

离散数学(1) Discrete Mathematics 绪论与课程简介

刻世實 shixia@tsinghua.edu.cn

离散数学(1) (面向计算机软件专业)



教学组成员:

教师: 刘世霞 <u>shixia@tsinghua.edu.cn</u> 13521593099

助教: 王聪 <u>bryantwangcong@163.com</u> 15501257110

陈建辉 <u>chenjian16@mails.tsinghua.edu.cn</u> 18811351501

袁隽 <u>thss15_yuanj@163.com</u> 13316921448

所在单位:清华大学软件学院

让我们一起来感受离散数学的魅力!



提纲

- 什么是离散数学
- 为什么要学习离散数学
- 课程学习要求
- 数理逻辑概论

什么是离散数学



- 离散数学(discrete mathematics)是
 - "研究离散结构的数学分科。"—《辞海》79年版, P355
 - 现代数学的重要分支
 - 计算机大类专业基础理论的核心课程
- 研究离散对象的的结构及其相互间关系的数学分支
 - 离散:只能用自然数或整数单位计算的变量.如自然数集
 - 连续:在一定区间内可以任意取值的变量. 如实数集
 - 微积分就是研究连续函数的数学分支

维基百科 (Wikipedia)



离散数学是数学的几个分支的总称,研究基于<mark>离</mark> 散空间而不是连续的数学结构。

与光滑变化的实数不同,离散数学的研究对象——例如整数、图和数学逻辑中的命题——不是光滑变化的,而是拥有**不等、分立**的值。

因此离散数学不包含微积分和分析等"连续数学"的内容。

维基百科(Wikipedia)



- 离散对象经常可用整数来枚举。更一般地,离散数学被视为处理可数集合的数学分支。
- 但应该说,离散数学尚不存在学术界普遍认可的定义。
- 实际上,离散数学经常被定义为不包含连续变化 量及相关概念的数学,甚少被定义为包含什么内 容的数学。

离散数学•文学描述



- 连续的印象:
 - "剪不断,理还乱,是离愁,…"
 - "恰似一江春水向东流。"

— 南唐· 李煜词 (分别取自《相见欢》和《虞美人》)

● 离散的印象1:

"枯藤老树昏鸦,小桥流水人家, 古道西风瘦马,夕阳西下, 断肠人在天涯。"

一元・马致远

离散数学·文学描述(续)



● 离散的印象(建议版):

"明月别枝惊鹊,清风半夜鸣蝉。 稻花香里说丰年,听取蛙声一片。 七八个星天外,两三点雨山前。 旧肘茅店社林边,路转溪桥忽见。"

一 南宋·辛弃疾《西江月》

离散数学里说丰年, 听取好消息一片!

离散数学课程说明



- 研究对象----离散个体及其结构
- 研究思想----以集合和映射为工具、体现公理化和结构的思想
- 研究内容----包含不同的数学分支,模块化结构
 - 数理逻辑: 推理、形式化方法
 - 集合论: 离散结构的表示、描述工具
 - 代数结构: 离散结构的代数模型
 - 图论: 离散结构的关系模型
 - 组合数学: 离散结构的存在性、计数、枚举、优化、 设计

离散数学与其他相关学科的关系

• 数理逻辑:人工智能、程序正确性证明、

程序验证等

• 集合论: 关系数据库模型等

• 代数结构: 软件规范、形式语义、编译系统、

编码理论、密码学、数据仓库等

• 图论: 数据结构、数据库模型、

网络模型等

• 组合数学: 算法分析与设计、编码理论、容错等

教材和参考书



教材

- [T1] 数理逻辑与集合论(第2版), 石纯一等编著,清华大学出版社.

• 参考书

- [R1] Discrete Mathematics and Its Applications,
 第5版, K. Rosen, 机械工业出版社, 2003.
- [R2] 屈婉玲, 耿素云, 张立昂. 离散数学, 高等教育出版社.



提纲

- 什么是离散数学
- 为什么要学习离散数学
- 课程学习要求
- 数理逻辑概论



离

散



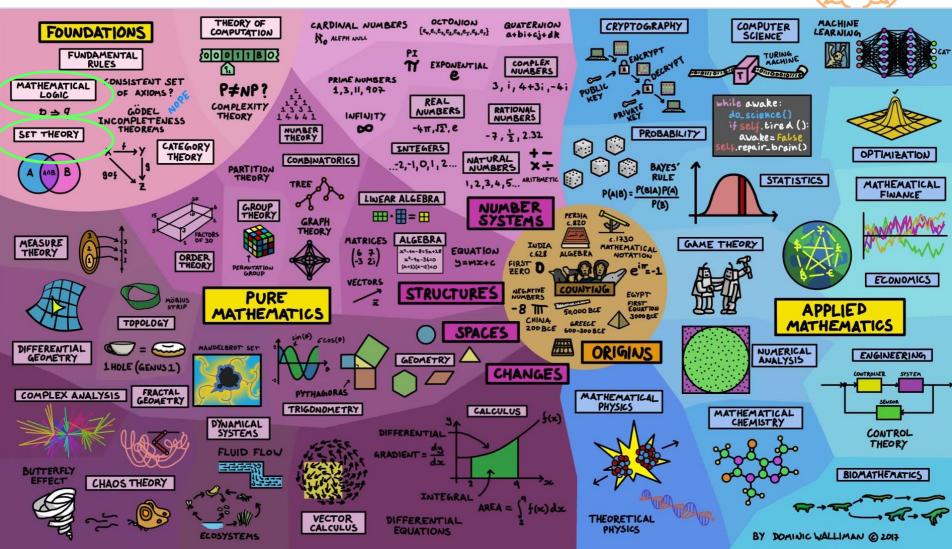






数学地图





为什么要学习离散数学



- 提高数学论证和求解能力
- 培养抽象思维能力和逻辑推理能力(数理逻辑)
- 信息在计算机中是以离散形式存储的: 为形式化描述方法奠定数学基础
 - 指专门用于描述、建立和验证计算机系统的数表示法
- 是大类的数学基础
 - 数据结构, 算法, 数据库理论, 自动机理论, 形式语言, 编译理论, 计算机安全, 操作系统, 人工智能, 数字电路

离散数学的重要性: 应用



后续课程的基础, 十分有助于深入学习和研究。

- > 程序设计语言
- > 数据结构与算法
- > 计算方法(数值分析)
- > 编译原理
- > 操作系统
- > 信息检索与数据库系统
- ▶ 形式语言与自动机
- > 可计算性与计算复杂性理论
- > 人工智能与机器人
- 计算机网络与通信等

程序设计语言简例



- IF ... THEN ... ELSE ...
- IF P THEN Q ELSE S

何
$$S(x) = \begin{cases} 1 & x > 0 \\ 0 & x = 0 \\ -1 & x < 0 \end{cases}$$

程序设计语言简例



- IF ... THEN ... ELSE ...
- IF P THEN Q ELSE S

例
$$S(x) =$$

$$\mathbf{FJ} \ \mathbf{S}(\mathbf{x}) = \begin{cases} 1 & x > 0 \\ 0 & x = 0 \\ -1 & x < 0 \end{cases}$$

if
$$(x > 0)$$
 then $S = 1$;
if $(x == 0)$ then $S = 0$;

else
$$S = -1$$
;

程序设计语言简例



- IF ... THEN ... ELSE ...
- IF P THEN Q ELSE S

例
$$S(x) =$$

例
$$S(x) = \begin{cases} 1 & x > 0 \\ 0 & x = 0 \\ -1 & x < 0 \end{cases}$$

if
$$(x > 0)$$
 then $S = 1$;
if $(x == 0)$ then $S = 0$;
else $S = -1$;

自然语言处理和日常交流



• 丈夫看妻子在厨房里忙着,问道: "我能帮你吗"?

• 妻子说:

"好啊,那你拿那袋马铃薯,一半削皮,放在锅里煮"。





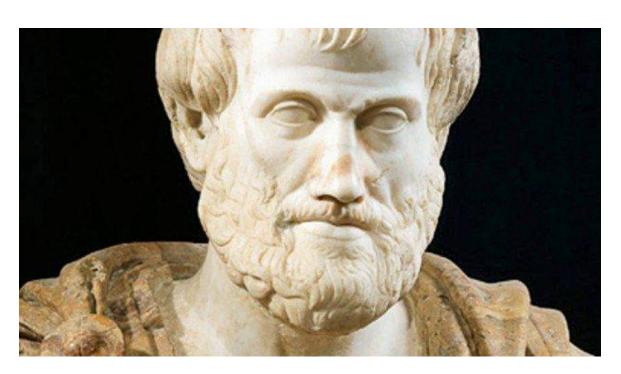
做一个好的搜索引擎不容易



- PageRank算法
- Rules, rules, and rules
- Knowledge, knowledge, and knowledge

人工智能的梦想







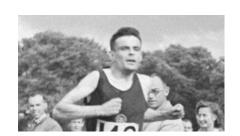


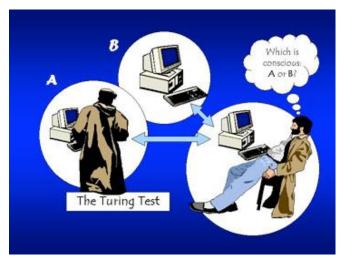
公元前322年

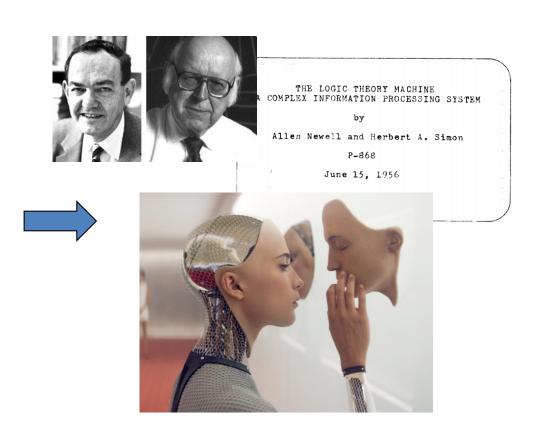
"If every tool, when ordered, or even of its own accord, could do the work that befits it... then there would be no need either of apprentices for the master workers or of slaves for the lords." -- 亚里士多德

图灵测试和"强"人工智能









Courtesy of Eric Xing

人工智能的曙光



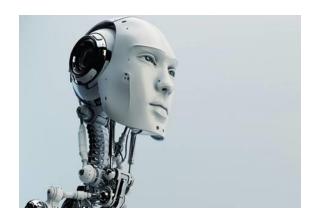
 数理逻辑的突破,计算机的发明,控制论、信息 论等的建立,不同领域的科学家开始探讨制造人 工大脑的可能性











最初的人工智能研究是30年代到50年代初的一系列科学进展交汇的产物

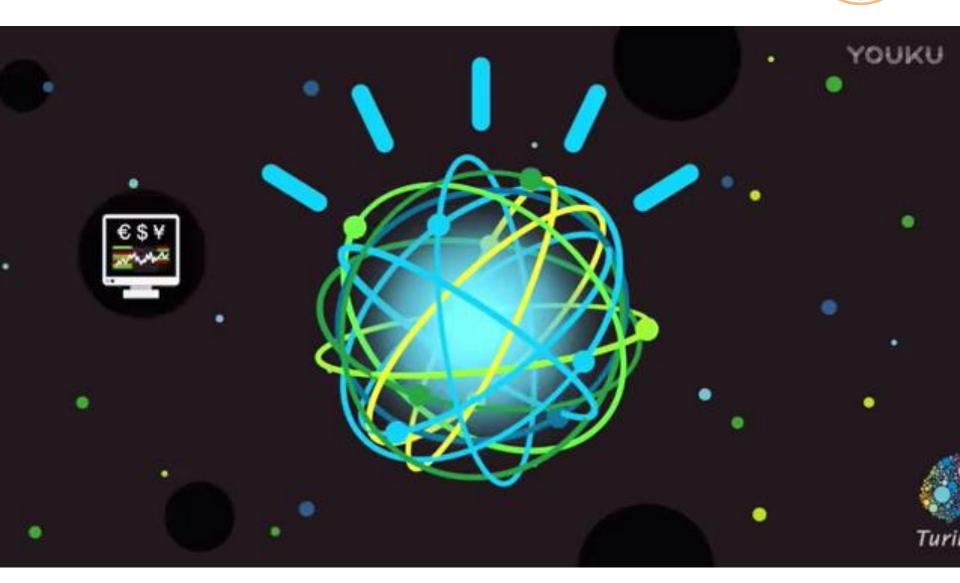
Courtesy of Eric Xing

人工智能-IBM Watson





人工智能-IBM Watson (cont'd)



人工智能-AlphaGo





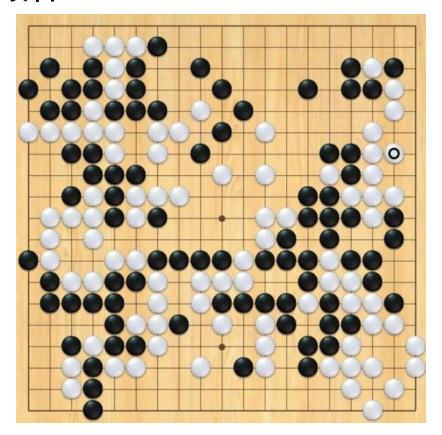




Master – AlphaGo的升级版



• 2016年12月29号, Master 出现,以横扫千军的姿态战胜几乎所有中国的围棋大师,包括「棋圣」 聂卫平和柯洁



AlphaGo的四大奇招





离散数学的重要性:大师的体会



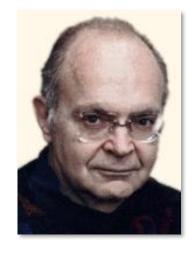
1930-2002

"我现在年纪大了,搞了这么多年的错误不知犯了多少,现在觉悟了。我

想,假如我早年在数理逻辑上好好下点工夫的话,我就不会犯这么多的错误。不少东西逻辑学家早就说过了,可是我并不知道。如果我能年轻二十岁的话,我就回去学逻辑。"

— E. W. Di jkstra (狄克斯特拉) 1972年Tur ing奖获得者

离散数学的重要性: 大师的体会



用一组基本的指令来编制一个计算机程序, 非常类似于从一组公理来构造一个数学证 明。

1938-

— D. E. Knuth 1974年Turing奖获得者

代表作: The Art of Computer Programming

Homepage - http://www-cs-faculty.stanford.edu/~uno/



Donald E. Knuth (高德纳), Professor Emeritus of The Art of Computer Programming at Stanford University

- Frequently Asked Questions
- Infrequently Asked Questions
- Recent News
- Computer Musings
- Known Errors in My Books
- Help Wanted
- Diamond Signs
- Preprints of Recent Papers
- **(2)** Curriculum Vitæ
- Pipe Organ
- Downloadable Graphics

🖔 <u>Fantasia Apocalyptica</u>

- Downloadable Programs and Data
- Expecting a check from me?
- Did you borrow a video from me?

Shixia Liu (刘世霞)

I am an associate professor in the School of Software, Tsinghua University. I received a B.S. and M.S. in Computational Mathematics from Harbin Institute of Technology, a Ph.D. in Computer Aided Design and Computer Graphics from Tsinghua University. Before I joined Tsinghua, I worked as a lead researcher at Microsoft Research Asia and a research staff member and research manager at IBM China Research Lab.

Email: shixia@tsinghua.edu.cn; liushixia@gmail!co

Research

My research tightly integrates interactive visualization with machine learning or data mining techniques to help users consume huge amounts of information. Specifically, my research interests include visual text analytics, visual social media analytics, and text mining.

- Visual text analytics Combine the advantages of text mining, interactive visualization, and human computer
- interaction to facilitate visual analytics of large-scale textual data. · Visual social media analytics Tightly integrate social media mining with interactive visualization to help user better consume
- Text mining Develop statistical text mining methods to understand complex text data, including

If you are highly motivated and interested in Information Visualization and Visual Analytics,

evolutionary text clustering, topic modeling, and sentiment analysis.

various information (e.g. content or user behaviors) on social media.

Curriculum vita Recruitment

I am currently looking for

- · PhD students and master students,
- Research Assistants (RAs),

please contact me.

Postdocs

Professional Activities

Papers co-chair

IEEE VIS (VAST) 2016, 2017

Associate Editor IEEE Transactions on Visualization and Computer Graphics, 2015~

Editorial Board

Information Visualization, 2015~

Program co-chair

- Organizing Committee (Tutorials Chair): IEEE VIS 2015
- PacificVis 2015
- Organizing Committee (Meetup Chair): IEEE VIS 2014



提纲

- 什么是离散数学
- 为什么要学习离散数学
- 课程学习要求
- 数理逻辑概论



学习目标

本课程是计算机科学基础理论的重要课程,通过课时内的学习及课外练习,应能达到以下目标:

- 1. 对数理逻辑与集合论的基本概念有较深入的了解;
- 系统地掌握命题演算、谓词演算及朴素集合论的 经典内容。



学习本课程需具备的相关知识

- 一般而言,本课程并无先修课程要求。
- 只要具备高中所学的集合知识和简单的逻辑概念 便可学习本课程。
- 若具有高等数学及普通线性代数的基础将十分有助于对本课程的理解和掌握。

学习本课程应注意的几个问题

- 注意基本概念的理解与基本演算方法的掌握;
- 在课内学习的基础上,加强课外习题的训练;
- 在学习基本理论的同时,了解并熟悉应用方法。

作业要求



- 请使用作业纸,写清名字与学号
- 作业需手写后拍照并转成pdf文件上传至网络学堂 提交。
 - 每次作业只能提交一个pdf文件
- 每周五9:00之前交上周的作业

• 推荐软件: 扫描王

答疑



- 时间: 每周四下午3:00-5:00
- 地点: 助教和老师的东主/配楼办公地点
- 助教和老师
 - 王聪 <u>bryantwangcong@163.com</u> 东配楼11-301
 - 陈建辉 <u>chenjian16@mails.tsinghua.edu.cn</u> 东配楼11-301
 - 袁隽 <u>thss15_yuanj@163.com</u> 东主楼10-406
 - 刘世霞 <u>shixia@tsinghua. edu. cn</u> 东主楼10-407
- 微信答疑小程序

习题课及考核



- 1次习题课
 - 16周
- 1次复习课
- 考核
 - 大类课组共同出题
 - 平时成绩: 30%: 作业
 - 期末考试: 70%
 - 加分: 在微信小程序帮助助教和老师答疑(<=3分)



提纲

- 什么是离散数学
- 为什么要学习离散数学
- 课程学习要求
- 数理逻辑概论

什么是逻辑?



- 逻辑是研究推理(reasoning)的科学.
 - 英文logic源自希腊文logos(言词,思想,理性等等)
 - 中文"逻辑"一词由严复首先译用
 - 又称名理学,名学,论理学,理则学,辩学等.
- 西方逻辑起源可追溯到古希腊
 - 亚里士多德(Aristotle)
 - 斯多葛学派(the Stoics)
- 古代东方逻辑
 - 中国的名辩之学(名墨儒道各家)
 - 古印度的因明

逻辑学--七大基础学科之一



- 1974年,联合国教科文组织编制的学科分类中, 逻辑学被列为七大基础学科之一。
- 数学
- 逻辑学
- 天文学和天体物理学
- 地球科学和空间科学
- 物理学
- 化学
- 生命科学

逻辑的作用

What's out there?
How does world work?
What's going to happen?
What should i do?

- 如何获得知识(真理)?

 - -从"旧知"经"推理"得出"新知"
 - •若"旧知"和"推理"都正确,则"新知"正确.
 - •若"新知"错而"推理"正确,则抛弃"旧知".
 - 逻辑研究怎样的推理是可靠的.
 - 逻辑还研究一组知识是否协调(一致, 相容).
- 逻辑思维能力是学习工作乃至日常生活中的重要能力.

逻辑的分类



- 逻辑学是研究人的思维形式及思维规律的科学
- 由于研究的对象和方法各有侧重而又分为辨证逻辑、形式逻辑。
- 辩证逻辑: 是研究人的思维中的辩证法。
- 形式逻辑: 是研究人的思维的形式和一般规律。 人的思维过程:

概念⇒判断⇒推理

推理:是由若干个已知的判断(前提),推出新的判断(结论)的思维过程。

数理逻辑的引入



- 数理逻辑: 是形式逻辑与数学相结合。
- 所谓"数学方法":是建立一套有严格定义的符号,来研究形式逻辑。所以数理逻辑也称"符号逻辑"。
- 数理逻辑的核心是把逻辑推理符号化,即变成象数学演算一样完全形式化了的逻辑演算。
- 使用计算机必须首先学会编"程序",那么什么是程序?

程序=<mark>算法</mark>+数据 算法=逻辑+控制

• 我们只讨论"命题逻辑"和"谓词逻辑"



数理逻辑·概念

形式结构:概念、判断、推理之间的结构与联系

判断: 依据概念对事物是否具有某种 属性进行肯定或否定的回答

• 推理: 由一个或几个判断推出另一个 判断的思维形式

数理逻辑的发展历程

数理逻辑前史时期一古典形式逻辑时期



数理逻辑初创时期一逻辑代数时期



数理逻辑的奠定时期



数理逻辑发展初期



数理逻辑现代发展时期



这一时期主要工作有亚里士多德的 三段论,斯多阿学派的命题逻辑和中世纪形 式逻辑的形成与发展。

数理逻辑创建于17世纪末,创始人是德国哲学家和数学家莱布尼茨。这一时期的主要成就有莱布尼茨的数理逻辑的伟大思想的形成,逻辑代数和关系逻辑的建立和发展。

这一时期从1879年弗雷格G. Frege《概念语言》的出版到希尔伯特的元数学纲领的提出,主要工作有逻辑演算的建立,朴素集合论、公理集合论以及第三次数学危机。为解决第三次数学危机所取得的结果:逻辑类型论,直觉主义数学基础和逻辑,形式公理学和证明论。

这一时期是20世纪30十年代,主要工作体现为 哥德尔(Gode1)的几项重大成果一完全性定理、 理、不完全性定理和连续统假设的一致性等

这一时期从20世纪40年代开始。主要内容是各种非经典逻辑和四论一模型论、集合论、递归论和证明论的突飞猛进的发展

逻辑发展中的里程碑式的人物

- 亚里士多德
- 莱布尼茨
- 布尔
- 弗雷格
- 希尔伯特
- 罗素
- 哥德尔
- • •



逻辑学的早期创始人

亚里士多德(公元前384—322)
 被公认为是逻辑学的创始人

柏拉图(约公元前427—347)首先把逻辑学的思想方法引入几何学

亚里士多德



- 三段论(syllogism): 从两个前提推出一个结论的逻辑论证形式
 - 1. 大前提(major premise) 人都是两足动物
 - 2. 小前提(minor premise) 希腊人都是人
 - 3. 结论(conclusion) 希腊人都是两足动物
- 三段论是传统演绎推理的核心,在西方逻辑中一直处于统治地位,直至19世纪被数理逻辑(一阶谓词逻辑)所取代.



- 1. 德国 G. W. Leibniz (1646-1716)
- 首先把数学引入形式逻辑,明确提出用数学方法研究推理。
- 设想建立通用符号,通用语言,以便统一所有学科, 成立世界科学院
- 试图以数学为标准将一切学科体系化
- 名言:

"如果我少受干扰,或者我更年轻,或者有青年人帮助我,我有望作出一种一般代数,用它可以将推理的正确性全部化为计算。"



- 2. 英国 G. Boole (1815-1864) 德国 A.de Morgan (1806-1876) 德国 Schroder (1841-1902)
- 共同创立了逻辑代数和关系代数
- 1847年 Boole 实现了命题演算



- 3. 德国 G. Frege (1848-1925)
- 1879年建立了第一个谓词演算系统
- 发表《计算概念》一书

名 言:

"数学的本质就在于

一切能证明的都要证明。"



- 4. 英国 B. Russell (1872-1970) 与Whitehead合著的杰作
 - 三大卷本的《数学原理》问世
- 从逻辑学的基本法则出发建立了自然数理论,实数理论及解析几何学等。
- 名言:

"逻辑学是数学的青年时代, 而数学是逻辑学的壮年时代。"



5. 德国 G. Cantor (1845-1918)

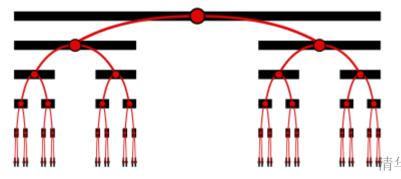
集合论的创始人,无穷

德国 D. Hilbert (1862-1943)

1900 数学大会 23个数学问题

奥地利 K. Godel

1931年提出 Godel 不完全性定理





6. 英国 Alan. M. Turing(图灵)

1936年引入Turing机

(一种抽象的计算机模型)

例:根据下面事实找出凶手 🕻



- 1. 清洁工或者秘书谋害了经理。
- 2. 如果清洁工谋害了经理,则谋害不会发生在午夜前。
- 3. 如果秘书的证词是正确的,则谋害发生在午夜前。
- 4. 如果秘书的证词不正确,则午夜时屋里灯光未灭。
- 5. 如果清洁工富裕,则他不会谋害经理。
- 6. 经理有钱且清洁工不富裕。 7. 午夜时屋里灯灭了。

令A:清洁工谋害了经理 B:秘书谋害了经理

C: 谋害发生在午夜前 D: 秘书的证词是正确的

E: 午夜时屋里灯光灭了 H: 清洁工富裕 G: 经理有钱

$$A \lor B \quad A \not \to \neg C \quad D \not \to C \quad \neg D \not \to \neg E \quad H \to \neg A \quad G \land \neg H \qquad E$$

$$E \Rightarrow B$$

例:爱因斯坦出过的一道题《



• 一个土耳其商人想找一个十分聪明的助手协助他经商,有 两人前去应聘,这个商人为了试试哪个更聪明些,就把两 个人带进一间漆黑的屋子里,他打开灯后说:"这张桌子 上有五顶帽子,两顶是红色的,三顶是黑色的,现在,我 把灯关掉, 而且把帽子摆的位置弄乱, 然后我们三个人每 人摸一顶帽子戴在自己头上, 在我开灯后, 请你们尽快说 出自己头上戴的帽子是什么颜色的。"说完后,商人将电 灯关掉,然后三人都摸了一顶帽子戴在头上,同时商人将 余下的两顶帽子藏了起来,接着把灯打开。这时,那两个 应试者看到商人头上戴的是一顶红帽子, 其中一个人便喊 道:我戴的是黑帽子。"

请问这个人说得对吗?他是怎么推导出来的呢?

解答



- 要回答这样的问题:
- "商人戴的是红帽子"→"猜出答案的应试者戴的 黑帽子"。需要经历如下过程:
 - (1) 什么是前提?有哪些前提?
 - (2)结论是什么?
 - (3) 根据什么进行推理?
 - (4)怎么进行推理?

解答



- 假言命题及推理
 - 充分条件假言命题或者必要条件假言命题
- 我们把答对的应聘者叫A吧,另一位竞争者叫B
- 先用充分条件假言命题(后件否定前件):
 - 如果A戴的是红帽子(P),那么B见了一定会立即答出自己戴的是黑帽子(Q)
 - B没有立即答出自己戴的是黑帽子, 所以A戴的肯定不是红帽子。

思考题



例. 安排课表,教语言课的教师希望将课程安排在第一或第三节;教数学课的教师希望将课程安排在第二或第三节;教原理课的教师希望将课程安排在第一或第二节。如何安排课表,使得三位教师都满意。

如何解该问题?

数理逻辑的研究内容



"两个演算加四论"

命题演算与谓词演算 1-3, 4-5(章)

集合论(集合、关系、函数、基数)9-12

模型论(形式语言语法与语义间的关系)7

递归论(可计算性与可判定性)6

证明论(数学本身的无矛盾性)8

"两个演算加一论"



谢谢

shixia@tsinghua.edu.cn