2阶酉阵一般形式

设 $A=\begin{pmatrix} z_1 & z_2 \\ z_3 & z_4 \end{pmatrix}$ 是酉阵，$z_i=r_ie^{i\theta_i}$ $i=1,\cdots,4$

则 $A^HA=AA^H=I_2$ 其中 $A^H=\begin{pmatrix} \bar{z}_1 & \bar{z}_3 \\ \bar{z}_2 & \bar{z}_4 \end{pmatrix}$

$\Downarrow$

$z_1\bar{z}_1+z_2\bar{z}_2\overset{①}{=}1\overset{②}{=}\bar{z}_1z_1+\bar{z}_3z_3$

$z_3\bar{z}_3+z_4\bar{z}_4\overset{③}{=}1\overset{④}{=}\bar{z}_2z_2+\bar{z}_4z_4$

由①,② $z_2\bar{z}_2=r_2^2=r_3^2 \Rightarrow r_2=r_3$

由①,④ $|z_1|^2=|z_4|^2 \Rightarrow r_1=r_4$

令 $r_1=r$，则 $r_4=r$，$r_2=r_3=\sqrt{1-r^2}$

则 $A=\begin{pmatrix} re^{i\theta_1} & \sqrt{1-r^2}e^{i\theta_2} \\ \sqrt{1-r^2}e^{i\theta_3} & re^{i\theta_4} \end{pmatrix}$ $r\geq 0$

A两列正交得 $r\sqrt{1-r^2}e^{i(\theta_1-\theta_2)}+r\sqrt{1-r^2}e^{i(\theta_3-\theta_4)}=0$

若 $r\neq 0,1$, $e^{i(\theta_1-\theta_2)}=-e^{i(\theta_3-\theta_4)}$

$$=(-1)\cdot e^{i(\theta_3-\theta_4)}$$

$$=e^{i\pi}\cdot e^{i(\theta_3-\theta_4)}=e^{i(\theta_3-\theta_4+\pi)}$$

$$\Rightarrow \theta_1-\theta_2=\theta_3-\theta_4+\pi+2k\pi$$

$$\Rightarrow (\theta_1+\theta_4)-(\theta_2+\theta_3)=\pi+2k\pi,\quad k\in\mathbb{Z}.$$

若 $r=0$ $\quad A=\begin{pmatrix}0 & e^{i\theta_2}\\ e^{i\theta_3} & 0\end{pmatrix}$, $\theta_2,\theta_3\in\mathbb{R}$

若 $r=1$ $\quad A=\begin{pmatrix}e^{i\theta_1} & 0\\ 0 & e^{i\theta_4}\end{pmatrix}$ $\theta_1,\theta_4\in\mathbb{R}$

所有可能的2阶矩阵如上.

上述计算较繁琐，换一种方法:

$A=\begin{pmatrix} z_1 & z_2 \\ z_3 & z_4 \end{pmatrix}$ 是酉阵 $\Longleftrightarrow$ A 可逆，且 $A^{-1}=A^H$

$$A^{-1}=\frac{1}{\det(A)}\operatorname{adj}A=\frac{1}{\det(A)}\begin{pmatrix} z_4 & -z_2 \\ -z_3 & z_1 \end{pmatrix}$$

$$A^H=\begin{pmatrix} \bar{z}_1 & \bar{z}_3 \\ \bar{z}_2 & \bar{z}_4 \end{pmatrix}$$

因为 A 是酉阵，特征值模长 $=1 \Rightarrow$

$\exists\theta$，$\det(A)=e^{i\theta}=z_1z_4-z_2z_3$ ①

$z_4=e^{i\theta}\bar{z}_1$，$z_3=-e^{i\theta}\bar{z}_2$ ②

将②代入①得 $|z_1|^2+|z_2|^2=1$

$$\Rightarrow \boxed{A=\begin{pmatrix} z_1 & z_2 \\ -e^{i\theta}\bar{z}_2 & e^{i\theta}\bar{z}_1 \end{pmatrix},\ |z_1|^2+|z_2|^2=1}$$

令 $z_1=re^{i\theta_1}$ 则 $z_2=\sqrt{1-r^2}e^{i\theta_2}$ 回到之前形式

$$\Rightarrow A=\begin{pmatrix} re^{i\theta_1} & \sqrt{1-r^2}\,e^{i\theta_2} \\ \sqrt{1-r^2}\,e^{i(\theta+\pi-\theta_2)} & re^{i(\theta-\theta_1)} \end{pmatrix}$$

应用这个可以写出二阶复正规阵和Hermite阵一般形式:

$A=\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$ 复正规 $\Longleftrightarrow$ A 形如:

$$\underbrace{\begin{pmatrix} z_1 & z_2 \\ -e^{i\theta}\bar{z}_2 & e^{i\theta}\bar{z}_1 \end{pmatrix}}_{=U}\underbrace{\begin{pmatrix} \lambda_1 & 0 \\ 0 & \lambda_2 \end{pmatrix}}_{\text{对角阵}}\underbrace{\begin{pmatrix} \bar{z}_1 & -e^{-i\theta}z_2 \\ \bar{z}_2 & e^{-i\theta}z_1 \end{pmatrix}}_{=U^H}$$

其中 $|z_1|^2+|z_2|^2=1$, $\lambda_1,\lambda_2\in\mathbb{C}$

2阶Hermite阵一般形式, 只需 $\lambda_1,\lambda_2\in\mathbb{R}$