期末考试试题参考解答

一．填空题（每空 3 分，共 15 题）**（请将答案直接填写在横线上！）**

1. 设函数 $f(x)$ 在整个实轴上连续，且满足积分方程 $f(x)=x+\int_0^x f(s)ds$，$\forall x\in R$，则

$f(x)=\underline{e^x-1}$。

解：由于 $f(x)$ 连续且满足上述积分方程，故 $f(x)$ 连续可导。对积分方程两边求导得

$f'(x)=f(x)+1$。这表明 $f(x)$ 是常微分方程 $y'=y+1$ 的解。不难解得这个方程的通解为 $y=ce^x-1$。在积分方程中，令 $x=0$ 可知 $f(x)$ 还满足条件 $f(0)=0$。由此可知 $f(x)=e^x-1$。解答完毕。

2. 定积分 $\int_0^{\ln 2}\sqrt{e^x-1}dx=\underline{2-\pi/2}$。

解：为了去根号，对被积函数作变换 $y^2=e^x-1$，则 $2ydy=e^xdx$。于是

$$\int_0^{\ln 2}\sqrt{e^x-1}dx=\int_0^1\frac{2y^2dy}{1+y^2}=2-2\int_0^1\frac{dy}{1+y^2}=2-\pi/2$$ 。解答完毕。

3．广义积分 $\int_0^{+\infty}\frac{dx}{(x^2+1)^{\frac{3}{2}}}=\underline{1}$。

解：为了去根号，作变换 $x=\tan t$，则 $dx=\frac{dt}{\cos^2 t}$。于是

$$\int_0^{+\infty}\frac{dx}{(x^2+1)^{\frac{2}{2}}}=\int_0^{\pi/2}\cos tdt=1$$。解答完毕。

4. 设 $f(x)$ 在 $[0,+\infty)$ 上连续且 $\lim_{x\to+\infty}f(x)=2014$，则 $\lim_{x\to+\infty}\frac{1}{x}\int_0^x f(t)dt=\underline{2014}$。

解：利用 $L'Hospital$ 法则即得结论。解答完毕。

5. 定积分 $\int_{-\pi/4}^{\pi/4}\frac{x^3+1}{\cos^2 x}dx=\underline{2}$。

解：注意函数 $\frac{x^3}{\cos^2 x}$ 是奇函数，故在任何对称区间上的积分为零。因此

$\int_{-\pi/4}^{\pi/4}\frac{x^3+1}{\cos^2 x}dx=\int_{-\pi/4}^{\pi/4}\frac{1}{\cos^2 x}dx=2$。解答完毕。

6．不定积分 $\int\frac{x}{\cos^2 x}dx=\underline{x\tan x+\ln|\cos x|+c}$。

解：由分部积分得 $\int\frac{x}{\cos^2 x}dx=x\tan x-\int\tan xdx=x\tan x+\ln|\cos x|+c$。解答完毕。

7. 平面区域 $\{(x,y),0\le x\le\pi/2,0\le y\le\sin x\}$ 绕 x 轴旋转所得的旋转体体积为 $\underline{\frac{\pi^2}{4}}$。

解：所求体积为 $\int_0^{\pi/2}\pi\sin^2 xdx=\frac{\pi}{2}\int_0^{\pi/2}(1-\cos 2x)dx=\frac{\pi^2}{4}$，解答完毕。

8．常微分方程 $(x^2+1)(y^2+1)dx+2ydy=0$ 的通解为 $\underline{\frac{x^3}{3}+x+\ln(1+y^2)=c}$。

解：注意方程是变量分离型的。方程两边同除 y^2+1 得 $(x^2+1)dx+\frac{2ydy}{1+y^2}=0$。

对上式积分得通解 $\frac{x^3}{3}+x+\ln(1+y^2)=c$。解答完毕。

9．曲线 $y=x^3-6x^2+9x-3$ 唯一拐点的横坐标为 $\underline{2}$。

解：对函数 $y=x^3-6x^2+9x-3$ 求二阶导数得 $y''=6x-12$。由此可见，在 $x=2$ 附近函数的二阶导数变号，从而凸性有变化。因此 $x=2$ 对应的点是拐点。解答完毕。

10．定积分 $\int_0^{100\pi}\sqrt{1-\cos 2x}dx=\underline{200\sqrt{2}}$。

解：注意被积函数是周期为π的函数。因此

$$\int_0^{100\pi}\sqrt{1-\cos 2x}dx = 100\int_0^{\pi}\sqrt{1-\cos 2x}dx = 100\sqrt{2}\int_0^{\pi}\sin x dx = 200\sqrt{2}$$ 。解答完毕。

11．星形线$x = a\cos^3 t$，$y = a\sin^3 t$（$0 \le t \le \pi/2$）的弧长为$\underline{3a/2}$。

解：根据曲线的弧长公式得所求弧长为

$$\int_0^{\pi/2}\sqrt{x'(t)^2 + y'(t)^2}dt = 3a\int_0^{\pi/2}\sqrt{\sin^2 t\cos^4 t + \cos^2 t\sin^4 t}dt = 3a\int_0^{\pi/2}\sin t\cos t dt =$$

$= 3a/2$。解答完毕。

12.　一阶常微分方程$\frac{dy}{dx} + \frac{y}{x} = \frac{1}{x}$的通解为$\underline{y = \frac{c}{x} + 1}$。

解：由观察知方程有一个特解$y = 1$（常数解）。不难看出对应齐次线性方程的通解为

$y = \frac{c}{x}$。因此方程的通解为$y = \frac{c}{x} + 1$。解答完毕。

13.　常微分方程$y'' = \frac{2y'x}{1+x^2}$满足初值条件$y(0) = 1$，$y'(0) = 2$的解为

$\underline{y = 2x^3/3 + 2x + 1}$。

解：注意这个二阶方程可降阶。令$z = y'$，则得到关于z的一阶方程，且是一个变量分离

型方程$z' = \frac{2zx}{1+x^2}$。不难求得其通解为$z = c_1(1+x^2)$。根据初值条件

$z(0) = y'(0) = 2$可知$c_1 = 2$。因此$z = 2(1+x^2)$。再求解初值问题$y' = z = 2(1+x^2)$，

$y(0) = 1$，得所求解为$y = 2x^3/3 + 2x + 1$。解答完毕。

14.　极限$\lim_{n\to+\infty}\sum_{k=1}^{n}\frac{n}{(n+k)^2} = \underline{\frac{1}{2}}$.

解：注意上述和式可写作

$$\sum_{k=1}^{n}\frac{n}{(n+k)^2} = \frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n}\frac{1}{\left(1+\frac{k}{n}\right)^2}$$ 。

而变形后的和式可看作函数$\frac{1}{(1+x)^2}$在区间$[0,1]$上的一个 Riemann 和式。因此

$\lim\limits_{n\to+\infty}\sum\limits_{k=1}^{n}\frac{n}{(n+k)^2}=\int_0^1\frac{dx}{(1+x)^2}=\frac{1}{2}$。解答完毕。

15．使得广义积分 $\int_0^1\frac{\ln(\cos x)}{x^p}dx$ 收敛的实数 p 的取值范围是 $\underline{p<3}$。

解：被积函数 $\frac{\ln(\cos x)}{x^p}$ 在区间 $[0,1]$ 仅有一个可能的瑕点是 $x=0$。注意分子在 $x=0$ 附近的无穷小的阶是 2，因为 $\frac{\ln(\cos x)}{x^2}=\frac{\ln[1+(\cos x-1)]}{\cos x-1}\frac{\cos x-1}{x^2}\to-\frac{1}{2}$， $x\to 0$。

我们将被积函数写作 $\frac{\ln(\cos x)}{x^p}=\frac{\ln(\cos x)}{x^2}\frac{1}{x^{p-2}}$，

则根据比较判别法得极限形式可知，当 $p-2<1$，即 $p<3$ 时，积分收敛。而当 $p\ge 3$ 时积分发散。解答完毕。

二． 计算题（每题 10 分，共 4 题）**（请写出详细计算过程和必要的根据！）**

1. 计算定积分 $\int_0^{\pi/4}\frac{dx}{\cos^4 x+\sin^4 x}$.

解：我们对被积函数的分母作如下变形

$$\cos^4 x+\sin^4 x=(\cos^2 x-\sin^2 x)^2+2\sin^2 x\cos^2 x=\cos^2 2x+\tfrac{1}{2}\sin^2 2x\text{。}$$

记上述积分为 I。则 $I=\int_0^{\pi/4}\frac{dx}{\cos^2 2x+\frac{1}{2}\sin^2 2x}=\int_0^{\pi/2}\frac{du}{2\cos^2 u+\sin^2 u}=$

$=\int_0^{+\infty}\frac{dv}{2+v^2}=\frac{\sqrt{2}\pi}{4}$。 解答完毕。

2. 求函数 $f(x)=\frac{x^3}{1+x^2}$ 的(i)渐近线（如果存在的话）；(ii)单调区间； (iii)极值点和极值；

(iv) 凸性区间和拐点. 根据上述信息，大致画出 $f(x)$ 的函数图像。

解: 显然函数 $f(x)$ 的定义域是整个实轴，且是奇函数。因此它的函数图像关于原点对称。

解(i): 由观察知函数 $f(x)$ 有渐近线 $y=x$： $\lim_{x\to\pm\infty}[f(x)-x]=\lim_{x\to\pm\infty}\frac{-x}{1+x^2}=0$。

解(ii)和(iii): 简单计算可得 $f'(x)=\frac{x^2(x^2+3)}{(1+x^2)^2}\geq 0$。

由此可见，函数 $f(x)$ 在整个实轴上严格单调上升。且有唯一的临界点 $x=0$。显然临界点

$x=0$ 不是函数的极值点。因此函数无极值点，从而也无极值。

解(iv) ：为了求二阶导数的方便，我们将 $f'(x)=\frac{x^2(x^2+3)}{(1+x^2)^2}$ 作如下变形：

$f'(x)=\frac{x^4+2x^2+1+x^2+1-2}{(1+x^2)^2}=1+\frac{1}{1+x^2}-\frac{2}{(1+x^2)^2}$。于是

$f''(x)=\frac{-2x}{(1+x^2)^2}+\frac{8x}{(1+x^2)^3}=\frac{2x(3-x^2)}{(1+x^2)^3}$。

由此可得如下结论：

（1）函数 $f(x)$ 有三个拐点：$x=0$，$x=\sqrt{3}$，$x=-\sqrt{3}$。

（2） $f(x)$ 下凸区间：$(-\infty,-\sqrt{3})$ 和 $(0,\sqrt{3})$；上凸区间：$(-\sqrt{3},0)$ 和 $(\sqrt{3},+\infty)$

根据以上信息，可画出函数 $f(x)$ 的图像。(略)

3. 求由参数方程 $x=e^t\cos t$，$y=e^t\sin t$（$0\leq t\leq \pi/2$）确定的曲线绕 x 轴旋转一周所得旋转面的面积。

解：所求旋转面的面积为

$$2\pi\int_0^{\pi/2}y(t)\sqrt{x'(t)^2+y'(t)^2}dt=2\sqrt{2}\pi\int_0^{\pi/2}e^{2t}\sin t dt=\frac{2\sqrt{2}\pi(2e^{\pi}+1)}{5}$$

解答完毕。

4. 设函数 $f(x)$ 在实轴上连续且满足积分方程 $f(x)=4e^x+\int_0^x(x-s)f(s)ds$，$\forall x\in R$。

求 $f(x)$ 的表达式。

解：解题思想是，先导出 $f(x)$ 所满足的微分方程，然后解这个微分方程来确定 $f(x)$ 的表达式。由题设条件知函数 $f(x)$ 可导。 为了方便求导，我们将积分方程作如下变形

$f(x)=4e^x+x\int_0^x f(s)ds-\int_0^x sf(s)ds$。（1）

对上式两边求导得

$f'(x)=4e^x+\int_0^x f(s)ds$。（2）

再次求导得 $f''(x)-f(x)=4e^x$，即 $f(x)$满足二阶线性常系数的常微分方程

$$y''-y=4e^x \qquad (*)$$

对应的齐次方程的特征根为± 1。 再根据右端函数$4e^x$的形式，可知方程（*）有特解形如

$\varphi(x)=axe^x$， 其中a为待定常数。对$\varphi(x)$两次求导得

$\varphi'(x)=ae^x+axe^x=(ax+a)e^x$

$\varphi''(x)=ae^x+(ax+a)e^x=(ax+2a)e^x$。

令 $\varphi''(x)-\varphi(x)=4e^x$得 $(ax+2a)e^x-axe^x=4e^x$。

由此解得$a=2$。即方程（*）有特解$\varphi(x)=2xe^x$。

所以方程（*）有通解$y=c_1e^x+c_2e^{-x}+2xe^x$。

其导数为 $\mathrm{y}'=c_1e^x-c_2e^{-x}+(2x+2)e^x$。

根据方程（1）和（2）可知，$f(0)=4$，$f'(0)=4$。由此得

$c_1+c_2=4$

$c_1-c_2+2=4$

求解上述线性方程组得

$c_1=3$，$c_1=1$。这就得到$f(x)$的表达式

$f(x)=3e^x+e^{-x}+2xe^x$。解答完毕。

三. 证明题（请写出详细的证明过程！）

1. （8 分）设函数$f(x)$在$[0,1]$上连续，且$f(x)>0$，$\forall x\in[0,1]$。证明

$$e^{\int_0^1 \ln f(x)dx} \le \int_0^1 f(x)dx \text{。} \qquad （*）$$

证法 1：对任意正整数n，记$x_k = k/n$，$0 \le k \le n$。

根据几何平均与算术平均不等式我们有

$$\sqrt[n]{f(x_1)f(x_2)\cdots f(x_n)} \le \frac{f(x_1)+f(x_2)+\cdots+f(x_n)}{n}$$

注意上式左边可以改写为

$$\sqrt[n]{f(x_1)f(x_2)\cdots f(x_n)} = e^{\frac{1}{n}(\ln f(x_1)+\ln f(x_2)+\cdots+\ln f(x_n))} \text{。}$$

根据函数$f(x)$和$\ln f(x)$在$[0,1]$上的可积性，以及上述不等式，并令$n \to +\infty$即得所要证明的不等式 $e^{\int_0^1 \ln f(x)dx} \le \int_0^1 f(x)dx$。证毕。

证法 2：不等式（*）成立，当且仅当

$$\int_0^1 \ln f(x)dx \le \ln \int_0^1 f(x)dx \text{。} \qquad （**）$$

由于函数$\ln t$是上凸函数（$(\ln t)'' = -1/t^2 < 0$），故对任意正整数n，以及$x_k = k/n$，$0 \le k \le n$，由 Jensen 不等式得$\dfrac{\sum_{k=1}^{n} \ln f(x_k)}{n} \le \ln\left(\dfrac{1}{n}\sum_{k=1}^{n} f(x_k)\right)$。令$n \to +\infty$得式（**）。证毕。

2. （7 分）设函数$f(x)$在$[0,+\infty)$上连续可微，且$f(x) > 0$，$f'(x) > 0$，$\forall x \in [0,+\infty)$。

(i) 证明广义积分$\int_0^{+\infty} \frac{f'(x)}{f^2(x)}dx$收敛；(ii) 进一步假设广义积分$\int_0^{+\infty} \frac{dx}{f(x)+f'(x)}$收敛，证明广义积分$\int_0^{+\infty} \frac{dx}{f(x)}$也收敛。

证明：(i)　对 $\forall b>0$，我们有 $\int_0^b \frac{f'(x)dx}{f^2(x)}=\frac{1}{f(0)}-\frac{1}{f(b)}$。

由于 $f'(x)>0$，$\forall x\in[0,+\infty)$，可知 $f(x)$ 在 $[0,+\infty)$ 上严格单调上升，从而 $\frac{1}{f(x)}$ 严格单调下降且有下界零。故极限 $\lim\limits_{b\to+\infty}\frac{1}{f(x)}$ 存在。 由此得 $\lim\limits_{b\to+\infty}\int_0^b \frac{f'(x)}{f^2(x)}dx=\frac{1}{f(0)}-\lim\limits_{b\to+\infty}\frac{1}{f(b)}$ 存在。这表明广义积分 $\int_0^{+\infty}\frac{f'(x)}{f^2(x)}dx$ 收敛。结论(i)得证。

(ii) 考虑以下两个函数之差：

$$\frac{1}{f(x)}-\frac{1}{f(x)+f'(x)}=\frac{f'(x)}{f(x)[f(x)+f'(x)]}\le\frac{f'(x)}{f^2(x)}。$$

将上述不等式写作

$$0<\frac{1}{f(x)}\le\frac{1}{f(x)+f'(x)}+\frac{f'(x)}{f^2(x)}。\qquad (*)$$

由于广义积分 $\int_0^{+\infty}\frac{dx}{f(x)+f'(x)}$ 和 $\int_0^{+\infty}\frac{f'(x)}{f^2(x)}dx$ 均收敛。于是根据不等式（*）立刻得到广义积分 $\int_0^{+\infty}\frac{dx}{f(x)}$ 的收敛性。结论(ii)得证。