离散数学（一）期末试卷（A）

2008.1.12

一、（10分）判断下面的公式是重言式或矛盾式或两者都不是：

$$((p \wedge q) \rightarrow r) \leftrightarrow ((p \rightarrow r) \vee (q \rightarrow r)),$$

并给出其析取范式和合取范式。

二、（15分）直接由命题逻辑或一阶逻辑的公理及推演规则证明下列结论:（需要用到的其它任何结果都必须事先加以证明）

(1) $\vdash A \rightarrow A$

(2) $\vdash (\forall x)(A \rightarrow B) \rightarrow ((\exists x)A \rightarrow (\exists x)B)$

三、（20分）已知任何一个有限的平面图都可以4-作色：即存在一种作色方案，使得每一个顶点都作四种颜色之一，并且任何相邻两个顶点颜色不同。

试证明任意具有可数无限个顶点的平面图也可以4-作色。（提示：利用紧致性定理）

四、（20分）设A和B都是命题逻辑的合式公式，$A \models B$。试证存在命题逻辑公式C使得$A \models C, C \models B$ 且C中的每一个命题符号既在A中出现也在B中出现。

五、（15分）设Wff是一阶逻辑的合式公式集合，$A \in Wff$, x是个体变元，t是项，且t在A中相对x自由。证明：对任意真值赋值σ,

$$\sigma(A[t/x]) = \sigma[\sigma(t)/x](A).$$

六、（20分）设Wff是一阶逻辑的合式公式集合，$\Sigma \subseteq Wff$, $A \in Wff$, 若$\Sigma \vdash A$且个体常元c不出现在Σ中。不用完备性定理，

证明：存在不出现在A中的个体变元y，使得$\Sigma \vdash (\forall y)A[y/c]$.