第1章.

1. 误差：$e(\hat{x}) = \hat{x} - x$. 百分比形式 相对误差 $e_r(\hat{x}) = \frac{\hat{x}-x}{x}$，不加绝对值.

误差限 | 相对误差限：加绝对值. ε；ε_r.

2. 误差分析：① p位正确 → $|e_r(\hat{x})| < d_0 \times 10^{-p+1}$　eg. 3000.9999…

② 保留p位 → $|e_r(\hat{x})| \le \frac{1}{2d_0}\times 10^{-p+1}$　eg. 3000.4999…

③ p位有效/保留p位 ← $|e_r(\hat{x})| \le \frac{1}{2(d_0+1)}\times 10^{-p+1}$　eg. 9999.4999…

④ (近似) p位 ← $|e_r(\hat{x})| \le \frac{1}{2}\times 10^{-p}$　(令 $d_0=9$)

3. 计算误差、数据传递误差：$\hat{f}(\hat{x}) - f(x) = \underbrace{\hat{f}(\hat{x}) - f(\hat{x})}_{计} + \underbrace{f(\hat{x}) - f(x)}_{传递}$

4. 截断误差 —— 算法的问题

舍入误差 —— 计算精度的问题.

5. 敏感性：与问题有关. $cond = \left|\frac{\Delta y / y}{\Delta x / x}\right| \approx \left|\frac{x f'(x)}{f(x)}\right|$ (倒数关系) 绝对值!!

输出相对误差 ≲ cond × 输入相对误差.

6. 误差限的计算：$\varepsilon(\hat{y}) \approx \sum_{i=1}^{n}\left|\frac{\partial f}{\partial x_i}(\hat{x}_1,\dots,\hat{x}_n)\right|\varepsilon(\hat{x}_i)$，　e_r由e推导.

$\varepsilon(\hat{x}_1+\hat{x}_2) = \varepsilon_1+\varepsilon_2$.　$\varepsilon(\hat{x}_1\hat{x}_2) = |\hat{x}_2|\varepsilon_1 + |\hat{x}_1|\varepsilon_2$

$\varepsilon(\hat{x}_1/\hat{x}_2) = \frac{|\hat{x}_2|\varepsilon_1+|\hat{x}_1|\varepsilon_2}{|\hat{x}_2|^2}$，$\hat{x}_2 \ne 0$.

7. 稳定性：与算法有关. ~~舍入~~ 舍入误差不放大.

8. 向后误差：误差折算成初始数据的扰动.

9. 浮点系统：$x = \pm\left(d_0 + \frac{d_1}{\beta} + \dots + \frac{d_{p-1}}{\beta^{p-1}}\right)\times\beta^E$，规范化.

$UFL = \beta^L$　1.000×10^{L}　$OFL = (1-\beta^{-p})\cdot\beta^{U+1}$　9.999×10^{U}

舍入：截断、偶数

机器精度：$\varepsilon_{mach} = \frac{1}{2}\beta^{1-p}$　1.005

表示数的相对误差限是 ε_{mach}.

被吃：$\frac{x_2}{x_1} \le \frac{1}{\beta}\varepsilon_{mach} = \beta^{-p}$　不被吃：$\frac{x_2}{x_1} > \varepsilon_{mach}$

9.99+0.001　　1+0.005

10. $x \text{ flop } y = fl(x \text{ op } y)$. 无结合律.

11. 抵消.

第二章 非线性方程求根

1. m重根 $\iff f(x)=f'(x)=\cdots=f^{(m-1)}(x)=0,\ f^{(m)}(x)\neq 0$.

2. 二分法：起点：$f(a)f(b)<0$，终点：$\frac{a+b}{2}$

误差限：$(b_0-a_0)/2^{k+1}$

绝对误差限的下界：a_k、b_k 两个相邻的机器浮点数，$2^{\lfloor \log_2 |x| \rfloor}\cdot 2\varepsilon_{mach}$

相对误差限的下界：$2\varepsilon_{mach}$

迭代步数：$\lceil \log_2 \frac{(b-a)}{\varepsilon} \rceil$

~~3. 不动点~~ 收敛阶：1，$C=0.5$

3. 不动点迭代法：$x_{k+1}=\varphi(x_k)$. 收敛则一定是解.

~~唯一不动点~~

~~全局收敛~~的充分条件：$\begin{cases} x\in[a,b],\ \varphi(x)\in[a,b]. & (\text{解存在}) \\ |\varphi(x_1)-\varphi(x_2)|\le L|x_1-x_2|,\ 0<\lambda<1 & (\text{解唯一}) \end{cases}$

在 $[a,b]$ 内收敛

全局

误差 $|x_k-x^*|\le \frac{L^k}{1-L}|x_1-x_0|$

$\begin{cases} x\in[a,b],\ \varphi(x)\in[a,b] \\ |\varphi'(x)|\le L<1 \end{cases}$

函数定义域为 R：$|\varphi'(x)|\le L<1$

局部收敛：x^*不动点，$|\varphi'(x^*)|<1$. $\varphi(x)$ 局部连续 一个闭区间

收敛阶：p阶收敛 $\iff$ ($p\ge2$) $\varphi'(x^*)=\varphi''(x^*)=\cdots=0,\ \varphi^{(p)}(x^*)\neq 0$.

4. 收敛阶定义：$\lim\limits_{k\to\infty}\frac{|e_{k+1}|}{|e_k|^p}=C$.

5. 牛顿迭代法：$x_{k+1}=x_k-\frac{f(x_k)}{f'(x_k)}$

收敛阶：单根 + 二阶导连续 + $f'(x^*)\neq0 \Rightarrow$ 至少2阶.

确定为二阶还要 $f''\neq 0$

开区间的全局收敛性：求通项公式.

重根：只有线性收敛速度，问题：无全局收敛性，连续性要求高，求导慢.

6. 判停：残差 $|f(x_k)|\le\varepsilon_1$. 误差 $|x_{k+1}-x_k|\le\varepsilon_2$ 相对误差 $|x_{k+1}-x_k|\le\varepsilon_3|x_{k+1}|$

局限性.

7. 割线法：$\frac{f(x_k)-f(x_{k-1})}{x_k-x_{k-1}}$ 近似 $f'(x)$

局部 C^2. $f'(x)\neq0\ \forall x\in D$. 初值充分接近 x^*，收敛阶 $p=\frac{1+\sqrt5}{2}$

抛物线法（2种）. $p\approx1.839$

8. 阻尼牛顿法：不断减小 λ 使 $|f(x_{k+1})|<|f(x_k)|$ $x_{k+1}=x_k-\lambda\frac{f(x_k)}{f'(x_k)}$

第3章. 线性方程组的直接解法

1. 矩阵： 上△ × 上△ = 上△　　下△ × 下△ = 下△

2. 范数： $\|x\|\geq 0$，$\|x\|=0 \Leftrightarrow x=0$　$\|\alpha x\|=|\alpha|\|x\|$　$\|x+y\|\leq\|x\|+\|y\|$

1-范数：$\|x\|_1=\sum_{i=1}^{n}|x_i|$　2-范数 $\|x\|_2=(\sum_{i=1}^{n}|x_i|^2)^{\frac{1}{2}}=(x^Tx)^{\frac{1}{2}}$ 绝对值！！

∞范数：$\|x\|_\infty=\max_{1\leq i\leq n}|x_i|$　p-范数 $\|x\|_p=(\sum_{i=1}^{n}|x_i|^p)^{\frac{1}{p}}$，$\|x\|_A=\sqrt{x^TAx}$ 见范数

范数等价性：$c_1\|\cdot\|_s\leq\|x\|_t\leq c_2\|x\|_s$

$\lim_{k\to\infty}x^{(k)}=x^*\Leftrightarrow\lim_{k\to\infty}\|x^{(k)}-x^*\|=0$

3. 矩阵范数：$\|A\|\geq 0$，$A=0\Leftrightarrow\|A\|=0$　$\|\alpha A\|=|\alpha|\|A\|$

$\|A+B\|\leq\|A\|+\|B\|$　　$\|AB\|\leq\|A\|\|B\|$

算子范数 $\|A\|_v=\max_{x\neq 0}\frac{\|Ax\|_v}{\|x\|_v}$ ($\|I\|=1$) 见范数的相容性 $\|Ax\|\leq\|A\|\|x\|$

1-范数：$\|A\|_1=\max_{1\leq j\leq n}\sum_{i=1}^{n}|a_{ij}|$ 最大的一列

2-范数 $\|A\|_2=\sqrt{\lambda_{max}(A^TA)}$

∞-范数 $\|A\|_\infty=\max_{1\leq i\leq n}\sum_{j=1}^{n}|a_{ij}|$ 最大的一行

条件数 $cond(A)_v=\|A\|_v\|A^{-1}\|_v$　　$\|A^{-1}\|_v\neq\cancel{\|A\|_v^{-1}}=\frac{1}{\min\frac{\|Ay\|}{\|y\|}}$

$\frac{\|\Delta x\|/\|x\|}{\|\Delta b\|/\|b\|}$ 或 $\frac{\|\Delta x\|/\|x\|}{\|\Delta A\|/\|A\|}$

算子范数，则 $cond(A)=\max_{x\neq 0}\frac{\|Ax\|}{\|x\|}/\min_{x\neq 0}\frac{\|Ax\|}{\|x\|}$

性质 ① 非奇异阵　$cond(A)\geq 1$.　$cond(A^{-1})=cond(A)$　$cond(cA)=cond(A)$

② $cond(I)=1$

③ 对角阵，则 $cond(D)\geq\frac{\max_i|d_{ii}|}{\min_i|d_{ii}|}$，采用p范数时等号成立.

④ $cond(A)_2=\sqrt{\frac{\lambda_{max}(A^TA)}{\lambda_{min}(A^TA)}}$

⑤ 正交阵　$cond(Q)_2=1$.　$cond(QA)_2=cond(AQ)_2=cond(A)_2$

4. 高斯消去法：約 $\frac{n^3}{3}$ 次乘除，$\frac{n^3}{3}$ 次加减，回代 $\frac{1}{2}n^2$ & $\frac{1}{2}n^2$.

高斯-约当法 $\frac{n^3}{2}$　/ 矩阵求逆．　注意见到 A^{-1} 第一反应是矩阵求逆.

5. LU分解　　无法直接从矩阵读　　(和我的构造不一样)

① 消去矩阵定义、逆．$M_iM_j(i<j)=$ 并集．　$U=M_{n-1}\cdots M_1A$

② LU分解．　$L=M_1^{-1}M_2^{-1}\cdots M_{n-1}^{-1}$，计算量 $\frac{n^3}{3}$

③ 唯一LU分解 $\Leftrightarrow a_{kk}^{(k)}\neq 0$ (前n-1个)

矩阵法：乱算，

5 应用: $x=U^{-1}L^{-1}b$. 解 $y=L^{-1}b$, 再解 $Ux=y$ 计算量 n^2

6. 选主元

① 高斯消去不出现零主元 ⟺ 前n-1个顺序主子式均不为0 ⟺ 唯一LU分解

高斯消去 $A^{(k)}=M_{k-1}\cdots M_2M_1A$

注: 不满足顺序主子式均非0, 也有可能有LU分解!

不存在LU ⇏ 不可逆   唯一LU ⇏ 可逆.

② 部分主元消去: 选绝对值最大的元素.

交换阵 P_k. $P_k^T=P_k$ $P_k^{-1}=P_k$

$\overline{M}_{n-3}=P_{n-1}P_{n-2}M_{n-3}P_{n-2}P_{n-1}$

则 $PA=LU$ $L=\overline{M}_1^{-1}\cdots\overline{M}_{n-1}^{-1}$ 解方程 $x=U^{-1}L^{-1}Pb$

③ 全主元消去 $PAQ=LU$ (不必算)

④ 向后误差 $\frac{\|\delta A\|_\infty}{\|A\|_\infty}\le\rho n\,\epsilon_{mach}$ 不选主元, ρ任意大.

部分主元, $\rho\le2^{n-1}$, 通常很小. 全主元: 更小.

7. Cholesky 分解   D就是U的对角线

① A的前n-1个顺序主子式 $D_k\ne0$, 则 $A=LDL^T$ 唯一. (A对称时D是各个元素

② 对称正定: $A=LL^T$, L的对角线元素大于0

方法: 解方程, 约n^3次乘除/加减 n次开根. 按L一列列算.

③ 对称正定矩阵 LU. Cholesky 都数值稳定, (看不懂这句).

④ 计算过程中被开方数小于等于0 → 不正定.

顺利执行 + $a_{nn}\ne0$ → 正定.

8. 带状矩阵. 带宽 $2\beta+1$ 半带宽 β.

LU分解: 非零元仍在原始带状内. 若采用部分主元, 带宽增长不会超过2倍

按列严格对角占优, LU分解不需要选主元, 也是稳定的.

按行严格对角占优, 无意义……

① 严格对角占优 —— 不用选主元

9. 稀疏度 $r_s=1-\frac{N_{nz}}{n^2}=\frac{0的个数}{n^2}$

存: 三元组. CSR. CSC

第4章 线性方程组的迭代解法.

一阶定常迭代法: $x^{(k+1)} = Bx^{(k)} + f$, B.f 为常量

构造: $A=M-N \Rightarrow x = M^{-1}Nx + M^{-1}b$. 要求 M可逆, 尽量简单

判停 (相对) 残差判据 $\frac{\|b-Ax^{(k)}\|}{\|b\|} \le \varepsilon_2$ (不意味着误差小).

(相对) 误差判据 $\frac{\|x^{(k)}-x^{(k-1)}\|}{\|x^{(k)}\|} \le \varepsilon_1$ (较常用)

4.1 算子范数的等价性: $C_1\|A\|_\infty \le \|A\|_t \le C_2\|A\|_\infty$

4.2 矩阵收敛 $\Leftrightarrow$ 误差算子范数收敛到0

4.3 $\lim_{k\to\infty} A^{(k)} = A \Leftrightarrow \lim_{k\to\infty} A^{(k)}x = Ax$

矩阵收敛

def. 谱半径 $\rho(A) = \max_{1\le i\le n} |\lambda_i|$ (λ_i是复数)

4.4谱半径性质 $\rho(A) \le \|A\|$ (A的任意算子范数)

A实对称 $\Rightarrow \|A\|_2 = \rho(A) = \sqrt{\lambda_{max}(A^TA)}$

谱半径

4.5 $\lim_{k\to\infty} B^k = 0 \Leftrightarrow \rho(B) < 1$

4.6 迭代法基本定理 $x^{(k+1)} = Bx^{(k)} + f$ $(e^{(k+1)} = Be^{(k)})$

I-B 非奇异. 则 (全局收敛) $\Leftrightarrow$ ($\rho(B)<1$), 且 x^*是唯一解 (判断收敛性的方法)

4.7 若在某种算子范数下 $\|B\| = q < 1$. 则对任意 $x^{(0)}$ 都收敛 (仅充分条件)

$\|x^{(k)}-x^*\| \le q^k \|x^{(0)}-x^*\|$

$\|x^{(k)}-x^*\| \le \frac{q}{1-q} \|x^{(k)}-x^{(k-1)}\|$

$\|x^{(k)}-x^*\| \le \frac{q^k}{1-q} \|x^{(1)}-x^{(0)}\|$

def. p阶收敛: $\lim_{k\to\infty} \frac{\|e^{(k+1)}\|}{\|e^{(k)}\|^p} = C$

1阶定常迭代法 $\lim_{k\to\infty} \frac{\|e^{(k+1)}\|}{\|e^{(k)}\|} = \rho(B)$ $\therefore$ 1阶收敛

def. $R = -\log_{10}\rho(B)$ 收敛速度 (一步迭代所取得的精度位数)

Jacobi 迭代法: 设 $A = \underset{M}{D} - (\underset{N}{L+U})$ L,U是相应位置元素取反 $x^{(k+1)} = D^{-1}(L+U)x^{(k)} + D^{-1}b$, 要求 $a_{ii} \ne 0$.

Gauss-Seidel 用 $x_1^{(k+1)} \cdots x_{i-1}^{(k+1)}$ $x_i^{(k)} \cdots x_n^{(k)}$ 算 $x_i^{(k+1)}$) $Dx^{(k+1)} = Lx^{(k+1)} + Ux^{(k)} + b$

从n到1更新 - 逆序G-S. $1\to n, n\to 1, 1\to n, n\to 1 \cdots$ 对称G-S.

SOR: $x^{(k+1)} = (1-w)x^{(k)} + w\tilde{x}^{(k+1)}$ $\tilde{x}^{(k+1)}$是G-S的结果.

$w<1$ 低松弛迭代法 $w>1$ 超松弛迭代法.

4.8 $a_{ii}>0$ Jacobi收敛 $\Leftarrow\Rightarrow$ A，2D-A都正定

4.9 Jacobi的迭代矩阵 $B_J=D^{-1}(L+U)$. $\|B_J\|_1<1$ 或 $\|B_J\|_\infty<1 \Rightarrow$ G-S收敛（非充要）

def. 可约阵 $P^TAP=\begin{bmatrix}A_{11} & A_{12}\\ 0 & A_{22}\end{bmatrix}$，$A_{11}$、$A_{22}$为方阵

4.10 A严格对角占优或不可约弱对角占优．则A非奇异

4.11 A严格对角占优或不可约弱对角占优．则Jacobi、G-S，SOR with $0<\omega\le1$ 收敛．

4.12 A对称正定，则G-S，SOR with $0<\omega<2$ 收敛

4.13 SOR收敛．则 $0<\omega<2$