离散数学(1)
Discrete Mathematics

第十章 关系

刘世霞
shixia@tsinghua.edu.cn

第十章　关系

复习：闭包的定义

- 设R是非空集合A上的关系，如果A上有另一个关系R'满足：

（1）R'是自反的（对称的或传递的）；

满足性质

（2）$R \subseteq R'$；

包含关系

（3）对A上任何自反的（对称的或传递的）

关系R''，$R \subseteq R'' \rightarrow R' \subseteq R''$。

最小的那个

- 则称关系R'为R的自反（对称或传递）闭包 闭包
- 一般将R的自反闭包记作$r(R)$，

对称闭包记作$s(R)$，传递闭包记作$t(R)$。

复习：进一步思考

- 自反闭包$r(R)$，

  是具有自反性的R的“最小”超集合

- 对称闭包$s(R)$，

  是具有对称性的R的“最小”超集合

- 传递闭包$t(R)$,

  是具有传递性的R的“最小”超集合

若R已经是自反(对称、传递)的，那么R的自反(对称、传递)闭包就是它自身。

复习：闭包的性质1

- 对非空集合A上的关系R，

（1）R是自反的 $\Leftrightarrow r(R)=R$；

（2）R是对称的 $\Leftrightarrow s(R)=R$；

（3）R是传递的 $\Leftrightarrow t(R)=R$。

复习：闭包的性质2

- 对非空集合A上的关系$R1, R2$，若 $R_1 \subseteq R_2$ 则

（1）$r(R_1) \subseteq r(R_2)$

（2）$s(R_1) \subseteq s(R_2)$

（3）$t(R_1) \subseteq t(R_2)$

复习：闭包的性质3

对非空集合A上的关系$R1, R2$，

（1） $r(R_1) \cup r(R_2) = r(R_1 \cup R_2)$

（2） $s(R_1) \cup s(R_2) = s(R_1 \cup R_2)$

（3） $t(R_1) \cup t(R_2) \subseteq t(R_1 \cup R_2)$

复习：R是非空集合A上的关系，则 $t(R) = R^1 \cup R^2 \cup \ldots$

证明:首先证明$R^1 \cup R^2 \cup \ldots \subseteq t(R)$，使用归纳法。

$n = 1$，显然$R^1 = R \subseteq t(R)$

假设$R^k \subseteq t(R)$，对任意$< x, y >$有

$< x, y > \in R^{k+1} = R^k \circ R^1$

$\Leftrightarrow \exists t(< x, t > \in R \wedge < t, y > \in R^k)$

$\Rightarrow \exists t(< x, t > \in t(R) \wedge < t, y > \in t(R)) \Rightarrow < x, y > \in t(R)$

其次，$t(R) \subseteq R^1 \cup R^2 \cup \ldots$即证$R^1 \cup R^2 \cup \ldots$传递

推论：设A是非空有限集，R是集合A上的二元关系，

则存在正整数n，使得$t(R) = R \cup R^2 \cup \ldots \cup R^n$

复习：闭包的关系矩阵

给定关系R，$r(R)$，$s(R)$，$t(R)$的关系矩阵分别为M，M_r，M_s，M_t，那么：

- $M_r = M + I$
- $M_s = M + M^{\mathrm{T}}$
- $M_t = M + M^2 + M^3 + \cdots$

复习：闭包的关系图

关系图分别为G，G_r，G_s，G_t，那么：

- 考察G的每个顶点，如果没有环就加上一个环，最终得到的是G_r
- 考察G的每一条边，如果有一条从x_i到x_j的单向边，则在G中加一条x_j到x_i的反方向边，最终得到G_s
- 考察G的每个顶点x_i，找出从x_i出发的所有2步，3步，…，n步长的路径。设路径的终点为x_{j1}，x_{j2}，…，x_{jk}。如果没有从x_i到x_{jl}的边，就加上这条边，最终得到G_t

复习：传递闭包的有限构造方法

- A为非空有限集合，$|A| = n$，R为A上的关系，则存在正整数$k \leq n$，使得

$$t(R) = R^+ = R \cup R^2 \cup \ldots \cup R^k$$

复习：求传递闭包的方法

- 直接利用关系矩阵相乘来求传递闭包
- 在计算矩阵相乘的时候用分治方法降低时间复杂度
- 利用基于动态规划的Warshall算法来求传递闭包

复习：Warshall算法

列a行b有1，行a加到行b

复习：关系的闭包(closure)

定理：设X是一集合，R是X上的二元关系，则有：

- 若R是自反的，则$s(R), t(R)$也自反
- 若R是对称的，则$r(R), t(R)$也对称
- 若R是可传递的，则$r(R)$也可传递

复习：闭包同时具有的多种性质2

对非空集合A上的关系R，

（1）$rs(R) = sr(R)$

（2）$rt(R) = tr(R)$

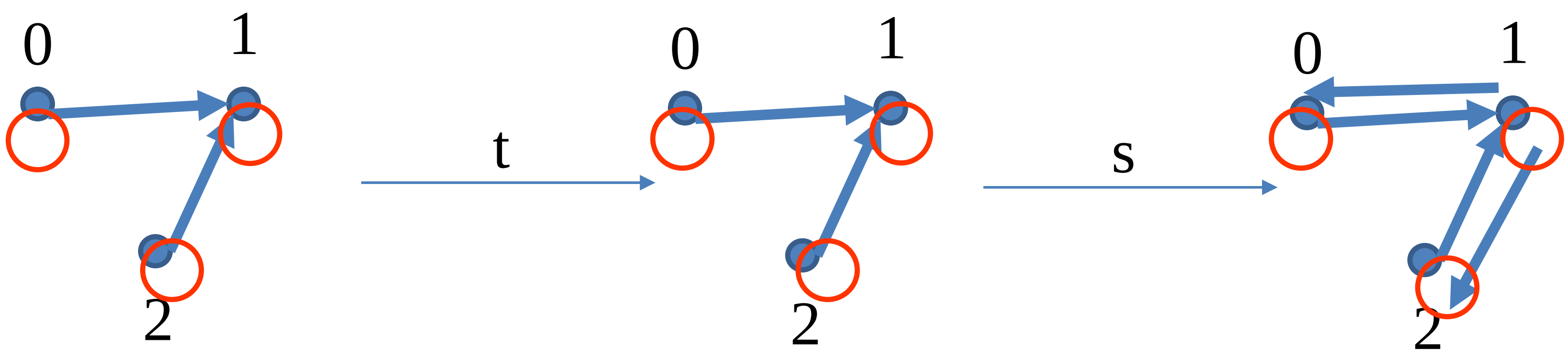
（3）$st(R) \subseteq ts(R)$

其中 $rs(R) = r(s(R))$，其它类似。

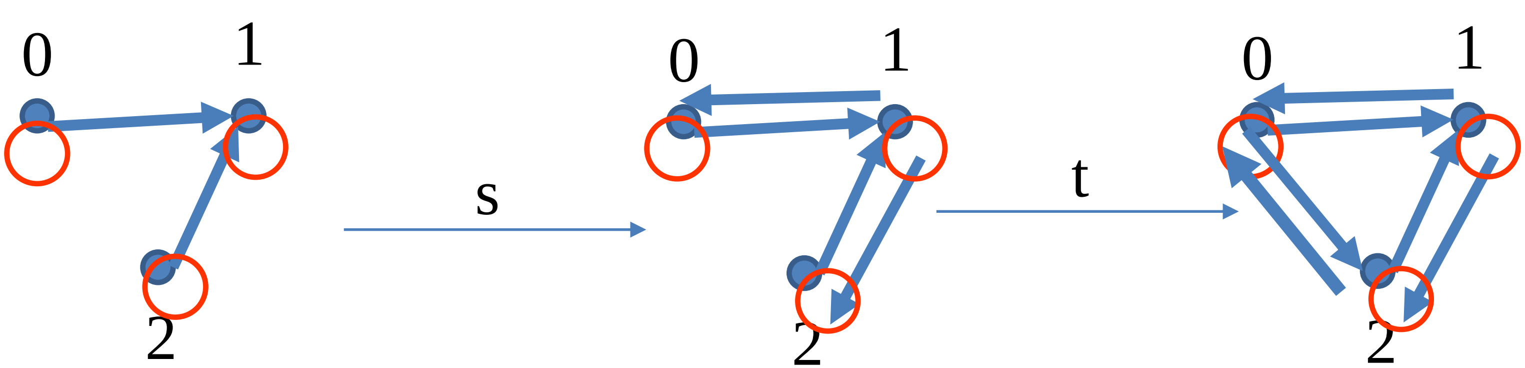
$$r(R) \rightarrow sr(R) \rightarrow tsr(R)$$

$$r(R) \rightarrow tr(R) \rightarrow str(R) \ ?$$

复习：反例



对称的，但不是传递的，少了(0,2)和(2,0)



复习：等价关系和划分

定义10.6.1 等价关系

- 设R为非空集合A上的关系，如果R是

  自反的、

  对称的、

  传递的，

- 则称R为A上的等价关系。

复习：等价类

- 定义：设R是X上等价关系，对任意x可以构造X的子集$[x]_R = \{y|y \in X \text{ 且 } xRy\}$, 称之为$x$对于$R$的等价类。
- $[x]_R$是X内所有与x有等价关系R的元素构成的集合。有如下性质：

  （1）$\forall x \in X, x \in [x]_R, [x]_R \neq \emptyset$

  （2）若$y \in [x]_R$, 则$[x]_R = [y]_R$

  （3）$y \in [y]_R$, 若$y \notin [x]_R$, 则$[x]_R \neq [y]_R$

定理 设A是一个集合，R是A上的等价关系，xRy当且仅当$[x]_R = [y]_R$

证明：

- 充分性，因为$x \in [x]_R = [y]_R$, 即$x \in [y]_R$，所以xRy。
- 必要性，已知xRy，考虑$[x]_R$的任意元素z，有zRx。根据R的传递性，有zRy，因此$z \in [y]_R$。证明$[x]_R \subseteq [y]_R$。类似可证明$[y] \subseteq [x]_R$，所以$[x]_R = [y]_R$。

10.6 等价关系与划分

定理 设A是一个集合，R是A上的等价关系，对于所有$x, y \in A$，或者$[x]_R = [y]_R$，*或者* $[x]_R \cap [y]_R = \emptyset$

证明：只需证明如果 $x \not R y$，则$[x]_R \cap [y]_R = \emptyset$

反证法：假设$[x]_R \cap [y]_R \neq \emptyset$，则$\exists z \in [x]_R \cap [y]_R$

$$\Rightarrow <x, z> \in R \wedge <z, y> \in R$$

$$\Rightarrow <x, y> \in R \text{（矛盾！）}$$

10.6 等价关系与划分

定理 设R是集合A上的等价关系，则

$$A = \cup\{[x]_R \mid x \in A\}$$

证明：首先易证$\cup\{[x]_R \mid x \in A\} \subseteq A$

其次，对任意$y \in A$

$y \in A \Rightarrow y \in [y]_R \wedge y \in A$

$\Rightarrow y \in \cup\{[x]_R \mid x \in A\}$

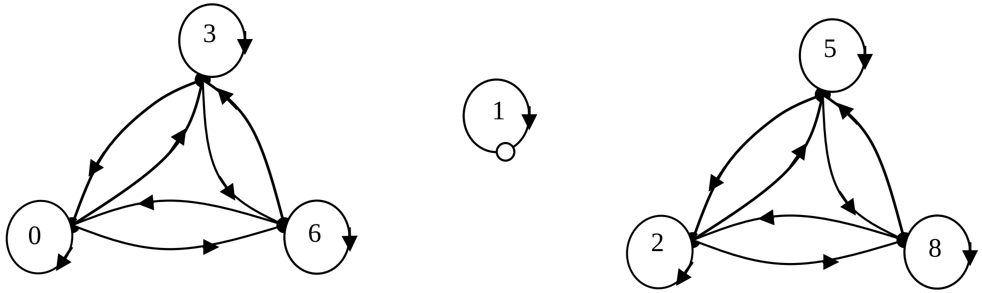
所以：$A \subseteq \cup\{[x]_R \mid x \in A\}$

10.6 等价关系与划分–等价类

- 由等价类的定义性质知:X内的任两元素对于R的等价类或相等或分离，故X内所有元素对R的等价类的并集就是X。
- 也可以说，X的元素对于R的等价类定义了X的一个划分，且这样的划分就是唯一的。原因：由等价类的性质知等价关系R构成的类两两不相交，且覆盖X，且X的所有元素对于R的等价类是唯一的。

10.6 等价关系与划分-讨论

- 等价类$[x]_R$是一个集合，$[x]_R \subseteq A$（$[x]_R$是A的子集）
- $[x]_R$中的元素是在A中所有与x具有等价关系R的元素所组成的集合
- 在等价关系中的关系图中，
  - 每个连通子图中的所有点就构成一个等价类



10.6 等价关系与划分-实例

- $A = \{a, b, c, d\}$
- $R = \{< a, a >, \ < b, b >, \ < a, b >,$
  $< b, a >, \ < c, c >, \ < d, d >,$
  $< c, d >, \ < d, c >\}$
- $[a]_R = \{a, b\} = [b]_R$
- $[c]_R = \{c, d\} = [d]_R$

10.6 等价关系与划分-实例

- 设$A = N$

  $R = \{< x, y > | x \in A \wedge y \in A \wedge (x - y)$可被3整除$\}$

- 等价类

  $[0]_R = \{0，3，6，9 \ldots\}$

  $[1]_R = \{1，4，7，10 \ldots\}$

  $[2]_R = \{2，5，8，11 \ldots\}$

10.6 等价关系与划分

商集：R是A上的等价关系，R的所有等价类构成的集合

记为A/R：$\{[x]_R \mid x \in A\}$

- 例：A为全班同学的集合，$|A| = n$，$(n \in N)$

  按指纹的相同关系R_1是一个等价关系

  $$A/R_1 = \{[x_1]_{R_1}, \dots [x_{\mathrm{n}}]_{R_1}\}$$

  同姓关系R_2是一等价关系

  $$A/R_2 = \{[张]_{R_2}，[李]_{R_2}，\dots\}$$

10.6 等价关系与划分

划分：给定一非空集合A，A的一个划分为非空子集族$S=\{A_1,A_2,\ldots A_m\}$，满足：

（1） $\varnothing\notin S$

（2） $\forall x\forall y(x,y\in S\wedge x\neq y\to x\cap y=\varnothing)$

（3） $A_1\cup A_2\cup\cdots\cup A_m= A$

非空子集，不相交，并为A

Multiple Choice(multiple) Points: 1

Setting

- 例：$A=\{a,b,c\}$,下列哪些A_i为A的一个划分？
  - $A_1=\{\{a\},\{b,c\}\}$
  - $A_2=\{\{a\},\{c\},\{b\}\}$
  - $A_3=\{\{a\},\{a,b,c\}\}$
  - $A_4=\{\{a,b\},\{c\},\varnothing\}$
  - $A_5=\{\{a,\{a\}\},\{b,c\}\}$

A A_1

B A_2

C A_3

D A_4

E A_5

提交

等价关系与划分有一一对应关系

- 划分到等价关系转化：A是一非空集合，S是A的一个划分，下述关系必定是一个等价关系

$R = \{< x, y > \mid x, y \in A \wedge x, y$在$S$的同一划分$\}$

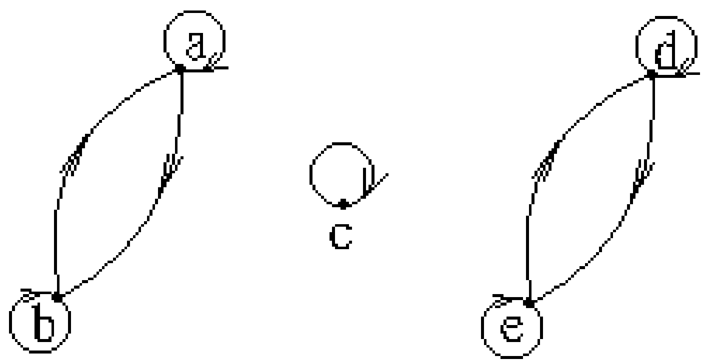
- 等价关系到划分的转化：设A是非空集合，R是A上的等价关系。R的商集是A的划分

10.6 等价关系与划分

例 $A=\{a,b,c,d,e\}, S=\{\{a,b\},\{c\},\{d,e\}\}$

对应划分S的等价关系为

$R=\{a,b\}\times\{a,b\}\cup\{c\}\times\{c\}\cup\{d,e\}\times\{d,e\}$
$=\{<a,a>,<b,b>,<a,b>,<b,a>,<c,c>,<d,d>,<e,e>,<d,e>,<e,d>\}$



10.6 等价关系与划分

例1 整数集Z上，$R=\{<x,y>)|x-y$能被4整除$\}$

$$=\{<x,y>|x\equiv y(mod4)\}$$

R是等价关系，由Z上元素所构成的类分别以余数为0、1、2、3分类：

$$[0]_R=\{\cdots-8,-4,0,4,8,12\cdots\cdots\}=\{4k\}$$

$$[1]_R=\{\cdots-7,-3,1,5,9,13\cdots\cdots\}=\{4k+1\}$$

$$[2]_R=\{\cdots-6,-2,2,6,10,14\cdots\cdots\}=\{4k+2\}$$

$$[3]_R=\{\cdots-5,-1,3,7,11,15\cdots\cdots\}=\{4k+3\}$$

分析等价类的性质

- 令$W = [\mathrm{i}]_R$

  1、任$w \in W$，wRw

  2、任w_1、$w_2 \in W$，$[w_1]_R = [w_2]_R$

  3、$[0]_R \cap [1]_R = \varnothing, \ldots, [2]_R \cap [3]_R = \varnothing,$

  $[0]_R \cup [1]_R \cup [2]_R \cup [3]_R = Z$

- 得$X/R = \{[0]_R, [1]_R, [2]_R, [3]_R\}$，这个商集是$X$上的一个划分。这些类称为模4的剩余类。

定理：任一集合上的一个划分可产生一个等价关系。

证明：

- 设$C = \{C_1, C_2 \ldots \ldots C_m\}, C_i$为$C$的划分块，由$C$可建立一个关系

$$R = (C_1 \times C_1) \cup (C_2 \times C_2) \cup \ldots\ldots \cup (C_m \times C_m)$$

- 易知R是等价关系。
- 集合上的等价关系和其上的划分是一一对应的。

10.6 等价关系与划分

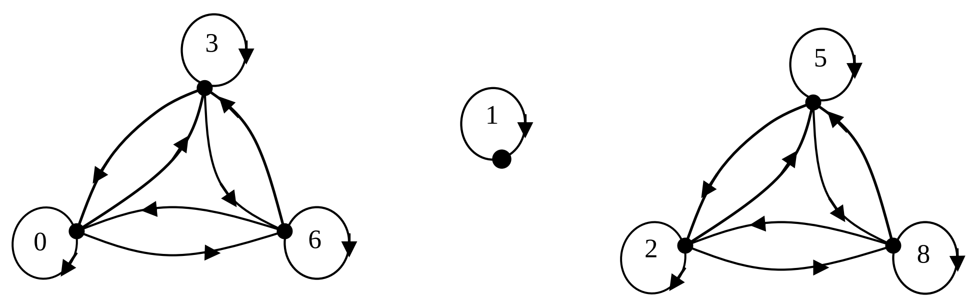
例 设$A=\{0,1,2,3,5,6,8\}$，R为Z上模3等价关系$R=\{<0,0>,<1,1>,<2,2>,<3,3>,<5,5>,<6,6>,<8,8>,<0,3>,<3,0>,<0,6>,<6,0>,<2,5>,<5,2>,<2,8>,<8,2>,<3,6>,<6,3>,<5,8>,<8,5>\}$，$R$的关系图见图

- 模3的等价类：

$[0]=\{0,3,6\}=[3]=[6]$，

$[1]=\{1\}$，

$[2]=\{2,5,8\}=[5]=[8]$。



10.6 等价关系与划分

例 设$X=\{a,b,c,d,e\}$，求由划分$S=\{\{a,b\},\{c\},\{d,e\}\}$确定的等价关系。

$$R1=\{a,b\}\times\{a,b\}$$

$$=\{<a,a>,<a,b>,<b,a>,<b,b>\}$$

$$R2=\{c\}\times\{c\}=\{<c,c>\}$$

$$R3=\{d,e\}\times\{d,e\}$$

$$=\{<d,d>,<d,e>,<e,e>,<e,d>\}$$

$$R=R1\cup R2\cup R3$$

由划分的定义可知：

集合A的划分和A上的等价关系可以建立一一对应。即：

A的一个划分确定了A上的一个等价关系；反之亦然。

定理10. 6. 2　等价关系诱导出的划分

- 对非空集合A上的等价关系R，A的商集A/R就是A的划分，称为由等价关系R诱导出的A的划分，记作π_R。

定理10. 6. 3　划分π诱导出的A上的等价关系

- 对非空集合A上的一个划分π，令A上的关系R_π为

$$R_\pi = \{\langle x, y\rangle \mid (\exists z)(z \in \pi \wedge x \in z \wedge y \in z)\}$$

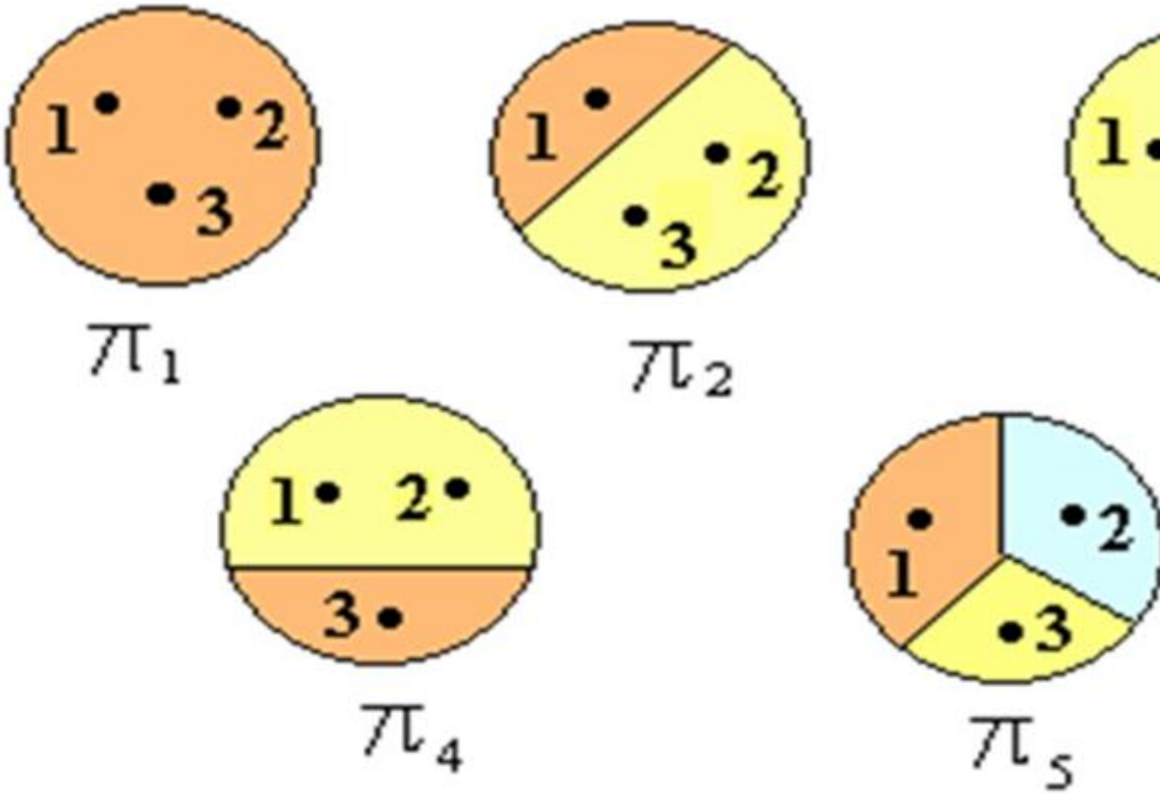
R_π则为A上的等价关系，它称为划分π诱导出的A上的等价关系。

定理10. 6. 4　划分π和A上的等价关系R

- 对非空集合A上的一个划分π，和A上的等价关系R，π诱导R当且仅当R诱导π。

例8：给出A＝{1,2,3}上所有的等价关系。

求解思路：先做出A的所有划分，然后根据划分写出对应的等价关系。



10.6 等价关系与划分-思考题

计算集合A上不同的等价关系的个数。

如$P182$上例6，$A=\{1,2,3\}$时，A上可得到5个不同的等价关系，即 $f(A_3) = 5$。

- 当$|A|=4$时， $f(A_4)=?$
- 当$|A|=5$时， $f(A_5)=?$
- 当$|A|=n$时， $f(A_n)=?$

STIRLING数

定义: n个有区别的球放到m个相同的盒子中, 要求无一空盒, 其不同的方案数称为第二类Stirling数.

定理: 第二类Stirling数$S(n,m)$有下列性质:

$(a)S(n,0)=0,$

$(b)S(n,1)=1,$

$(c)S(n,2)=2^{n-1}-1,$

$(d)S(n,n-1)=C(n,2),$

$(e)S(n,n)=1.$

n \ k	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9
0	1									
1	0	1								
2	0	1	1							
3	0	1	3	1						
4	0	1	7	6	1					
5	0	1	15	25	10	1				
6	0	1	31	90	65	15	1			
7	0	1	63	301	350	140	21	1		
8	0	1	127	966	1701	1050	266	28	1	
9	0	1	255	3025	7770	6951	2646	462	36	1

STIRLING数

定理： 第二类Stirling数满足下面的递推关系：

$$S(n,m) = mS(n-1,m) + S(n-1,m-1), \qquad (n>1, m\geq 1).$$

证明：设有n个有区别的球$b_1, b_2, \ldots, b_n$，从中取一个球设为b_1. 把n个球放到m个盒子无一空盒的方案的全体可分为两类。

（a）b_1独占一盒，其方案数显然为$S(n-1, m-1)$

（b）b_1不独占一盒，这相当于先将剩下的$n-1$个球放到m个盒子，不允许空盒，共有$S(n-1,m)$ 种不同方案，然后将b_1球放进其中一盒，方案数为$mS(n-1,m)$.

根据加法法则有 $S(n,m) = S(n-1,m-1) + mS(n-1,m)$.

STIRLING数

- 红、黄、蓝、白、绿五个球放到无区别的两个盒子里。

$$S(5,2) = 2S(4,2) + S(4,1) = 2 \times 7 + 1 = 15$$

- 故共有15种不同的方案。

STIRLING数

先把绿球取走，余下的四个球放到两个盒子。
用r，y，b，w分别表示红，黄，蓝，白球，绿球用g表示

g 不独占一盒				g 独占一盒	
第 1 盒子	第 2 盒子	第 1 盒子	第 2 盒子	第 1 盒子	第 2 盒子
rg	ybw	r	ybwg	g	rybw
yg	rbw	y	rbwg		
bg	ryw	b	rywg		
wg	ryb	w	rybg		
ryg	bw	ry	bwg		
rbg	yw	rb	ywg		
rwg	yb	rw	ybg		

STIRLING数

例 第二类Stirling数的展开式义：

$$S(n,m)=\frac{1}{m!}\sum_{k=0}^{m}(-1)^k C(m,k)(m-k)^n$$

- $S(n,m)$的组合意义：将n个有标志的球放入m个无区别的盒子，而且无一空盒的方案数.
- 思路：先考虑n个有标志的球，放入m个有区别的盒子，无一空盒的方案数.

STIRLING数

思路：容斥原理

解：n个有标志的球放入m个有区别的盒子的事件全体为S,

$|S| = m^n$

- A_i表示第i个盒子为空, i=1,2…m;

  $|A_i| = (m\text{-}1)^n$ 共有 C(m,1)个

  $|A_i \cap A_j| = (m\text{-}2)^n$ 共有 C(m,2)个

  ………………….

- 求无空盒的方案数

m个有区别盒子,无空盒的方案数:

$$N=|\overline{A1}\cap\overline{A2}\ldots\ldots\cap\overline{An}|$$

$$=m^n-C(m,1)(m-1)^n+C(m,2)(m-2)^n+\ldots+(-1)^m C(m,m)(m-m)^n$$

$$=\sum_{k=0}^{m}(-1)^k C(m,k)(m-k)^n$$

而第二类Stirling数要求盒子无区别, 则:

$$S(n,m)=\frac{1}{m!}\sum_{k=0}^{m}(-1)^k C(m,k)(m-k)^n$$

推论: 因为$S(m,m) = 1$,

$$m!=\sum_{k=0}^{m}(-1)^k C(m,k)(m-k)^m$$

相容关系

学习相容关系的原因

- 集合的分划与等价关系是紧密相关的
- 但等价关系的传递性是个较麻烦的问题，在实际问题中往往有些关系不具有传递性
  - 朋友关系、父子关系
  - 关系数据库中考虑元组运算时还要排除传递性
- 本节介绍一种应用广泛的新的关系—相容关系。

定义10.7.1　相容关系

- 对非空集合A上的关系R，如果R是自反的、对称的，则称R为A上的相容关系。
- 与等价关系的区别：不一定满足传递性
- 例：朋友关系等

名字中有同字的关系？

相容关系举例

- 例1　A是英文单词的集合

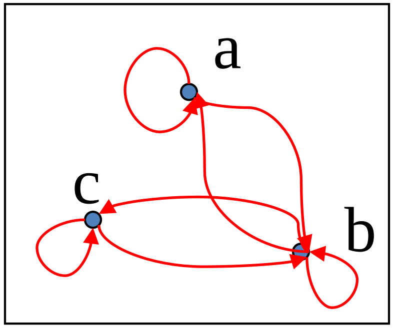
  A={cat, teacher, cold, desk, knife, by}

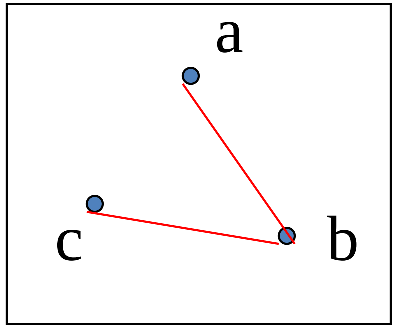
  A 上的关系R为

  R={< x, y >| x和 y 至少有一相同字母}

- 容易证明，R是自反的，对称的，但不是传递的，因此， R是相容关系。

2. 相容关系的图形表示与矩阵表示





$$\begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \end{bmatrix} \Rightarrow \begin{matrix} \mathbf{1} & \\ \mathbf{0} & \mathbf{1} \end{matrix}$$

关系图

- 每个节点都有自回路
- 有向弧成对出现

所以， 可以省去自回路，用单线代替来回弧线。

关系矩阵

- 主对角线全为1
- 矩阵关于主对角线对称

所以，只需主对角线以下部分即可表示全部信息。

令x_1=cat， x_2=teacher， x_3=cold， x_4=desk， x_5=knife， x_6=by

则R{$\langle x_1, x_1\rangle, \langle x_1, x_2\rangle, \langle x_1, x_3\rangle,$

$\langle x_2, x_1\rangle, \langle x_2, x_2\rangle, \langle x_2, x_3\rangle, \langle x_2, x_4\rangle, \langle x_2, x_5\rangle,$

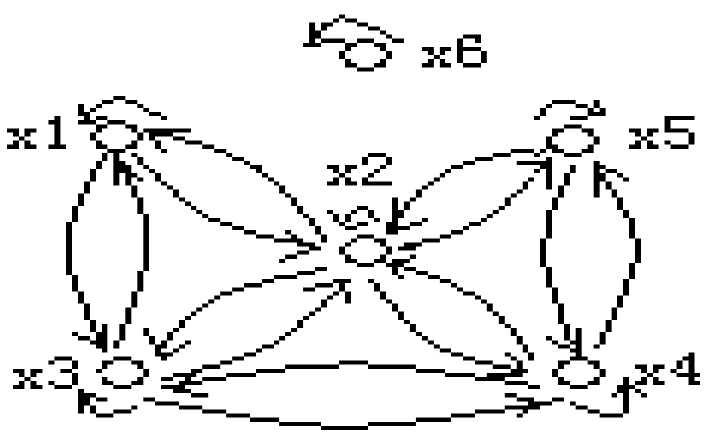
$\langle x_3, x_1\rangle, \langle x_3, x_2\rangle, \langle x_3, x_3\rangle, \langle x_3, x_4\rangle,$

$\langle x_4, x_2\rangle, \langle x_4, x_3\rangle, \langle x_4, x_4\rangle, \langle x_4, x_5\rangle,$

$\langle x_5, x_2\rangle, \langle x_5, x_4\rangle, \langle x_5, x_5\rangle,$

$\langle x_6, x_6\rangle$}

R的关系图为：



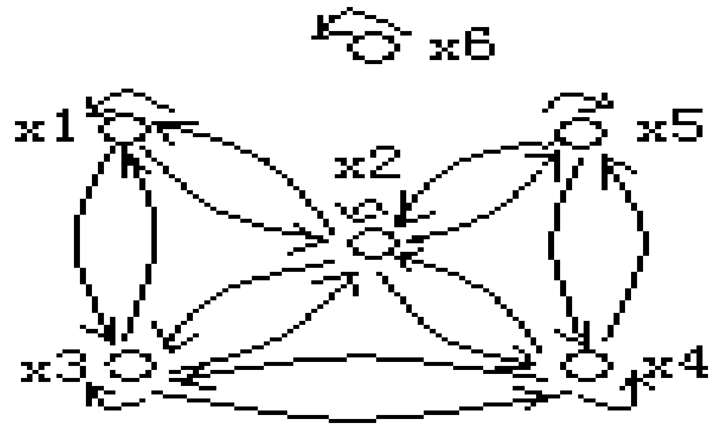
R的关系矩阵为

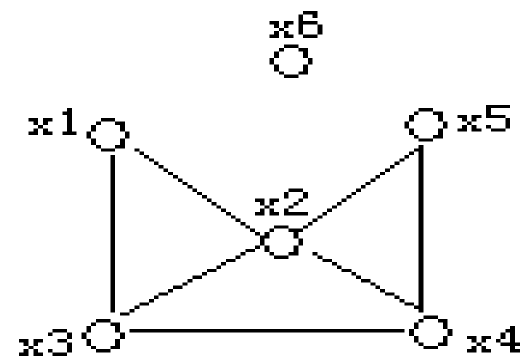
$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

2、表示：简化关系矩阵、关系图

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

x_2	1					
x_3	1	1				
x_4	0	1	1			
x_5	0	1	0	1		
x_6	0	0	0	0	0	
	x_1	x_2	x_3	x_4	x_5	x_6





定义10.7.2 相容类

- 对非空集合A上的相容关系R，若 $C \subseteq A$ ，且C 中任意两个元素x和y有xRy，则称C是由相容关系产生的相容类，简称相容类。这个定义也可以写成：

$$C = \{\, x \mid x \in A \wedge (\forall y)(y \in C \rightarrow xRy) \}$$

- 相容类的判定：在关系图中

（1）完全多边形的顶点的集合；

（2）任一条连线上的两个结点构成的集合；

（3）任一个结点构成的单元素的集合.

x_1=cat，x_2=teacher，x_3=cold，x_4=desk，x_5=knife，x_6=by

- 例如上例的相容关系

$R = \{<x_1, x_1>, <x_1, x_2>, <x_1, x_3>,$

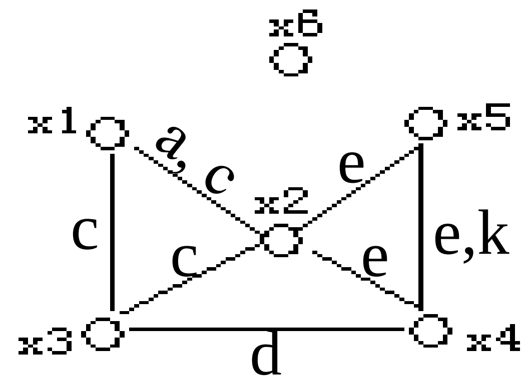
$<x_2, x_1>, <x_2, x_2>, <x_2, x_3>, <x_2, x_4>, <x_2, x_5$

$<x_3, x_1>, <x_3, x_2>, <x_3, x_3>, <x_3, x_4>,$

$<x_4, x_2>, <x_4, x_3>, <x_4, x_4>, <x_4, x_5>,$

$<x_5, x_2>, <x_5, x_4>, <x_5, x_5>,$

$<x_6, x_6>\}$



可产生相容类$\{x_1, x_2\}$, $\{x_1, x_3\}$, $\{x_2, x_3\}$, $\{x_6\}$, $\{x_2, x_4, x_5\}$等等。

相容类$\{x_1, x_2\}$中加进x3组成新的相容类$\{x_1, x_2, x_3\}$,

相容类$\{x_1, x_3\}$中加进x2组成新的相容类$\{x_1, x_2, x_3\}$,

相容类$\{x_2, x_3\}$中加进x1组成新的相容类$\{x_1, x_2, x_3\}$

相容类 $\{x_6\}$和$\{x_2, x_4, x_5\}$加入任一新元素，就不再组成相容类，称它们是**最大相容类**。

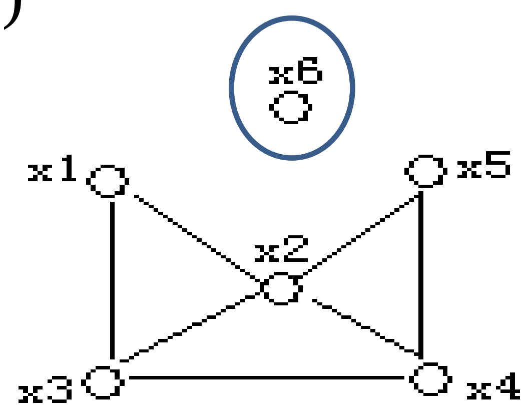
定义10.7.3　最大相容类

- 非空集合A上的相容关系R，一个相容类若不是任何相容类的真子集，就称为最大相容类，记作C_R。
- 最大相容类C_R有下列性质：

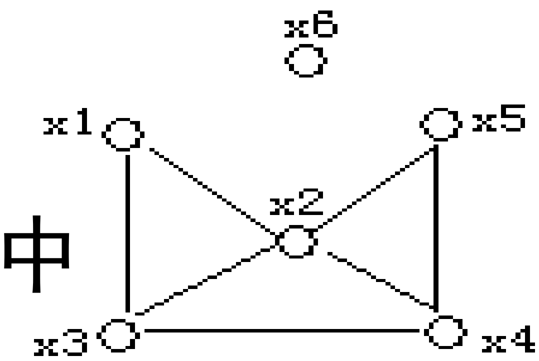
$$(\forall x)(x \in A - C_R \rightarrow (\exists y)(y \in C_R \wedge x \not R y))$$

和

$$(\forall x)(\forall y)((x \in C_R \wedge y \in C_R) \rightarrow xRy)$$



最大相容类



- 最大相容类的判定：在关系图中

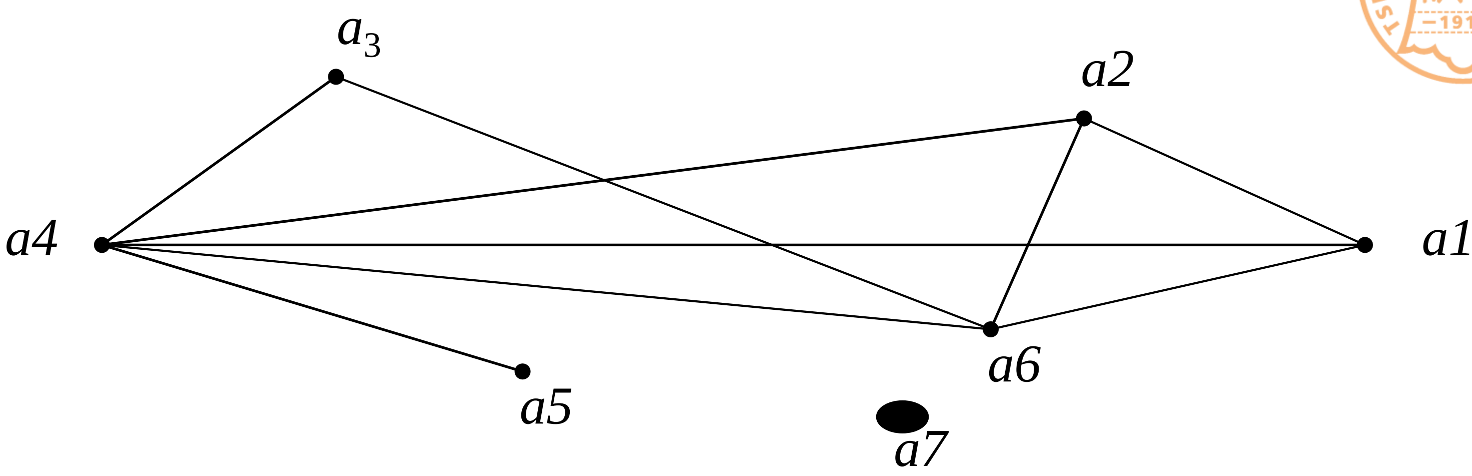
（1）最大完全多边形的顶点的集合；

（2）任一条不是完全多边形的边的连线上的两个结点构成的集合；

（3）任一个孤立结点构成的单元素的集合.

- （所谓完全多边形就是其每个顶点都与其它顶点连接的多边形。）

- 如上面例题中，$\{x_1, x_2,\ x_3\}, \{x_6\}$, $\{x_2, x_4, x_5\}, \{x_2, x_3, x_4\}$都是最大相容类。



- 例 设给定的相容关系如上图所示，求它的最大相容类。
- 解：最大相容类为：{a1，a2，a4，a6}，{a3，a4，a6}，{a4，a5}，{a7}

所有最大相容类的求解算法？

- 利用相容关系图可找出所有最大相容类。

(1) 最大完全多边形的顶点集合构成最大相容类；

(2) 孤立结点构成最大相容类 ；

(3) 不是完全多边形边的两个端点集合构成最大相容类。

- 定理10.7.1 最大相容类的存在性

对非空有限集合A上的相容关系R，若C是一个相容类，则存在一个最大相容类C_R，使$C \subseteq C_R$。

设R为有限集A上的相容关系，C是一个相容类，那么必存在一个最大相容类C_R，使得$C \subseteq C_R$。

证明：设$A=\{a_1, a_2, \ldots\ldots, a_n\}$，构造相容类序列

$$C_0 \subset C_1 \subset C_2 \subset \ldots, \text{其中} C_0=C$$

且$C_{i+1}= C_i \cup \{a_j\}$，其中j是满足$a_j \notin C_i$而$a_j$与$C_i$中各元素都有相容关系的最小足标。

由于A的元素个数$|A|=n$，所以至多经过$n-|C|$步，就使这个过程终止，而此序列的最后一个相容类，就是所要找的最大相容类。

此定理的证明告诉我们找最大相容类的方法。

10.7 相容关系和覆盖

定义10.7.4　覆盖

- 对非空集合A，若存在集合Ω 满足下列条件：

  (1) $(\forall x)(x \in \Omega \rightarrow x \subseteq A)$

  (2) $\emptyset \notin \Omega$

  (3) $\cup\, \Omega = A$

- 则称Ω为A的一个覆盖，称Ω中的元素为Ω 的覆盖块。

- **划分：** 给定一非空集合**A**，**A**的一个划分为非空子集族$S=\{A_1, A_2, \ldots A_m\}$，满足：

  ① $\emptyset \notin S$

  ② $\forall x \forall y(x, y \in S \wedge x \neq y \rightarrow x \cap y = \emptyset)$

  ③ $A_1 \cup A_2 \cup \ldots \cup A_m = A$

10.7 相容关系和覆盖

定理10.7.2 完全覆盖

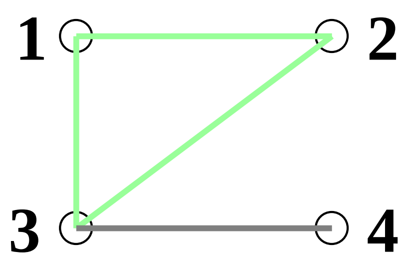
- 对非空集合A上的相容关系R，最大相容类的集合是A的一个覆盖，称为A的完全覆盖，记作$C_{\mathrm{R}}(A)$。而且$C_{\mathrm{R}}(A)$是唯一的。

定理10.7.3 覆盖与相容关系

- 对非空集合A的一个覆盖$\Omega=\{A_1,A_2,\ldots A_n\}$，由$\Omega$ 确定的关系$R=A_1\times A_1 \cup A_2\times A_2 \cup \ldots \cup A_n\times A_n$是$A$上的相容关系。

不同的覆盖可能构造出相同的相容关系。

例 设A={1，2，3，4}，集合{{1，2，3}，{3，4}}和{{1，2}，{2，3}，{1，3}，{3，4}}都是A的覆盖，但它们可以产生相同的相容关系如图所示:



定理3 集合A上相容关系 R 与完全覆盖$C_R(A)$存在一一对应。

注意：给定集合A的一个相容关系，**覆盖不是唯一**的，但**完全覆盖是唯一**的。

如前面的例子，设A是由下列英文单词组成的集合。

A={cat，teacher，cold，desk，knife，by}

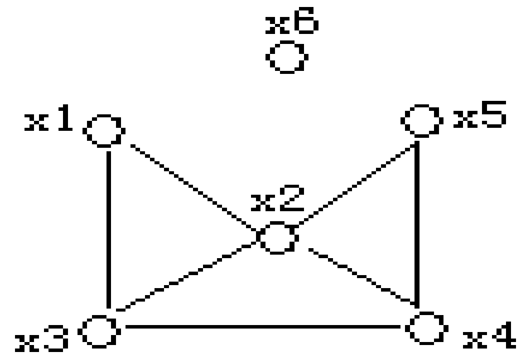
定义关系：

R={<x，y>|x，y $\in$ A，x和y至少有一个相同的字母}。

R是一个相容关系。

- R的关系矩阵和关系图分别为：

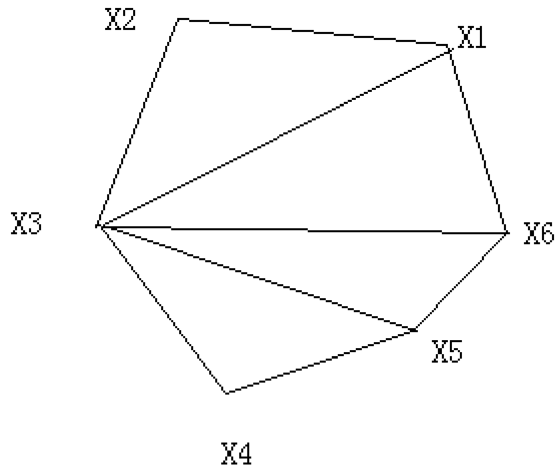
	x_1	x_2	x_3	x_4	x_5	x_6
x_2	1					
x_3	1	1				
x_4	0	1	1			
x_5	0	1	0	1		
x_6	0	0	0	0	0	



- 最大相容类为$\{x_1, x_2, x_3\}, \{x_6\}, \{x_2, x_4, x_5\}, \{x_2, x_4, x_3\}$
- 集合A的完全覆盖

$$C_R(A) = \{\{x_1, x_2, x_3\}, \{x_6\}, \{x_2, x_4, x_5\}, \{x_2, x_4, x_3\}\}$$

- 相容关系图为：



- 解：最大相容类为:

$\{x_1, x_2, x_3\}, \{x_1, x_3, x_6\}, \{x_3, x_5, x_6\}, \{x_3, x_4, x_5\}$。

- 集合A的完全覆盖:

$$C_R(A) = \{\{x_1, x_2, x_3\}, \{x_1, x_3, x_6\}, \{x_3, x_5, x_6\}, \{x_3, x_4, x_5\}\}$$

相容类:

- 设R为集合A上的相容关系，若$C\subseteq A$，如果对于C中任意两个元素a_1、a_2有a_1Ra_2，称C是由相容关系R产生的相容类。

相容类的判定

- 在关系图中

  (1) 完全多边形的顶点的集合；

  (2) 任一条连线上的两个结点构成的集合；

  (3) 任一个结点构成的单元素的集合.

最大相容类

- 设R为集合A上的相容关系，不能真包含在任何其他相容类中的相容类，称作最大相容类，记作C_R。

最大相容类的判定

- 在关系图中

(1)最大完全多边形的顶点的集合；

(2)任一条不是完全多边形的边的连线上的两个结点构成的集合；

(3)任一个孤立结点构成的单元素的集合.

- 设R为有限集A上的相容关系，C是一个相容类，那么必存在一个最大相容类C_R，使得$C \subseteq C_R$。

完全覆盖

- 在集合A上的给定相容关系R，其最大相容类的集合称作集合A的完全覆盖，记作$C_R(A)$。
- 设$C=\{C_1, C_2, \ldots, C_R\}$是集合A的覆盖，由C决定的关系$R=(C_1 \times C_1) \cup (C_2 \times C_2) \cup \ldots \cup (C_R \times C_R)$是A上的一个相容关系。
- 集合A上的相容关系R与完全覆盖$C_R(A)$存在一一对应。

偏序关系

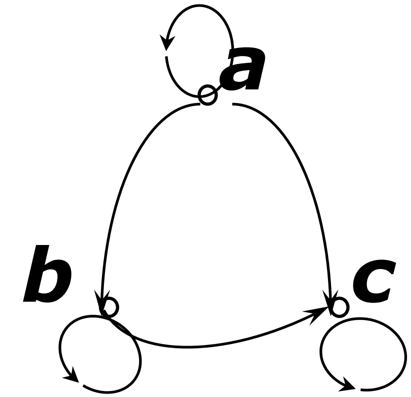
- 在普通生活中常见的许多粗劣（愚昧）的思维方式，可以通过学习数学来改善。有一种近乎是常见的且容易引起误解的假设，认为事物必须按线性次序来排列，这种假设可以通过学习偏序来消除。 — Cambridge Report
- 次序在现实生活中常见：
  - 小于，包含等
- 研究序理论的动机：
  - 研究一般次序关系
  - 推导出一般序关系的性质
  - 这些关系可以应用于所有特定的序关系

定义10.8.1（偏序关系 半序关系）

- 对非空集合A上的关系R，如果R是自反的、反对称的和传递的，则称R为A上的偏序关系。

- 在不会产生误解时，偏序关系R通常记作$\leq$。当xRy时，可记作$x \leq y$，读作x“小于等于”y。偏序关系又称弱偏序关系，或半序关系。

偏序关系



- 偏序关系R (记作$\preccurlyeq$)
  - 自反性: $\forall a \in A$，有$<a,a> \in R$
  - 反对称性: $\forall a,b \in \mathrm{R}$,如果$<a,b> \in R$且$<b,\mathrm{a}> \in R$,则必有$a = b$
  - 传递性: $\forall a,b,c \in A$,如果$<a,b> \in R$,$<b,c> \in R$, 必有$<a,c> \in R$

- 例:偏序关系
  - $A = \{a,b,c\}$
  - $R = \{<a,a>,<a,b>,<a,c>,<b,b>,<b,c>,<c,c>\}$

偏序关系举例

- 设A是实数集合的非空子集，则A上的小于等于关系和大于等于关系都是A上的偏序关系。

- 设A为正整数集合Z^+的非空子集，则A上的整除关系D_A

  $$D_A = \{<x, y> \mid x, y \in A \wedge x \mid y\}$$

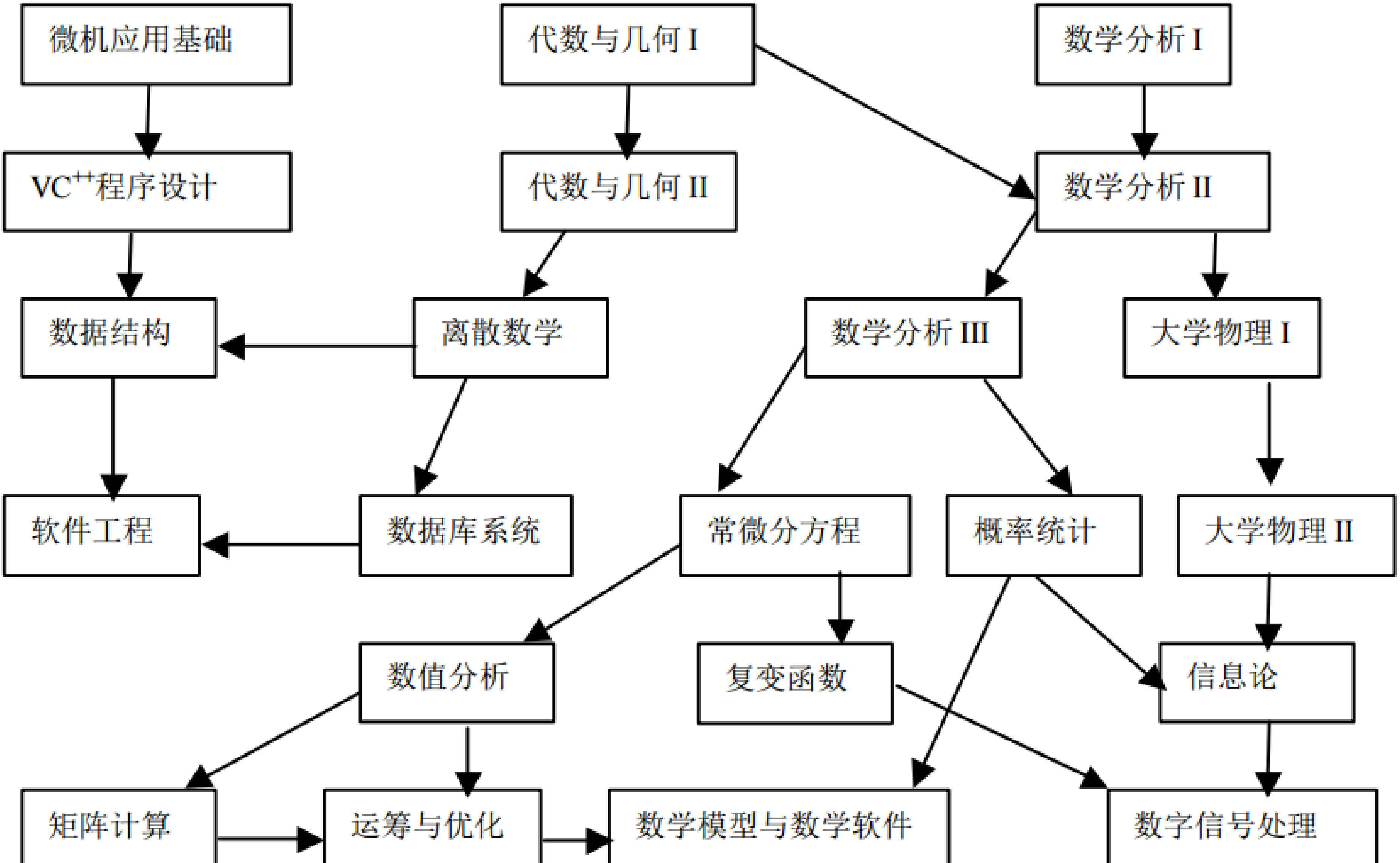
  是A上的偏序关系。

偏序关系举例

- 设A为一集合，P(A)为A的幂集，则P(A) 上的包含关系$R_{\subseteq} =\{<x,y>|\ x,y \in P(A) \wedge x \subseteq y\}$是P(A)上的偏序关系。

- 例 A={a, b}， P(A)={∅, {a}, {b}, A}
  试写出P(A) 上的包含关系$R_{\subseteq}$。

应用：课程设置



微机应用基础
代数与几何 I
数学分析 I
VC++程序设计
代数与几何 II
数学分析 II
数据结构
离散数学
数学分析 III
大学物理 I
软件工程
数据库系统
常微分方程
概率统计
大学物理 II
数值分析
复变函数
信息论
矩阵计算
运筹与优化
数学模型与数学软件
数字信号处理

应用：排序

- 在评分标准不能准确标定而又需要排序的场合里，把要排序的成员两两比较，确定两者之间谁好谁差，是较容易且较准确。
- 因此在这种场合使用“0 － 1”法评判。用偏序关系的传递性可以减少比较次数，
- 用反对称性又可使评判在比赛过程中动态进行。

定义10.8.2 （拟序关系 强偏序关系）

- 对非空集合A上的关系R，如果R是反自反的和传递的，则称R为A上的拟序关系 (Quasi-ordering relation) （ 反对称的）。

- 在不会产生误解时，拟序关系R通常记作$<$。当 xRy 时，可记作$x<y$，读作x“小于” y。拟序关系又称强偏序关系。

10.8 偏序关系

- 定理10.8.1　R为A上的拟序关系, 则R是反对称的。

　（可见，偏序与拟序差别只在自反性上）

- 定理10.8.2　对A上的拟序关系R, $R \cup R^0$是A上的偏序关系。
- 定理10.8.3　对A上的偏序关系R，R－R^0是A上的拟序关系。

定义10.8.3（偏序集）

- 集合A与A上的关系R一起称为一个结构。集合A与A上的偏序关系R一起称为一个偏序结构，或称偏序集，并记作$\langle A, R\rangle$。

如$\langle P(A), \subseteq\rangle$是偏序集。

哈斯图

- 得名于德国数学家Helmut Hasse
- 用来表示有限偏序集的一种数学图表
  - 偏序集：$< A, \preccurlyeq >$
  - 依据Birkhoff (1948)，这么叫是因为Hasse有效的利用了它们。
  - Hasse不是第一个使用它们的人，它们早就出现在如Vogt (1895)中.
  - 抽象有向无环图的传递简约.

定义10.8.4（盖住关系）

- 对偏序集$< A, \leq >$，如果$x, y \in A$，$x \leq y$，$x \neq y$，且不存在元素$z \in A$ 使得$x \leq z$且$z \leq y$，则称y盖住x。A上的盖住关系定义为$cov\ A$

$$cov\ A = \{< x, y > | x \in A \land y \in A \land y \text{ 盖住} x\}$$

10.8 偏序关系

- 哈斯图思路：

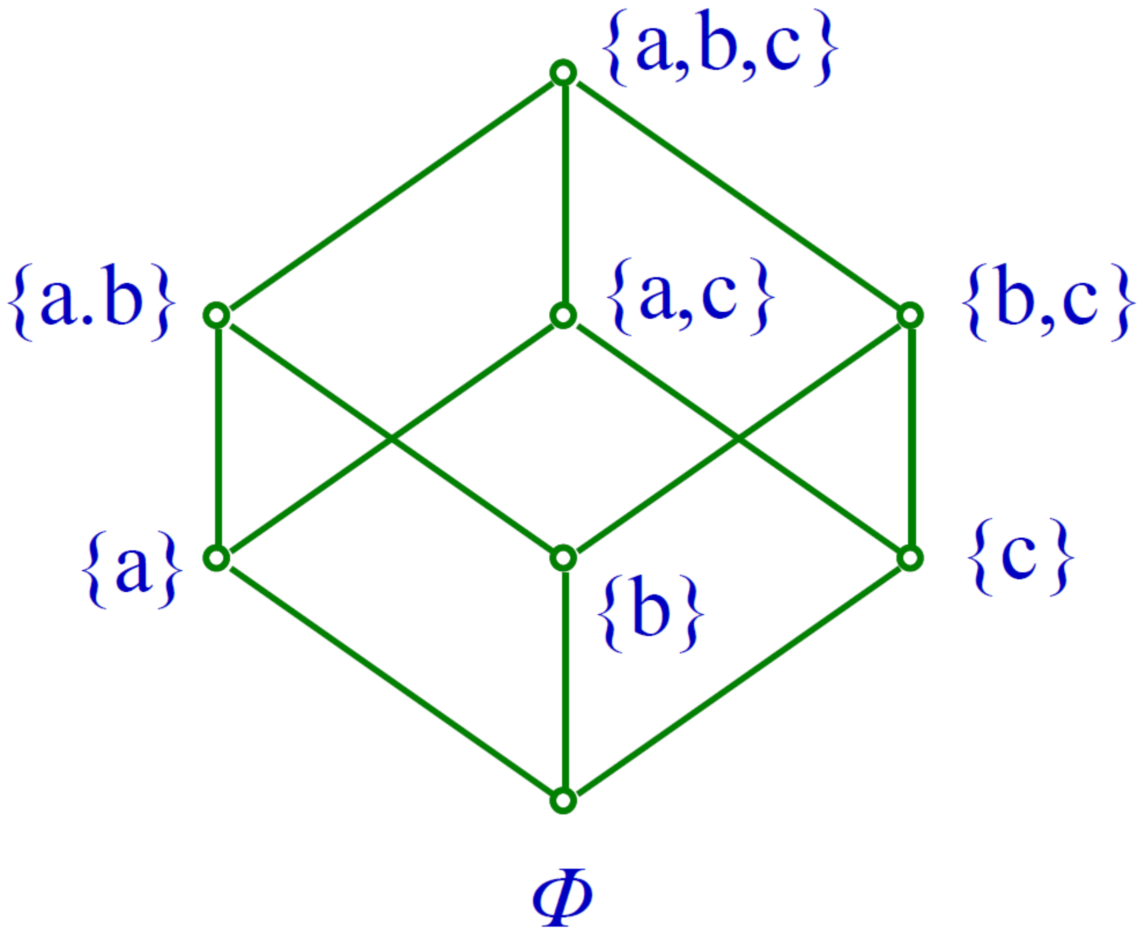
① 所有结点的自回路均省略

② 省略所有弧上的箭头,适当排列A中元素的位置,如$a \preccurlyeq b$,则a画在b的下方

③ 如$a \preccurlyeq b, b \preccurlyeq c$,则必有$a \preccurlyeq c$, a到b有边, b到c有边,则a到c的无向弧省略

- 条件2，3等于说如果b盖住a,则画一条从a到b的弧线，否则不画

- 例：$A=\{a,b,c\}$, $<P(A),\subseteq>$是偏序集，它的哈斯图如下图（图10.8.2）

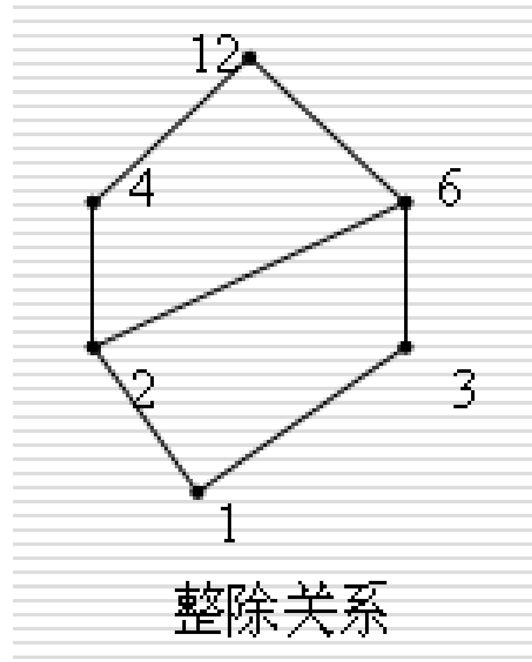


偏序集中的8个特殊元素（最大元、最小元）

- 对于偏序集$< A, \leq >$和集合A的任意子集B，
- 如果存在元素$b \in B$，使得任意$x \in B$都有$x \leq b$，则称b为B的最大元素，简称为最大元；

- 如果存在元素$b \in B$，使得任意$x \in B$都有$b \leq x$，则称b为B的最小元素，简称为最小元。

- 对于例中偏序关系①（即集合$A = \{1,2,3,4,6,12\}$上的整除关系），
- 令 $B_1 = \{1,6\}$、
  $B_2 = \{1,2,3\}$、
  $B_3 = \{4,6,12\}$、
  $B_4 = \{2,4,6\}$、
  $B_5 = \{1,2,6,12\}$、
  $B_6 = \{1,2,3,4,6,12\}$。



- 分别求出B_1、B_2、B_3、B_4、B_5和B_6的最大元和最小元。

对于集合$B_1=\{1,6\}$， 最大元为6，最小元为1；

对于集合$B_2=\{1,2,3\}$，
元素2和3不可比，所以，不存在最大元，最小元为1；

对于集合$B_3=\{4,6,12\}$，
元素4和6不可比，所以，不存在最小元，最大元为12；

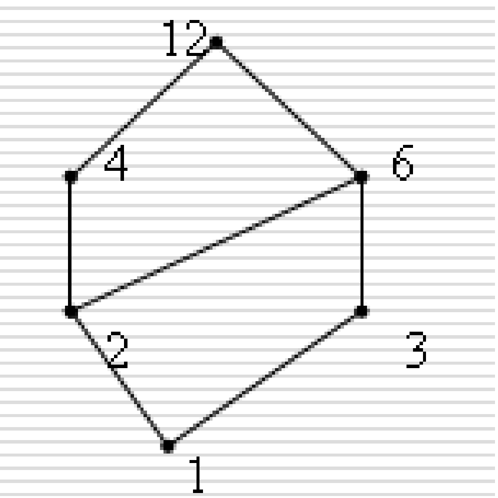
对于集合$B_4=\{2,4,6\}$，
元素4和6不可比，所以，不存在最大元，最小元为2；

对于集合$B_5=\{1,2,6,12\}$，

最大元为12，最小元为1；

对于集合$B_6=\{1,2,3,4,6,12\}$，

最大元为12，最小元为1。



整除关系

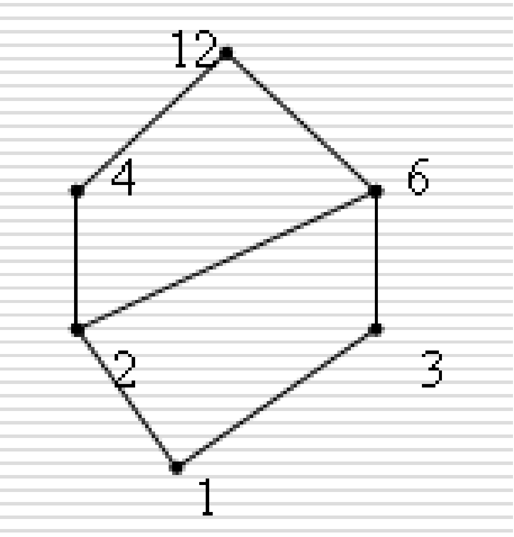
偏序集中的8个特殊元素
（极大元、极小元）

- 对于偏序集$< A, \leq >$和集合A的任意子集B，
- 如果存在元素$b \in B$，使得B中不存在其它元素x满足$b \leq x$，则称b为B的极大元素，简称为极大元；
- 如果存在元素$b \in B$，使得B中不存在其它元素x满足$x \leq b$，则称b为B的极小元素，简称为极小元。
- 注意：最大（小）元 vs. 极大（小）元

  最大（小）元必须与B中每个元素都可比，

  极大（小）元无此要求（只要求没有比它更大或更小的元素）。

- 对于例中偏序关系①（即集合$A = \{1,2,3,4,6,12\}$上的整除关系），
- 令 $B_1 = \{1,6\}$、
  $B_2 = \{1,2,3\}$、
  $B_3 = \{4,6,12\}$、
  $B_4 = \{2,4,6\}$、
  $B_5 = \{1,2,6,12\}$、
  $B_6 = \{1,2,3,4,6,12\}$。



整除关系

- 分别求出B_1、B_2、B_3、B_4、B_5和B_6的极大元和极小元。

对于集合$B_1 = \{1,6\}$，极大元为6，极小元为1；

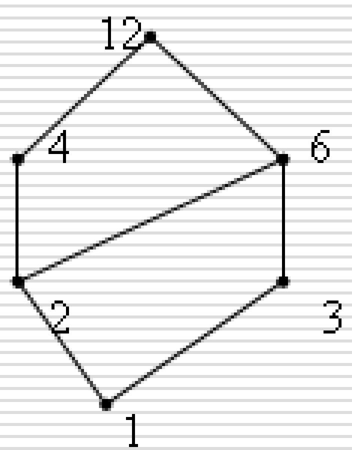
对于集合$B_2 = \{1,2,3\}$,极大元为2和3，极小元为1；

对于集合$B_3 = \{4,6,12\}$, 极大元为12，极小元为4和6；

对于集合$B_4 = \{2,4,6\}$, 极大元为4和6，极小元为2；

对于集合$B_5 = \{1,2,6,12\}$，极大元为12，极小元为1；

对于集合$B_6 = \{1,2,3,4,6,12\}$,极大元为12，极小元为1。



整除关系

最小元 最大元 极小元 极大元

(y在B中) 对偏序集$< A, \leq >$, $B \subseteq A$

(1) 若$(\exists y)(y \in B \wedge (\forall x)(x \in B \to y \preccurlyeq x))$, 则称$y$为$B$的最小元;

(2) 若$(\exists y)\big(y \in B \wedge (\forall x)(x \in B \to \mathrm{x} \leq y)\big)$,则称$y$为$B$的最大元;

(3) 若 $(\exists y)(y \in B \wedge (\forall x)\big((x \in B \wedge \mathrm{x} \leq y) \to x = y)\big)$, 则称y为B的极小元,

(4) 若$(\exists y)(y \in B \wedge (\forall x)\big((x \in B \wedge y \leq x) \to x = y)\big)$ 则称y为B的极大元。

注意几个区别

- 对于偏序集A上的子集B,

（1）B中的最小元应小于等于B中其它各元；

（2）B中的极小元应不大于B中其它各元（它小于等于B中一些元，可与B中另一些元无关系）；

（3）最小元（最大元）不一定存在，若存在必唯一；

（4）在非空有限集合B中，极小元（极大元）必存在，但不一定唯一；

（5）极大元不一定是最大元，但最大元显然是极大元；

偏序集中的8个特殊元素
（上界、下界）

- 对于偏序集$< A,\leq >$和集合A的任意子集B，
- 如果存在元素$a \in A$，使得任意$x \in B$都有$x \leq a$，则称a为子集B的上界；
- 如果存在元素$a \in A$，使得任意$x \in B$都有$a \leq x$，则称a为子集B的下界。

- 注意：B 的上（下）界不一定是 B 中的元素！

- 对于例中偏序关系①

（即集合$A = \{1,2,3,4,6,12\}$上的整除关系），

- 令 $B_1 = \{1,6\}$、

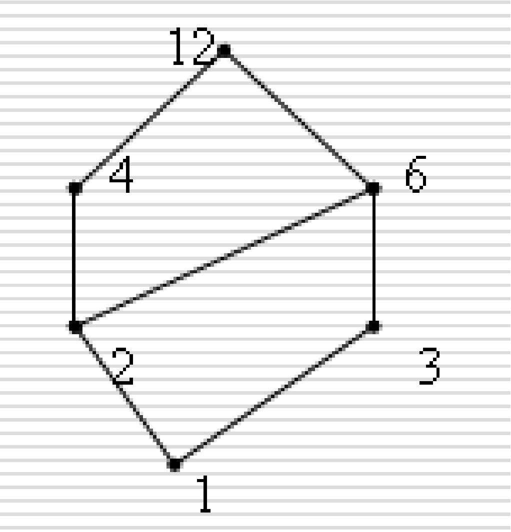
  $B_2 = \{1,2,3\}$、

  $B_3 = \{4,6,12\}$、

  $B_4 = \{2,4,6\}$、

  $B_5 = \{1,2,6,12\}$、

  $B_6 = \{1,2,3,4,6,12\}$。



整除关系

- 分别求出B_1、B_2、B_3、B_4、B_5和B_6的上界和下界。

对于集合$B_1 = \{1, 6\}$，上界为6和12，下界为1；

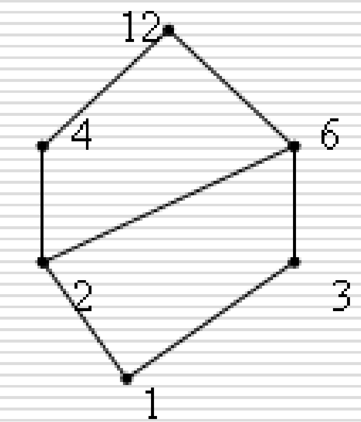
对于集合$B_2 = \{1, 2, 3\}$，上界为6和12，下界为1；

对于集合$B_3 = \{4, 6, 12\}$，上界为12，下界为1和2；

对于集合$B_4 = \{2, 4, 6\}$，上界为12，下界为1和2；

对于集合$B_5 = \{1, 2, 6, 12\}$，上界为12，下界为1；

对于集合$B_6 = \{1, 2, 3, 4, 6, 12\}$，上界为12，下界为1。



整除关系

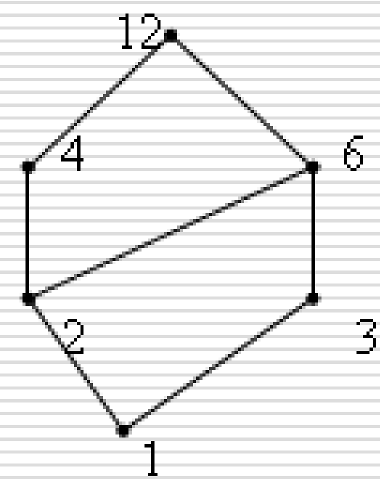
偏序集中的8个特殊元素（上确界、下确界）

对于偏序集$< A, \leq >$和集合A的任意子集B,

- 如果存在B的某个上界a，使得对于B的任意上界x都有$a \leq x$，则称a为子集B的最小上界或上确界，记为$\sup(B) = a$;
- 如果存在子集B的某个下界a，使得B的任意下界x都有$x \leq a$，则称a为子集B的最大下界或下确界，记为$\inf(B) = a$。
- 说明：

  令C是由B的所有上界组成的集合，则C的最小元c称为B的上确界；令C是B的所有下界的集合，则C的最大元c称为B的下确界。

- 对于例中偏序关系①（即集合$A = \{1,2,3,4,6,12\}$上的整除关系），
- 令 $B_1 = \{1,6\}$、
  $B_2 = \{1,2,3\}$、
  $B_3 = \{4,6,12\}$、
  $B_4 = \{2,4,6\}$、
  $B_5 = \{1,2,6,12\}$、
  $B_6 = \{1,2,3,4,6,12\}$。



整除关系

- 分别求出B_1、B_2、B_3、B_4、B_5和B_6的上确界和下确界。

对于集合$B_1 = \{1, 6\}$，上确界为6，下确界为1；

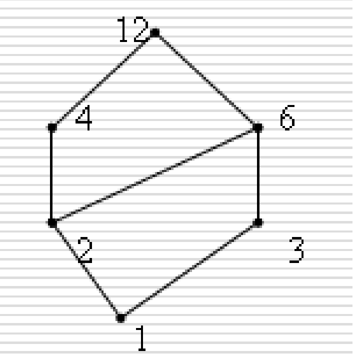
对于集合$B_2 = \{1, 2, 3\}$，上确界为6，下确界为1；

对于集合$B_3 = \{4, 6, 12\}$，上确界为12，下确界为2；

对于集合$B_4 = \{2, 4, 6\}$，上确界为12，下确界为2；

对于集合$B_5 = \{1, 2, 6, 12\}$，上确界为12，下确界为1；

对于集合$B_6 = \{1, 2, 3, 4, 6, 12\}$，上确界为12，下确界为1。



整除关系

上界 下界 上确界 下确界

(y在A中) 对偏序集$< A, \leq >$, $B \subseteq A$

(1) 若$(\exists y)(y \in A \wedge (\forall x)(x \in B \to x \leq y))$, 则称 y为B的上界;

(2) 若$(\exists y)\big(y \in A \wedge (\forall x)(x \in B \to y \leq x)\big)$, 则称 y为B的下界;

(3) 若集合$C = \{y|y是B的上界\}$, 则C的最小元称为B的上确界或最小上界;

(4) 若集合$C = \{y|y是B的下界\}$, 则C的最大元称为B的下确界或最大下界;

8大元的性质

定理

- 对于偏序集$<A,\preccurlyeq>$和集合A的任意子集B：

① 若b为B的最大元，则b为B的极大元、上界和上确界；

② 若b为B的最小元，则b为B的极小元、下界和下确界；

③ 若a为B的上界且$a \in B$，则a为B的最大元；

④ 若a为B的下界且$a \in B$，则a为B的最小元。

8大元的性质

定理

- 对于偏序集$< A,\preccurlyeq>$和集合A的任意子集B：

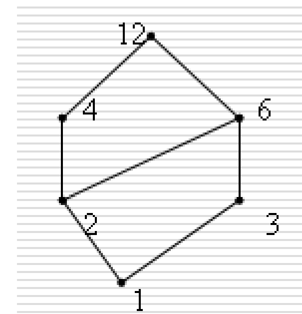
① 若B有最大元，则B的最大元唯一；

② 若B有最小元，则B的最小元唯一；

③ 若B有上确界，则B的上确界唯一；

④ 若B有下确界，则B的下确界唯一；

⑤ 若B为有限集，则B的极大元、极小元恒存在。



整除关系

Multiple Choice(multiple)

Points: 1

Setting

对偏序集的非空子集，下面哪句陈述是成立的？

A 最小元一定是下界，且是下确界A

B 下界、下确界不一定是最小元

提交

偏序关系

- 可比：a与b可比 $\Leftrightarrow$ a $\leq$ b$\vee$b $\leq$ a
  - 可比不同于等于
- 例：A={1，2，3}，$\leq$是A上的整除关系
  - 1，3可比

- 全序关系R：R是A上的偏序关系，满足：
  - $\forall a,b \in A$, a与b可比
- 例：实数上的$\leq$,$\geq$关系是全序关系

定义10.8.8（全序关系与全序集）

- 对偏序集 $\langle A, \le \rangle$，如果对任意的 $x, y \in A$，x 和y都可比，则称≤为A上的全序关系 (Total ordering relation)，或称线序关系。
- 称 $\langle A, \le \rangle$ 为全序集。

上确界、下确界的讨论

- 全序关系：如果有上（下）界，就有上（下）确界

偏序与全序

- 偏序只对部分元素成立关系R，全序对集合中任意两个元素都有关系R（线性序）。
- 例如：
  - 集合的包含关系就是半序，也就是偏序，因为两个集合可以互不包含；
  - 而实数中的大小关系是全序，两个实数必有一个大于等于另一个；
  - 又如：复数中的大小就是半序，虚数不能比较大小。

- 判断下列关系是否为全序关系？并给出其哈斯图。

① 集合{2, 3, 4, 6, 8, 12}上的整除关系*R*1；

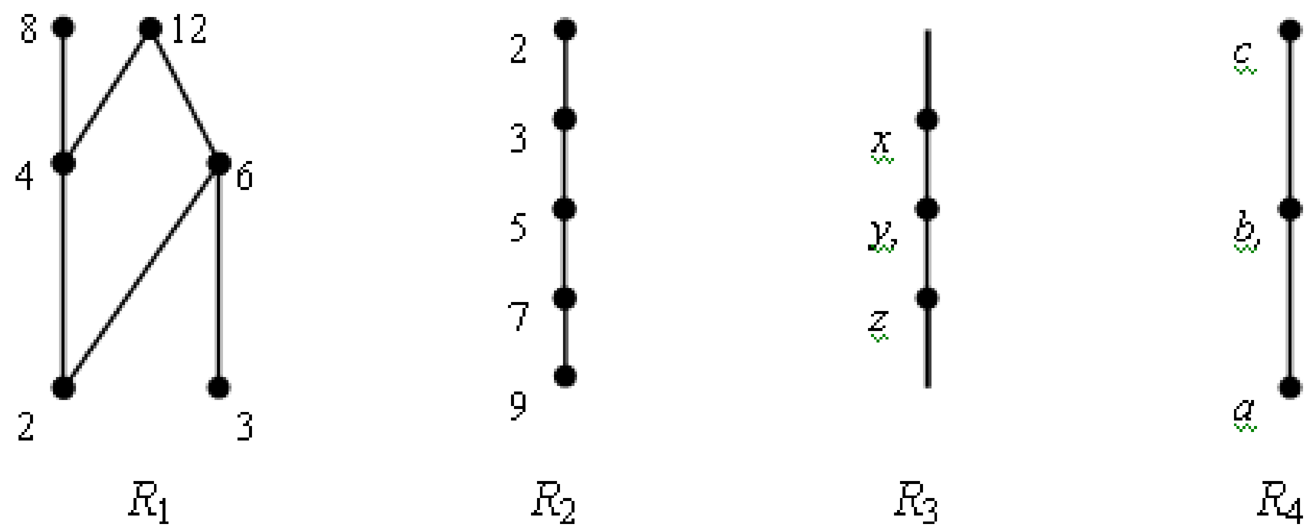
② 集合{2, 3, 5, 7, 9}上的大于等于关系*R*2；

③ 实数集合上的小于等于关系*R*3；

④ 集合{*a*, *b*, *c*}上的关系*R*4 ={<*a*, *a*>, <*b*, *b*>, <*c*, *c*>, <*a*, *b*>, <*b*, *c*>, <*a*, *c*>}；

解: 关系①、②、③和④都是偏序关系。

②、③和④都是全序关系；①不是全序关系。



10.8 偏序关系

定义10.8.9（链、反链）

- 对偏序集$< A,\le >$, $B \subseteq A$

(1)如果对任意的$x, y \in B$, x 和 y 都是可比的，则称B为A上的链，B 中元素个数称为链的长度。

(2)如果对任意的$x, y \in B$, x 和 y 都不是可比的，则称B为A上的反链，B 中元素个数称为反链的长度。

定理10.8.4（偏序集的分解定理）

- 对偏序集$< A, \leq >$，设A中最长链的长度是n，则将A中元素分成不相交的反链，反链个数至少是n。
- 其对偶定理称为Dilworth定理：

定理

令（A,≤）是一个有限偏序集，并令m是反链的最大的大小。则A可以被划分成m个但不能再少的链。

链的最少划分数=反链的最长长度

- 等价证明：设A中最长链的长度是n, A中存在n个划分块的划分，每个划分块都是反链。

对n作归纳。

当$n=1$时，A本身为一反链，取$P_A=\{A\}$, 则P_A为A的只含一个划分块且为反链的划分。

设$n=k$时结论成立。

当$n=k+1$时，取M为A中全体极大元的集合，可知M不为空, 且A中每条最长链对应A的极大元均在M中。且M中各元素均不可比，于是M为一反链。

$A-M$中最长链的长度为k，由归纳假设可知，$A-M$中存在每个划分块都是反链，且有k个划分块的划分P'，则$P_A=P'\cup\{M\}$为A的满足要求的划分。

定理10.8.5

- 对偏序集$< A, \leq >$, 若A中元素为$mn+1$个，则A中或者存在一条长度为$m+1$的反链，或者存在一条长度为$n+1$的链。
- 用反证法。
- 若不然, A中既无长度为$m+1$的反链，也无长度为$n+1$的链，于是A中最长链的长度至多为n，设最长链的长度为r $(r \leq n)$, 由定理10.8.4可知， A中存在 r 个划分块的划分，且每个划分块至多有m个元素，于是A中至多有mn个元素，这与已知矛盾。

定义10.8.10 （良序关系与良序集）

- 对偏序集$< A, \leq >$，如果A的任何非空子集都有最小元，则称$\leq$为良序关系，称$< A, \leq >$为良序集。

Multiple Choice(multiple)

Points: 1

Setting

判断下列关系是否为良序关系？

① 集合{2, 3, 4, 6, 8, 12}上的整除关系$R1$；

② 集合{2, 3, 5, 7, 9}上的大于等于关系$R2$；

③ 实数集合上的小于等于关系$R3$；

④ 集合$\{a, b, c\}$上的关系$R4 =\{<a, a>, <b, b>, <c, c>, <a, b>, <b, c>, <a, c>\}$。

A (1)是良序关系

B (2)是良序关系

C (3)是良序关系

D (4)是良序关系

提交

- 判断下列关系是否为良序关系？

① 集合$\{2, 3, 4, 6, 8, 12\}$上的整除关系$R1$；

② 集合$\{2, 3, 5, 7, 9\}$上的大于等于关系$R2$；

③ 实数集合上的小于等于关系$R3$；

④ 集合$\{a, b, c\}$上的关系$R4 = \{<a,a>,<b,b>,<c,c>,<a,b>,<b,c>,<a,c>\}$。

- 解: (首先判断是否为偏序关系，然后再判断其任何一个非空子集是否都有最小元)。②和④是良序关系。

良序集一定是全序集；

有限的全序集一定是良序集。

10.8 偏序关系

定理10.8.6 一个良序集一定是全序集

定理10.8.7 一个有限的全序集一定是良序集

定理10.8.8 （良序定理）任意的集合都可以良序化

对每一个集合来说，都存在一种排序方法，使得它的所有子集都有最小元素。

$<N,\leq>$是全序集，也是良序集。$<Z,\leq>$是全序集，但不是良序集（Z*表示整数集*），Z无最小元。

整数集合的良序化

- 整数的下列关系R是良序的：xRy，当且仅当下列条件之一成立：
- x=0；
- x是正数，而y是负数；
- x和y都是正数，而x≤y；
- x和y都是负数，而y≤x。
- 这个序关系可以表示为：
- 0 1 2 3 4 …… -1 -2 -3 -4 -5 ……

Zermelo's Well-Ordering Theorem

- **Theorem** *Every set can be well-ordered.*
- *Proof*. Let A be a set. To well-order A, it suffices to construct a transfinite one-to-one sequence $< a_\alpha : \alpha < \theta >$ that enumerates A. That we can do by induction, using a choice function f for the family S of all nonempty subsets of A. We let for every α

$$a_\alpha = f(A - \{a_\xi : \xi < \alpha\})$$

if $A - \{a_\xi : \xi < \alpha\}$ is nonempty. Let θ be the least ordinal such that $A = \{a_\xi : \xi < \theta\}$. Clearly, $< a_\alpha : \alpha < \theta >$ enumerates A.

选择公理，良序定理，Zorn引理的分裂状态

- 选择公理显然为真
- 良序定理显然为假
- Zorn引理只有天知道

- Zorn引理：如果偏序集X的每个链都有上界，则X有极大元

10.8 偏序关系

定义10.8.11 （闭区间 开区间）

- 在全序集 $<R, \leq>$ 上，对于 $a, b \in R, a \neq b, a \leq b$

（1） $[a, b] = \{x | x \in R \wedge a \leq x \leq b\}$ 称为从a到b的闭区间；

（2） $(a, b) = \{x | x \in R \wedge a \leq x \leq b \wedge x \neq a \wedge x \neq b\}$称为从a到b的开区间.

- 上述中的R为实数集。

10.8 偏序关系

(3) $[a,b)=\{x|x\in R\wedge a\le x\le b\wedge x\ne b\}$

$(a,b]=\{x|x\in R\wedge a\le x\le b\wedge x\ne a\}$

都称为从a到b的半开区间。

(4) 还可以定义下列区间

$(-\infty,a]=\{x|x\in R\wedge x\le a\}$

$(-\infty,a)=\{x|x\in R\wedge x\le a\wedge x\ne a\}$

$[a,\infty)=\{x|x\in R\wedge a\le x\}$

$(a,\infty)=\{x\mid x\in R\wedge a\le x\wedge x\ne a\}$

几个主要序关系的性质

关系\性质	自反性	反自反性	对称性	反对称性	传递性
等价关系	√	×	√	×	√
相容关系*	√	×	√	×	×
偏序关系	√	×	×	√	√
拟序关系	×	√	×	√ （隐含）	√
全序关系	√	×	×	√	√
良序关系*	√	×	×	√	√

第10章重点内容

- 二元关系概念与表示
- 关系的主要性质

  自反、反自反、对称、反对称、传递
- 等价关系（与划分）

  自反、对称、传递，掌握证明方法
- 偏序关系

  自反、反对称、传递，掌握证明方法

13	十二	2	3	4	5	6	7	8
14		9	10	11	12	13	14	15
15		16	17	18	19	20	21	22
16		23	24	25	26	27	28	29
17		30	31					

- 13周-15周 学生评教
- 14周：第11章　　　15周：第12章
- 16周：总复习
- 考试时间：1月8日下午2:30—4:30
- 考场：五教5305、五教5204

谢谢！