9.5

离散数学——第十一周作业

计83 刘轩奇 2018011025

2019.11.21

10.1 列出下列关系R的元素。

(1) $A=\{0,1,2\}, B=\{0,2,4\}$，而

$$R=\{\langle x,y\rangle | x,y\in A\cap B\}$$

(2) $A=\{1,2,3,4,5\}, B=\{1,2,3\}$，而

$$R=\{\langle x,y\rangle | x\in A\wedge y\in B\wedge x=y^2\}$$

解 (1) $R=\{\langle 0,0\rangle,\langle 0,2\rangle,\langle 2,0\rangle,\langle 2,2\rangle\}$

(3) $R=\{\langle 1,1\rangle,\langle 4,2\rangle\}$

10.2 设$A=\{\langle 1,2\rangle,\langle 2,4\rangle,\langle 3,3\rangle\}, B=\{\langle 1,3\rangle,\langle 2,4\rangle,\langle 4,2\rangle\}$

求$A\cup B, A\cap B, \mathrm{dom}(A), \mathrm{dom}(B), \mathrm{ran}(A), \mathrm{ran}(B), \mathrm{dom}(A\cup B), \mathrm{ran}(A\cap B)$

解

-0.5

$$\begin{aligned}
A\cup B&=\{\langle 1,2\rangle,\langle 1,3\rangle,\langle 2,4\rangle,\langle 3,3\rangle,\langle 4,2\rangle\}\\
A\cap B&=\{\langle 2,4\rangle\}\\
\mathrm{dom}(A)&=\{1,2,3\}\\
\mathrm{dom}(B)&=\{1,2,4\}\\
\mathrm{ran}(A)&=\{2,3,4\}\\
\mathrm{ran}(B)&=\{2,3,4\}\\
\mathrm{dom}(A\cup B)&=\{2,3,4\} \times\\
\mathrm{ran}(A\cap B)&=\{4\}
\end{aligned}$$

10.3 证明：

$$\mathrm{dom}(R\cup S)=\mathrm{dom}(R)\cup\mathrm{dom}(S), \mathrm{dom}(R\cap S)\subseteq\mathrm{dom}(R)\cap\mathrm{dom}(S)$$

证 (1) 证$\mathrm{dom}(R\cup S)=\mathrm{dom}(R)\cup\mathrm{dom}(S)$

$$\begin{aligned} x\in\mathrm{dom}(R\cup S) &\Longleftrightarrow (\exists y)\langle x,y\rangle\in R\cup S\\ &\Longleftrightarrow (\exists y)(\langle x,y\rangle\in R\vee\langle x,y\rangle\in S)\\ &\Longleftrightarrow x\in\mathrm{dom}(R)\vee x\in\mathrm{dom}(S)\\ &\Longleftrightarrow x\in\mathrm{dom}(R)\cup\mathrm{dom}(S) \end{aligned}$$

$$\therefore \mathrm{dom}(R\cup S)=\mathrm{dom}(R)\cup\mathrm{dom}(S)$$

(2) 证$\mathrm{dom}(R\cap S)\subseteq\mathrm{dom}(R)\cap\mathrm{dom}(S)$

$$\begin{aligned} x\in\mathrm{dom}(R\cap S) &\Longleftrightarrow (\exists y)\langle x,y\rangle\in R\cap S\\ &\Longleftrightarrow (\exists y)(\langle x,y\rangle\in R\wedge\langle x,y\rangle\in S)\\ &\Longrightarrow (\exists y)\langle x,y\rangle\in R\wedge(\exists y)\langle x,y\rangle\in S\\ &\Longleftrightarrow x\in\mathrm{dom}(R)\wedge x\in\mathrm{dom}(S)\\ &\Longleftrightarrow x\in\mathrm{dom}(R)\cap\mathrm{dom}(S) \end{aligned}$$

$$\therefore \mathrm{dom}(R\cap S)\subseteq\mathrm{dom}(R)\cap\mathrm{dom}(S)$$

10.4 设：$A=\{1,2,3\}$，在A上有多少不同的关系？设$|A|=n$，在A上有多少不同的关系？

答 $A=\{1,2,3\}$上有2^9种不同的关系。$|A|=n$时，A上有2^{n^2}种不同的关系。

10.5 列出所有从$A=\{a,b,c\}$到$B=\{d\}$的关系。

答

$$\varnothing,\{\langle a,d\rangle\},\{\langle b,d\rangle\},\{\langle c,d\rangle\},$$
$$\{\langle a,d\rangle,\langle b,d\rangle\},\{\langle a,d\rangle,\langle c,d\rangle\},\{\langle b,d\rangle,\langle c,d\rangle\},$$
$$\{\langle a,d\rangle,\langle b,d\rangle,\langle c,d\rangle\}$$

共8个关系。

10.6 对$n\in\mathbb{N}$且$n>2$，从二元关系定义n元关系。

答

$$\langle x_1,x_2,x_3\rangle=\langle\langle x_1,x_2\rangle,x_3\rangle$$
$$\langle x_1,x_2,x_3,x_4\rangle=\langle\langle x_1,x_2,x_3\rangle,x_4\rangle$$
$$\cdots$$
$$\langle x_1,x_2,\cdots,x_n\rangle=\langle\langle x_1,x_2,\cdots,x_{n-1}\rangle,x_n\rangle$$

10.7 对$A=\{0,1,2,3,4\}$上的下列关系，给出关系图和关系矩阵。

(1) $R_1=\{\langle x,y\rangle|2\le x\wedge y\le 2\}$

(3) $R_3=\{\langle x,y\rangle|x和y是互质的\}$

解 关系图如图 10.7 所示。 关系矩阵

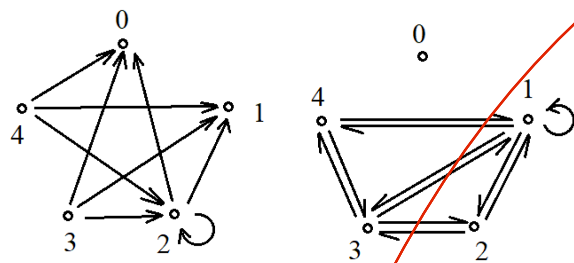

图 10.7

$$A_1=\begin{bmatrix}0&0&0&0&0\\0&0&0&0&0\\1&1&1&0&0\\1&1&1&0&0\\1&1&1&0&0\end{bmatrix},A_3=\begin{bmatrix}0&0&0&0&0\\0&1&1&1&1\\0&1&0&1&0\\0&1&1&0&1\\0&1&0&1&0\end{bmatrix}$$

10.10 设R,S,T是A上的关系，证明

$$R\circ(S\cup T)=(R\circ S)\cup(R\circ T)$$

证

$$\begin{aligned}\langle x,y\rangle\in R\circ(S\cup \mathrm{T}) &\Longleftrightarrow (\exists z)(\langle z,y\rangle\in R\wedge\langle x,z\rangle\in S\cup\mathrm{T})\\&\Longleftrightarrow(\exists z)(\langle z,y\rangle)\in R\wedge(\langle x,z\rangle\in S\vee\langle x,z\rangle\in\mathrm{T}))\\&\Longleftrightarrow(\exists z)((\langle z,y\rangle\in R\wedge\langle x,z\rangle\in S)\vee(\langle z,y\rangle\in R\wedge\langle x,z\rangle\in\mathrm{T}))\\&\Longleftrightarrow(\exists z)(\langle z,y\rangle\in R\wedge\langle x,z\rangle\in S)\vee(\exists z)(\langle z,y\rangle\in R\vee\langle x,z\rangle\in\mathrm{T})\\&\Longleftrightarrow\langle x,y\rangle\in R\circ S\vee\langle x,y\rangle\in R\circ\mathrm{T}\\&\Longleftrightarrow\langle x,y\rangle\in(R\circ S)\cup(R\circ\mathrm{T})\end{aligned}$$

$$\therefore R\circ(S\cup T)=(R\circ S)\cup(R\circ T)$$