一、证明$w(z)$或者为直线$w = w_0 + t\beta$或为圆$w = w_0 + Re^{i\varphi}$，并给出是直线或圆的条件（求出w_0，β，R，φ）$\varphi \in [0,\ 2n\pi)$，$n \in \mathrm{N}$。

$$w = \frac{az+b}{cz+d} \qquad \begin{cases} z = z_0 + t\alpha \quad t \in R \\ z = z_0 + re^{i\theta} \quad r > 0 \quad \theta \in [0, 2\pi) \end{cases}$$

① 若$c = d = 0$，则z平面内所有点都被映射到无穷远点，可看作此时的象曲线为圆心$w_0 = \infty$，半径$R = 0$的圆周。

② 若$b = 0$，$c = 0$ 而$d \neq 0$，则

$$w = \frac{a}{d}$$

此时所有z平面的点映在点$\frac{a}{d}$上，此时的象曲线为圆心在$w_0 = \frac{a}{d}$，半径$R = 0$的圆周。

③ 若$c = 0$ 而$bd \neq 0$，则

$$w = \frac{a}{d} + \frac{b}{d}z$$

此时$w(z)$是将z平面内的一点经过平移、旋转和伸缩而得到象点w的。因此，z平面内的一个圆周或一条直线经过映射$f_1(z)$所得的象曲线仍然是一个圆周或一条直线。若原曲线为$z = z_0 + t\alpha \quad t \in R$，新曲线为$w = \frac{a+bz_0}{d} + \frac{\alpha b}{d}t \;\; t \in R$，即直线的$\beta = \frac{\alpha b}{d}$，$w_0 = \frac{a+bz_0}{d}$；若原曲线为$z = z_0 + re^{i\theta} \;\; r > 0 \quad \theta \in [0, 2\pi)$，新曲线为$w = \frac{a+bz_0}{d} + \frac{br}{d}e^{i\theta}$，即圆周的$w_0 = \frac{a+bz_0}{d}$，$R = \frac{br}{d}$，$\varphi = \theta$。

④ 若$bcd \neq 0$且$bc = ad$，则

$$w = \frac{a}{c}$$

此时所有z平面的点映在点$\frac{a}{c}$上，象曲线为圆心在$w_0 = \frac{a}{c}$，半径$R = 0$的圆周。

⑤ 若$bcd \neq 0$且$bc \neq ad$，则

$$w = \frac{a}{c} + \frac{b - \frac{ad}{c}}{cz+d}$$

那么原映射可以看成由三个映射

$$f_1(z):\ w = cz + d$$

$$f_2(z):\ w = \frac{1}{z}$$

$$f_3(z):\ w = \frac{a}{c} + (b - \frac{ad}{c})z$$

依次进行的。

对$f_1(z)$和$f_3(z)$，二者都是将z平面内的一点经过平移、旋转和伸缩而得到象点w的。因此，z平面内的一个圆周或一条直线经过映射$f_1(z)$所得的象曲线仍然是一个圆周或一条直线。

对$f_2(z)$，设

$$z = x + iy，\ w = \frac{1}{z} = u + iv$$

带入得

$$u = \frac{x}{x^2 + y^2}，\ v = \frac{y}{x^2 + y^2}$$

$$x = \frac{u}{u^2 + v^2}，\ y = \frac{v}{u^2 + v^2}$$

那么$f_2(z)$将方程

$$p(x^2 + y^2) + qx + sy + m = 0$$

变为方程

$$m(u^2 + v^2) + qu - sv + p = 0$$

(1) $p \neq 0$时，原图形为圆$z = z_0 + re^{i\theta}\ \ r > 0$，$\theta \in [0, 2\pi)$。可取

$$\begin{cases} p = 1 \\ q = -2x_0 \\ s = -2y_0 \\ m = {x_0}^2 + {y_0}^2 - r^2 \end{cases}$$

若$|z_0| = r$，则$m = 0$，映射之后为直线$w = \frac{1}{2}(y_0 + ix_0) + (y_0 + ix_0)t \quad t \in R$。其中$w_0 = \frac{1}{2}(y_0 + ix_0)$，$\beta = y_0 + ix_0$。

若$|z_0| \neq r$，则映射之后为圆周$w = \frac{\overline{z_0}}{|z_0|^2 - r^2} + \sqrt{\frac{|z_0|^2}{(|z_0|^2 - r^2)^2} - 1}e^{i\theta}$，$\theta \in [0, 2\pi)$，其中$w_0 = \frac{\overline{z_0}}{|z_0|^2 - r^2}$，$R = \sqrt{\frac{|z_0|^2}{(|z_0|^2 - r^2)^2} - 1}$，$\varphi = \theta$。

(2) $p = 0$时，原图形为直线$z = z_0 + t\alpha \quad t \in R$。可取

$$\begin{cases} q = \mathrm{Im}(\alpha) \\ s = -\mathrm{Re}(\alpha) \\ m = y_0\mathrm{Re}(\alpha) - x_0\mathrm{Im}(\alpha) \end{cases}$$

若$z_0 = k\alpha \quad k \in R$，即$m = 0$。映射后为直线$w = t\bar{\alpha},\ t \in R$，其中$w_0 = 0$，$\beta = \bar{\alpha}$。

若$z_0 = k\alpha \quad k \notin R$，即$m \neq 0$。映射后为圆$w = \frac{\mathrm{Im}(\alpha)+i\mathrm{Re}(\alpha)}{2(x_0\mathrm{Im}(\alpha)-y_0\mathrm{Re}(\alpha))} + \left|\frac{\mathrm{Im}(\alpha)+i\mathrm{Re}(\alpha)}{2(x_0\mathrm{Im}(\alpha)-y_0\mathrm{Re}(\alpha))}\right| e^{i\theta}, \theta \in [0, 2\pi)$。其中$w_0 = \frac{\mathrm{Im}(\alpha)+i\mathrm{Re}(\alpha)}{2(x_0\mathrm{Im}(\alpha)-y_0\mathrm{Re}(\alpha))}$，$R = |w_0|$，$\varphi = \theta$。

综上所述，映射的情况如下表所示

条件	原始图形	映后图形	参数
$c = d = 0$	/	圆	$w_0 = \infty$，$R = 0$
$b = c = 0$，$d \neq 0$	/	圆	$w_0 = \frac{a}{d}$，$R = 0$
$c = 0$，$bd \neq 0$	直线	直线	$\beta = \frac{\alpha b}{d}$，$w_0 = \frac{a+bz_0}{d}$
	圆	圆	$w_0 = \frac{a+bz_0}{d}$，$R = \frac{br}{d}$，$\varphi = \theta$
$bcd \neq 0$，$bc = ad$	/	圆	$w_0 = \frac{a}{c}$，$R = 0$
$bcd \neq 0$，$bc \neq ad$，$\lvert z_0\rvert = r$	圆	直线	$\beta = \frac{bc-ad}{c}(\mathrm{Im}(cz_0+d) + i\mathrm{Re}(cz_0+\mathrm{d}))$，$w_0 = \frac{a+(bc-ad)\mathrm{Im}(cz_0+d)}{c}$
$bcd \neq 0$，$bc \neq ad$，$\lvert z_0\rvert \neq r$	圆	圆	$w_0 = \frac{a}{c} + \frac{(bc-ad)\overline{(cz_0+d)}}{c(\lvert cz_0\rvert^2 - c^2r^2)}$，$R = \frac{bc-ad}{c}\sqrt{\frac{\lvert cz_0+d\rvert^2}{(\lvert cz_0+d\rvert^2-c^2r^2)^2} - 1}$
$bcd \neq 0$，$bc \neq ad$，$z_0/\alpha \in R$	直线	直线	$\beta = a\bar{\alpha}$，$w_0 = \frac{bc-ad}{c}$
$bcd \neq 0$，$bc \neq ad$，$z_0/\alpha \notin R$	直线	圆	$w_0 = \frac{a}{c} + \frac{bc-ad}{c}\frac{\mathrm{Im}(c\alpha)+i\mathrm{Re}(c\alpha)}{2(\mathrm{Re}(cz_0+d)\mathrm{Im}(c\alpha)-\mathrm{Im}(cz_0+d)\mathrm{Re}(c\alpha))}$，$R = \left\lvert w_0 - \frac{a}{c}\right\rvert$

二、 证明两种对称点定义统一

由球坐标变换可知，直线可视作半径为无穷大的圆。（参考资料：《关于分式线性映射保圆性的说明》，王敬荣，《南通职业大学学报》，1997 (3) :19-20）

则此条件下，$z' = z_0 + \frac{r^2}{z_1 - z_0}$，有

$$|z' - z_0||z_1 - z_0| = r^2$$

设z_1为圆内的点，且其到圆弧距离为c，即

$$r - |z_1 - z_0| = c$$

$$|z_1 - z_0| = r - c$$

那么其对称点z'到圆弧的距离为

$$c' = |z' - z_0| - r = \frac{r^2}{|z_1 - z_0|} - r$$

$$= \frac{r^2}{r - c} - r = \frac{cr}{r - c}$$

那么当圆趋近于直线时，即$r \to \infty$。由 L'Hospital 法则，则

$$\lim_{r\to\infty} c' = \lim_{r\to\infty} \frac{cr}{r - c} = c$$

即两点到圆弧的距离相等。此即为关于一条直线的对称点定义。

三、求一单值解析映射$w = f(z)$，将异心圆之间的部分映射为同心圆之间的部分并使内(外)圆半径为 1，圆心在原点。

将半径为r_1, r_2的圆映为 x 轴和半径为 1 的圆。不妨设$r_2 > r_1$，两圆方程

$$\Gamma_1:\ z = z_1 + r_1 e^{i\theta} \qquad \theta \in (0, 2\pi), r_1 > 0$$

$$\Gamma_2:\ z = z_2 + r_2 e^{i\theta} \qquad \theta \in (0, 2\pi), r_2 > r_1$$

再设目标圆方程

$$\Gamma_3:\ z = z_0 + e^{i\theta} \qquad \theta \in (0, 2\pi)$$

$$\Gamma_4:\ z = z_0 + re^{i\theta} \qquad \theta \in (0, 2\pi), r > 0$$

穿过z_1, z_2的直线依次交两圆于A, B, C, D点。则有

$$A = z_2 - r_2 e^{i\theta_0}$$

$$B = z_1 - r_1 e^{i\theta_0}$$

$$C = z_1 + r_1 e^{i\theta_0}$$

$$D = z_2 + r_2 e^{i\theta_0}$$

其中θ_0为直线与 x 轴夹角，亦为$z_2 - z_1$幅角。

设

$$z_2 - z_1 = me^{i\theta_0}$$

$$m = |z_2 - z_1| \in \mathrm{R}$$

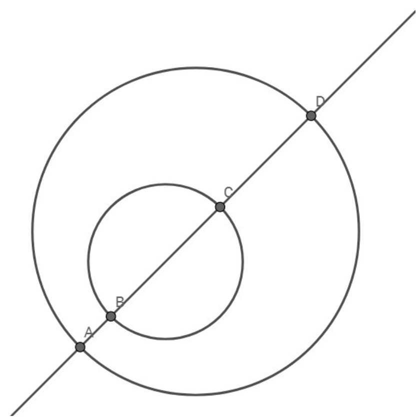

Figure 1

且有

$$m < r_2 - r_1$$

对Γ_1, Γ_2进行分式线性映射①

$$\begin{aligned} w &= \frac{z - A}{D - z} \\ &= \frac{z - z_2 + r_2 e^{i\theta_0}}{z_2 + r_2 e^{i\theta_0} - z} \end{aligned}$$

A点被映射为原点，D点被映射为x轴上无穷远点。将B点带入映射运算

$$\begin{aligned} w(B) &= \frac{z_1 - r_1 e^{i\theta_0} - \left(z_2 - r_2 e^{i\theta_0}\right)}{z_2 + r_2 e^{i\theta_0} - \left(z_1 - r_1 e^{i\theta_0}\right)} \\ &= \frac{(r_2 - r_1)e^{i\theta_0} - (z_2 - z_1)}{(r_2 + r_1)e^{i\theta_0} + (z_2 - z_1)} \\ &= \frac{r_2 - r_1 - m}{r_2 + r_1 + m} \end{aligned}$$

同理可得C点映射后

$$w(C)=\frac{r_2+r_1-m}{r_2-r_1+m}$$

两点映射后皆为实数。可得B，C被映射为在x轴上两点。由分式线性映射的保圆性，映射①将Γ_1，Γ_2映射为原点至x轴无穷的线段及一圆心在x轴上的圆Γ_1'。设映射后两点为x_1，x_2。有

$$\frac{x_2}{x_1}=\frac{(r_2+r_1)^2-m^2}{(r_2-r_1)^2-m^2}>1$$

则

$$x_2>x_1$$

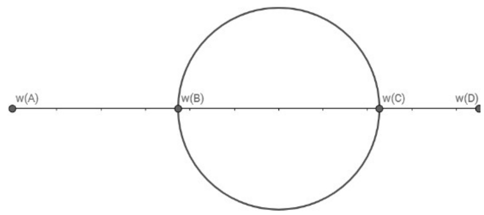

Figure 2

可得映射后图像如图 2 所示。

若$r>1$，现将Γ_3,Γ_4进行分式线性映射②

$$w=\frac{z+r}{r-z}$$

设x轴依次交Γ_3,Γ_4与A',B',C',D'四点，则

$$A'=-r$$

$$B'=-1$$

$$C'=1$$

$$D'=r$$

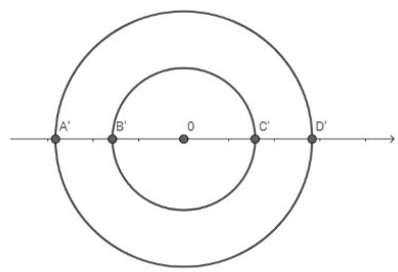

Figure 3

则有$w(A')=0$，$w(D')=\infty$，则Γ_4被映射成从原点到x轴上无穷远点的线段。带入B',C'。有

$$w(B')=\frac{r-1}{r+1}$$

$$w(C')=\frac{r+1}{r-1}$$

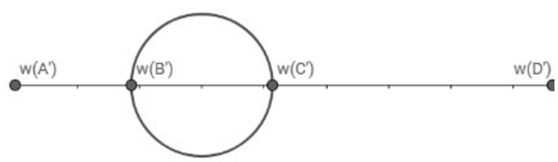

Figure 4

Γ_3则被映为圆心在x轴上的圆Γ_2'。设B',C'两点映射后为x_1',x_2'，则有$x_2'>x_1'$。则映射后图像如图 4 所示。

对图 2 中的线段和圆Γ_1'进行伸缩映射③

$$w=kz\qquad k\in\mathrm{R}$$

则可以选取合适的k值使图 2 中图形映射到图 4 中图形。这一点同样由伸缩映射的保圆性可以保证。

则原图形依次通过映射①，映射③以及映射②的逆映射即可映射为目标图形。

对于映射③此时原点映射为原点，无穷远点映射为无穷远点，只需$x_1\to x_1'$，$x_2\to x_2'$即

可。那么可以得到方程组

$$\begin{cases} k\cdot\dfrac{r_2-r_1-m}{r_2+r_1+m}=\dfrac{r-1}{r+1} \\ k\cdot\dfrac{r_2+r_1-m}{r_2-r_1+m}=\dfrac{r+1}{r-1} \end{cases}$$

解得

$$\begin{cases} k=\sqrt{\dfrac{(r_2+m)^2-{r_1}^2}{(r_2-m)^2-{r_1}^2}} \\ r=\dfrac{{r_1}^2+{r_2}^2-m^2+\sqrt{({r_1}^2+{r_2}^2+m^2)^2-4{r_1}^2{r_2}^2}}{2r_1r_2} \end{cases}$$

映射②的逆映射

$$w=\frac{rz-r}{1+z}$$

将映射③带入

$$w=\frac{krz-r}{1+kz}$$

将映射①带入

$$w=\frac{kr(z-z_2+r_2e^{i\theta_0})-r(z_2+r_2e^{i\theta_0}-z)}{z_2+r_2e^{i\theta_0}-z+k(z-z_2+r_2e^{i\theta_0})}$$

则所求映射

$$w=\frac{kr(z-z_2+r_2e^{i\theta_0})-r(z_2+r_2e^{i\theta_0}-z)}{z_2+r_2e^{i\theta_0}-z+k(z-z_2+r_2e^{i\theta_0})}$$

其中

$$\begin{cases} k=\sqrt{\dfrac{(r_2+|z_2-z_1|)^2-{r_1}^2}{(r_2-|z_2-z_1|)^2-{r_1}^2}} \\ r=\dfrac{{r_1}^2+{r_2}^2-(z_2-z_1)(\overline{z_2-z_1})+\sqrt{({r_1}^2+{r_2}^2+(z_2-z_1)(\overline{z_2-z_1}))^2-4{r_1}^2{r_2}^2}}{2r_1r_2} \end{cases}$$

若$r<1$，如图 5，映射②变为

$$w=\frac{z+1}{1-z}$$

将

$$w(B')=\frac{1-r}{r+1}$$

$$w(C')=\frac{r+1}{1-r}$$

方程组变为

$$\begin{cases} k\cdot\dfrac{r_2-r_1-m}{r_2+r_1+m}=\dfrac{1-r}{r+1} \\ k\cdot\dfrac{r_2+r_1-m}{r_2-r_1+m}=\dfrac{r+1}{1-r} \end{cases}$$

解得

$$\begin{cases} k=\sqrt{\dfrac{(r_2+m)^2-{r_1}^2}{(r_2-m)^2-{r_1}^2}} \\ r=\dfrac{{r_1}^2+{r_2}^2-m^2-\sqrt{({r_1}^2+{r_2}^2+m^2)^2-4{r_1}^2{r_2}^2}}{2r_1r_2} \end{cases}$$

则映射为

$$w=\frac{k\left(z-z_2+r_2e^{i\theta_0}\right)-(z_2+r_2e^{i\theta_0}-z)}{z_2+r_2e^{i\theta_0}-z+k(z-z_2+r_2e^{i\theta_0})}$$

其中$k=\sqrt{\frac{(r_2+|z_2-z_1|)^2-{r_1}^2}{(r_2-|z_2-z_1|)^2-{r_1}^2}}$

综上所述，当$r>1$时，映射为

$$w=\frac{kr(z-z_2+r_2e^{i\theta_0})-r(z_2+r_2e^{i\theta_0}-z)}{z_2+r_2e^{i\theta_0}-z+k(z-z_2+r_2e^{i\theta_0})}$$

其中$k=\sqrt{\frac{(r_2+|z_2-z_1|)^2-{r_1}^2}{(r_2-|z_2-z_1|)^2-{r_1}^2}}$, $r=\frac{{r_1}^2+{r_2}^2-(z_2-z_1)(\overline{z_2-z_1})+\sqrt{({r_1}^2+{r_2}^2+(z_2-z_1)(\overline{z_2-z_1}))^2-4{r_1}^2{r_2}^2}}{2r_1r_2}$, $\theta_0=\arg(z_2-z_1)$；

当$r<1$时，映射为

$$w=\frac{k\left(z-z_2+r_2e^{i\theta_0}\right)-(z_2+r_2e^{i\theta_0}-z)}{z_2+r_2e^{i\theta_0}-z+k(z-z_2+r_2e^{i\theta_0})}$$

其中$k=\sqrt{\frac{(r_2+|z_2-z_1|)^2-{r_1}^2}{(r_2-|z_2-z_1|)^2-{r_1}^2}}$，$\theta_0=\arg(z_2-z_1)$。