

(1)用欧拉法求解，步长h取什么范围的值，才能使计算稳定。

(2)若用四阶龙格-库塔法计算，步长h如何选取？

(3)若用梯形公式计算，步长h有无限制。

Solution

(1)Euler计算公式为

$$y_{n+1} = y_n + h[-100(y_n - t_n^2) + 2t_n]$$

因此，扰动值满足

$$\varepsilon_{n+1} = (1 - 100h)\varepsilon_n$$

所以，步长应满足

$$|1 - 100h| < 1$$
$$\Longrightarrow 0 < h < 0.02$$

才能使计算稳定。

第八章11题

Solution

(2)四阶Runge-Kutta计算公式为

$$y_{n+1} = \left[1 - 100h + \frac{(100h)^2}{2!} - \frac{(100h)^3}{3!} + \frac{(100h)^4}{4!}\right] y_n + g(t_n, h)$$

因此，扰动值满足

$$\varepsilon_{n+1} = \left[1 - 100h + \frac{(100h)^2}{2!} - \frac{(100h)^3}{3!} + \frac{(100h)^4}{4!}\right] \varepsilon_n$$

所以，步长应满足

$$\left|1 - 100h + \frac{(100h)^2}{2!} - \frac{(100h)^3}{3!} + \frac{(100h)^4}{4!}\right| < 1$$

即

$$0 < h < 0.0287$$

才能使计算稳定。

第八章11题

Solution

(3)梯形计算公式为

$$y_{n+1} = \frac{2-100h}{2+100h}y_n + \frac{h[100(t_n^2+t_{n+1}^2)+2(t_n+t_{n+1})]}{2+100h}$$

因此，扰动值满足

$$\varepsilon_{n+1} = \frac{2-100h}{2+100h}\varepsilon_n$$

所以，步长应满足

$$\left|\frac{2-100h}{2+100h}\right| < 1$$

即

$$h > 0$$

因此，用该梯形公式的步长h没有限制。

第八章13题

Problem

分析两步跳跃法

$$y_{n+1} = y_{n-1} + 2hf(t_n, y_n)$$

的准确度阶数和稳定区间。

Solution

考虑对$y(t_{n+1})$以及$y(t_{n-1})$分别进行泰勒展开式，

$$y(t_{n+1}) = y(t_n + h)$$

$$= y(t_n) + hy'(t_n) + \frac{h^2}{2}y''(t_n) + \frac{h^3}{6}y'''(t_n) + O(h^4)$$

$$y(t_{n-1}) = y(t_n - h)$$

$$= y(t_n) - hy'(t_n) + \frac{h^2}{2}y''(t_n) - \frac{h^3}{6}y'''(t_n) + O(h^4)$$

第八章13题

Solution

考虑截断误差

$$l_{n+1}=y(t_{n+1})-y_{n+1}=y(t_{n+1})-y(t_{n-1})-2hf(t_n,y_n)$$
$$=y(t_n)+hy'(t_n)+\frac{h^2}{2}y''(t_n)+\frac{h^3}{6}y'''(t_n)+O(h^4)$$
$$-\left[y(t_n)-hy'(t_n)+\frac{h^2}{2}y''(t_n)-\frac{h^3}{6}y'''(t_n)+O(h^4)\right]$$
$$-2hf(t_n,y_n)=\frac{h^3}{3}y'''(t_n)+O(h^4)$$

因此可以得到该方法准确度为2阶准确度

第八章13题

Solution

分析稳定区间，假设y_{n-1}存在扰动δ_{n-1}，则由它引起y_{n+1}的误差为

$$\delta_{n+1} = \delta_{n-1} + 2h\frac{\partial f}{\partial y}\delta_n$$

设$\delta_n = p\delta_{n-1}, \delta_{n+1} = p^2\delta_n$, 代入上式得到：

$$p^2 = 1 + 2h\frac{\partial f}{\partial y}p$$

求解得到$p = h\frac{\partial f}{\partial y} \pm \sqrt{h\frac{\partial f}{\partial y}^2 + 1}$

稳定区间：$\left|h\frac{\partial f}{\partial y} \pm \sqrt{h\frac{\partial f}{\partial y}^2 + 1}\right| \le 1$

实际两个解乘积等于-1，必定有一个模长是大于1的，因此很难保证稳定。

谢谢！

预祝大家期末收获好成绩！ :）