离 散 语 义

离散数学：期末总结

刘世霞
shixia@tsinghua.edu.cn


最后一节课
划重点说
考试内容是
say the focus of the exam is

发了一张纸

*表示非基本要求的内容

考试内容

概述，第 1 章 1.1~1.5	绪论，离散数学与数理逻辑学科概述，研究内容与发展概况 命题概念，命题联结词与真值表，合式公式重言式，命题形式化
第 1 章 1.6 第 2 章 2.1 ~2.4	波兰表达式，悖论简介，其它联结词，等值定理，基本等值公式 命题公式与真值表的关系，联结词的完备集，对偶式
放假	
第 2 章 2.5~ 2.10	范式概念，析取范式，合取范式，主范式 基本推理公式，推理演算与推理规则，归结推理法，应用举例
第 3 章 3.1 ~ 3.6	命题逻辑的公理化，公理系统的结构，命题逻辑的公理系统 公理系统的完备性，王浩算法*，非标准逻辑简介*
第 4 章 4.1 ~ 4.6	谓词逻辑的基本概念，谓词和个体词，函数和量词，合式公式 自然语句的形式化，有限域下公式的表示法 公式的普遍有效性和判定问题
第 5 章 5.1 ~ 5.3	谓词逻辑等值和推理演算，否定型等值式，量词分配等值式 范式，前束范式，SKOLEM 标准型，存在量词前束范式*
第 5 章 5.4 ~ 5.6	基本的推理公式及其证明方法，推理演算与推理规则 谓词逻辑的归结推理法，谓词逻辑应用举例

考试内容

第 9 章 9.5~ 9.7	幂集性质，传递集合，包含排斥原理，有限集合的基数 集合论公理系统简介，无穷公理与自然数集合
第 10 章 10.1 ~10.4	关系的基本概念，二元关系与特殊关系，关系矩阵和关系图 关系的逆、合成，限制和象，关系的基本性质
第 10 章 10.4 ~ 10.6	关系基本性质的几个结论，关系的闭包，关系的合成 闭包的性质及其构造方法，等价关系的概念
第 10 章 10.6 ~ 10.8	划分与等价关系，相容关系和覆盖，偏序关系与哈斯图 上确界和下确界，全序关系和链
第 11 章 11.1, 11.2，11.5	函数，任意集合上的函数定义，特殊函数，满射单射与双射 选择公理*，函数的合成，函数的逆*
第 12 章 12.1~12.7	实数集合与集合的基数，集合的等势，有限集合与无限集合 的基数，可数集合与连续统假设

离散数学1
的主要内容

- 两个演算加四论
- 两个演算（命题演算与谓词演算）
- 集合论（集合、关系、函数、基数）
- 模型论（形式语言语法与语义间的关系）
- 递归论（可计算性与可判定性）
- 证明论（数学本身的无矛盾性）

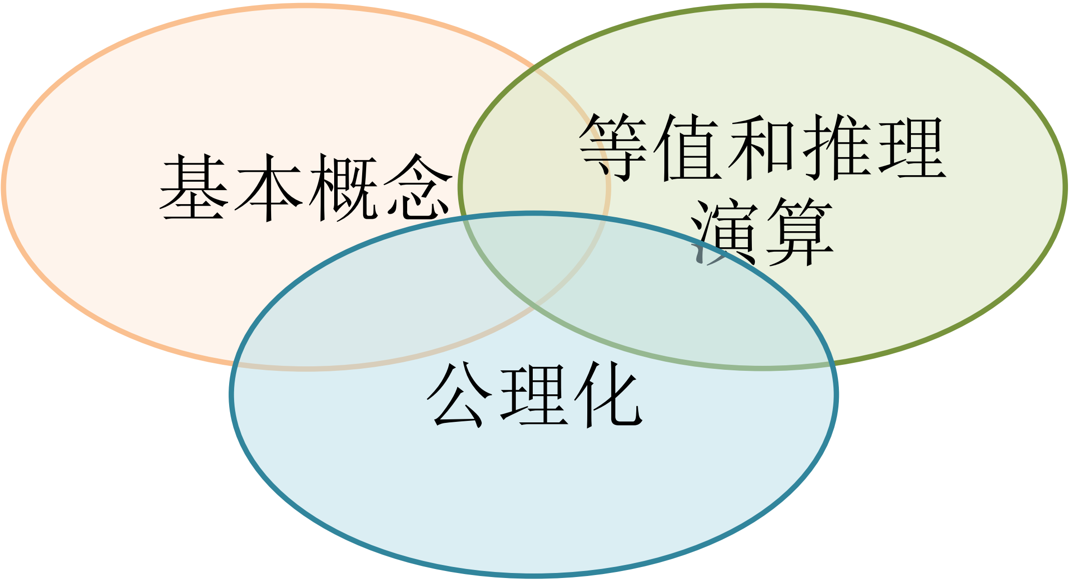
命题

陈述句

语

主要内容

- 命题逻辑



命题(proposition)

命题是一个能判断真假且非真即假的陈述句。

1. 命题必须是一个陈述句，而祈使句、疑问句和感叹句都不是命题。

2. 作为命题的陈述句所表达的判断结果有真假之别

命题的真值：命题所表达的判断结果，

真值只取两个值：真或假(1或0)。

真命题：与事实相符或表达的判断正确；真值为真

假命题：与事实不符或表达的判断错误；真值为假

规定：**任何命题的真值都是唯一的；**

不能非真非假，也不能既真又假。

$x+y>5.$

Multiple Choice(multiple) Points: 1

Setting

以下哪些是命题?

- A 8小于10.
- B 8大于10.
- C 任一个>2的偶数可表成两个素数的和.
- D 8大于10吗?
- E X大于Y.
- F 我正在撒谎。

提交

1.2　常用的5个命题联结词

- 常用的5个命题联结词：
- 否定联结词　（非，$\neg$ ）
- 合取联结词　（与，$\wedge$ ）
- 析取联结词　（或，$\vee$ ）
- 蕴涵联结词　（如果…，则… ，$\rightarrow$ ）
- 双蕴涵联结词　（当且仅当，$\leftrightarrow$ ）

基本复合命题
（5个常用联结词）的真值表

p	q	$\neg p$	$p \wedge q$	$p \vee q$	$p \rightarrow q$	$p \leftrightarrow q$
0	0	1	0	0	1	1
0	1	1	0	1	1	0
1	0	0	0	1	0	0
1	1	0	1	1	1	1

析取及异或联结词举例

- 例1．5　将下列命题符号化

（1）张明喜欢学数学或计算机。

（2）张明报考的第一志愿（唯一）只选择数学专业或软件专业。

- 解　　先将原子命题符号化
- （1）　p：张明喜欢学数学。
- 　　　　q：张明喜欢学计算机。
- 显然（1）中的“或”为相容或，即p与q可以同时为真，符号化为$p \vee q$。

（2） 张明报考的第一志愿只选择数学专业或软件专业。

- 设 r：张明选择数学专业

  s：张明选择软件专业
- 若将命题符号化为$r \vee s$，由于r，s的联合取值情况有四种：同真，同假，一真一假（两种情况）。张明就可能同时选择数学专业和软件专业，这不符合报考的实际情形。
- 如何达到只能选择唯一的第一志愿要求呢？

“或”与∨

- 设　　*r*：张明选择数学专业

  s：张明选择软件专业

- 可以使用多个联结词，将该命题符号化为

$$(r\wedge\neg s)\vee(\neg r\wedge s)$$

- 此复合命题为真当且仅当*r*，*s*中一个为真，且另一个为假。
- 由题意可知，（2）中的“或”应为排斥或（不可兼或）。

异或联接词与命题形式化

自然语句的形式化

教材P10例3：给出三个命题

p：今晚我在家里看电视。

q：今晚我去体育场现场看球赛。

r：今晚我在家里看电视或去体育场看球赛。

问题是：命题 r和$p \vee q$表达的是否是同一命题？

（注：上述看电视与看球赛均指同一时间段）

异或联接词与命题形式化

p	q	r
0	0	0
0	1	1
1	0	1
1	1	0

该表的前三行很容易理解。而第四行是说今晚我在家看电视，又去体育场看球赛。显然据题意假设，对同一个人、同一时间段这是不可能发生的事情。从而这时r 的真值为F。

这也说明:

r与p ∨q在逻辑上是并不相等的，即r中出现的“或”不能以普通的“∨”来表示。

析取联结词“∨” 与 异或“$\bar{\vee}$”的真值表

（注：$\bar{\vee}$为∨上面加一横，见教材P10，不可兼或）

p	q	$p \vee q$
0	0	0
0	1	1
1	0	1
1	1	1

p	q	$p \bar{\vee} q$
0	0	0
0	1	1
1	0	1
1	1	0

关于联结词的几点说明

- 对简单命题多次使用联结词集中的联结词，可以组成更为复杂的复合命题。
- 求复合命题的真值时，除依据前面的真值表外，还要规定联结词的优先顺序
- 教材中规定的**联结词优先顺序**为：

  （），¬，∧，∨，→，↔，

  同一优先级的联结词，先出现者先运算。
- 在逻辑中所关心的是复合命题中命题之间的真值关系，而并不关心命题的内容。

$p \vee q \rightarrow p \vee r$

1.3 合式公式及其赋值

- 介绍了将命题表示为符号串。
- 是否每个符号串都是命题呢?

$$p\ q\ \rightarrow$$

- 什么样的符号串才能表示命题呢?
- 如下命题形式定义的符号串表示的才是命题(公式)。

合式公式(命题公式)的定义

定义1.6 合式公式

(1) 单个命题变项是合式公式，并称为原子命题公式。

(2) 若A是合式公式，则 ($\neg A$) 也是合式公式。

(3) 若A，B是合式公式，则 ($A \wedge B$)，($A \vee B$)，

($A \rightarrow B$)，($A \leftrightarrow B$) 也是合式公式。

(4) 只有有限次地应用 (1) ～ (3) 形成的符号串

才是合式公式。

合式公式也称为命题公式或命题形式，简称公式。

- 设A为合式公式，B为A中的一部分，若B也是合式公式，则称B为A的子公式。

$p\wedge(p\to q)\to q$ 的真值表

p	q	$p\to q$	$p\wedge(p\to q)$	$p\wedge(p\to q)\to q$
0	0	1	0	1
0	1	1	0	1
1	0	0	0	1
1	1	1	1	1

命题公式的分类

定义1.9　重言式 矛盾式 可满足式

设A为任一命题公式，

（1）若A在它的各种赋值下取值均为真，

则称A是重言式或永真式。

（2）若A在它的各种赋值下取值均为假，

则称A是矛盾式或永假式。

（3）若A不是矛盾式，则称A是可满足式

1.4 重言式与代入规则

- **代入规则**

一个重言式，对其中所有相同的命题变项都用一合式公式代换，其结果仍为一重言式。这一规则称为代入规则。

换句话说，A是一个公式，对A使用代入规则得到公式B，若A是重言式，则B也是重言式。

1.4 重言式与代入规则

- **代入规则的具体要求为：**

  1. **公式中被代换的只能是命题变项（原子命题），而不能是复合命题。**

  2. **对公式中某命题变项施以代入，必须对该公式中出现的所有同一命题变项施以相同的代换。**

1.4 重言式与代入规则

例2：

判断

$$((R\vee S)\wedge((R\vee S)\rightarrow(P\vee Q)))\rightarrow(P\vee Q)$$

为重言式.

不难验证（$A\wedge(A\rightarrow B)$）$\rightarrow B$是重言式。

1.4 重言式与代入规则

作代入

$$\frac{A}{(R \vee S)}, \frac{B}{(P \vee Q)}$$

便知

$$((R \vee S) \wedge ((R \vee S) \rightarrow (P \vee Q)) \rightarrow (P \vee Q)$$

是重言式。

1.5 命题形式化

所谓命题符号化，就是用命题公式的符号串来表示给定的命题。

- 命题符号化的方法

  1. 明确给定命题的含义。

  2. 对复合命题，找联结词，分解出各个原子命题。

  3. 设原子命题符号，并用逻辑联结词联结原子命题符号，构成给定命题的符号表达式。

例1.说离散数学无用且枯燥无味是不对的。

P：离散数学是有用的。

Q：离散数学是枯燥无味的。

该命题可写成：$\neg(\neg P \wedge Q)$

例2.如果小张与小王都不去，则小李去。

P：小张去。 Q：小王去。 R：小李去。

该命题可写成：$(\neg P \wedge \neg Q) \rightarrow R$

1.5　命题形式化

1. 注意掌握用不同的方式表示同一命题公式的方法

2. 善于以真值表为工具分析、验证、解决命题形式化中的问题

第二章 命题逻辑的等值和推理演算

- 2.1 等值定理
- 2.2 等值公式
- 2.3 命题公式与真值表的关系
- 2.4 联接词的完备集
- 2.5 对偶式
- 2.6 范式
- 2.7 推理形式
- 2.8 基本的推理公式
- 2.9 推理演算
- 2.10 归结推理法

2.1 等值定理

⇔不是联结词
$A \Leftrightarrow B$ 与 $A \leftrightarrow B$

等值

给定两个命题公式 A 和 B，设 $P_1, P_2, \ldots,$ P_n 为出现于 A 和 B 中的所有命题变项，则公式 A 和 B 共有 2^n 个解释。

若在任一解释下，公式 A 和 B 的真值都相同，则称 A 和 B 是等值的、或称等价，记作

$A=B$ 或 $A \Leftrightarrow B$。

2.1 等值定理

- **定理2-1-1**

  设$\boldsymbol{A}$，$\boldsymbol{B}$为两个命题公式，$\boldsymbol{A}=\boldsymbol{B}$的充分必要条件是$\boldsymbol{A}\leftrightarrow\boldsymbol{B}$为一个重言式。

重要的等值式

- **双重否定律** $\neg\neg P = P$
- **结合律**

$$(P \lor Q) \lor R = P \lor (Q \lor R)$$
$$(P \land Q) \land R = P \land (Q \land R)$$
$$(P \leftrightarrow Q) \leftrightarrow R = P \leftrightarrow (Q \leftrightarrow R)$$
$$(P \rightarrow Q) \rightarrow R \neq P \rightarrow (Q \rightarrow R)$$

“$\rightarrow$”不满足结合律

- 3. 交换律

  $P \vee Q = Q \vee P$

  $P \wedge Q = Q \wedge P$

  $P \leftrightarrow Q = Q \leftrightarrow P$

  $P \rightarrow Q \neq Q \rightarrow P$

- “$\rightarrow$” 不满足交换律

- 4. 分配律

  $P \vee (Q \wedge R) = (P \vee Q) \wedge (P \vee R)$

  $P \wedge (Q \vee R) = (P \wedge Q) \vee (P \wedge R)$

  $P \rightarrow (Q \rightarrow R) = (P \rightarrow Q) \rightarrow (P \rightarrow R)$

  $P \leftrightarrow (Q \leftrightarrow R) \neq (P \leftrightarrow Q) \leftrightarrow (P \leftrightarrow R)$

- “$\leftrightarrow$” 不满足分配律

-

- 5. **等幂律（恒等律）**

  $$P \vee P = P$$
  $$P \wedge P = P$$
  $$P \rightarrow P = T$$
  $$P \leftrightarrow P = T$$

- 6. **吸收律**

  $$P \vee (P \wedge Q) = P$$
  $$P \wedge (P \vee Q) = P$$

- 7. **摩根（De Morgan）律：**

$$\neg(P \lor Q) = \neg P \land \neg Q$$

$$\neg(P \land Q) = \neg P \lor \neg Q$$

对蕴含词、双条件词作否定有

$$\neg(P \rightarrow Q) = P \land \neg Q$$

$$\neg(P \leftrightarrow Q) = \neg P \leftrightarrow Q = P \leftrightarrow \neg Q$$

$$= (\neg P \land Q) \lor (P \land \neg Q)$$ **（借助图形）**

- 8. **同一律：**

  $P \lor F = P \qquad P \land T = P$

  $T \to P = P \qquad T \leftrightarrow P = P$

  $P \to F = \neg P \qquad F \leftrightarrow P = \neg P$

- 9. **零律：**

  $P \lor T = T$

  $P \land F = F$

  $P \to T = T$

  $F \to P = T$

- 10. **补余律：**

$$P \vee \neg P = T \qquad P \wedge \neg P = F$$

还有

$$P \rightarrow \neg P = \neg P$$

$$\neg P \rightarrow P = P$$

$$P \leftrightarrow \neg P = F$$

- 蕴涵等值式 $A \to B = \neg A \vee B$
- **等价等值式**：$A \leftrightarrow B = (A \to B) \wedge (B \to A)$
- ***假言易位***：$A \to B = \neg B \to \neg A$
- ***等价否定等值式***：$A \leftrightarrow B = \neg A \leftrightarrow \neg B$
- **归谬论**：$(A \to B) \wedge (A \to \neg B) = \neg A$

证明其他等值式

2.2.4 等值演算

- 定义
  - 由已知等值式推演出另外一些等值式的过程称为等值演算。
- 方法
  - 方法1：列真值表。
  - 方法2：公式的等价变换.

置换定律:A是一个命题公式，X是A中子公式，如果$X=Y$，用Y代替A中的X得到公式B，则$A=B$。

用途1：判别命题公式的类型

- 例1　　判别$\neg(P\wedge Q)\to(\neg P\vee(\neg P\vee Q))$公式类型.

解　原式

$\neg\neg(P\wedge Q)\vee((\neg P\vee\neg P)\vee Q)$ (蕴涵等值式,结合律)

$=(P\wedge Q)\vee(\neg P\vee Q)$　　(双重否定律，幂等律)

$=(P\wedge Q)\vee(Q\vee\neg P)$　　(交换律)

$=((P\wedge Q)\vee Q)\vee\neg P$　　(结合律)

$=Q\vee\neg P$　　(吸收律)

可满足式

用途2：验证两个公式等值

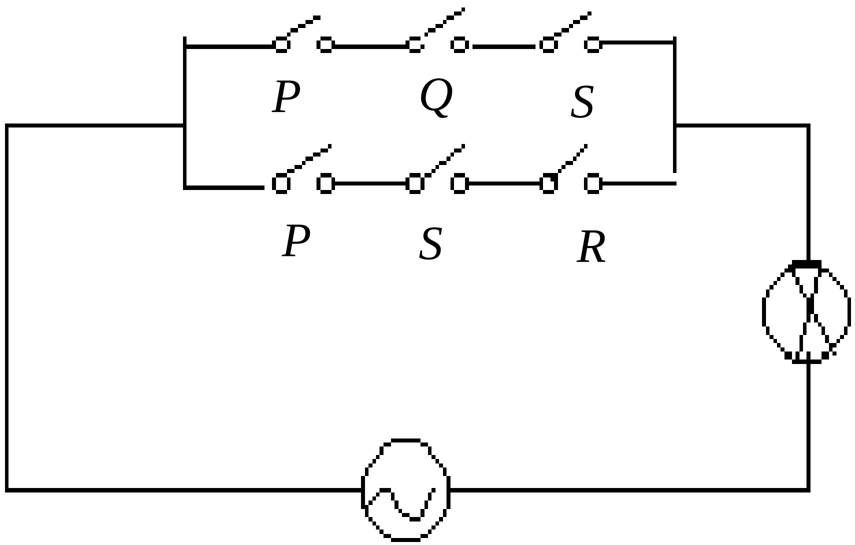
例3：证明$P\to(Q\to R)=(P\wedge Q)\to R$

- 证明：

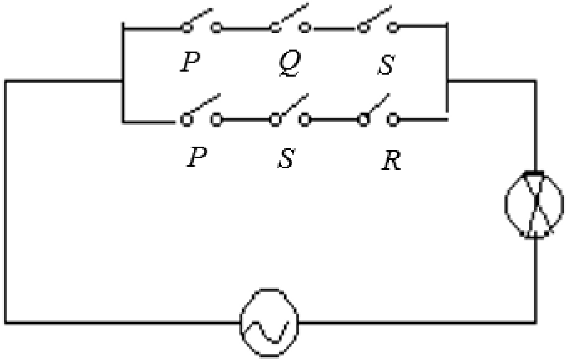
$$
\begin{aligned}
P\to(Q\to R) &= P\to(\neg Q\vee R) && \text{（置换）}\\
&= \neg P\vee(\neg Q\vee R) && \text{（置换）}\\
&= (\neg P\vee\neg Q)\vee R && \text{（结合律）}\\
&= \neg(P\wedge Q)\vee R && \text{（摩根律）}\\
&= (P\wedge Q)\to R && \text{（置换）}
\end{aligned}
$$

用途3：解决实际问题

- 例6：试用较少的开关设计一个与下图有相同功能的电路。



解：可将该图所示之开关



电路用下述命题公式表示：

$$(P \wedge Q \wedge S) \vee (P \wedge R \wedge S)$$

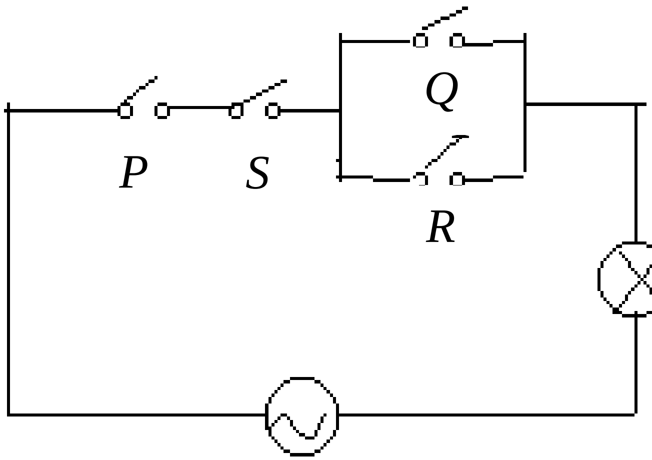
利用基本等值公式，将上述公式转化为：

$$(P \wedge Q \wedge S) \vee (P \wedge R \wedge S)$$

$$= ((P \wedge S) \wedge Q) \vee ((P \wedge S) \wedge R)$$

$$= (P \wedge S) \wedge (Q \vee R)$$

所以其开关设计图可简化为



两个重要的命题联结词

- **与非联接词**

与非联接词是二元命题联结词。两个命题P和Q用与非联接词"↑"联结起来，构成一个新的复合命题，记作$P\uparrow Q$。读作P和Q的"与非"。当且仅当P和Q的真值都是T时，$P\uparrow Q$的真值为F，否则$P\uparrow Q$的真值为T。 $P\uparrow Q = \neg(P\wedge Q)$ （真值表）

P	Q	$P\uparrow Q$
F	F	T
F	T	T
T	F	T
T	T	F

两个重要的命题联结词

- **或非联接词**

或非联接词是二元命题联结词。两个命题P和Q用或非联接词"↓"联结起来，构成一个新的复合命题，记作$P{\downarrow}Q$。读作P和Q的"或非"。当且仅当P和Q的真值都是F时，$P{\downarrow}Q$的真值为T，否则$P{\downarrow}Q$的真值为F。

$$P{\downarrow}Q = \neg(P \vee Q)$$

（真值表）

P	Q	$P{\downarrow}Q$
F	F	T
F	T	F
T	F	F
T	T	F

概念

- **真值函项**
- **联结词的完备集**
- **{ ¬, ∨, ∧}是完备的联结词集合**

逻辑联接词 常用5 + 1（异或）+ 2（与非、或非）

推论： 以下联结词集都是完备集：

（1） $S_1 = \{\neg, \wedge\}$

（2） $S_2 = \{\neg, \vee\}$

（3） $S_3 = \{\neg, \rightarrow\}$

（4） $S_4 = \{\uparrow\}$

（5） $S_5 = \{\downarrow\}$

概念

- 对偶式
- 将给定的命题公式 A 中出现的$\vee$, $\wedge$, T, F 分别以$\wedge$, $\vee$, F, T 代换，得到公式 A^*，则称 A^*是公式 A的对偶式，或说 A和 A^*互为对偶式。

- $A = A(P_1, P_2, \ldots, P_n)$
  $A^- = A(\neg P_1, \neg P_2, \ldots, \neg P_n)$
  - $\neg(A^*) = (\neg A)^*$
  - $\neg(A^-) = (\neg A)^-$
  - $(A^*)^* = A$，$(A^-)^- = A$
  - $\neg A = A^{*-}$
  - 若$A = B$，必有 $A^* = B^*$
  - 若$A \to B$ 永真，必有 $B^* \to A^*$ 永真
  - A与A^-同永真，同可满足；
  - $\neg A$与A^*同永真，同可满足。

范式

- 命题变项及其否定式（如P与$\neg P$）统称**文字**。且P与$\neg P$ 称为**互补对**。
- 由文字的合取所组成的公式称为**合取式**。
- 由文字的析取所组成的公式称为**析取式**。

- **析取范式**是形如 $A_1 \vee A_2 \vee \ldots \vee A_n$ 的公式，其中$A_i\,(i = 1,\ldots,n)$为合取式。
- **合取范式**是形如 $A_1 \wedge A_2 \wedge \ldots \wedge A_n$ 的公式，其中$A_i\,(i = 1,\ldots,n)$为析取式

命题公式的合取范式和析取范式并不唯一

主范式

- n 个命题变项 $P_1, P_2, \ldots, P_n$ 组成的合取式：$Q_1 \wedge Q_2 \wedge \ldots \wedge Q_n$
  其中 $Q_i = P_i$，或$\neg P_i$。即每个命题变项与它的否定式二者之一必出现且仅出现一次。则称合取式 $Q_1 \wedge Q_2 \wedge \ldots \wedge Q_n$为极小项，并以$m_i$ 表示。
- n个命题变项 $P_1, P_2, \ldots, P_n$组成的析取式：$Q_1 \vee Q_2 \vee \ldots \vee Q_n$
  其中 $Q_i = P_i$，或$\neg P_i$。即每个命题变项与它的否定式二者之一必出现且仅出现一次。则称析取式 $Q_1 \vee Q_2 \vee \ldots \vee Q_n$为极大项，并以$M_i$ 表示。

极小项和极大项

- $m_0 = \neg P \wedge \neg Q$
- $m_1 = \neg P \wedge Q$
- $m_2 = P \wedge \neg Q$
- $m_3 = P \wedge Q$
- 2^n个

- $M_0 = \neg P \vee \neg Q$
- $M_1 = \neg P \vee Q$
- $M_2 = P \vee \neg Q$
- $M_3 = P \vee Q$
- 2^n个

主析取范式与主合取范式

- 设由n 个命题变项构成的析取范式中所有的合取式都是极小项，则称该析取范式为主析取范式（仅由极小项构成的析取范式称为主析取范式）。

- 设由n个命题变项构成的合取范式中所有的析取式都是极大项，则称该合取范式为主合取范式（仅由极大项构成的合取范式称为主合取范式）。

求主析取范式的方法

1. 先求析取范式
2. 再填满变项

$\Longleftrightarrow$

求主合取范式的方法

1. 先求合取范式
2. 再填满变项

$A=\vee_{0.2.4}$

$\neg A=\vee_{1.3.5,6,7}$

主析取范式与主合取范式的求法

$P \to Q = \neg P \vee Q$

因为 $\neg P = \neg P \wedge (Q \vee \neg Q)$

$= (\neg P \wedge Q) \vee (\neg P \wedge \neg Q)$

- $\because Q = Q \wedge (P \vee \neg P)$

  $= (P \wedge Q) \vee (\neg P \wedge Q)$

- $P \to Q = \underbrace{(\neg P \wedge Q)}_{m_1} \vee \underbrace{(\neg P \wedge \neg Q)}_{m_0} \vee \underbrace{(P \wedge Q)}_{m_3}$

  $= m_0 \vee m_1 \vee m_3$

  $= \bigvee_{0,1,3}$

填满变项的简便方法

$$\neg P \vee Q$$

$$= m^{0x} \vee m^{x1}$$

$$= m_0 \vee m_1 \vee m_3$$

0	0			
0	1		0	1
0	1			
1	1			

主范式的求法与举例

- **综合举例**

  $(P\vee\neg Q)\rightarrow(\neg P\leftrightarrow(Q\wedge\neg R))$ 求主析与主合范式

原式 $=\neg(P\vee\neg Q)\vee((\neg P\wedge(Q\wedge\neg R))\vee(P\wedge(\neg Q\vee R)))$

$=(\neg P\wedge Q)\vee(\neg P\wedge Q\wedge\neg R)\vee(P\wedge\neg Q)\vee(P\wedge R)$

$=m^{01X}\vee m^{010}\vee m^{10X}\vee m^{1X1}$

主范式的求法与举例

- $\because$ 主析范式 $= \bigvee_{2.3.4.5.7}$
- 主合范式 $= \bigwedge_{(\{0.1...7\} - \{2.3.4.5.7\})\text{补}}$

$$= \bigwedge_{\{0.1.6\}\text{补}}$$

$$= \bigwedge_{1.6.7}$$

$(P \lor \neg Q) \to (\neg P \leftrightarrow (Q \land \neg R))$

列写真值表验算

P	Q	R	$P \lor \neg Q$	$Q \land \neg R$	$\neg P \leftrightarrow (Q \land \neg R)$	原式	
0	0	0	1	0	0	0	M_7
0	0	1	1	0	0	0	M_6
0	1	0	0	1	1	1	m_2
0	1	1	0	0	0	1	m_3
1	0	0	1	0	1	1	m_4
1	0	1	1	0	1	1	m_5
1	1	0	1	1	0	0	M_1
1	1	1	1	0	1	1	m_7

2.6 空公式 （补充）

- **求P ∨ ¬ P的主析取和主合取范式**

主析取范式： **P ∨ ¬ P**

主合取范式： **空公式**

结论：永真式的主合取范式为空公式

矛盾式的主析取范式为空公式

基本推理公式

1. $P \land Q \Rightarrow P$，但 $P \lor Q \not\Rightarrow P$

2. $\neg(P\to Q) \Rightarrow P$　　1式的直接推论 $P\land \neg Q \Rightarrow P$

3. $\neg(P\to Q) \Rightarrow \neg Q$　　1式的直接推论 $P\land \neg Q \Rightarrow \neg Q$

4. $P \Rightarrow P\lor Q$

5. $\neg P \Rightarrow P\to Q$　　2式的逆否，4式的推论。

6. $Q \Rightarrow P\to Q$　　3式的逆否，4式的推论。

7. $\neg P\land(P\lor Q) \Rightarrow Q$　　非P，而P∨Q又成立，只有Q成立

8. $P\land(P\to Q) \Rightarrow Q$　　*假言推理，分离规则，7式的变形

9. $\neg Q\land(P\to Q) \Rightarrow \neg P$　7式的变形　$\dfrac{P}{Q}$　$\dfrac{Q}{\neg P}$

基本推理公式

10. $(P\rightarrow Q)\wedge(Q\rightarrow R) \Rightarrow P\rightarrow R$ *三段论

11. $(P\leftrightarrow Q)\wedge(Q\leftrightarrow R) \Rightarrow P\leftrightarrow R$ 类似10式

12. $(P\rightarrow R)\wedge(Q\rightarrow R)\wedge(P\vee Q) \Rightarrow R$ 10式的推论

13. $(P\rightarrow Q)\wedge(R\rightarrow S)\wedge(P\vee R) \Rightarrow Q\vee S$ 10式的推论

14. $(P\rightarrow Q)\wedge(R\rightarrow S)\wedge(\neg Q\vee\neg S) \Rightarrow \neg P\vee\neg R$ 9式的推论

15. $(Q\rightarrow R) \Rightarrow ((P\vee Q)\rightarrow(P\vee R))$ P=F时左=右，P=T时右=T

16. $(Q\rightarrow R) \Rightarrow ((P\rightarrow Q)\rightarrow(P\rightarrow R))$ P=T时左=右，P=F时右=T

2.8 基本的推理公式

证明 $A \Rightarrow B$ 的几种方法:

1. 证 $A \rightarrow B$ 是重言式
2. 证 $A \wedge \neg B$ 为矛盾式
3. 真值表法
4. 证 $\neg B \Rightarrow \neg A$ 即反证法
5. 解释法
6. ……

证明： $(P\rightarrow Q)\wedge(R\rightarrow S)\wedge(P\vee R) \Rightarrow Q\vee S$

$(P\rightarrow Q)\wedge(R\rightarrow S)\wedge(P\vee R)$

$= (P\rightarrow Q)\wedge(R\rightarrow S)\wedge(\neg P\rightarrow R)$

$\Rightarrow (P\rightarrow Q)\wedge(\neg P\rightarrow S)$

$\Rightarrow (\neg Q\rightarrow \neg P)\wedge(\neg P\rightarrow S)$

$\Rightarrow \neg Q\rightarrow S$

$\Rightarrow Q\vee S$

2.9 推理演算

- <u>主要的推理规则</u>

(1) 前提引入规则；*推理过程中可随时引入前提*

(2) 结论引入规则；*中间结论可作为后续推理的前提*

(3) 代入规则；*仅限于重言式中的命题变项*

(4) 置换规则；*利用等值公式对部分公式进行置换*

(5) 分离规则；*由A及$A \rightarrow B$成立，可将B分离出来*

(6) 条件证明规则。$A_1 \wedge A_2 \Rightarrow B$与$A_1 \Rightarrow A_2 \rightarrow B$等价

归结法

- <u>归结法步骤</u>

1. 从$A\wedge\neg B$ 出发（欲证$A \Rightarrow B$，等价于证 $A\wedge\neg B$ 是矛盾式）
2. 建立子句集S，将$A\wedge\neg B$ 化成合取范式：

   $C_1\wedge C_2\wedge\ldots\wedge C_n$

   其中C_i 为析取式。由诸C_i 构成子句集

   $S = \{ C_1, C_2, \ldots, C_n \}$
3. 对S 中的子句作归结（消互补对），归结结果（归结式）仍放入S 中。重复此步。
4. 直至归结出矛盾式（□）。

公理系统的概念

- 从一些公理出发，根据演绎规则推导出一系列定理，这样形成的演绎体系叫做公理系统（axiom system）。
- 公理系统自成体系，是一个抽象符号系统。又称之为形式系统。

公理系统的结构

1. **初始符号**

   公理系统内允许出现的全体符号的集合。

2. **形成规则**

   公理系统内允许出现的合法符号序列的形成方法与规则。

公理系统的结构(续)

3. 公理

   精选的最基本的重言式，作为推演其它所有重言式的依据。

4. 变形规则

   公理系统所规定的推理规则。

5. 建立定理

   公理系统所作演算的主要内容，包括所有的重言式和对它们的证明。

具有代表性的命题逻辑的公理系统

系统名称	年代	公理总条数	彼此独立的条数
Russell公理系统	1910	**5**	**4**
Frege公理系统	1879	**6**	**3**
Hilbert—Bernays	1934	**15**	
王浩算法	1959	**1** **(10条变形规则)**	
自然演绎系统		**0** **(5条变形规则)**	

谓词逻辑

语文

第四章 谓词逻辑的基本概念

- 4.1 谓词*和个体词
- 4.2 函数和量词*
- 4.3 合式公式
- 4.4 自然语句的形式化*
- 4.5 有限域下公式的表示法
- 4.6 公式的普遍有效性和判定问题

- **谓词逻辑：区分主语、谓语，引入变元，**
  引入谓词、量词
- **可将谓词逻辑理解为**
  命题逻辑 + {变元，谓词，量词，函数}
- **这里讨论的是一阶谓词逻辑，**
  或称狭谓词逻辑。

概念

- 个体词（主词）
- 将表示具体或特定客体的个体词称作个体常项，用小写字母$a, b, c, \ldots$表示；
- 而将表示抽象或泛指的个体词称作个体变项，用小写字母$x, y, z, \ldots$表示。
- 并称个体变项的取值范围为个体域或论域， 以D表示。
- 约定有一个特殊的个体域，它由世间一切事物组成，称之为总论域。

概念

- 谓词(Predicate)
- 谓词是用来刻划个体词的性质或多个个体词间关系的词。 $P(x)$, $Q(x, y)$
- 谓词又可看作是由给定的个体域到集合{T, F}上的一个映射。
- 表示具体性质或关系的谓词称作谓词常项;
- 表示抽象或泛指的性质或关系的谓词称作谓词变项。
- 谓词常项与谓词变项都用大写英文字母P, Q, R,…表示，可根据上下文区分。

概念

- 多元谓词
  - 命题逻辑中的命题均可表示成零元谓词，或认为一个命题是没有个体变项的零元谓词。
- 量词
  - 全称量词和存在量词
- 一阶谓词：在所讨论的谓词逻辑中，限定量词仅作用于个体变项，不允许量词作用于命题变项和谓词变项。

  非一阶示例：$\forall p(p\rightarrow Q(x))$， $\exists Q(Q(x)\rightarrow P(x))$

4-3-2 一阶谓词逻辑的符号集

- 个体常项：$a, b, c, \ldots$（小写字母）。
- 个体变项：$x, y, z, \ldots$ （小写字母）。
- 命题变项： $p, q, r, \ldots$ （小写字母）。
- 谓词符号：$P, Q, R, \ldots$ （大写字母）。
- 函数符号： $f, g, h, \ldots$ （小写字母）。
- 联结词符号 $\neg, \wedge, \vee, \rightarrow, \leftrightarrow$ 。
- 量词符号：$\forall, \exists$ 。
- 括号与逗号：（ ） ,

4.4 自然语句的形式化

- 在分析的基础上，将问题分解成一些合适的谓词表示；即先做一些谓词（函数）设定；
- 然后使用量词、联接词将设定的谓词构成合式公式。
- “所有的…都是…”，这类语句的形式描述只能使用“→”而不能使用“∧”。
- 例：所有的有理数都是实数 $(\forall x)(P(x) \rightarrow Q(x))$
- 有的实数是有理数 $(\exists x)(Q(x) \wedge P(x))$
- 没有无理数是有理数 $\neg(\exists x)(A(x) \wedge B(x))$

几种描述

- “唯一性”

先表示存在一个，同时如果还能找到另一个的话，则它们一定相等。

$$(\exists x)(P(x) \wedge (\forall y)(P(y) \rightarrow E(x, y)))$$

其中 $E(x, y)$ **表示** $x = y$。

自然数集的形式描述

。。。。。。

推理

范式

等值式

第五章 谓词逻辑的等值和推理演算

5.1 等值式

$$\neg(\forall x)P(x) = (\exists x)\neg P(x)$$

$$\neg(\exists x)P(x) = (\forall x)\neg P(x)$$

$$(\forall x)P(x) = \neg(\exists x)\neg P(x)$$

$$(\exists x)P(x) = \neg(\forall x)\neg P(x)$$

$$\underline{(\forall x)P(x) = P(1) \wedge P(2) \wedge \cdots \wedge P(k)}$$

$$\underline{(\exists x)P(x) = P(1) \vee P(2) \vee \cdots \vee P(k)}$$

$$(\forall x)(P(x) \vee q) = (\forall x)P(x) \vee q$$

$$(\exists x)(P(x) \vee q) = (\exists x)P(x) \vee q$$

$$(\forall x)(P(x) \wedge q) = (\forall x)P(x) \wedge q$$

$$(\exists x)(P(x) \wedge q) = (\exists x)P(x) \wedge q$$

$$(\forall x)(P(x) \to q) = (\exists x)P(x) \to q$$

$$(\exists x)(P(x) \to q) = (\forall x)P(x) \to q$$

$$(\forall x)(p \to Q(x)) = p \to (\forall x)Q(x)$$

$$\underline{(\exists x)(p \to Q(x)) = p \to (\exists x)Q(x)}$$

$$(\forall x)(P(x) \wedge Q(x)) = (\forall x)P(x) \wedge (\forall x)Q(x)$$

$$(\exists x)(P(x) \vee Q(x)) = (\exists x)P(x) \vee (\exists x)Q(x)$$

$$(\forall x)(\forall y)(P(x) \vee Q(y)) = (\forall x)P(x) \vee (\forall x)Q(x)$$

$$(\exists x)(\exists y)(P(x) \wedge Q(y)) = (\exists x)P(x) \wedge (\exists x)Q(x)$$

那些不等于的……

$$(\forall x)(\forall y)(P(x) \vee Q(y)) \neq (\forall x)(P(x) \vee Q(x))$$

$$(\exists x)(\exists y)(P(x) \wedge Q(y)) \neq (\exists x)(P(x) \wedge Q(x))$$

- $\forall$ 对 $\vee$ 不满足分配率， $\exists$ 对 $\wedge$ 不满足分配率

$$(\forall x)(P(x) \wedge Q(x)) = (\forall x)P(x) \wedge (\forall x)Q(x)$$

$$(\exists x)(P(x) \vee Q(x)) = (\exists x)P(x) \vee (\exists x)Q(x)$$

$$(\forall x)P(x) \vee (\forall x)Q(x) \Rightarrow (\forall x)(P(x) \vee Q(x))$$

$$(\exists x)(P(x) \wedge Q(x)) \Rightarrow (\exists x)P(x) \wedge (\exists x)Q(x)$$

5.3.1 前束范式

- 设A为一阶谓词逻辑公式，如果满足

  (1) 所有量词都位于该公式的最左边；

  (2) 所有量词前都不含否定词；

  (3) 量词的辖域都延伸到整个公式的末端，

  则称A为前束范式。

- $(Q_1x_1)(Q_2x_2)\cdots(Q_nx_n)M(x_1, x_2, \cdots, x_n)$，称作公式 A的基式或母式。

- 例1：　求下式的前束范式

$\neg((\forall x)(\exists y)P(a, x, y)\rightarrow(\exists x)(\neg(\forall y)Q(y, b)\rightarrow R(x)))$

- 可按下述步骤实现：

(1)　消去联结词→，↔；

得$\neg(\neg(\forall x)(\exists y)P(a, x, y)\vee(\exists x)(\neg\neg(\forall y)Q(y, b)\vee R(x)))$

(2)　¬内移（反复使用摩根律）

得 $(\forall x)(\exists y)P(a, x, y)\wedge\neg(\exists x)((\forall y)Q(y, b)\vee R(x))$

$=(\forall x)(\exists y)P(a, x, y)\wedge(\forall x)((\exists y)\neg Q(y, b)\wedge\neg R(x))$

- (3) 量词左移（使用分配等值式）得

  $(\forall x)(\exists y)P(a, x, y) \land (\forall x)((\exists y)\neg Q(y, b) \land \neg R(x))$

  $= (\forall x)((\exists y)P(a, x, y) \land (\exists y)\neg Q(y, b) \land \neg R(x))$

  (4) 变元易名（使用变元易名分配等值式）

  $(\forall x)((\exists y)P(a, x, y) \land (\exists z)\neg Q(z, b) \land \neg R(x))$

  $= (\forall x)(\exists y)(\exists z)(P(a, x, y) \land \neg Q(z, b) \land \neg R(x))$

  $= (\forall x)(\exists y)(\exists z)S(a, b, x, y, z)$

- 使用以上步骤，可求得任一公式的前束范式。由于每一步变换都保持等值性，所以，得到的前束形与原公式是等值的。这里的

$$S(a, b, x, y, z)$$

便是原公式的母式。

由于前束形中量词的次序排列，如 $(\exists y)(\exists z)$ 也可以写成 $(\exists z)(\exists y)$ 以及对母式没有明确的限制，自然其前束范式并不唯一，如例1的前束范式也可以是

$$(\forall x)(\exists z)(\exists y)(S(a, b, x, y, z)\land P)$$

其中P可以是任一不含量词的普遍有效的公式。

5.3.4 SKOLEM 标准型

- 一阶谓词逻辑的任一公式 A，若其

  (1) 前束范式中所有的存在量词都在全称量词的左边，且至少有一个存在量词；

  (2) 或仅保留全称量词而消去存在量词，

  便得到公式 A的 SKOLEM 标准型。

- 公式 A与其 SKOLEM 标准型只能保持某种意义下的等值关系。

基本推理公式（命题逻辑温习）

Rule of Inference	Name/名称
$P \Rightarrow P \vee Q$	Addition/析取附加式
$P \wedge Q \Rightarrow P$	Simplification/合取化简式
P、$Q \Rightarrow P \wedge Q$	Conjunction/并发式
P、$P \rightarrow Q \Rightarrow Q$	Modus ponens/分离式
$\neg Q$、$P \rightarrow Q \Rightarrow \neg P$	Modus tollens/拒取式
$\neg P$、$P \vee Q \Rightarrow Q$	Disjunctive syllogism/析取三段式
$P \rightarrow Q$、$Q \rightarrow R \Rightarrow P \rightarrow R$	Hypothetical syllogism/假言三段式

谓词逻辑推理规则

Rule of Inference	Name
$(\forall x)P(x) \Rightarrow P(c)$ if $c \in U$	UI / 全称举例
$P(c)$ for an arbitrary $c \in U \Rightarrow (\forall x)P(x)$	UG / 全称推广
$(\exists x)P(x) \Rightarrow P(c)$ for some $c \in U$	EI / 存在举例
$P(c)$ for some $c \in U \Rightarrow (\exists x)P(x)$	EG / 存在推广

推理

- 全称量词消去规则
- 全称量词引入规则
- 存在量词消去规则
- 存在量词引入规则
- 首先将以自然语句表示的推理问题引入谓词加以形式化；
- 若不能直接使用基本的推理公式则消去量词；
- 在无量词的条件下使用规则和公式推理；
- 最后再引入量词以求得结论。

5-6-2 归结推理法步骤

1. 欲证$A_1 \wedge A_2 \wedge \cdots \wedge A_n \rightarrow B$ 是定理，等价于证 $G = A_1 \wedge A_2 \wedge \cdots \wedge A_n \wedge \neg B$. 是矛盾式。

2. 将G化为前束范式。进而化为SKOLEM标准型，消去存在量词，得到仅含全称量词的前束范式G^*

由于全称量词的前束范式G^*保持原式G不可满足的特性，故G与G^*在不可满足的意义下是一致的。

3. 略去G^*中的全称量词，G^*中的合取词$\wedge$以“，”表示，便得到G^*的子句集S。实用中可分别求出诸A_i与$\neg B$的子句集。

4. 对S作归结。直至归结出空子句□。

<u>举例</u>

第九章 集合

- N:全体自然数集合
  - 0是不是自然数?
- N^+:除0以外的其他自然数的全体构成的集合
- Z:全体整数集合
- Z^+:全体正整数集合
- Q:全体有理数集合
- R:全体实数集合
- 若元素a属于集合A，记为$a \in A$,否则记为$a \notin A$

$A \cup B = \{x \mid x \in A \vee x \in B\}$

$A \cap B = \{x \mid x \in A \wedge x \in B\}$

$-A = E - A = \{x \mid x \notin A\}$

$A - B = \{x \mid x \in A \wedge x \notin B\}$

$A \oplus B = (A - B) \cup (B - A) = \{x \mid x \in A \,\overline{\vee}\, x \in B\}$

元素x $\in$ 集合A

$A = B \Leftrightarrow (\forall x)(x \in A \leftrightarrow x \in B)$

$A = B \Leftrightarrow (A \subseteq B \wedge B \subseteq A)$

$A \neq B \Leftrightarrow (\exists x)\neg(x \in A \leftrightarrow x \in B)$

$A \subseteq B \Leftrightarrow (\forall x)(x \in A \rightarrow x \in B)$

$A \subset B \Leftrightarrow (A \subseteq B \wedge A \neq B)$

A和B不相交 $\Leftrightarrow \neg(\exists x)(x \in A \wedge x \in B)$

$\emptyset = \{x \mid x \neq x\}$

$E = \ x \mid x = x$

对任意的集合A， $\emptyset \subseteq A$

$\cup A = \{x \mid (\exists z)(z \in A \wedge x \in z)\}$

$\cap A = \{x \mid (\forall z)(z \in A \rightarrow x \in z)\}$

$\cup\emptyset = \emptyset$

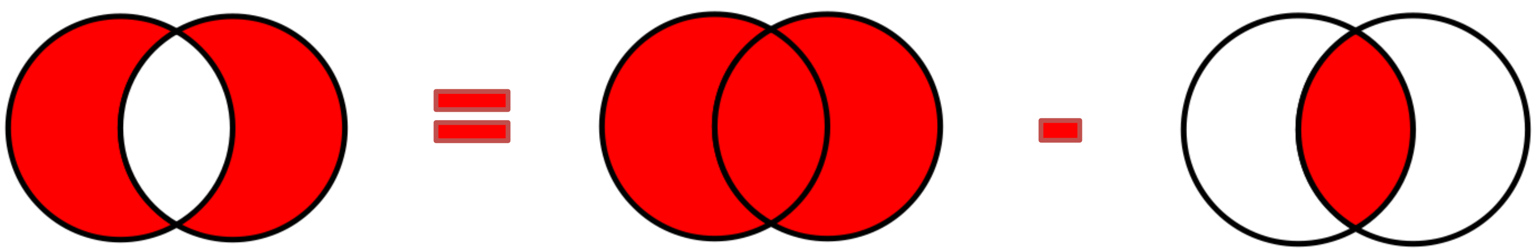
$\cap\emptyset$无意义

$P(A) = \{x \mid x \subseteq A\}$

对称差

$$A \oplus B = (A - B) \cup (B - A) = \{ x \mid x \in A \ \overline{\vee} \ x \in B \}$$

$$= (A \cup B) - (B \cap A)$$



(1) 交换律 $A \oplus B = B \oplus A$

(2) 结合律 $(A \oplus B) \oplus C = A \oplus (B \oplus C)$

(3) 分配律 $A \cap (B \oplus C) = (A \cap B) \oplus (A \cap C)$

(4) 同一律 $A \oplus \Phi = A$

(5) 零律 $A \oplus A = \Phi$

(6) 吸收律 $A \oplus (A \oplus B) = B$

	$\cup$	$\cap$	$\oplus$
交换	$A\cup B=B\cup A$	$A\cap B=B\cap A$	$A\oplus B=B\oplus A$
结合	$(A\cup B)\cup C=$ $A\cup(B\cup C)$	$(A\cap B)\cap C=$ $A\cap(B\cap C)$	$(A\oplus B)\oplus C=$ $A\oplus(B\oplus C)$
幂等	$A\cup A=A$	$A\cap A=A$	

	$\cup$与$\cap$	$\cap$与$\oplus$
分配	$A\cup(B\cap C)=(A\cup B)\cap(A\cup C)$ $A\cap(B\cup C)=(A\cap B)\cup(A\cap C)$	$A\cap(B\oplus C)=(A\cap B)\oplus(A\cap C)$
吸收	$A\cup(A\cap B)=A$ $A\cap(A\cup B)=A$	

吸收律的前提：$\cup$、$\cap$可交换

	$-$	$\sim$
***D.M* 律**	$A-(B\cup C)=(A-B)\cap(A-C)$ $A-(B\cap C)=(A-B)\cup(A-C)$	$\sim(B\cup C)=\sim B\cap\sim C$ $\sim(B\cap C)=\sim B\cup\sim C$
双重否定		$\sim\sim A=A$

	$\varnothing$	E
补元律	$A\cap\sim A=\varnothing$	$A\cup\sim A=E$
零律	$A\cap\varnothing=\varnothing$	$A\cup E=E$
同一律	$A\cup\varnothing=A$	$A\cap E=A$
否定	$\sim\varnothing=E$	$\sim E=\varnothing$

概念：幂集（power set）

- 设A为集合，由A的所有子集组成的集合称为A的幂集，记作$\boldsymbol{P(A)}$。符号化表示为

$$P(A)=\{x|x\subseteq A\}$$

对任意的集合A，有$\varnothing\subseteq A$和$A\subseteq A$，因此有$\varnothing\in P(A)$和$A\in P(A)$。

$$\boldsymbol{x\in P(A)\Leftrightarrow x\subseteq A}$$

概念：集合A和B的笛卡儿积（Descartes product）

- 设A, B为集合，用A中元素为第一元素，B中元素为第二元素构成有序对。
- 所有这样的有序对组成的集合称为A和B的笛卡儿积，记作$A \times B$。
- A和B的笛卡儿积的符号化表示为

$$A \times B = \{< x, y > | \, x \in A \wedge y \in B\}$$

概念：n 阶笛卡儿积

- 若 $n \in N$ 且 $n > 1$，$A_1, A_2, \ldots, A_n$是n个集合，它们的n阶笛卡儿积记作$A_1 \times A_2 \times \ldots \times A_n$, 并定义为

$A_1 \times A_2 \times \cdots \times A_n$

$= \{< x_1, x_2, \ldots, x_n >| x_1 \in A_1 \wedge x_2 \in A_2 \wedge \cdots \wedge x_n \in A_n\}$

概念：传递集合

- 如果集合的集合A的任一元素的元素都是 A的元素，就称 A为传递集合。该定义可写成

$$\Leftrightarrow (\forall x)(\forall y)((x \in y \wedge y \in A) \rightarrow x \in A)$$

- A是传递集合

由集合组成的集合**A**

x_1，x_2

- 例：$A = \{\emptyset, \{\emptyset\}, \{\emptyset,\{\emptyset\}\} \}$

y_1，y_2，y_3

- 内层括号里的内容，在外层也能找得到。

https://en.wikipedia.org/wiki/Transitive_set

9.6 有限集合的基数

- 定义9.6.1 有限集合的基数

  （cardinal number, potency)

  如果存在 $n \in N$，使集合 A与集合

$$x \mid x \in N \wedge x < n \;=\; 0,\ 1,\ 2,\ \cdots,\ n-1$$

的元素个数相同，就称集合 A的基数是 n，记作 $|A| = n$ 或 $card(A) = n$。

空集的基数是 0。

9.6 有限集合的基数

- 定理9.6.1 幂集的基数
  对有限集合 A

$$|P(A)| = 2^{|A|}$$

- 定理9.6.2 笛卡儿积的基数
  对有限集合 A和 B

$$|A \times B| = |A| \bullet |B|$$

定理9.6.4 包含排除原理 (Principle of inclusion and exclusion)

- 对有限集合A和B

$$|A \cup B| = |A| + |B| - |A \cap B|$$

- 该定理可推广到n个集合的情形。若 $n \in N$且 $n > 1$, $A_1, A_2, \ldots, A_n$ 是有限集合，则

$$|A_1 \cup A_2 \cup \cdots \cup A_n| = \sum_{1 \le i \le n} |A_i| - \sum_{1 \le i < j \le n} |A_i \cap A_j|$$

$$+ \sum_{1 \le i < j < k \le n} |A_i \cap A_j \cap A_k| + \cdots + (-1)^{n-1} |A_1 \cap A_2 \cap \cdots \cap A_n|$$

9.7 集合论公理系统

- 集合论公理系统的一个基本思想是“任一集合的所有元素都是集合”。

  集合论研究的对象只是集合。除集合外的其它对象（如有序对、数字、字母）都要用也完全可以用集合来定义。

- 集合论公理系统的主要目的：

  （1）判定集合的存在性；

  （2）由已知集合构造出所有合法的集合（合法性）

9.7.1 ZF(Zermelo-Frankel)集合论公理系统(续)

- (8) 无穷公理

  存在一个由所有自然数组成的集合

$$(\exists x)(\Phi \in x \wedge (\forall y)(y \in x \rightarrow (y \cup \quad y \quad) \in x))$$

$$(\exists N)(\Phi \in N \wedge (\forall y)(y \in N \rightarrow y^{+} \in N))$$

9.7.4　无穷公理和自然数集合

- **自然数的集合表示方法：**
- Zermelo 1908年曾给出一种方法：
- $0 = \Phi$，$1 = \{\Phi\}$，$2 = \{\{\Phi\}\}$，…
- 满足$0 \in 1 \in 2 \in \ldots$。 但‘$\in$’ 关系不满足传递性。
- 即由 $A \in B \wedge B \in C$ 成立，却推不出 $A \in C$ 成立。
- 未能准确刻画自然数本身所固有的良好性质。

后继与自然数

- 定义9.7.3 前驱与后继

  对任意的集合A，定义集合

  $$A^+ = A \cup \{A\}$$

  A^+称为A的后继， A称为A^+的前驱。

- 定义9.7.4 用后继定义自然数
  集合$0 = \Phi$是一个自然数。若集合n是一个自然数，则集合$n+1 = n^+$也是一个自然数。

9.7.4 无穷公理和自然数集合

- **按照上述定义，每个自然数可表示为：**

$$0 = \Phi$$

$$1 = 0^+ = 0 \cup \{0\} = \{0\} = \{\Phi\}$$

$$2 = 1^+ = 1 \cup \{1\} = \{0,1\} = \{\Phi, \{\Phi\}\}$$

$$3 = 2^+ = 2 \cup \{2\} = \{0,1,2\} = \{\Phi, \{\Phi\}, \{\Phi, \{\Phi\}\}\}$$

$$\cdots$$

$$n+1 = n^+ = n \cup \{n\} = \{0,1,\cdots,n\}.$$

第十章　关系

- 二元关系
  - 关系的定义
  - 表示
  - 性质
  - 运算

关系的性质

自　反：

$$\forall x(x \in X \to xRx)$$

反自反：

$$\forall x(x \in X \to x\not{R}x)$$

对　称：

$$\forall x \forall y(x \in X \wedge y \in X \wedge xRy \to yRx)$$

反对称：

$$\forall x \forall y(x \in X \wedge y \in X \wedge xRy \wedge yRx \to x = y)$$

传　递：

$$\forall x \forall y \forall z(x \in X \wedge y \in X \wedge z \in X \wedge xRy \wedge yRz \to xRz)$$

	自反 Reflexive （10.4.1）	反自反 Irreflexive （10.4.1）	对称 Symmetric （10.4.2）	反对称 Antisymmetric （10.4.2 ）	传递 Transitive （10.4.3）
定义 要点	$x \in A \rightarrow xRx$	$x \in A \rightarrow x\not{R}x$ $\langle x, x\rangle \notin R$	$xRy \rightarrow yRx$ $\langle x, y\rangle \in R \rightarrow$ $\langle y, x\rangle \in R$	$xRy \wedge x \neq y$ $\longrightarrow y\not{R}x$ $xRy \wedge yRx$ $\rightarrow x = y$	$xRy \wedge yRz$ $\rightarrow xRz$ $\langle x, y\rangle \in R \wedge$ $\langle y, z\rangle \in R \rightarrow$ $\langle x, z\rangle \in R$
关系矩阵的特点	$r_{ii} = 1$ 主对角元 均为1	$r_{ii} = 0$ 主对角元 均为0	对称矩阵 $r_{ij} = r_{ji}$	若 $r_{ij} = 1 \wedge i \neq j$ $\rightarrow r_{ji} = 0$	无直观特点 或难以直接判断
关系图 的特点	每个结点 都有自圈	每个结点 都没有自圈	若两个结点之间有边，一定是一对方向相反的边	若两个结点之间有边，一定是一条有向边	若从结点x_i到x_j有边，x_j到x_k有边，则从x_i到x_k一定有边

性质 运算	自反性	反自反性	对称性	反对称性	传递性
R^{-1}	√	√	√	√	√
$R_1 \cap R_2$	√	√	√	√	√
$R_1 \cup R_2$	√	√	√	×	×
$R_1 - R_2$	×	√	√	√	×
$R_1 \circ R_2$	√	×	×	×	×

注：√表示经过左端的运算仍保持原来的性质，×则表示原来的性质不再满足。

需按纵列理解，不能按横向。如不存在一个关系，它既是自反的又是非自反的。

A是非Φ的

几个主要关系的性质

关系 \ 性质	自反性	非自反性	对称性	反对称性	传递性
恒等关系 I_A	√	×	√	√	√
全域关系 E_A	√	×	√	×	√
A上的空关系 Φ	×	√	√	√	√
N上的整除关系	√	×	×	√	√
包含关系 $\subseteq$	√	×	×	√	√
真包含关系 $\subset$	×	√	×	√	√

10.5 关系的闭包(closure)

定义10.5.2 闭包的定义

设R是非空集合A上的关系，如果A上有另一个关系R'满足：

（1）R'是自反的（对称的或传递的）；

（2）$R \subseteq R'$；

（3）对A上任何自反的（对称的或传递的）关系R''，$R' \subseteq R''$。

则称关系R'为R的自反（对称或传递）闭包。

一般将R的自反闭包记作$r(R)$，对称闭包记作$s(R)$，传递闭包记作$t(R)$。

满足性质

包含关系

最小的那个

闭包

10.6 等价关系和划分

定义10.6.1 等价关系

- 设R为非空集合A上的关系，如果R是
  自反的、
  对称的、
  传递的，
- 则称R为A上的等价关系。

10.6 等价关系与划分

等价类

设R是非空A集合上的等价关系，对于任何$x \in A$，令：

- $[x]_R = \{y | y \in A \wedge xRy\}$
- $[x]_R$是由$x \in A$生成的R等价类
- x为等价类$[x]_R$的表示元素

10.6 等价关系与划分

商集：R是A上的等价关系，R的所有等价类构成的集合

记为A/R：$\{[x]_R \mid x \in A\}$

- 例：A为全班同学的集合，$|A| = n$，$(n \in N)$

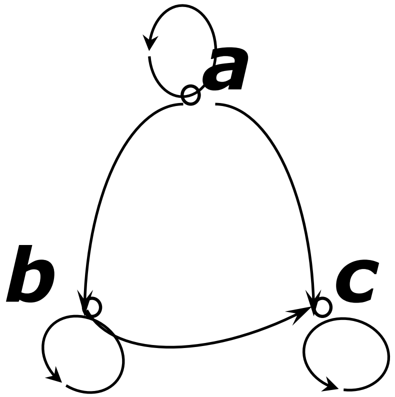
  按指纹的相同关系R_1是一个等价关系

  $$A/R_1 = \{[x_1]_{R_1}, \ldots [x_\mathrm{n}]_{R_1}\}$$

  同姓关系R_2是一等价关系

  $$A/R_2 = \{[张]_{R_2}，[李]_{R_2}，\ldots\}$$

偏序关系



- 偏序关系R (记作≼)
  - 自反性: $\forall a \in A$，有$<a,a> \in R$
  - 反对称性: $\forall a,b \in$R,如果$<a,b> \in R$且$<b,$a$> \in R$,则必有$a=b$
  - 传递性: $\forall a,b,c \in A$,如果$<a,b> \in R$,$<b,c> \in R$, 必有$<a,c> \in R$

- 例:偏序关系
  - $A=\{a,b,c\}$
  - $R=\{<a,a>,<a,b>,<a,c>,<b,b>,<b,c>,<c,c>\}$
  - 哈斯图
  - 链，反链

第10章重点内容

- 二元关系概念与表示
- 关系的主要性质

  自反、非自反、对称、反对称、传递
- 等价关系（与划分）

  自反、对称、传递，掌握证明方法。
- 偏序关系

  自反、反对称、传递，掌握证明方法

第11章 函数

定义11.1.1 （函数-function）

- 对集合A到集合B的关系f，若满足下列条件：

  (1)对任意的 $x \in dom(f)$，存在唯一的

  $y \in ran(f)$,使xfy 成立；

  (2)$dom(f) = A$
- 则称f 为从A到B的函数，或称f把A映射到B（有的教材称f 为全函数、映射、变换）。
- 一个从A到B的函数f，可以写成f：$A \to B$。
- 这时若xfy，则可记作f：$x \mapsto y$ 或$f(x) = y$。

- 例3：$A = \{1, 2, 3\}$，$B = \{a, b\}$. 从A到B的函数有？个

$$f_1 = \{\langle 1, a\rangle, \langle 2, a\rangle, \langle 3, a\rangle\}$$
$$f_2 = \{\langle 1, a\rangle, \langle 2, a\rangle, \langle 3, b\rangle\}$$
$$f_3 = \{\langle 1, a\rangle, \langle 2, b\rangle, \langle 3, a\rangle\}$$
$$f_4 = \{\langle 1, a\rangle, \langle 2, b\rangle, \langle 3, b\rangle\}$$
$$f_5 = \{\langle 1, b\rangle, \langle 2, a\rangle, \langle 3, a\rangle\}$$
$$f_6 = \{\langle 1, b\rangle, \langle 2, a\rangle, \langle 3, b\rangle\}$$
$$f_7 = \{\langle 1, b\rangle, \langle 2, b\rangle, \langle 3, a\rangle\}$$
$$f_8 = \{\langle 1, b\rangle, \langle 2, b\rangle, \langle 3, b\rangle\}$$

于是

$$A_B = \{f_1, f_2, f_3, \cdots, f_8\}$$

概念

- 满射
- 单射
- 双射
- 常函数
- 恒等函数
- 单调函数
- 泛函
- 特征函数
- 自然映射

第十二章

第十二章　实数集合与集合的基数

- 12.1 实数集合
  - 1. 整数集合Z
  - 2. 有理数集合Q
  - 3. 实数集合R
- 12.2 集合的等势
- 12.3 有限集合与无限集合
- 12.4 集合的基数
- 12.5 基数的算术运算
- 12.6 基数的比较
- 12.7 可数集合与连续统假设

12.2 集合的等势

定义12.2.1 （集合的等势）

对集合A和B，如果存在从A到B的双射函数，就称A和B等势，记作$A \approx B$;

如果不存在从A到B的双射函数，就称A和B不等势，记作

$$\neg A \approx B$$

- 注意，$A \approx B$ 时不一定有$A = B$，反之一定成立（ $A = B$ 则必有 $A \approx B$ ）。

12.4 集合的基数

定义12.4.1 对任意的集合A和B，它们的基数分别用 $card(A)$ 和 $card(B)$ 表示，

并且 $card(A) = card(B) \Leftrightarrow A \approx B$。

（有时把 $card(A)$ 记作 $|A|$ 或 $\#(A)$。）

对有限集合A和$n \in N$，若$A \approx n$，

则 $card(A) = n$。

12.4 集合的基数

12-4-1 （自然数集合N的基数）

- N的基数不是自然数，因为N不与任何自然数等势。
- 通常用Cantor的记法，把 $card(N)$ 记作 $\aleph_0$，读作“阿列夫零”。
- 因此，$card(Z) = card(Q) = card(N \times N) = \aleph_0$

12.4　集合的基数

12-4-2　（实数集合R的基数）

- R的基数不是自然数，也不是$\aleph_0$（因为$\neg R \approx N$）。
- 通常把card(R)记作 $\aleph_1$，读作“阿列夫壹”。
- 因此, $card([0,1]) = card((0,1)) = card(R^+) = \aleph_1$

- $R \approx N_2$

证明: 只需证$R \le N_2$, 且$N_2 \le R$

(1) 先证$R \le N_2$. 为此只需证$(0, 1) \le N_2$.

构造函数$H: (0, 1) \to N_2$,

对$\forall z \in (0, 1)$, 有$H(z) \in N_2 = \{f \mid f: N \to \{0, 1\}\}$

其中z表示二进制无限小数

$$H(z): N \to \{0, 1\}$$

$\forall n \in N$, 取$H(z)(n)$为z的小数点后的第n位数

显然, $z_1 \ne z_2$时, $H(z_1) \ne H(z_2)$

$\therefore$ H为单射, $\therefore (0, 1) \le N_2$.

(2) 证$N_2 \le R$. 只需证$N_2 \le [0, 1]$,

设$G: N_2 \to [0,1]$

$$\forall f \in N_2 = \{f \mid f: N \to \{0, 1\}\}$$

则f的函数值确定一个[0, 1]区间上的实数, 例如 f(0), f(1), f(2), f(3), …依次为1, 0, 1, 1, 1, 0, 0, 0, … 时, 取十进制数

$y=0.10111000\ldots$, 则$y \in [0, 1]$

即$G(f)=0.101110\ldots$

显然G是单射. $\therefore N_2 \le [0, 1]$

- 推论: $\aleph_1 = \text{card } R = \text{card } N_2 = 2^{\aleph_0}$.

12.5 基数的算术运算

定义12.5.1

- 对任意的基数 k 和 l，

（1）若存在集合 K 和 L，$K \cap L = \emptyset$，$card(K) = k$，$card(L) = l$，则 $k + l = card(K \cup L)$

（2）若存在集合K和L，$card(K) = k$，$card(L) = l$，则 $k \cdot l = card(K \times L)$

（3）若存在集合K和L，$card(K) = k$，$card(L) = l$，则 $k^l = card(LK)$，其中L_K是从L到K的函数的集合。

- **例6:**

$$2^{\aleph_0} \le \aleph_0 * 2^{\aleph_0} \le 2^{\aleph_0} * 2^{\aleph_0} = 2^{\aleph_0}$$

所以， $\aleph_0 * 2^{\aleph_0} = 2^{\aleph_0}$

12.7 可数集合与连续统假设

定义12.7.1 （可数集合）

对集合K，如果$card(K) \leq \aleph_0$，

则称K是可数集合。

12.7　可数集合与连续统假设

定理12.7.1　（可数集的性质）

（1）可数集的任何子集是可数集。

（2）两个可数集的并集和笛卡儿积是可数集。

（3）若K是无限集合，则$P(K)$是不可数的。

（4）可数个可数集的并集是可数集

（该结论可表述为：若A是可数集，A的元素都是可数集，则$\cup A$是可数集）。

- **已知的基数按从小到大的次序排列有**

$$0,\quad 1,\quad \cdots,\quad n,\quad \cdots,\quad \aleph_0,\quad \aleph_1,\quad 2^{\aleph_1},\quad \cdots$$

12.7　可数集合与连续统假设

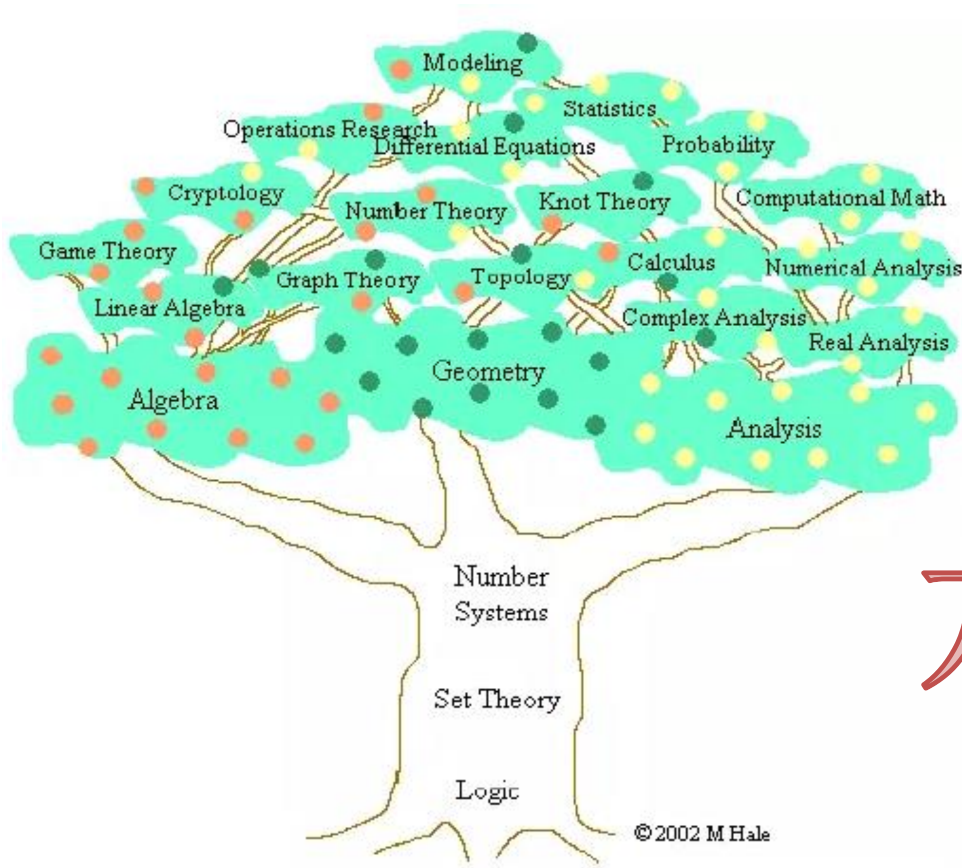
12-7-1 （连续统假设 Continuum Hypothesis 1878年，由Cantor提出，简称CH假设）

- “连续统假设”就是断言不存在基数k，使

$$\aleph_0 < k < 2^{\aleph_0} (\aleph_1)$$

- 这个假设至今未经证明。
- 有人已证明：根据现有的（ZF)公理系统，

既不能证明它是对的，也不能证明它是错的。



离散数学
形散神不散
数学与语文
万变不离逻辑

补交作业

- 1月7号23:59，网络学堂提交

考试时间及答疑

考试时间

- 地点：五教5204、五教5305
- 时间： 1月8日（周三）

  下午 2:30-4:30

答疑

- 1月7日下午 2:00— 5:00
- 东主楼10区101

查卷

- 1月10号下午，东主楼10-315 2:00-4:00

考试地点分配：五教5204

1	2019010120	张翼翔	男	建筑学院	能源91	本科生
2	2018010156	江懿龙	男	土木系	土木82	本科生
3	2018010225	徐龙龙	男	土木系	土木84	本科生
4	2019010158	李郅锐	男	土木系	土木91	本科生
5	2019010159	陈巧云	女	土木系	土木91	本科生
6	2019010199	郝钰涵	男	土木系	土木93	本科生
7	2018010305	姚季涵	男	水利系	土木87	本科生
8	2019010306	陈雍之	男	水利系	土木96	本科生
9	2019010315	孙翱翔	男	水利系	土木97	本科生
10	2019010334	张思诺	女	水利系	土木97	本科生
11	2019010619	孙鸣泽	男	能动系	机械910	本科生
12	2019010868	何文杰	男	电机系	能源92	本科生
13	2019010869	林岚清	男	电机系	能源92	本科生
14	2017012272	张泽远	男	计算机系	计85	本科生
15	2018011025	刘轩奇	男	计算机系	计83	本科生

考试地点分配：五教5204

16	2018011190	吴嘉赟	男	计算机系	计86	本科生
17	2018011997	孔祥哲	男	计算机系	计86	本科生
18	2018013429	郭沛辰	男	计算机系	计84	本科生
19	2018013432	张潇宇	女	计算机系	计85	本科生
20	2018013443	陈新	男	计算机系	计82	本科生
21	2018013446	王隽伟	男	计算机系	计83	本科生
22	2018013466	李瀚明	男	计算机系	计81	本科生
23	2018013481	卢展	男	计算机系	计83	本科生
24	2018013484	黄海天	男	计算机系	计85	本科生
25	2019011220	吴伟浩	男	计算机系	计9 1	本科生
26	2019011234	王子腾	男	计算机系	计9 2	本科生
27	2019011271	韩子宣	女	计算机系	计9 3	本科生
28	2019011310	王兆臻	男	计算机系	计9 5	本科生
29	2019011314	李骁	男	计算机系	计9 5	本科生
30	2019011325	江灿	男	计算机系	计9 5	本科生

考试地点分配：五教5204

2019011328	付超然	男	计算机系	计96
2019011333	吕俊伟	男	计算机系	计96
2019011335	朱俊	男	计算机系	计96
2019011340	王星淇	男	计算机系	计96
2019011342	汪子涵	男	计算机系	计96
2018010869	刘禹潇	男	自动化系	自83
2019011397	王博闻	男	自动化系	自93
2017011751	张杰	男	工物系	核71

2018011960	刘松铭	男	化工系	分8
2018012342	潘泽宇	男	化工系	分8
2019011926	尤沛兴	男	材料学院	材93
2015012065	邬靖翔	男	数学系	数61
2014012919	张锦苏	女	物理系	物理61
2017012302	薛宗麒	男	物理系	基科72
2018012209	朱思漠	男	物理系	物理81
2019012209	李奕杉	男	化学系	化学92
2018012398	邱俣涵	男	生命学院	生81
2019012282	王政	男	生命学院	生92
2018012708	郑毅喆	男	外文系	英81
2014013420	秦堤	男	软件学院	软件61
2016011990	靳紫荆	男	软件学院	软件62
2016080047	李泫撰	男	软件学院	软件62
2017010395	王澳	男	软件学院	软件81
2017010396	张智	男	软件学院	软件81

考试地点分配：五教5305

2017010428	孙梓健	男	软件学院	软件81
2017010561	金凤	女	软件学院	软件83
2017010713	陈嘉澍	男	软件学院	软件82
2017011672	沈澎博	男	软件学院	软件82
2017011834	肖今朝	男	软件学院	软件83
2018010110	赖翔翔	男	软件学院	软件9 1

2018010115	诸葛向文	男	软件学院	软件9 2
2018010139	张驰	男	软件学院	软件9 2
2018010683	伍冠宇	男	软件学院	软件83
2018010717	何金龙	男	软件学院	软件82
2018010746	杨启欣	男	软件学院	软件82
2018011439	王问涵	男	软件学院	软件9 3
2018080149	托夫	男	软件学院	软件83
2019013245	童圣博	男	软件学院	软件9 1
2019013246	游嘉诚	男	软件学院	软件9 1
2019013248	李毅	男	软件学院	软件9 1
2019013249	王森	男	软件学院	软件9 1
2019013251	王文昊	男	软件学院	软件9 1

考试地点分配：五教5305

2019013252	宋子昂	男	软件学院	软件91
2019013254	李金鹏	男	软件学院	软件91
2019013255	彭贻豪	男	软件学院	软件91
2019013256	张思旭	男	软件学院	软件91
2019013258	张兴龙	男	软件学院	软件91
2019013259	李云飞	男	软件学院	软件91
2019013261	周昱辰	男	软件学院	软件91
2019013262	刘星宇	男	软件学院	软件91
2019013264	周雨星	男	软件学院	软件91
2019013265	蒋哲宇	男	软件学院	软件92

2019013267	张博闻	男	软件学院	软件92
2019013268	李端	男	软件学院	软件92
2019013270	胡学浚	男	软件学院	软件92
2019013271	张楚炎	男	软件学院	软件92
2019013272	王冠	男	软件学院	软件92
2019013273	范逍宇	男	软件学院	软件92
2019013274	肖子凯	男	软件学院	软件92
2019013277	陈哲涵	男	软件学院	软件92

考试地点分配：五教5305

2019013279	胡梦箫	男	软件学院	软件9 2
2019013281	王子元	男	软件学院	软件9 2
2019013282	李松泽	男	软件学院	软件9 2
2019013284	孙沛瑜	男	软件学院	软件9 2
2019013288	任俊宇	男	软件学院	软件9 3
2019013289	孟德华	男	软件学院	软件9 3
2019013290	张凌峰	男	软件学院	软件9 3
2019013291	李佐元	男	软件学院	软件9 3
2019013292	郭昊	男	软件学院	软件9 3
2019013293	顾德禹	男	软件学院	软件9 3
2019013297	徐文博	男	软件学院	软件9 3
2019013301	高宇睿	男	软件学院	软件9 3
2019013302	文雨	男	软件学院	软件9 3
2019013304	伍俊豪	男	软件学院	软件9 3
2019013306	王泽文	男	软件学院	软件9 3
2019080106	梁潘钰瞳	男	软件学院	软件9 2
2019080124	魏乐	男	软件学院	软件9 1
2019080127	丁佳华	男	软件学院	软件9 1

期末考试主要题型

- 1. 选择/判断题 （给出正确选择）
- 2. 填空题 （直接给出结果）
- 3. 计算题 （列出计算步骤）
- 4. 证明题 （写出证明过程）

- 选择题与填空题需直接答在试卷纸上。

典型题目：选择题

1.　（　）简而言之，命题逻辑的公理系统是

A. 用来建立公理的系统。　B. 由公理产生推理规则的系统。　C. 用来完善已有公理的系统。

D. 从精选的几条公理出发，根据规定的演绎规则，推导出一系列定理的形式符号系统。

D

典型题目：选择题

2. （ ）孔子曰：“己所不欲，勿施于人。”以下哪一选项不是这句话的逻辑推论？

A. 只有己所欲，才能施于人。 B. 除非己所欲，否则不施于人。

C. 若己所欲，则施于人。 D. 凡施于人的都应该是己所欲的。

C

典型题目：选择题

- 6. 非空集合A上的恒等关系I_A是(C)；全关系E_A是(B)；空关系∅是(D)。
- A. 偏序关系但不是等价关系
- B. 等价关系但不是偏序关系
- C. 既是等价关系又是偏序关系
- D. 既不是等价关系也不是偏序关系

几个主要关系的性质

关系 \ 性质	自反性	反自反性	对称性	反对称性	传递性
恒等关系 I_A	√	×	√	√	√
全域关系 E_A	√	×	√	×	√
A**上的空关系** Φ	×	√	√	√	√
N**上的整除关系**	√	×	×	√	√
包含关系 $\subseteq$	√	×	×	√	√
真包含关系 $\subset$	×	√	×	√	√

判断题

（ × ）整数上的“≥”关系是等价关系。
（标出√或×）

填空题示例

- **对3个命题变元，可以定义**

  （　　　　　　　　　　　　　　　）

  个3元命题联接词（仅考虑二值逻辑）。

参见教材P22。

典型题目：填空题

按照连续统假设，用最简洁的形式写出下列计算结果。

$|N_N|$ = $\underline{\aleph_1}$ $|R_R|$ = $\underline{\aleph_2}$

对任意的无限基数$\boldsymbol{k}$,$\boldsymbol{k^k = 2^k}$

形式化

没有最大的素数

P(x)表示x是素数，

Q(x, y)表示x比y大

$$\neg(\exists x)\Big(P(x) \land (\forall y)\big(P(y) \to Q(x, y)\big)\Big)$$

计算题

用空集∅构造一个集合序列$S_0, S_1, \cdots, S_{i-1}$，满足$|S_i| = i$，且$S_i \subseteq S_{i+1}$，试写出序列的<u>前 4 个集合</u>$S_0, S_1, S_2, S_3$。

$$S_0 = \emptyset, S_1 = \{\emptyset\}, S_2 = \left\{\emptyset, \{\emptyset\}\right\}, S_3 = \left\{\emptyset, \{\emptyset\}, \left\{\emptyset, \{\emptyset\}\right\}\right\}$$

计算题示例

1. **给定命题公式 $(P \vee Q) \to R$，试计算该公式在联结词集合$\{\neg, \to\}$中的形式。**

证明题示例

- 使用推理规则或归结法证明下列推理：
- 每个人喜欢乘车或（普通或）喜欢骑自行车。
- 每个喜欢步行的人都不喜欢乘车。
- 有的人不喜欢骑自行车。
- 因而有的人不喜欢步行。

计算题：求[99, 1000]的范围内不能被5, 6, 8中任一个数整除的数的个数

- 用A、B、C表示[99,1000]之间分别能被5,6,8整除的整数的个数，则
- |A|=1000/5-98/5 = 181 |B|=1000/6-98/6=150 |C|=1000/8-98/8=113
- $|\mathrm{A} \cap \mathrm{B}| = \frac{1000}{30} - \frac{98}{30} = 30$ $|A \cap C| = \frac{1000}{40} - \frac{98}{40} = 23$
- $|B \cap C| = \frac{1000}{24} - \frac{98}{24} = 37$
- $|\mathrm{A} \cap \mathrm{B} \cap \mathrm{C}| = \frac{1000}{120} - \frac{98}{120} = 8$
- $|\overline{A} \cap \overline{B} \cap \overline{C}| = E - |A \cup B \cup C| = E - |A| - |B| - |C| + |\mathrm{A} \cap \mathrm{B}| + |A \cap C| + |B \cap C| - |\mathrm{A} \cap \mathrm{B} \cap \mathrm{C}|$
- = 902-181-150-113+30+23+37-8=540

证明题：利用推理规则或归结推理法证明下列推理

- $(\forall x)(P(x) \to Q(x)) \wedge (\forall x)(R(x) \to \neg Q(x)) \Rightarrow (\forall x)(R(x) \to \neg P(x))$

①$(\forall x)(P(x) \to Q(x))$	前提
②$(\forall x)(R(x) \to \neg Q(x))$	前提
③$P(x) \to Q(x)$	①全称量词消去
④$R(x) \to \neg Q(x)$	②全称量词消去
⑤$\neg Q(x) \to \neg P(x)$	③置换
⑥$R(x) \to \neg P(x)$	④⑤三段论
⑦$(\forall x)(R(x) \to \neg P(x))$	⑥全称量词引入

4、公理

公理1　$\vdash((P\vee P)\to P)$（重言律）

公理2　$\vdash(P\to(P\vee Q))$

（∨引入律，类似第2章中的基本推理公式4）

公理3　$\vdash((P\vee Q)\to(Q\vee P))$（类似析取交换律）

公理4　$\vdash((Q\to R)\to((P\vee Q)\to(P\vee R)))$

证明题：利用罗素公理系统证明：

$$\vdash(Q\to R)\to((P\to Q)\to(P\to R))$$

证明：

(1) $\vdash(Q\to R)\to(P\vee Q\to P\vee R)$　　公理4

(2) $\vdash(Q\to R)\to(\neg P\vee Q\to\neg P\vee R)$　　(1)代入$\dfrac{P}{\neg P}$

(3) $\vdash(Q\to R)\to((P\to Q)\to(P\to R))$　　定义(1)

证毕

3、定义

(1) $(A\to B)$ 定义为 $(\neg A\vee B)$。

(2) $(A\wedge B)$ 定义为 $\neg(\neg A\vee\neg B)$。

(3) $(A\leftrightarrow B)$定义为$((A\to B)\wedge(B\to A))$

获奖情况

- 辅助教学奖
- 优秀作业奖
- 大作业创新奖


福
大吉祥
2020
新年快乐
HAPPY CHINESE NEW YEAR
YEAR OF THE RAT
鼠