第六周作业

1. 设 $A\in M_n(\mathbb{C})$，A 的所有特征值均 0，则 $A^n=0$.

2. 设 $A\in M_n(\mathbb{C})$，且存在 $k\geq 1$，$A^k=0$ 则对于 $\forall\, l\geq 1$，$tr(A^l)=0$

(注：$tr(A)$ 是 A 的对角元之和，本题逆命题也对，不作为习题).

3. 设 A, B 是 3 阶方阵，$A^3=B^3=0$ 但 $A^2\neq 0$，$B^2\neq 0$，A, B 是否相似？

4. 若 $A\in M_n(\mathbb{C})$，且存在 $k\geq 1$，$A^{k-1}\neq 0$，$A^k=0$.

(1) 证明：$I_n - A$ 是可逆阵

(2) 求 $(I_n - A)^{-1} = ?$ 求 $\det(I_n - A) = ?$

5. 设 $A \in M_n(\mathbb{C})$，$A^n = 0$，$A^{n-1} \neq 0$

证明：不存在 $B \in M_n(\mathbb{C})$，$B^2 = A$.

(提示：A, B 均幂零，$A^{n-1} \neq 0 \Rightarrow$ $\operatorname{rank}(A) = n-1$，$\dim N(A) = 1$)

6. 设 $T: \mathbb{C}^n \longrightarrow \mathbb{C}^n$ 是一个幂零
$x \longmapsto Ax$

变换，求 $\mathbb{C}^n$ 的循环子空间直和分解，其中 A 有如下几种情形：

(1) $n=3$, $A=\begin{pmatrix} 1 & -1 & -1 \\ 2 & -2 & -2 \\ -1 & 1 & 1 \end{pmatrix}$

(2) $n=3$, $A=\begin{pmatrix} 0 & -3 & 3 \\ -2 & -7 & 13 \\ -1 & -4 & 7 \end{pmatrix}$

(3) $n=4$. $A=\begin{pmatrix} 1 & -1 & 0 & 0 \\ 1 & -1 & 0 & 0 \\ 3 & 0 & 3 & -3 \\ 4 & -1 & 3 & -3 \end{pmatrix}$

答案：

1. 由Cayley-Hamilton定理即得（或Schur定理）

2. 若$A^k=O$，则A的特征值均为0，A^l的特征值均为0，$tr(A^l)=A^l$特征值之和.

3. 设$A^3=O$，$A^2\neq O$，由Schur定理

$$P^{-1}AP=\begin{pmatrix}0&a&b\\0&0&c\\0&0&0\end{pmatrix}=C$$

$$\begin{pmatrix}0&a&b\\&0&c\\&&0\end{pmatrix}\begin{pmatrix}0&a&b\\&0&c\\&&0\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}0&0&ac\\0&0&0\\0&0&0\end{pmatrix}$$

因此 $a, c \neq 0$

$$Ce_3 = \begin{pmatrix} b \\ c \\ 0 \end{pmatrix} \quad C\begin{pmatrix} b \\ c \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} ac \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}.$$

$$\Downarrow$$

$$C\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}. \Leftarrow C\begin{pmatrix} \frac{b}{ac} \\ \frac{1}{a} \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

即令 $Q = \begin{pmatrix} 1 & \frac{b}{ac} & 0 \\ 0 & \frac{1}{a} & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$

则 $Q^{-1}CQ = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} = D$.

同理 B 也相似于 D.

4. $I_n = I_n - A^k$

$= (I_n - A)(I_n + A + \cdots + A^{k-1})$

$\Rightarrow (I-A)^{-1} = I_n + A + \cdots + A^{k-1}$

$I_n - A$ 的特征值均是 1.

$\Rightarrow \det(I_n - A) = 1$.

5. $N(A) \subseteq N(A^2) \subseteq \cdots \subseteq N(A^{n-1})$

$\subseteq N(A^n) = \mathbb{C}^n$

因为 $N(A^n) \supsetneq N(A^{n-1})$

则 $N(A) \subsetneq N(A^2) \subsetneq \cdots \subsetneq N(A^{n-1})$

比较维数 $\Rightarrow \dim N(A) = 1$.

$\Rightarrow \operatorname{rank} A = n-1$.

若存在 $B^2 = A$，则 $\operatorname{rank} B = n-1$.

B 也是幂零阵

$N(B) = N(A) = N(B^2)$

$\Rightarrow N(B^2) = N(B^3) = \cdots = \mathbb{C}^n$

$\Rightarrow B = O$. 矛盾!

本题也可以用Jordan块.

$$A \text{ 相似于 } \begin{pmatrix} 0 & 1 & & \\ & \ddots & \ddots & \\ & & \ddots & 1 \\ & & & 0 \end{pmatrix}_{n\times n}$$

$$r(B) = n-1 \Rightarrow B \text{ 只有一个Jordan块}$$

$$B \text{ 相似于 } \begin{pmatrix} 0 & 1 & & \\ & \ddots & \ddots & \\ & & \ddots & 1 \\ & & & 0 \end{pmatrix}_{n\times n}.$$

$$\Rightarrow B^2 \text{ 相似于 } \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 & & \\ & \ddots & \ddots & \ddots & \\ & & \ddots & \ddots & 1 \\ & & & \ddots & 0 \\ & & & & 0 \end{pmatrix}$$

$\underline{\text{rank} = n-2}$.

$$\Rightarrow B^2 \neq A.$$

6. (1)

$$A=\begin{pmatrix}1\\2\\-1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}1 & -1 & -1\end{pmatrix}\neq 0$$

$$A^2=0$$

求 $AX=0$ 得 $\alpha_1=\begin{pmatrix}1\\2\\-1\end{pmatrix}$ $\alpha_2=\begin{pmatrix}1\\1\\0\end{pmatrix}$

$$A\begin{pmatrix}1\\0\\0\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}1\\2\\-1\end{pmatrix} \qquad \alpha_2\notin C(A)$$

$$\Rightarrow \ v_1=\begin{pmatrix}1\\0\\0\end{pmatrix}, \qquad v_2=\alpha_2=\begin{pmatrix}1\\1\\0\end{pmatrix}$$

$$\mathbb{C}^3=C_{v_1}\oplus C_{v_2}$$

C_{v_1} 基 $\begin{pmatrix}1\\2\\-1\end{pmatrix},\begin{pmatrix}1\\0\\0\end{pmatrix}$ C_{v_2} 基 $\begin{pmatrix}1\\1\\0\end{pmatrix}$

令 $P=\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 2 & 0 & 1 \\ -1 & 0 & 0 \end{pmatrix}$

则 $P^{-1}AP=\begin{pmatrix} 0 & 1 & \\ & 0 & \\ & & 0 \end{pmatrix}$

(2) $n=3$,

求解 $AX=0 \Rightarrow \alpha_1=\begin{pmatrix} 3 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$

求解 $AX=\alpha_1 \Rightarrow \alpha_2=\begin{pmatrix} 6 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$

求解 $AX=\alpha_2 \Rightarrow \alpha_3=\begin{pmatrix} 10 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix}$

令 $P=(\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3)$

则 $P^{-1}AP=\begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$

(3) $Ax=0 \Rightarrow \alpha_1=\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$

$\alpha_2=\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix}$

求解 $Ax=\alpha_1 \Rightarrow \beta_1=\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$

$Ax=\alpha_2 \Rightarrow \beta_2=\begin{pmatrix} 0 \\ -1 \\ 0 \\ \frac{1}{3} \end{pmatrix}$

令 $P=(\alpha_1, \beta_1, \alpha_2, \beta_2)$

则 $P^{-1}AP=\begin{pmatrix} 0 & 1 & & \\ & 0 & & \\ & & 0 & 1 \\ & & & 0 \end{pmatrix}$