样题（二）简要解答

说明：

1. 样题仅供学生熟悉考试形式。因教学进度等方面的差异，样题对实际考试内容、考试难度等无任何指导。
2. 《样题（二）简要解答》仅给出题目答案与提示。**请同学们在考试作答过程中给出详细解题步骤。**

题1 (8分)**.** 判断以下矩阵是否可以相似对角化，并简单说明理由。

$$(a)\begin{bmatrix}3&4\\0&5\end{bmatrix}\qquad (b)\begin{bmatrix}100&200\\0&100\end{bmatrix}\qquad (c)\begin{bmatrix}23&69&188\\69&45&202\\188&202&68\end{bmatrix}\qquad (d)\begin{bmatrix}1&2&3\\2&4&6\\4&8&12\end{bmatrix}$$

解1. *(a)* 可对角化，因为有两个互异特征值。

(b) 不可对角化，因为特征值唯一，但是*100*的几何重数是*1*，小于它的代数重数*2.*

(c) 可对角化，因为实对称阵都可对角化。

(d) 可对角化。这是一个秩为*1*的矩阵，故*0*的几何重数是*2*，迹是*17*，故第三个特征值是*17*，*17*的几何和代数重数都为*1*，*0*的几何和代数重数都为*2.*

题2 (8分)**.** 判断以下实对称阵是否正定，并简单说明理由。

$$(a)\begin{bmatrix}1&2\\2&6\end{bmatrix}\qquad (b)\begin{bmatrix}1&1\\1&2\\1&3\end{bmatrix}\begin{bmatrix}1&1&1\\1&2&3\end{bmatrix}$$

$$(c)\begin{bmatrix}1&0&0\\-2&-2&0\\3&3&3\end{bmatrix}\begin{bmatrix}1&-2&3\\0&-2&3\\0&0&3\end{bmatrix}\qquad (d)\begin{bmatrix}1&0&0\\2&1&0\\3&4&1\end{bmatrix}\begin{bmatrix}5&0&0\\0&-6&0\\0&0&7\end{bmatrix}\begin{bmatrix}1&2&3\\0&1&4\\0&0&1\end{bmatrix}$$

解2. *(a)* 正定。理由略。

(b) 不正定。理由略。

(c) 正定。理由略。

(d) 不正定。理由略。

题3 (10分)**.** 设$A = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 2 & 3 & 0 \\ 4 & 5 & 6 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 1 \end{bmatrix}$，分别找出$N(A)$, $N(A^T)$, $C(A)$, $C(A^T)$ 的一组基。

解3. *(1)* $(1,0,1,1,1)$, $(0,1,1,1,1)$, $(0,0,0,1,1)$ 是$C(A^T)$ 的一组基。

(2) $N(A)$ 的基是$(-1,-1,1,0,0)$, $(0,0,0,-1,1)$.

(3) $\mathbb{R}^3$ 的任意一组基均为$C(A)$ 的基。

(4) 基是空集。

题4 (5分)**.** 设$P = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \\ 2 & 3 \end{bmatrix} \left(\begin{bmatrix} 1 & 0 & 2 \\ 0 & 1 & 3 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \\ 2 & 3 \end{bmatrix} \right)^{-1} \begin{bmatrix} 1 & 0 & 2 \\ 0 & 1 & 3 \end{bmatrix}$. 求$P$ 的特征多项式，并说明理由。

解4. 特征多项式是$\lambda(\lambda-1)^2$。

题5 (16分)**.** 设

$$A = \begin{bmatrix} \frac{1}{\sqrt{2}} & 0 & \frac{1}{2} \\ 0 & \frac{1}{\sqrt{2}} & \frac{1}{2} \\ 0 & -\frac{1}{\sqrt{2}} & \frac{1}{2} \\ \frac{1}{\sqrt{2}} & 0 & -\frac{1}{2} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 2 & 0 \\ 0 & 2 & 2 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix},$$

第一个矩阵记为Q，第二个矩阵记为R.

(1) (2分) 验证$Q^TQ = I$.

(2) (6分) 求到$C(A)$ 的投影矩阵。

(3) (8分) 设$\boldsymbol{b} = \begin{bmatrix} 4 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}$. 求$A\boldsymbol{x} = \boldsymbol{b}$ 的最小二乘解。

解5. *(1)* 略。

(2) 到$C(A)$ 的投影矩阵是

$$\begin{bmatrix} \frac{3}{4} & \frac{1}{4} & \frac{1}{4} & \frac{1}{4} \\ \frac{1}{4} & \frac{3}{4} & -\frac{1}{4} & -\frac{1}{4} \\ \frac{1}{4} & -\frac{1}{4} & \frac{3}{4} & -\frac{1}{4} \\ \frac{1}{4} & -\frac{1}{4} & -\frac{1}{4} & \frac{3}{4} \end{bmatrix}$$

(3) 最小二乘解是$\hat{\boldsymbol{x}} = (2\sqrt{2}+4, -2, 2)$.

题6 (6分)**.** 已知：整数$1653, 2581, 3451, 4582$可以被29整除. 证明下面的四阶行列式值被29整除.

$$\begin{vmatrix} 1 & 6 & 5 & 3 \\ 2 & 5 & 8 & 1 \\ 3 & 4 & 5 & 1 \\ 4 & 5 & 8 & 2 \end{vmatrix}$$

解6. 略。

题7 (6分)**.** 解关于x的方程

$$\begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 4 & 8 \\ 1 & -2 & 4 & -8 \\ 1 & x & x^2 & x^3 \end{vmatrix} = 0.$$

解7. $x = 1,\ 2,$ 或-2.

题8 (6分)**.** 定义$M_2(\mathbb{R})$上线性变换$T : M_2(\mathbb{R}) \to M_2(\mathbb{R})$ 满足

$$T(A) = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{bmatrix} A \begin{bmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$$

求T在基$\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$下的矩阵。

解8. T 在基$E_{11}, E_{12}, E_{21}, E_{22}$ 下的矩阵是$\begin{bmatrix} 2 & 0 & 2 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 1 \\ 2 & 0 & 2 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 1 \end{bmatrix}$.

题9 (20分)**.** 设$A = \begin{bmatrix} 2 & 0 \\ 1 & 1 \\ 0 & 2 \end{bmatrix}$.

(a) (10分) 求A的奇异值分解$A = U\Sigma V^T$，其中U 是3阶正交阵，V 是2阶正交阵。

(b) (2分) 应用(a)写出A的四个基本子空间的一组标准正交基。

(c) (8分) 设$M = \begin{bmatrix} 0 & A \\ A^T & 0 \end{bmatrix}$. 若$A\boldsymbol{v} = \sigma\boldsymbol{u}$, 其中$\boldsymbol{u}, \boldsymbol{v}$是奇异向量(singular vector), σ是奇异值(singular value), 证明$\begin{bmatrix} \boldsymbol{u} \\ \boldsymbol{v} \end{bmatrix}$ 是M的特征向量，并由此应用奇异向量给出5阶正交阵Q，使得Q^TMQ是对角阵.

解9. *(a)* $U = \begin{bmatrix} \frac{1}{\sqrt{3}} & \frac{1}{\sqrt{2}} & \frac{1}{\sqrt{6}} \\ \frac{1}{\sqrt{3}} & 0 & -\frac{2}{\sqrt{6}} \\ \frac{1}{\sqrt{3}} & -\frac{1}{\sqrt{2}} & \frac{1}{\sqrt{6}} \end{bmatrix}$，$\Sigma = \begin{bmatrix} \sqrt{6} & 0 \\ 0 & 2 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}$，$V = \begin{bmatrix} \frac{1}{\sqrt{2}} & \frac{1}{\sqrt{2}} \\ \frac{1}{\sqrt{2}} & -\frac{1}{\sqrt{2}} \end{bmatrix}$

(b) 略。

(c)

$$Q = \begin{bmatrix} \frac{1}{\sqrt{6}} & \frac{1}{\sqrt{6}} & \frac{1}{2} & \frac{1}{2} & \frac{1}{\sqrt{6}} \\ \frac{1}{\sqrt{6}} & \frac{1}{\sqrt{6}} & 0 & 0 & -\frac{2}{\sqrt{6}} \\ \frac{1}{\sqrt{6}} & \frac{1}{\sqrt{6}} & -\frac{1}{2} & -\frac{1}{2} & \frac{1}{\sqrt{6}} \\ \frac{1}{2} & -\frac{1}{2} & \frac{1}{2} & -\frac{1}{2} & 0 \\ \frac{1}{2} & -\frac{1}{2} & -\frac{1}{2} & \frac{1}{2} & 0 \end{bmatrix}.$$

题10 (10分)**.** 在以下两题中选且仅选一道题完成。

(1) $C: 3x_1^2 + 4x_1x_2 + 6x_2^2 = 1$ 是实平面上哪种二次曲线，椭圆、双曲还是抛物线？若C 是椭圆，请算出它的长、短轴长，以及长、短轴所在的直线方程；若C 是双曲线，请算出它的虚、实轴长以及虚、实轴所在的直线方阵，以及两条渐近线方程；若C 是抛物线，请算出它的顶点以及对称轴方程。

(2) 令 $A = \begin{bmatrix} \frac{1}{2} & 0 & \frac{1}{2} & 0 \\ 0 & \frac{1}{3} & 0 & \frac{2}{3} \\ \frac{1}{2} & 0 & \frac{1}{2} & 0 \\ 0 & \frac{2}{3} & 0 & \frac{1}{3} \end{bmatrix}$. 求4阶正交阵$Q$ 和对角阵Λ 使得$Q^TAQ = \Lambda$.

解10. *(1)* 椭圆。长轴长$\frac{2}{\sqrt{2}}=\sqrt{2}$, 短轴长$\frac{2}{\sqrt{7}}$，长轴所在直线方程是$x+2y=0$, 短轴所在直线方程是$2x-y=0$.

(2)

$$Q=\begin{bmatrix}\frac{1}{\sqrt{2}} & 0 & \frac{1}{\sqrt{2}} & 0\\ 0 & \frac{1}{\sqrt{2}} & 0 & \frac{1}{\sqrt{2}}\\ \frac{1}{\sqrt{2}} & 0 & -\frac{1}{\sqrt{2}} & 0\\ 0 & \frac{1}{\sqrt{2}} & 0 & -\frac{1}{\sqrt{2}}\end{bmatrix},\Lambda=\begin{bmatrix}1 & & & \\ & 1 & & \\ & & 0 & \\ & & & -\frac{1}{3}\end{bmatrix}.$$

题11 (5分)**.** 设$A\in M_{m\times n}(\mathbb{R})$, A 的算子范数(operator norm) 是

$$\|A\|=\max_{\substack{\boldsymbol{v}\in\mathbb{R}^n\\ \|\boldsymbol{v}\|=1}}\|A\boldsymbol{v}\|=\max_{\substack{\boldsymbol{v}\in\mathbb{R}^n\\ \boldsymbol{v}\neq\boldsymbol{0}}}\frac{\|A\boldsymbol{v}\|}{\|\boldsymbol{v}\|}.$$

试证：

$$\|A\|=\max_{\substack{\boldsymbol{u}\in\mathbb{R}^m,\boldsymbol{v}\in\mathbb{R}^n\\ \|\boldsymbol{u}\|=\|\boldsymbol{v}\|=1}}\boldsymbol{u}^TA\boldsymbol{v}.$$

解11. 先证对任意的$\boldsymbol{w}\in\mathbb{R}^m$, 有

$$\max_{\substack{\boldsymbol{u}\in\mathbb{R}^m\\ \|\boldsymbol{u}\|=1}}\boldsymbol{u}^T\boldsymbol{w}=\|\boldsymbol{w}\|.$$

当$\boldsymbol{w}=\boldsymbol{0}$ 时，等式显然成立。当$\boldsymbol{w}\neq\boldsymbol{0}$ 时，一方面由*Cauchy-Schwarz*不等式知

$$\boldsymbol{u}^T\boldsymbol{w}\leq|\boldsymbol{u}^T\boldsymbol{w}|\leq\|\boldsymbol{u}\|\ \|\boldsymbol{w}\|=\|\boldsymbol{w}\|.$$

另一方面，若令$\boldsymbol{u}=\frac{\boldsymbol{w}}{\|\boldsymbol{w}\|}$, 则$\boldsymbol{u}^T\boldsymbol{w}=\frac{\boldsymbol{w}^T}{\|\boldsymbol{w}\|}\boldsymbol{w}=\|\boldsymbol{w}\|$. 故等式得证。

回到原命题有

$$\max_{\substack{\boldsymbol{u}\in\mathbb{R}^m,\boldsymbol{v}\in\mathbb{R}^n\\ \|\boldsymbol{u}\|=\|\boldsymbol{v}\|=1}}\boldsymbol{u}^TA\boldsymbol{v}=\max_{\substack{\boldsymbol{v}\in\mathbb{R}^n\\ \|\boldsymbol{v}\|=1}}\|A\boldsymbol{v}\|=\|A\|.$$

第二个等号用的是$\|A\|$ 的定义。