第一章 命题逻辑的基本概念

（1.1–1.5）

刘世霞
shixia@tsinghua.edu.cn

1.1　命题

- 计算机是进行推理的重要工具
- 而推理必须包含前提和结论
- 前提和结论均由陈述句组成，因而陈述句就成为推理的基本要素
- 逻辑中所要求的是能判断真假的陈述句
- 从介绍逻辑的基本成分—命题开始讨论

命题(proposition)

命题是一个能判断真假且非真即假的陈述句。

1. 命题必须是一个陈述句，而祈使句、疑问句和感叹句都不是命题。
2. 作为命题的陈述句所表达的判断结果有真假之别

命题的真值：命题所表达的判断结果，

真值只取两个值：真或假(1或0)。

真命题：与事实相符或表达的判断正确；真值为真

假命题：与事实不符或表达的判断错误；真值为假

规定：任何命题的真值都是唯一的；
不能非真非假，也不能既真又假。

命题判断并讨论真值

例1.1

（1）北京是中国的首都

（2）6是整数

（3）6是素数

（4）2 + 2 = 3

（5）2020年元旦北京下大雪　　　　（真值？）

（6）任意充分大的偶数都可以表示成两个素数之和（真值？）

讨论（5）和（6）的真值

- （5）和（6）的真值尽管目前尚不清楚，但它们的真值是客观存在且唯一的。
- 目前暂时无法确定，将来总会真相大白
- 真值待定

命题判断并讨论真值

例1.2

（1） 打开窗户。 (祈使句)

（2） 今天天气真好啊！ (感叹句)

（3） 明天有雨吗？ (疑问句)

（4） x大于y。 (陈述句，命题？)

（5） 我正在说假话。 (陈述句，命题？)

(4) 和 (5) 的真值与命题讨论

（4） x大于y, 当x，y为变量时，无确定的真值。或理解为根据x，y的不同取值，它可真可假，无唯一的真值，因而多数教材不将其作为命题。

（5）我正在说假话 的情形比较特殊，暂先作为课后思考题，试分析其真值。

命题的符号化

- 用小写英文字母*p*, *q*, *r*, …表示命题,
- 注：教材中用大写英文字母表示命题，在前面部分课件中用小写英文字母，这里大小写暂不区分.
- 用“1”表示真，用“0”表示假,
- *p*：6是整数。 （真命题）
- *q*：6是素数。 （假命题）
- *r*：2020年元旦北京下大雪。 （命题，真值待定）

简单命题与复合命题

- 简单命题：又称原子命题，不能再被继续分割的命题（不含任何联结词）
- 复合命题：由一个或几个简单命题通过联结词所构成的新的命题
- 复合命题也有确定的真值。
  – 依赖于构成该复合命题的各简单命题的真值以及联结词。

1.2　常用的5个命题联结词

- 常用的5个命题联结词：
- 否定联结词　（非，$\neg$ ）
- 合取联结词　（与，$\wedge$ ）
- 析取联结词　（或，$\vee$ ）
- 蕴涵联结词　（如果…，则… ，$\rightarrow$ ）
- 双蕴涵联结词　（当且仅当，$\leftrightarrow$ ）

否定(negation)联结词

定义1.1　否定联结词

- 设p为命题，复合命题"非p"（或"p的否定"），称为p的否定式，记作 $\neg p$。
- 符号 $\neg$ 称作否定联结词。
- 规定 $\neg p$ 为真当且仅当p为假。
- 否定联结词的真值表

p	$\neg p$
0	1
1	0

合取(conjunction)联结词

定义1.2　合取联结词

设p, q为二命题，复合命题“p并且q”（或“p与q”), 称为p与q的合取式，记作$p \wedge q$，$\wedge$称作**合取联结词**。

并规定$p \wedge q$为真**当且仅当p与q同时为真**。

合取联结词

- 由定义可知，$p \wedge q$的逻辑关系为p与q同时成立。
- 只有p与q同时为真，$p \wedge q$才为真。
- 其它情况$p \wedge q$均为假。

合取联结词的真值表

p	q	$p \wedge q$
0	0	0
0	1	0
1	0	0
1	1	1

合取联结词使用提示

联结词∧的使用需要注意以下几点：

1　联结词∧使用的**灵活性**。

自然语言中的“既…，又…”，“不但…，而且…”，“虽然…，但是…”，等联结词往往都可以符号化为∧。

2　命题逻辑中**仅考虑命题与命题之间的形式关系或逻辑内容**，对于毫无联系的二命题p，q，在逻辑中$p \wedge q$仍是可以讨论的。

3　逻辑联结词是自然用语中联结词的抽象，两者并不等同。**并非自然语言中所有的“与”或“和”都能简单套用联结词∧。**

例1．4　将下列命题符号化

（1）张明既聪明又勤奋。

（2）李强虽然聪明但不勤奋。

（3）张明与李强都是三好学生。

（4）张明与李强是同学。

解 首先将其中的原子命题符号化：

p: 张明聪明

q: 张明勤奋

r: 李强聪明

s: 李强勤奋

t: 张明是三好学生。

u: 李强是三好学生。

v: 张明与李强是同学。

于是命题符号化结果表示为：

（1）张明既聪明又勤奋。 $p \wedge q$

（2）李强虽然聪明但不勤奋。 $r \wedge \neg s$

（3）张明与李强都是三好学生。 $t \wedge u$

（4）张明与李强是同学。 v

析取(disjunction)联结词

定义1.3　析取联结词

- 设p，q为二个命题，复合命题“p或q”称p与q的析取式。记作$p \vee q$，$\vee$称作析取联结词
- 规定$p \vee q$为假当且仅当p与q同时为假
- 由定义可知，若$p \vee q$为真，则p与q中至少一个为真。因而只有p与q同时为假时，$p \vee q$才为假，其他情况下$p \vee q$均为真。

析取及异或联结词举例

例1.5 将下列命题符号化

（1）张明喜欢学数学或软件工程。

（2）张明报考的第一志愿（唯一）只选择数学专业或软件工程。

解 先将原子命题符号化

（1） p：张明喜欢学数学。

q：张明喜欢学软件工程。

显然（1）中的“或”为相容或，即p与q可以同时为真，符号化为$p \vee q$。

(2) 张明报考的第一志愿只选择数学专业或软件工程

设　　r：张明选择数学专业

　　　s：张明选择软件工程

若将命题符号化为$r \vee s$，由于r，s的联合取值情况有四种：同真，同假，一真一假（两种情况）。张明就可能同时选择数学专业和软件工程，这不符合报考的实际情形。

如何达到只能选择唯一的第一志愿要求呢？

设 r：张明选择数学专业

s：张明选择软件工程专业

可以使用多个联结词，将该命题符号化为

$$(r \wedge \neg s) \vee (\neg r \wedge s)$$

此复合命题为真当且仅当r，s中一个为真，且另一个为假。

由题意可知，（2）中的“或”应为排斥或（不可兼或）。

异或联接词与命题形式化

教材P10例3： 给出三个命题

p： 今晚我在家里看电视。

q： 今晚我去体育场现场看球赛。

r： 今晚我在家里看电视或去体育场看球赛。

问题是：命题 r和$p \vee q$表达的是否是同一命题？

（注：上述看电视与看球赛均指同一时间段）

异或联接词与命题形式化

同p 、q 和r 之间的真值关系可由下表给出

p	q	r
0	0	0
0	1	1
1	0	1
1	1	0

异或联接词与命题形式化

p	q	r
0	0	0
0	1	1
1	0	1
1	1	0

该表的前三行很容易理解。而第四行是说今晚我在家看电视，又去体育场看球赛。显然据题意假设，对同一个人、同一时间段这是不可能发生的事情。从而这时r 的真值为F。

这也说明:

r与p ∨q在逻辑上是并不相等的，即r 中出现的“或”不能以普通的“∨”来表示。

异或联接词与命题形式化

这里p，q和r 之间的逻辑关系，即为异或(也称不可兼或)。

以 $\overline{\vee}$ 表示，有 $r = p \overline{\vee} q$，不难验证：

$$r = (\neg p \wedge q) \vee (p \wedge \neg q)$$

若以p, q分别表示一位二进制数字, 则r就表示了p与q 的和(不考虑进位)。

异或联接词与命题形式化

- 异或（不可兼或）联结词
  是二元命题联结词。
- 两个命题p和q的异或构成一个新的命题，记作$p\bar{\vee}q$。
- 当且仅当p与q的真值相异时，$p\bar{\vee}q$为T，否则$p\bar{\vee}q$的真值为F。

析取联结词“$\vee$” 与 异或“$\bar{\vee}$”的真值表

（注：$\bar{\vee}$为$\vee$上面加一横，见教材P10，不可兼或）

p	q	$p\vee q$
0	0	0
0	1	1
1	0	1
1	1	1

p	q	$p\bar{\vee}q$
0	0	0
0	1	1
1	0	1
1	1	0

蕴涵(implication)联结词

定义1.4 蕴涵联结词

设p，q为二命题，复合命题“如果p，则q”称为p与q的蕴涵式，记作$p \rightarrow q$。并称p是蕴涵式的前件，q为蕴涵式的后件，$\rightarrow$称作蕴涵联结词。

规定，$p \rightarrow q$为假 当且仅当 p为真 q为假。

蕴涵联结词的真值表

- $p \to q$的逻辑关系为
  - p是q成立的充分条件，但不必是q成立的必要条件；
  - $p \to q$为假当且仅当p为真且q为假。

p	q	$p \to q$
0	0	1
0	1	1
1	0	0
1	1	1

Multiple Choice(single) Points: 1

Setting

No Answer

$p \to q = ?$

A $p \vee q$

B $\neg p \vee q$

C $\neg p \,\bar{\vee}\, q$

D $\neg p \wedge q$

Submit

$p \to q = \neg p \vee q$

p	q	$p \to q$	$\neg p \vee q$
0	0	1	1
0	1	1	1
1	0	0	0
1	1	1	1

在p、q的所有取值下，$p \to q$同$\neg p \vee q$都有相同的真值：$p \to q = \neg p \vee q$（真值相同的等值命题以等号联结）

这也说明→可由¬、∨来表示，从逻辑上看“如果P则Q”同“非p或q”是等同的两个命题

实际上，{¬，∨}构成一个联结词的完备集，可表达任何联结词

因果关系

- 引入→的目的是希望用来描述命题间的推理，表示因果关系
- 使用$p \rightarrow q$能描述推理
  - $p \rightarrow q$为真时，只要p为真必有q真，而不能出现p真而q假就够了
  - p为假时，q取真取假，并不违背p为真时q必真。从而仍可规定p为假时，$p \rightarrow q$取真

在使用联结词→时，要特别注意以下几点：

1. 在自然语言里，p与q的这种关系有许多不同的叙述方式，例如，“只要p，就q”，“因为p，所以q”，等等。都应符号化为$p \to q$。

2. 在自然语言中，“如果p，则q”中的前件p与后件q往往具有某种内在联系，而在数理逻辑中，p与q可以无任何内在联系。

3. 通常，“如果p，则q”希望用来描述命题间的推理，表示一种因果关系。但在数理逻辑中，作为一种规定，当p为假时，无论q是真是假，$p \to q$均为真。

关于充分条件和必要条件的说明

- 充分条件：就是只要条件成立，结论就成立，则该条件就是充分条件。

  "如果缺少水分,植物会死亡"，"缺少水分"就是"植物会死亡"的充分条件。在自然语言中表示充分条件的词有：如果…那么…，只要…就…，若…则…

- 必要条件：就是如果该条件不成立，那么结论就不成立，则该条件就是必要条件。

  在自然语言中 表示必要条件的词有：只有…才…；仅当…，…；…，仅当…。

例题 仅当(r)我有时间(q）我去镇上。 $q \to r$

举例

- 令：p：天气好。q：我去公园。
- 1.如果天气好，我就去公园。
- 2.只要天气好，我就去公园。
- 3.若天气好，我就去公园。
- 4.仅当天气好，我才去公园。
- 5.只有天气好，我才去公园。
- 6.我去公园，仅当天气好。

可见"→"既表示充分条件（即前件是后件的充分条件）；也表示必要条件（即后件是前件的必要条件）。这一点要特别注意!!!它决定了哪个作为前件，哪个作为后件。

命题1.、2.、3.写成：$p \to q$

命题4.、5.、6.写成：$q \to p$

例1.6 将下列命题符号化，并指出各命题的真值

（1）如果1＋2＝3，则太阳从东方升起。

（2）如果1＋2$\neq$3，则太阳从东方升起。

（3）如果1＋2＝3，则太阳不从东方升起。

（4）如果1＋2$\neq$3，则太阳不从东方升起。

解　令 p：1＋2 = 3，p的真值为1。

q：太阳从东方升起，q的真值也为1。

符号化形式分别为

（1）$p \rightarrow q$　　（2）$\neg p \rightarrow q$

（3）$p \rightarrow \neg q$　　（4）$\neg p \rightarrow \neg q$

四个复合命题的真值分别为1，1，0，1。

以上四个蕴涵式的前件p与后件q之间没有什么内在联系

（5）只要是星期二，我就来上课。
（6）我没来上课，则今天不是星期二。
（7）只有星期二，我才来上课。
（8）除非是星期二，否则我不来上课。（思考各句的逻辑关系）

解　令　r：今天是星期二，r 的真值为1。
s：我来上课，s的真值也为1。

（5）与“如果是星期二，我就来上课”的逻辑含义相同，均可符号化为$r \rightarrow s$。

（6）按照蕴涵式的逻辑关系，可直接符号化为$\neg s \rightarrow \neg r$。

（7）注意该句与命题（5）不同，将这句话换为逻辑上等价的另一个命题，“我来上课，那么今天一定是星期二”。由后一个命题可方便地符号化为$s \rightarrow r$。

（8）后半句提供的信息十分明确，即，如果不是星期二则我不来上课，据此写出该命题的符号化为$\neg r \rightarrow \neg s$。

双蕴涵(equivalence)联结词

定义1.5　双蕴涵联结词

设p，q为二命题，复合命题“p当且仅当q”称作p与q的双蕴涵式，记作$p\leftrightarrow q$，其中$\leftrightarrow$称作双蕴涵联结词。并规定$p\leftrightarrow q$为真 当且仅当 p与q 同时为真或同时为假。

双蕴涵联结词的真值表

$p \leftrightarrow q$的逻辑关系为：

p与q互为充分必要条件

$p \leftrightarrow q$ 为真**当且仅当**

p与q同时为真或同时为假

p	q	$p \leftrightarrow q$
0	0	1
0	1	0
1	0	0
1	1	1

例1.7　将下列命题符号化，并讨论它们的真值

（1）若三角形*ABC*中有两个角相等，
　　则该三角形为等腰三角形。反之亦然。

（2）太阳从西方升起当且仅当大象会飞。

解　令 p：存在三角形*ABC*中有两个角相等, 真值为1；

q:存在 三角形*ABC*为等腰三角形，真值为1。

则将（1）符号化为$p \leftrightarrow q$，其真值为1。

令 r：太阳从西方升起，真值为0；

s：大象会飞，真值为0。

则将（2）符号化为$r \leftrightarrow s$，其真值为1。

$x+y=2$当且仅当$2*(x+y)=4$

- 问题
  - 这是不是一个命题？
  - 可否形式化成 $x+y=2 \leftrightarrow 2*(x+y)=4$
- 解
  - 不能形式化成$x+y=2 \leftrightarrow 2*(x+y)=4$
  - $x+y=2$ No
  - There exists x and y such that x+y = 2 Yes
  - For all x and all y, x+y = 2 Yes
  - 可形式化为$(\forall x \forall y)(x+y=2 \leftrightarrow 2*(x+y)=4)$
  - 可形式化为$(\exists x \exists y)(x+y=2 \leftrightarrow 2*(x+y)=4)$

More Examples

- A horse is white No
- All the horses are white Yes
- There exists a horse that is white Yes
- My horses are white Yes
- A horse is white if and only if a bird is blue No
- All the horses are white if and only if all the birds are blue Yes

What's Wrong Here?

- Domain
- Quantifier
- Example

$$x^2=2 \;\Rightarrow\; x = \sqrt{2} \quad or \;\; x = -\sqrt{2}$$

ill-defined problem

Why?

1) x is an integer, no solution

2) x is a positive real number, $x = \sqrt{2}$

3) x is a real number, $x = \sqrt{2} \quad or \;\; x = -\sqrt{2}$

常用的联结词

五种最基本、最常用的联结词$\neg$，$\wedge$，$\vee$，$\rightarrow$，$\leftrightarrow$，将它们组成一个集合

$\{\neg, \wedge, \vee, \rightarrow, \leftrightarrow\}$，

称为一个联结词集。

其中$\neg$为一元联结词，

其余的都是二元联结词。

基本复合命题
（5个常用联结词）的真值表

p	q	$\neg p$	$p \wedge q$	$p \vee q$	$p \to q$	$p \leftrightarrow q$
0	0	1	0	0	1	1
0	1	1	0	1	1	0
1	0	0	0	1	0	0
1	1	0	1	1	1	1

关于联结词的几点说明

- 对简单命题多次使用联结词集中的联结词，可以组成更为复杂的复合命题。
- 求复合命题的真值时，除依据前面的真值表外，还要规定联结词的优先顺序
- 教材中规定的联结词优先顺序为：

  （），$\neg$，$\wedge$，$\vee$，$\rightarrow$，$\leftrightarrow$，

  同一优先级的联结词，先出现者先运算。
- 在逻辑中所关心的是复合命题中命题之间的真值关系，而并不关心命题的内容。

1.3　合式公式及其赋值

- 上节介绍了将命题表示为符号串。
- 是否每个符号串都是命题呢？

$$p\ q \rightarrow$$

- 什么样的符号串才能表示命题呢？
- 如下命题形式定义的符号串表示的才是命题(公式)。

1.3　合式公式及其赋值

- 命题变项或命题变元

　　真值可以变化的陈述句为命题变项或命题变元。也用p，q，r，…表示命题变项。

- 当p，q，r，…表示命题变项时，它们变成了取值为0或1的变项，因而命题变项已不再是一个固定的命题。

合式公式或命题公式

合式公式或命题公式的表示

将命题变项用联结词和圆括号按一定的逻辑关系联结起来的符号串。

当使用联结词集 $\{\neg, \wedge, \vee, \rightarrow, \leftrightarrow\}$ 中的联结词时，合式公式定义如下

合式公式(命题公式)的定义

定义1.6　合式公式 (wff) (well formed formulas)

（1）单个命题变项是合式公式，并称为原子命题公式。

（2）若A是合式公式，则（$\neg A$）也是合式公式。

（3）若A，B是合式公式，则（$A\wedge B$），（$A\vee B$），（$A\rightarrow B$），（$A\leftrightarrow B$）也是合式公式。

（4）只有**有限次**地应用（1）～（3）形成的符号串才是合式公式。

合式公式也称为命题公式或命题形式，简称公式。

- 设A为合式公式，B为A中的一部分，若B也是合式公式，则称B为A的子公式。

命题公式的赋值或解释

定义1.7　赋值或解释

设p_1，p_2，…，p_n是出现在公式A中的全部的命题变项，给p_1，p_2，…，p_n各指定一个真值，称为对A的一个赋值或解释。

若指定的一组值使A的真值为1，则称这组值为A的成真赋值；

若使A的真值为0，则称这组值为A的成假赋值。

真值表及其构造方法

定义1.8　真值表

将命题公式A在所有赋值下的取值情况列成表，称作A的真值表。

构造真值表的具体步骤：

(1) 找出公式中所含的全体命题变项p_1，p_2，…，p_n（若无下角标就按字典顺序排列），列出2^n个赋值。规定赋值从00…0开始，然后按二进制加法，直到11…1为止。

(2) 按照运算的优先次序写出各子公式。

(3) 对应各个赋值计算出各子公式的真值，直到最后计算出公式的真值。

真值表举例

例1.8　求下列公式的真值表，并求成真赋值和成假赋值。

（1）　$\neg p \vee q$

（2）　$p \wedge (p \rightarrow q) \rightarrow q$

$\neg p \vee q$的真值表如右表

其中10为成假赋值

其余3个赋值(00, 01, 11)均为成真赋值

p	q	$\neg p$	$\neg p \vee q$
0	0	1	1
0	1	1	1
1	0	0	0
1	1	0	1

$p\wedge(p\rightarrow q)\rightarrow q$ 的真值表

p	q	$p\rightarrow q$	$p\wedge(p\rightarrow q)$	$p\wedge(p\rightarrow q)\rightarrow q$
0	0	1	0	1
0	1	1	0	1
1	0	0	0	1
1	1	1	1	1

命题公式的分类

定义1.9　重言式 矛盾式 可满足式

设A为任一命题公式,

1. 若A在它的各种赋值下取值均为真，则称A是重言式或永真式。

2. 若A在它的各种赋值下取值均为假，则称A是矛盾式或永假式。

3. 若A不是矛盾式，则称A是可满足式

命题公式的分类（续）

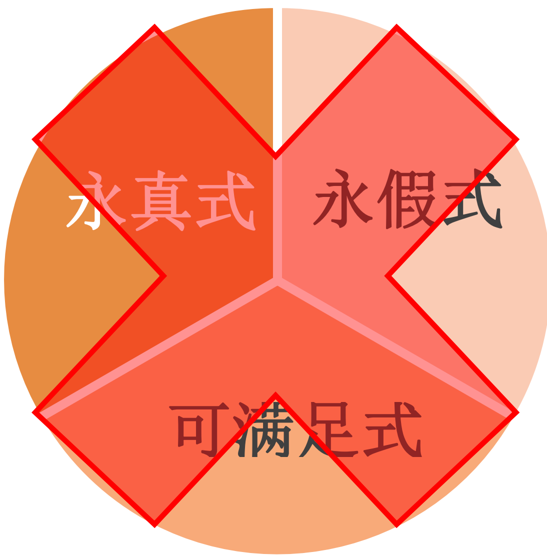
真值表可用来判断公式的类型：

（1）若真值表最后一列(公式结果)全为1，则公式为重言式；

（2）若真值表最后一列全为0，则公式为矛盾式；

（3）若真值表最后一列中至少有一个1，则公式为可满足式。

三者之间的关系



1.4 重言式与代入规则

代入规则

一个重言式，对其中所有相同的命题变项都用一合式公式代换，其结果仍为一重言式。这一规则称为代入规则。

换句话说，*A*是一个公式，对*A*使用代入规则得到公式*B*，若*A*是重言式，则*B*也是重言式。

1.4 重言式与代入规则

代入规则的具体要求为：

1. 公式中被代换的只能是命题变项（原子命题），而不能是复合命题。

2. 对公式中某命题变项施以代入，必须对该公式中出现的所有同一命题变项施以相同的代换。

1.4 重言式与代入规则

1. 公式中被代换的只能是命题变元（原子命题）而不能是复合命题。如可用 $(R\wedge S)$ 来代换某公式中的 P，记作

$$\frac{P}{(R\wedge S)}$$

而不能反过来将公式中的 $(R\wedge S)$ 以 P 代之。

1.4 重言式与代入规则

这一要求可以用代数的例子来说明，如对

$$(a+b)^2 = a^2 + 2ab + b^2$$

可以用$a = cd$代入，仍会保持等式成立。

而若将$a + b$以 cd 代入，结果左端得 $(cd)^2$，但右端无法代入 cd ，不能保持等式成立。

1.4 重言式与代入规则

2. 对公式中某命题变项施以代入，必须对该公式中出现的所有同一命题变项代换同一公式

公式A经代入规则可得任一公式，而仅当A是重言式时，代入后重言式的性质方得保持。

如$A = P \lor \neg P$，作代入

$$\frac{P}{\neg Q}$$

得 $B = \neg Q \lor \neg\ \neg Q$ 仍是重言式。

1.4 重言式与代入规则

若仅将$\neg P$以Q代之得$B = P \vee Q$ (未做P的相关代入，则这不是代入, 违反了规定2) 已不是重言式。

在第三章公理系统中，代入规则视作重要的推理规则经常使用 。

$$A = P \vee \neg P$$

1.4 重言式与代入规则

举例：使用代入规则证明重言式。

例1：　判断$(R \vee S) \vee \neg (R \vee S)$为重言式。

由 $P \vee \neg P$为重言式，　作代入

$$\frac{P}{(R \vee S)}$$

依据代入规则，便得$(R \vee S) \vee \neg (R \vee S)$。

这公式必是重言式。

1.4 重言式与代入规则

例2： 判断 $((R \vee S) \wedge ((R \vee S) \rightarrow (P \vee Q))) \rightarrow (P \vee Q)$为重言式.

不难验证$(A \wedge (A \rightarrow B)) \rightarrow B$是重言式。作代入：

$$\frac{A}{(R \vee S)}, \frac{B}{(P \vee Q)}$$

便知（ $(R \vee S) \wedge ((R \vee S) \rightarrow (P \vee Q))) \rightarrow (P \vee Q)$ 是重言式。

1.5　命题形式化

1. 注意掌握用不同的方式表示同一命题公式的方法

2. 善于以真值表为工具分析、验证、解决命题形式化中的问题

1.5　命题形式化

所谓命题符号化，就是用命题公式的符号串来表示给定的命题。

- 命题符号化的方法

  1. 明确给定命题的含义。

  2. 对复合命题，找联结词，分解出各个原子命题。

  3. 设原子命题符号，并用逻辑联结词联结原子命题符号，构成给定命题的符号表达式。

化整为零，各个击破

例1.说离散数学无用且枯燥无味是不对的。

P：离散数学是有用的。

Q：离散数学是枯燥无味的。

该命题可写成：$\neg(\neg P \wedge Q)$

例2.如果小张与小王都不去，则小李去。

P：小张去。 Q：小王去。 R：小李去。

该命题可写成：$(\neg P \wedge \neg Q) \rightarrow R$

- 例3. 仅当天不下雨且我有时间，才上街。
  P：天下雨。Q：我有时间。R：我上街。
  该命题可写成： $R\rightarrow(\neg P\wedge Q)$
- 例4.人不犯我，我不犯人；人若犯我，我必犯人。
  P：人犯我。Q：我犯人。
  该命题可写成：$(\underbrace{\neg P\rightarrow\neg Q}_{\text{P是Q的必要条件}})\wedge(\underbrace{P\rightarrow Q}_{\text{P是Q的充分条件}})$

  或写成： $\underbrace{P\leftrightarrow Q}_{\text{P是Q的充分且必要条件}}$

例5：除非你努力，否则你将失败。

解：

可理解为：如果你不努力，那么你将失败.

设 P：你努力. Q：你失败.

该命题可写成： $\neg P \rightarrow Q$

- 注意：如果理解为“如果你努力，你将成功.”，对吗？

课上与课后思考题

- 举例（课上思考讨论题）
- IF …THEN…ELSE 是常用的编程语句
- 记 A 表示 IF P THEN Q ELSE R

  试将其形式化（用所学的联接词表示）

  进一步可尝试给出两种不同的表示

（彼此等值）

课后思考题　已讲过由命题公式写出真值表的方法，思考如何由给出的真值表写出未知的命题公式。

课堂思考题（续）

解：

记 A 表示 IF P THEN Q ELSE R

将其形式化（用所学的联接词表示）

记 $A_1 = (P \rightarrow Q) \wedge (\neg P \rightarrow R)$

记 $A_2 = (P \wedge Q) \vee (\neg P \wedge R)$

列出A_1 和A_2的真值表如下

思考题对应的真值表

$A_1 = (P \to Q) \wedge (\neg P \to R)$ $A_2 = (P \wedge Q) \vee (\neg P \wedge R)$

P	Q	R	P→Q	¬P→R	A_1	P∧Q	¬P∧R	A_2
0	0	0	1	0				
0	0	1	1	1	1		1	1
0	1	0	1	0				
0	1	1	1	1	1		1	1
1	0	0	0	1				
1	0	1	0	1				
1	1	0	1	1	1	1		1
1	1	1	1	1	1	1		1

课堂思考题（续）

- 由上述真值表可得出 $A_1 = A_2$
- 记$A_3 = (P \wedge Q \wedge \neg R) \vee (\neg P \wedge R \wedge \neg Q)$
- 显见 $A_3 \neq A_1$

(1) 注意掌握用不同的形式表示同一命题公式的方法

(2) 善于以真值表为工具分析、验证、解决命题演算中的问题

Multiple Choice(multiple) Points: 1

Setting

No Answer

若天不下雨，我就上街；否则在家。

设 P：天下雨。Q ：我上街。R：我在家。

A $(\neg P \to Q) \wedge (P \to R)$

B $(\neg P \to Q) \wedge (P \to R) \wedge \neg (Q \wedge R)$

C $(\neg P \wedge Q \wedge \neg R) \bar{\vee} (P \wedge \neg Q \wedge R)$

D $(\neg P \to Q) \wedge (P \to R) \wedge (Q \wedge R)$

Submit

例6：若天不下雨，我就上街；否则在家。

解：

设 P：天下雨。Q ：我上街。R：我在家。

该命题可写成： $(\neg P \rightarrow Q) \wedge (P \rightarrow R)$.

注意：中间的联结词一定是"$\wedge$"，而不是"$\vee$"，也不是"$\bar{\vee}$"。

因为原命题表示："天不下雨时我做什么，天下雨我又做什么"的两种作法，其中有一种作法是假的，则命题的真值为假，所以中间的联结词一定是"$\wedge$"。

解法是否正确？

问题：若天不下雨，我就上街；否则在家

设 P：天下雨。Q：我上街。R：我在家

P Q R	¬P	¬P→Q	P→ R	(¬P→Q)∧(P→ R)
0 0 0	1	0	1	0
0 0 1	1	0	1	0
0 1 0	1	1	1	1
~~0 1 1~~	~~1~~	~~1~~	~~1~~	~~1~~
1 0 0	0	1	0	0
1 0 1	0	1	1	1
1 1 0	0	1	0	0
~~1 1 1~~	~~0~~	~~1~~	~~1~~	~~1~~

例6：若天不下雨，我就上街；否则在家

P：天下雨。Q：我上街。R：我在家。

该命题可写成： $(\neg P \to Q) \wedge (P \to R) \wedge \neg(Q \wedge R)$

还可以形式化为： $(\neg P \wedge Q \wedge \neg R) \bar{\vee} (P \wedge \neg Q \wedge R)$

问题：若天不下雨，我就上街；否则在家

P Q R	P	¬P→Q	P→ R	(¬P→Q)∧(P→ R)¬(Q∧R)
0 0 0	1	0	1	0
0 0 1	1	0	1	0
0 1 0	1	1	1	1
0 1 1	1	1	1	0
1 0 0	0	1	0	0
1 0 1	0	1	1	1
1 1 0	0	1	0	0
1 1 1	0	1	1	0

谢谢

shixia@tsinghua.edu.cn