# 复变函数题目解答

计 82 郑凯文 20181011314

2019 年 11 月 14 日

1. (10)$z_1, z_2, z_3$ 是复平面上三个相异的点，若 $z_1, z_2, z_3$ 不共线，用 $z_1, z_2, z_3$ 表示出三角形 $\Delta z_1z_2z_3$ 的外接圆圆心 $z_0$ 的坐标 (用复数表示)，并证明：若 $z_0 = \dfrac{z_1+z_2+z_3}{3}$，则 $\Delta z_1z_2z_3$ 为正三角形，并求出外接圆的半径 $r$。

解： 由外心的定义可知，$|z_0 - z_1| = |z_0 - z_2| = |z_0 - z_3| = r$。将三个等式的两边平方后，利用 $|z|^2 = z\overline{z}$ 展开，得到关于 $z_0$ 的方程组

$$\begin{cases} \overline{z_1}z_0 + z_1\overline{z_0} + (r^2 - |z_0|^2) & = |z_1|^2 \\ \overline{z_2}z_0 + z_2\overline{z_0} + (r^2 - |z_0|^2) & = |z_2|^2 \\ \overline{z_3}z_0 + z_3\overline{z_0} + (r^2 - |z_0|^2) & = |z_3|^2 \end{cases}$$

将其看作关于 $z_0, \overline{z_0}, (r^2 - |z_0|^2)$ 的三元一次方程组，克莱姆法则给出

$$z_0 = \frac{\begin{vmatrix} z_1 & |z_1|^2 & 1 \\ z_2 & |z_2|^2 & 1 \\ z_3 & |z_3|^2 & 1 \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} z_1 & \overline{z_1} & 1 \\ z_2 & \overline{z_2} & 1 \\ z_3 & \overline{z_3} & 1 \end{vmatrix}}$$

这便是外心的显式计算式。

而若 $z_0 = \dfrac{z_1+z_2+z_3}{3}$，要证明 $\Delta z_1z_2z_3$ 为正三角形，先证明一个引理。

Lemma:

对于三个复数 $z, z_1, z_2$，$2z - z_1 - z_2$ 与 $z_1 - z_2$ 垂直 $\Leftrightarrow |z - z_1| = |z - z_2|$。

Proof:

$$\begin{aligned} & 2z - z_1 - z_2 \text{与} z_1 - z_2 \text{垂直} \\ \Leftrightarrow & (2z - z_1 - z_2)\overline{(z_1 - z_2)} + \overline{(2z - z_1 - z_2)}(z_1 - z_2) = 0 \\ \Leftrightarrow & z\overline{z_1} - z\overline{z_2} + \overline{z}z_1 - \overline{z}z_2 - |z_1|^2 + |z_2|^2 = 0 \\ \Leftrightarrow & (z - z_1)\overline{(z - z_1)} = (z - z_2)\overline{(z - z_2)} \\ \Leftrightarrow & |z - z_1| = |z - z_2| \end{aligned}$$

运用上述引理，由于 $|z_0 - z_1| = |z_0 - z_2|$，所以 $2z_0 - z_1 - z_2$ 与 $z_1 - z_2$ 垂直。带入 $z_0 = \dfrac{z_1+z_2+z_3}{3}$ 得到 $2z_0 - z_1 - z_2 = \dfrac{2z_3 - z_1 - z_2}{3}$，因此 $2z_3 - z_1 - z_2$ 与 $z_1 - z_2$ 垂直，推出 $|z_3 - z_1| = |z_3 - z_2|$。同理有 $|z_2 - z_1| = |z_2 - z_3|$，$|z_1 - z_2| = |z_1 - z_3|$，因此 $|z_1 - z_2| = |z_3 - z_1| = |z_3 - z_2|$，三边相等，这样便证明了 $\Delta z_1z_2z_3$ 为正三角形。此时外接圆半径 $r = |z_1 - z_0| = \left|\dfrac{2z_1 - z_2 - z_3}{3}\right|$

2. (10) 用不同于第一章习题答案中的方法 (充分必要性证明均不同) 证明：$f_n(z) = z^n + c_1z^{n-1} + \cdots + c_{n-1}z + c_n = 0$ 的根构成以原点为圆心的正 $n$ 边形的 $n$ 个顶点的充要条件是 $f_n(z) = z^n + c_n (c_n \neq 0)$。

解：充分性:方程 $f_n(z)=z^n+c_n(c_n\neq 0)=0$ 的 $n$ 个根为 $z_k=|c_n|^{\frac{1}{n}}(cos(\frac{2k\pi-arg(c_n)}{n})+isin(\frac{2k\pi-arg(c_n)}{n})),k=0,1,\dots,n-1$。显然它们的模长都是 $|c_n|^{\frac{1}{n}}$，因此位于以原点为圆心的圆上，且没有重根。下面证明其构成的 $n$ 边形的各条边相等。

对于 $z_k$ 和 $z_{k+1},k=0,1,\dots,n-1$(令 $z_n=z_0$)

$z_k-z_{k+1}=|c_n|^{\frac{1}{n}}(cos(\frac{2k\pi-arg(c_n)}{n})-cos(\frac{2(k+1)\pi-arg(c_n)}{n})+i(sin(\frac{2k\pi-arg(c_n)}{n})-sin(\frac{2(k+1)\pi-arg(c_n)}{n})))$

所以

$$\begin{aligned}
&|z_k-z_{k+1}|\\
=&|c_n|^{\frac{1}{n}}\sqrt{(cos(\frac{2k\pi-arg(c_n)}{n})-cos(\frac{2(k+1)\pi-arg(c_n)}{n}))^2+(sin(\frac{2k\pi-arg(c_n)}{n})-sin(\frac{2(k+1)\pi-arg(c_n)}{n}))^2}\\
=&|c_n|^{\frac{1}{n}}\sqrt{2-2cos(\frac{2k\pi-arg(c_n)}{n}-\frac{2(k+1)\pi-arg(c_n)}{n})}\\
=&|c_n|^{\frac{1}{n}}\sqrt{2-2cos\frac{2\pi}{n}}\\
=&2|c_n|^{\frac{1}{n}}|sin\frac{\pi}{n}|
\end{aligned}$$

所以相邻两个根之间的距离与 $k$ 无关，为常数，即这 $n$ 个在以原点为圆心的圆周上、互异的根每一对相邻之间的距离都相等，于是构成以原点为中心的正 $n$ 边形顶点。

必要性：

若 $f_n(z)=z^n+c_1z^{n-1}+\cdots+c_{n-1}z+c_n=0$ 的 $n$ 个根构成以原点为中心的正 $n$ 边形顶点，设这 $n$ 个根为 $z_0,z_1,\dots,z_{n-1}$，设单位根 $\omega=e^{\frac{2\pi}{n}}$，考虑 $z_0'=\omega z_0,z_1'=\omega z_1,\dots,z_{n-1}'=\omega z_{n-1}$，这 $n$ 个复数显然互异，且为原来的 $n$ 个根各绕原点逆时针旋转了 $\varphi=\dfrac{2\pi}{n}$ 角度。由于 $z_0,z_1,\dots,z_{n-1}$ 构成以原点为中心的正 $n$ 边形顶点，我们发现 $z_0',z_1',\dots,z_{n-1}'$ 恰与 $z_0,z_1,\dots,z_{n-1}$ 对应相等 (次序不同)，也即 $z_0',z_1',\dots,z_{n-1}'$ 为方程 $f_n(z)=0$ 的 $n$ 个根。另一方面，设 $z'=\omega z$，则以 $z_0',z_1',\dots,z_{n-1}'$ 为 $n$ 个互异复根的方程为

$$(\frac{z'}{\omega})^n+c_1(\frac{z'}{\omega})^{n-1}+\cdots+c_{n-1}(\frac{z'}{\omega})+c_n=0$$

注意到 $\omega^n=1$，原式即

$$z'^n+c_1\omega z'^{n-1}+\cdots+c_{n-1}\omega^{n-1}z'+c_n=0$$

此方程和 $z^n+c_1z^{n-1}+\cdots+c_{n-1}z+c_n=0$ 的所有解都相同，因此所有的系数对应成比例，即 $c_k\omega^k=c_k,k=1,2,\dots,n-1$。由于 $\omega^k,k=1,2,\dots,n-1$ 不为 0,我们就得到了 $c_1=c_2=\cdots=c_{n-1}=0$。于是,$f_n(z)=z^n+c_n$,得证。

3. (20)$z_1,z_2,z_3,z_4$ 是四个相异的复数，定义其交比为 $\langle z_1,z_2,z_3,z_4\rangle=\frac{z_4-z_1}{z_4-z_2}\Big/\frac{z_3-z_1}{z_3-z_2}=\frac{(z_4-z_1)(z_3-z_2)}{(z_4-z_2)(z_3-z_1)}$。用直线与圆的参数方程及坐标方程的方法，证明：$z_1,z_2,z_3,z_4$ 共线或共圆的充要条件是 $\langle z_1,z_2,z_3,z_4\rangle\in\mathbf{R}$，并由此得到平面上 $n$ 个相异的点 $z_1,z_2,\dots,z_n$ 共圆或共线的充要条件。(注：直线的参数方程为 $z=z_0+t\alpha,\alpha\in\mathbf{C}\backslash\{0\},t\in\mathbf{R}$；圆的参数方程为 $z=z_0+re^{i\theta},r>0,\theta\in[0,2\pi)$)

解：必要性：

当 $z_1,z_2,z_3,z_4$ 共线时，由直线的参数方程，设 $z_k=z_0+t_k\alpha,k=1,2,3,4$，则

$$\langle z_1,z_2,z_3,z_4\rangle=\frac{(t_4\alpha-t_1\alpha)(t_3\alpha-t_2\alpha)}{(t_4\alpha-t_2\alpha)(t_3\alpha-t_1\alpha)}=\frac{(t_4-t_1)(t_3-t_2)}{(t_4-t_2)(t_3-t_1)}\in\mathbf{R}$$

当 $z_1,z_2,z_3,z_4$ 共圆时，由圆的参数方程，设 $z_k=z_0+re^{i\theta_k},k=1,2,3,4$，则

$$\begin{aligned}
\langle z_1,z_2,z_3,z_4\rangle&=\frac{(e^{i\theta_4}-e^{i\theta_1})(e^{i\theta_3}-e^{i\theta_2})}{(e^{i\theta_4}-e^{i\theta_2})(e^{i\theta_3}-e^{i\theta_1})}\\
&=\frac{(e^{i(\theta_4-\theta_1)}-1)(e^{i(\theta_3-\theta_2)}-1)}{(e^{i(\theta_4-\theta_2)}-1)(e^{i(\theta_3-\theta_1)}-1)}
\end{aligned}$$

考虑到

$$e^{i\theta}-1=\cos\theta-1+i\sin\theta=-2\sin^2\frac{\theta}{2}+2i\sin\frac{\theta}{2}\cos\frac{\theta}{2}=2i\sin\frac{\theta}{2}e^{i\frac{\theta}{2}}$$

于是

$$\langle z_1,z_2,z_3,z_4\rangle=\frac{2i\sin\frac{\theta_4-\theta_1}{2}e^{i\frac{\theta_4-\theta_1}{2}}2i\sin\frac{\theta_3-\theta_2}{2}e^{i\frac{\theta_3-\theta_2}{2}}}{2i\sin\frac{\theta_4-\theta_2}{2}e^{i\frac{\theta_4-\theta_2}{2}}2i\sin\frac{\theta_3-\theta_1}{2}e^{i\frac{\theta_3-\theta_1}{2}}}=\frac{\sin\frac{\theta_4-\theta_1}{2}\sin\frac{\theta_3-\theta_2}{2}}{\sin\frac{\theta_4-\theta_2}{2}\sin\frac{\theta_3-\theta_1}{2}}\in\mathbf{R}$$

充分性：

考察 $\dfrac{z_4-z_1}{z_3-z_1}$

若 $\dfrac{z_4-z_1}{z_3-z_1}\in\mathbf{R}$，设 $\alpha=z_3-z_1\neq 0$，$\dfrac{z_4-z_1}{z_3-z_1}=t_1\neq 1$，则 $z_4-z_1=t_1\alpha$。因此

$$\langle z_1,z_2,z_3,z_4\rangle=\frac{t_1\alpha(z_1+\alpha-z_2)}{\alpha(z_1+t_1\alpha-z_2)}\in\mathbf{R}$$

由于 $t_1\in\mathbf{R}$，一定有

$$\frac{z_2-z_1-\alpha}{z_2-z_1-t_1\alpha}\in\mathbf{R}$$

设 $t_2=\dfrac{z_2-z_1-\alpha}{z_2-z_1-t_1\alpha}$，则移项得到

$$z_2-z_1=\frac{t_1t_2-1}{t_2-1}\alpha$$

显然有 $\dfrac{t_1t_2-1}{t_2-1}\in\mathbf{R}$。这样就表明，$z_1,z_2,z_3,z_4$ 均满足方程 $z=z_1+t\alpha$，其中 $t\in\mathbf{R},\alpha=z_3-z_1$。由直线的参数方程知，$z_1,z_2,z_3,z_4$ 共线。

若 $\dfrac{z_4-z_1}{z_3-z_1}\notin\mathbf{R}$，可知四点不共线，因此可从其中取出三点不共线，不妨设为 $z_1,z_2,z_3$。这三点可确定唯一的外接圆，设圆心为 $z_0$，半径为 $r$，于是可设 $z_k=z_0+re^{i\theta_k},k=1,2,3$。若 $r'=|z_4-z_0|\in\mathbf{R}$，同样可设 $z_4=z_0+r'e^{i\theta_4}$。这里的 $\theta_k\in[0,2\pi),k=1,2,3,4$。代入可得

$$\langle z_1,z_2,z_3,z_4\rangle=\frac{(r'e^{i\theta_4}-re^{i\theta_1})(re^{i\theta_3}-re^{i\theta_2})}{(r'e^{i\theta_4}-re^{i\theta_2})(re^{i\theta_3}-re^{i\theta_1})}=\frac{(r'e^{i\theta_4}-re^{i\theta_1})e^{i\frac{\theta_2-\theta_3}{2}}}{(r'e^{i\theta_4}-re^{i\theta_2})e^{i\frac{\theta_1-\theta_3}{2}}}\in\mathbf{R}$$

这意味着

$$\arg\frac{r'e^{i\theta_4}-re^{i\theta_1}}{r'e^{i\theta_4}-re^{i\theta_2}}=\frac{\theta_1-\theta_2}{2}$$

而

$$\begin{aligned}\frac{r'e^{i\theta_4}-re^{i\theta_1}}{r'e^{i\theta 4}-re^{i\theta 2}}&=\frac{re^{i(\theta_1-\theta_4)}-r'}{re^{i(\theta_2-\theta_4)}-r'}\\&=\frac{r\cos(\theta_1-\theta_4)-r'+ir\sin(\theta_1-\theta_4)}{r\cos(\theta_2-\theta_4)-r'+ir\sin(\theta_2-\theta_4)}\\&=\frac{A_1+iA_2}{(r\cos(\theta_2-\theta_4)-r')^2+r^2\sin^2(\theta_2-\theta_4)}\end{aligned}$$

其中

$$A_1=r^2\cos(\theta_1-\theta_2)-rr'(\cos(\theta_1-\theta_4)+\cos(\theta_2-\theta_4))+r'^2$$

$$A_2=r^2\sin(\theta_1-\theta_2)+rr'(\sin(\theta_2-\theta_4)-\sin(\theta_1-\theta_4))$$

于是

$$\frac{A_2}{A_1}=\tan\frac{\theta_1-\theta_2}{2}=\frac{\sin(\theta_1-\theta_2)}{1+\cos(\theta_1-\theta_2)}$$

移项并利用三角函数的和差角公式整理得到

$$r^2\sin(\theta_1-\theta_2)-r'^2\sin(\theta_1-\theta_2)=0$$

由于 $z_1\neq z_2,\theta_1\neq\theta_2$，只有 $r'=r$。因此 $z_4=z_0+re^{i\theta_4}$ 满足圆的参数方程，证毕。

由以上分析过程可知，$n$ 个相异的点 $z_1,z_2,\ldots,z_n$ 共线的充要条件为 $\dfrac{z_3-z_1}{z_2-z_1}\in\mathbf{R}$，且 $\langle z_1,z_2,z_3,z_k\rangle\in\mathbf{R}$ 对于 $k=4,\ldots,n$ 成立；共圆的充要条件为 $\dfrac{z_3-z_1}{z_2-z_1}\notin\mathbf{R}$，且 $\langle z_1,z_2,z_3,z_k\rangle\in\mathbf{R}$ 对于 $k=4,\ldots,n$ 成立。

4. (20) 令 $D_n=\{z_1,z_2,\dots,z_n\}$ 是平面上 $n$ 个相异的点，且满足 $|z_k|=r,k=1,2,\dots,n$，$r>0$ 固定。令 $f_n(z)=z^n+c_1z^{n-1}+\cdots+c_{n-1}z+c_n$，证明：当 $n\geq 3$ 时，$D_n$ 构成正 $n$ 多边形顶点的充要条件为 $c_1=c_2=\cdots=c_m=0$，这里 $m=\begin{cases}\dfrac{n-1}{2}, & n\text{奇}\\ \dfrac{n}{2}, & n\text{偶}\end{cases}$，并证明：$m$ 不能被更小的正整数取代。

解：必要性：若 $D_n$ 构成正 $n$ 边形顶点，由于它们的模相等，到原点距离相等，因此这个正 $n$ 边形的中心一定是原点，退化为题 2，于是 $c_1=c_2=\cdots=c_m=0$ 成立。

充分性：$f_n(z)=z^n+c_1z^{n-1}+\cdots+c_{n-1}z+c_n$ 的 $n$ 个互异根为 $z_1,z_2,\dots,z_n$，由多项式根与系数的关系，设关于 $z_1,z_2,\dots,z_n$ 的初等对称多项式

$$\sigma_k=\sum_{1\leq i_1<i_2<\cdots<i_k\leq n} z_{i_1}z_{i_2}\dots z_{i_k}, k=1,2,\dots,n$$

则 $f_n(z)=z^n-\sigma_1z^{n-1}+\cdots+(-1)^{n-1}\sigma_{n-1}z+(-1)^n\sigma_n$。观察到 $|z_k|^2=z_k\overline{z_k}=r^2$，可以发现这些系数间的转化关系

$$\begin{aligned}\sigma_{n-k}&=\sum_{1\leq i_1<i_2<\cdots<i_{n-k}\leq n} z_{i_1}z_{i_2}\dots z_{i_{n-k}}\\&=\sum_{1\leq i_1<i_2<\cdots<i_k\leq n}\frac{z_1z_2\dots z_n}{z_{i_1}z_{i_2}\dots z_{i_k}}\\&=\sum_{1\leq i_1<i_2<\cdots<i_k\leq n}\frac{z_1z_2\dots z_n}{z_{i_1}\overline{z_{i_1}}z_{i_2}\overline{z_{i_2}}\dots z_{i_k}\overline{z_{i_k}}}\overline{z_{i_1}z_{i_2}}\dots\overline{z_{i_k}}\\&=\frac{z_1z_2\dots z_n}{r^{2k}}\overline{\sigma_k}\end{aligned}$$

于是，当 $n$ 为奇数时，$\sigma_{n-k}=\dfrac{z_1z_2\dots z_n}{r^{2k}}\overline{\sigma_k}=0,k=1,2,\dots,\dfrac{n-1}{2}$，因此 $c_1=c_2=\cdots=c_{n-1}=0$。

当 $n$ 为偶数时，$\sigma_{n-k}=\dfrac{z_1z_2\dots z_n}{r^{2k}}\overline{\sigma_k}=0,k=1,2,\dots,\dfrac{n}{2}$，因此 $c_1=c_2=\cdots=c_{n-1}=0$。

由题 2 的结论，$D_n$ 构成以原点为中心的正 $n$ 边形顶点。

下面证明 $m$ 不能被更小的正整数取代。

分情况讨论，当 $n$ 为偶数时，若 $m$ 至少减小 1，则取 $f_n(z)=z^n-(1+i)z^{\frac{n}{2}}+i=(z^{\frac{n}{2}}-1)(z^{\frac{n}{2}}-i)$ 满足 $c_1=c_2=\cdots=c_m=0$ 的条件；$f_n'(z)=nz^{\frac{n}{2}}(z^{\frac{n}{2}-1}-\dfrac{1+i}{2})$ 与 $f_n(z)$ 无次数大于 0 的公因式，因此 $f_n(z)=0$ 没有重根；其 $n$ 个互异根为 $z^{\frac{n}{2}}-1=0,z^{\frac{n}{2}}-i=0$ 的根的集合，显然有 $|z_k|=1,k=1,2,\dots,n$ 为定值。可见这样的 $f_n(z)$ 符合题意，但由题 2 知此时确定的 $D_n$ 并不构成正 $n$ 边形顶点。

当 $n$ 为奇数时，$m$ 至少减少 1，则取 $f_n(z)=z^n-e^iz^{\frac{n+1}{2}}-z^{\frac{n-1}{2}}+e^i=(z^{\frac{n+1}{2}}-1)(z^{\frac{n-1}{2}}-e^i)$ 满足 $c_1=c_2=\cdots=c_m=0$ 的条件；设 $n_0=\dfrac{n-1}{2}$，分别令两个因式为 0，可以得到其根组成的集合为 $\{e^{i\varphi}|\varphi\in A\}$，其中

$$A=\{\frac{1}{n_0},\frac{2\pi+1}{n_0},\dots,\frac{2(n_0-1)\pi+1}{n_0}\}\cup\{\frac{0}{n_0+1},\frac{2\pi}{n_0+1},\dots,\frac{2n_0\pi}{n_0+1}\}$$

可以看出这 $n$ 个根互异 (这是由于集合 $A$ 的第一部分中的 $\varphi$ 均为 $\pi$ 的无理数倍，而第二部分中的 $\varphi$ 均为 $\pi$ 的有理数倍)，且模都是 1。于是这样的 $f_n(z)$ 符合题意，但由题 2 知此时确定的 $D_n$ 并不构成正 $n$ 边形顶点。

5. (10)$f_n(z)$ 由第 4 题给出，给出 $D_n$ 构成正 $n$ 边形顶点时 $c_1,c_2,\dots,c_n$ 应满足的充要条件并写出 $f_n(z)$ 的简化形式，同时求出外接圆的圆心和半径 (用 $c_1,c_2,\dots,c_n$ 表示)。

解：若 $D_n$ 构成正 $n$ 边形顶点，则其中心为 $z_0=\dfrac{z_1+z_2+\cdots+z_n}{n}$。因此 $D_n$ 构成正 $n$ 边形顶点等价于以 $z_1-z_0,z_2-z_0,\dots,z_n-z_0$ 为以原点为中心的正 $n$ 边形顶点，由题 2 知这也就是等价于以 $z_1-z_0,z_2-z_0,\dots,z_n-z_0$ 为根的多项式除最高次项和常数项其余项的系数均为 0。

由根与系数的关系，$z_1+z_2+\cdots+z_n=\sigma_1=-c_1$。因此，$z_0=-\dfrac{c_1}{n}$。由平移的性质，以 $z_1-z_0,z_2-z_0,\dots,z_n-z_0$ 为根的多项式为

$$(z+z_0)^n+c_1(z+z_0)^{n-1}+\cdots+c_{n-1}(z+z_0)+c_n$$

也即

$$(z-\frac{c_1}{n})^n+c_1(z-\frac{c_1}{n})^{n-1}+\cdots+c_{n-1}(z-\frac{c_1}{n})+c_n$$

将上式展开并运用题 2 的结论，经化简便得到了 $c_1,c_2,\ldots,c_n$ 应满足的充要条件为下列方程组

$$\begin{cases} c_1=\dfrac{C_n^1c_1}{n} \\ c_2=\dfrac{C_n^2c_1^2}{n^2} \\ c_3=\dfrac{C_n^3c_1^3}{n^3} \\ \quad\cdots \\ c_{n-1}=\dfrac{C_n^{n-1}c_1^{n-1}}{n^{n-1}} \end{cases}$$

此时可简化 $f_n(z)$ 为

$$\begin{aligned} f_n(z)&=z^n+\frac{C_n^1c_1}{n}z^{n-1}+\frac{C_n^2c_1^2}{n^2}z^{n-2}+\cdots+\frac{C_n^{n-1}c_1^{n-1}}{n^{n-1}}z+c_n \\ &=(z+\frac{c_1}{n})^n+c_n-\frac{c_1^n}{n^n} \end{aligned}$$

从化简后的式子看出，外接圆圆心为 $z_0=-\dfrac{c_1}{n}$，半径为 $r=\left|c_n-\dfrac{c_1^n}{n^n}\right|^{\frac{1}{n}}$。

6. (30) 利用 $\sin z=z\displaystyle\prod_{n=1}^{+\infty}\left(1-\frac{z^2}{n^2\pi^2}\right),\cos z=\prod_{n=1}^{+\infty}\left(1-\frac{z^2}{(n-\frac{1}{2})^2\pi^2}\right)$ 对于 $n=1,2,\ldots$ 证明：

(1)$\dfrac{\zeta(2n)}{\pi^{2n}}-\dfrac{\zeta(2n-2)}{3!\pi^{2n-2}}+\cdots+(-1)^{n-1}\dfrac{\zeta(2)}{(2n-1)!\pi^2}+(-1)^n\dfrac{n}{(2n+1)!}=0$

(2)$\dfrac{2^{2n}-1}{\pi^{2n}}\zeta(2n)-\dfrac{2^{2n-2}-1}{2!\pi^{2n-2}}\zeta(2n-2)+\cdots+\dfrac{(-1)^{n-1}(2^2-1)}{(2n-2)!\pi^2}\zeta(2)+\dfrac{(-1)^n}{2(2n-1)!}=0$

(3) 令 $a_n=\dfrac{\zeta(2n)}{\pi^{2n}}$，证明：$(n+\dfrac{1}{2})a_n=\displaystyle\sum_{k=1}^{n-1}a_ka_{n-k}$，并由此给出 $a_1,\ldots,a_8$ 的值 (用分数表达)。

解： (1) 在无穷乘积展开式 $\sin z=z\displaystyle\prod_{n=1}^{+\infty}\left(1-\frac{z^2}{n^2\pi^2}\right)$ 两边同时取对数得到

$$\ln|\sin z|=\ln|z|+\sum_{n=1}^{+\infty}\ln\left|1-\frac{z^2}{n^2\pi^2}\right|$$

两侧同时求导得到

$$\cot z=\frac{1}{z}+\sum_{n=1}^{+\infty}\frac{2z}{z^2-n^2\pi^2}$$

两边同时乘 $z$，可做如下转化

$$\begin{aligned} z\cot z&=1+2\sum_{m=1}^{+\infty}\frac{z^2}{z^2-m^2\pi^2} \\ &=1-2\sum_{m=1}^{+\infty}\frac{\frac{z^2}{m^2\pi^2}}{1-\frac{z^2}{m^2\pi^2}} \\ &=1-2\sum_{m=1}^{+\infty}\sum_{n=1}^{+\infty}\left(\frac{z^2}{m^2\pi^2}\right)^n \\ &=1-2\sum_{n=1}^{+\infty}\sum_{m=1}^{+\infty}\left(\frac{z^2}{m^2\pi^2}\right)^n \\ &=1-2\sum_{n=1}^{+\infty}\frac{\zeta(2n)}{\pi^{2n}}z^{2n} \end{aligned}$$

两边同乘 $\dfrac{\sin z}{z}$，并利用 $\sin z, \cos z$ 的泰勒级数得到

$$\sum_{n=0}^{+\infty}(-1)^n\frac{z^{2n}}{(2n+1)!}\left(1-2\sum_{n=1}^{+\infty}\frac{\zeta(2n)}{\pi^{2n}}z^{2n}\right)=\sum_{n=0}^{+\infty}(-1)^n\frac{z^{2n}}{(2n)!}$$

考察两侧 $z^{2n}$ 的系数，令其相等，得到

$$(-1)^n\frac{1}{(2n+1)!}-2\sum_{k=1}^{n}(-1)^{n-k}\frac{\zeta(2k)}{(2n+1-2k)!\pi^{2k}}=(-1)^n\frac{1}{(2n)!}$$

移项并化简便得到了

$$\sum_{k=1}^{n}(-1)^{n-k}\frac{\zeta(2k)}{(2n+1-2k)!\pi^{2k}}+(-1)^n\frac{n}{(2n+1)!}=0$$

(2) 仿照 (1) 的方法，在无穷乘积展开式 $\cos z=\prod_{n=1}^{+\infty}\left(1-\dfrac{z^2}{(n-\frac{1}{2})^2\pi^2}\right)$ 两边取对数得到

$$\ln|\cos z|=\sum_{n=1}^{+\infty}\ln\left|1-\frac{z^2}{(n-\frac{1}{2})^2\pi^2}\right|$$

两边同时求导得到

$$\tan z=\sum_{m=1}^{+\infty}\frac{2z}{(m-\frac{1}{2})^2\pi^2-z^2}$$

两边同时乘 $z$ 并作如下转化

$$\begin{aligned}
z\tan z&=z\sum_{m=1}^{+\infty}\frac{2z}{(m-\frac{1}{2})^2\pi^2-z^2}\\
&=2\sum_{m=1}^{+\infty}\frac{\frac{z^2}{(m-\frac{1}{2})^2\pi^2}}{1-\frac{z^2}{(m-\frac{1}{2})^2\pi^2}}\\
&=2\sum_{m=1}^{+\infty}\sum_{n=1}^{+\infty}\left(\frac{z^2}{(m-\frac{1}{2})^2\pi^2}\right)^2\\
&=2\sum_{n=1}^{+\infty}\frac{z^{2n}}{\pi^{2n}}\sum_{m=1}^{+\infty}\frac{1}{(m-\frac{1}{2})^{2n}}\\
&=2\sum_{n=1}^{+\infty}\frac{2^{2n}z^{2n}}{\pi^{2n}}\sum_{m=1}^{+\infty}\frac{1}{(2m-1)^{2n}}\\
&=2\sum_{n=1}^{+\infty}\frac{2^{2n}z^{2n}}{\pi^{2n}}\left(\zeta(2n)-\sum_{m=1}^{+\infty}\frac{1}{(2m)^{2n}}\right)\\
&=2\sum_{n=1}^{+\infty}\frac{(2^{2n}-1)z^{2n}}{\pi^{2n}}\zeta(2n)
\end{aligned}$$

两侧同乘 $\cos z$，并代入 $\sin z, \cos z$ 的泰勒级数得到

$$2\sum_{n=0}^{+\infty}(-1)^n\frac{z^{2n}}{(2n)!}\sum_{n=1}^{+\infty}\frac{(2^{2n}-1)z^{2n}}{\pi^{2n}}\zeta(2n)=z\sum_{n=0}^{+\infty}(-1)^n\frac{z^{2n+1}}{(2n+1)!}$$

考察两侧 $z^{2n}$ 的系数，令其相等，得到

$$2\sum_{k=1}^{n}\frac{(2^{2k}-1)\zeta(2k)}{\pi^{2k}}\frac{(-1)^{2n-2k}}{(2n-2k)!}=\frac{(-1)^{n-1}}{(2n-1)!}$$

这也就是

$$\sum_{k=1}^{n}\frac{(2^{2k}-1)\zeta(2k)}{(2n-2k)!\pi^{2k}}+\frac{(-1)^n}{2(2n-1)!}=0$$

(3) 由 (1) 知

$$\sum_{n=1}^{+\infty} a_n z^{2n} = \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{\zeta(2n)}{\pi^{2n}} z^{2n} = \frac{1 - z\cot z}{2}$$

于是

$$\left(\frac{1 - z\cot z}{2}\right)^2 = \left(\sum_{n=1}^{+\infty} a_n z^{2n}\right)\left(\sum_{n=1}^{+\infty} a_n z^{2n}\right) = \sum_{n=2}^{+\infty}\left(\sum_{k=1}^{n-1} a_k a_{n-k}\right) z^{2n}$$

对左侧进行不定积分得到

$$\left(\frac{3z - 3z^2\cot z - z^3}{12}\right)' = \left(\frac{1 - z\cot z}{2}\right)^2$$

对左侧进行泰勒展开

$$\begin{aligned}\frac{3z - 3z^2\cot z - z^3}{12} &= -\frac{z}{4}(z\cot z) + \frac{z}{4} - \frac{z^3}{12} \\ &= -\frac{z}{4}\left(1 - 2\sum_{n=1}^{+\infty}\frac{\zeta(2n)}{\pi^{2n}} z^{2n}\right) + \frac{z}{4} - \frac{z^3}{12}\end{aligned}$$

两侧同时求导，得到

$$\left(\frac{1 - z\cot z}{2}\right)^2 = \left(\frac{z}{2}\sum_{n=1}^{+\infty}\frac{\zeta(2n)}{\pi^{2n}} z^{2n} - \frac{z^3}{12}\right)' = \sum_{n=1}^{+\infty}\frac{(2n+1)\zeta(2n)}{2\pi^{2n}} z^{2n} - \frac{z^2}{4} = \sum_{n=2}^{+\infty}\frac{(2n+1)\zeta(2n)}{2\pi^{2n}} z^{2n}$$

其中消去的过程利用了 $\zeta(2) = \dfrac{\pi^2}{6}$，可在 (1) 中代入 $n = 1$ 得到。于是

$$\sum_{n=2}^{+\infty}\frac{(2n+1)\zeta(2n)}{2\pi^{2n}} z^{2n} = \sum_{n=2}^{+\infty}\left(\sum_{k=1}^{n-1} a_k a_{n-k}\right) z^{2n}$$

对比两侧系数就有

$$\frac{(2n+1)\zeta(2n)}{2\pi^{2n}} = (n + \frac{1}{2})a_n = \sum_{k=1}^{n-1} a_k a_{n-k}$$

计算得到 $a_1, a_2, \ldots, a_8$ 的值为

$$a_1 = \frac{1}{6}, a_2 = \frac{1}{90}, a_3 = \frac{1}{945}, a_4 = \frac{1}{9450}, a_5 = \frac{1}{93555}, a_6 = \frac{691}{638512875}, a_7 = \frac{2}{18243225}, a_8 = \frac{3617}{325641566250}$$

7. (20) 证明：

(1)$\displaystyle\sum_{n=1}^{+\infty}\frac{\zeta(2n)}{n(2n+1)} = \ln\frac{2\pi}{e}$

(2)$\displaystyle\sum_{n=1}^{+\infty}\frac{\zeta(2n)}{2^n n(2n+1)} = \ln\frac{\pi}{e}$

解： (1) 由题 6(1) 可知

$$\sum_{n=1}^{+\infty}\frac{\zeta(2n)}{\pi^{2n}} z^{2n} = \frac{1 - z\cot z}{2}$$

两侧同除 $z$

$$\sum_{n=1}^{+\infty}\frac{\zeta(2n)}{\pi^{2n}} z^{2n-1} = \frac{1 - z\cot z}{2z}$$

两侧同时不定积分得到

$$\sum_{n=1}^{+\infty}\frac{\zeta(2n)}{\pi^{2n} n} z^{2n} = \ln|z| - \ln|\sin z|$$

对上式的两侧同时定积分

$$\sum_{n=1}^{+\infty}\frac{\zeta(2n)}{\pi^{2n} n}\int_0^{\pi} z^{2n} dz = \int_0^{\pi}\ln z dz - \int_0^{\pi}\ln\sin z dz$$

也即

$$\sum_{n=1}^{+\infty}\frac{\pi\zeta(2n)}{n(2n+1)}=\int_0^{\pi}\ln zdz-\int_0^{\pi}\ln\sin zdz$$

容易计算出 $\int_0^{\pi}\ln zdz=\pi\ln\pi-\pi$。而对于第二个定积分的计算，可以利用对称性。$\int_0^{\pi}\ln\sin zdz=2\int_0^{\frac{\pi}{2}}\ln\sin zdz$，设 $I=\int_0^{\frac{\pi}{2}}\ln\sin zdz$。则

$$I=\int_0^{\frac{\pi}{4}}\ln\sin zdz+\int_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{2}}\ln\sin zdz=\int_0^{\frac{\pi}{4}}\ln\sin zdz+\int_0^{\frac{\pi}{4}}\ln\cos zdz=\int_0^{\frac{\pi}{4}}\ln\sin(2z)dz-\frac{\pi}{4}\ln 2=\frac{1}{2}I-\frac{\pi}{4}\ln 2$$

因此 $I=-\frac{\pi}{2}\ln 2,\int_0^{\pi}\ln\sin zdz=2I=-\pi\ln 2$。于是

$$\sum_{n=1}^{+\infty}\frac{\pi\zeta(2n)}{n(2n+1)}=\pi\ln\pi-\pi+\pi\ln 2=\pi\ln\frac{2\pi}{e}$$

即

$$\sum_{n=1}^{+\infty}\frac{\zeta(2n)}{n(2n+1)}=\ln\frac{2\pi}{e}$$

(2) 与 (1) 的证明方法类似，不同的是将

$$\sum_{n=1}^{+\infty}\frac{\zeta(2n)}{\pi^{2n}n}z^{2n}=\ln|z|-\ln|\sin z|$$

进行定积分时积分区间减半，如下

$$\sum_{n=1}^{+\infty}\frac{\zeta(2n)}{\pi^{2n}n}\int_0^{\frac{\pi}{2}}z^{2n}dz=\int_0^{\frac{\pi}{2}}\ln zdz-\int_0^{\frac{\pi}{2}}\ln\sin zdz$$

左侧 $\int_0^{\frac{\pi}{2}}z^{2n}dz=\frac{\pi^{2n+1}}{2^{2n+1}(2n+1)}$，右侧 $\int_0^{\frac{\pi}{2}}\ln zdz=\frac{\pi}{2}\ln\frac{\pi}{2}-\frac{\pi}{2}$，且由 (1) 知 $\int_0^{\frac{\pi}{2}}\ln\sin zdz=-\frac{\pi}{2}\ln 2$ 代入就得到了

$$\sum_{n=1}^{+\infty}\frac{\pi\zeta(2n)}{2^{2n+1}n(2n+1)}=\frac{\pi}{2}\ln\frac{\pi}{e}$$

于是

$$\sum_{n=1}^{+\infty}\frac{\zeta(2n)}{2^n n(2n+1)}=\ln\frac{\pi}{e}$$

8. (10)$f(z)$ 在 $|z|<1$ 内处处可导，在 $|z|\le 1$ 上连续，若 $f(e^{i\theta})\in\mathbf{R},\theta\in[0,2\pi)$，证明：$f(z)\equiv C(\in\mathbf{R})$ 为常数函数 $(\forall|z|\le 1)$。

解：由于 $f(z)$ 在 $|z|<1$ 内可导，因此在 $|z|<1$ 内解析，而 $e^{iz}$ 在整个复平面内解析，于是复合函数

$$g(z)=e^{if(z)}$$

在 $|z|<1$ 内解析。由最大模原理，$|g(z)|$ 在 $|z|=1$ 上取得最大值，不妨设在 $z_0=e^{i\theta_0}$ 处取得。由于 $f(e^{i\theta_0})\in\mathbf{R}$，有

$$|g(z)|\le|g(z_0)|=|e^{if(e^{i\theta_0})}|=1$$

同理，对

$$\frac{1}{g(z)}=e^{-if(z)}$$

进行同样的分析，得到

$$\left|\frac{1}{g(z)}\right|\le 1$$

综合以上两式，$|g(z)| \equiv 1$ 在 $|z| \le 1$ 上成立。由于 $g(z) = e^{if(z)}$，这表明 $f(z) \in \mathbf{R}$ 对于 $|z| \le 1$ 恒成立。设 $f(z) = u(x,y) + iv(x,y)$，则 $v(x,y) \equiv 0$，于是对于 $|z| < 1$

$$\frac{\partial v}{\partial x} = \frac{\partial v}{\partial y} = 0$$

由柯西-黎曼方程，这同样意味着

$$\frac{\partial u}{\partial x} = \frac{\partial u}{\partial y} = 0$$

结合 $f(z)$ 在 $|z| \le 1$ 上的连续性，$f(z) \equiv e^{i\theta_0} \in \mathbf{R}$ 为常数函数。

9. (10)$f(z)$ 在 $|z| \le 1$ 内解析且不为常数函数，若 $|f(z_0)| = \max\limits_{|z|\le 1} |f(z)|$，证明：$|z_0| = 1$ 且 $f(z_0) \ne 0$。

解：设区域 $D = \{z||z| \le 1\}$，由于 $f(z)$ 在 $D$ 内解析且不为常数函数，由最大模原理知，$f(z)$ 在 $\partial D$ 上，也就是 $|z| = 1$ 上取得最大值。因此 $|z_0| = 1$。而若 $f(z_0) = 0$，则 $|f(z_0)| = 0$，由于 $|f(z)| \le f|z_0|$ 对于 $|z| \le 1$ 恒成立，即 $0 \le |f(z)| \le 0$，只能有 $|f(z)| \equiv 0$，也就是 $f(z) \equiv 0$ 在 $|z| \le 1$ 内成立，这与 $f(z)$ 不是常数函数矛盾。因此 $f(z_0) \ne 0$。

10. (10) 若 $|z_k| = r > 0, k = 1,2,3,\ldots,n(n \ge 3)$，$r > 0$ 是常数，若 $\{z_1, z_2, \ldots, z_n\}$ 构成正 $n$ 边形的 $n$ 个顶点，求 $S = \sum\limits_{k=1}^{n} |z_k - z_1|^2$。

解：由于 $|z_k| = r > 0$，因此 $\{z_1, z_2, \ldots, z_n\}$ 位于以原点为圆心，$r$ 为半径的圆上。由于 $\{z_1, z_2, \ldots, z_n\}$ 构成正 $n$ 边形的 $n$ 个顶点，则此正 $n$ 边形的中心在原点。可以将此正 $n$ 边形绕原点旋转至标准位置 (即顶点为 $z^n = r^n$ 的 $n$ 个根的位置)，不改变 $S$ 的值。于是 $S$ 的计算可以用这种位置状态下的 $n$ 个顶点来计算。

设单位根 $\omega = e^{i\varphi}$，其中 $\varphi = \dfrac{2\pi}{n}$，设 $z_1 = r$，则

$$S = \sum_{k=1}^{n-1} |r\omega^k - r|^2 = r^2 \sum_{k=1}^{n-1} |\omega^k - 1|^2 = r^2 \sum_{k=1}^{n-1} (\omega^k - 1)(\overline{\omega^k} - 1) = r^2 \sum_{k=1}^{n-1} (2 - \omega^k - \omega^{-k})$$

由等比数列的求和公式

$$\sum_{k=1}^{n-1} \omega^k = \frac{\omega - \omega^n}{1 - \omega} = -1, \sum_{k=1}^{n-1} \omega^{-k} = \frac{\omega - \omega^{-n}}{1 - \omega} = -1$$

因此

$$S = r^2(2(n-1) - \sum_{k=1}^{n-1} \omega^k - \sum_{k=1}^{n-1} \omega^{-k}) = 2nr^2$$

11. (30) 求积分

(1)$I_1 = \displaystyle\int_0^{+\infty} \frac{x^{np-1}}{(ax^n + b)^m} dx, m, n, p \in \mathbf{N}, m > p, a > 0, b > 0$

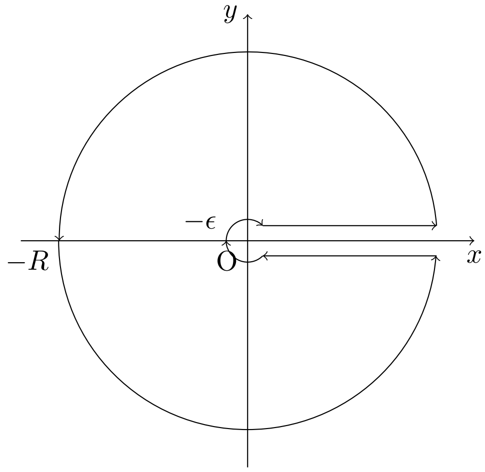
(2)$I_2 = \displaystyle\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{dx}{(ax^2 + bx + c)^n}, n \in \mathbf{N}, a > 0, ac > b^2$

(3)$I_3 = \displaystyle\int_0^{+\infty} \frac{x^{m-1}}{1 + x + \cdots + x^{n-1}} dx, m, n \in \mathbf{N}, n > m + 1$

解：(1)$n = 0$ 时 $I_1 = \displaystyle\int_0^{+\infty} \frac{x^{-1}}{(a+b)^m} dx$ 不存在。设 $f(x) = \dfrac{x^{np-1}}{(ax^n + b)^m}$，当 $p = 0$ 时，$f(x) = \dfrac{1}{x(ax^n + b)^m}$，$\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{f(x)}{1/x} = \dfrac{1}{b^m}$，由比较判别法可知原广义积分不收敛。因此 $n > 0, p > 0$。作变量代换 $z = x^n$，则 $dx = d(z^{\frac{1}{n}}) = \dfrac{1}{n} z^{\frac{1}{n}-1} dz$。于是

$$I_1 = \int_0^{+\infty} \frac{z^{p-\frac{1}{n}}}{(az+b)^m} \frac{1}{n} z^{\frac{1}{n}-1} dz = \frac{1}{n} \int_0^{+\infty} \frac{z^{p-1}}{(az+b)^m} dz$$

设 $g(z) = \dfrac{z^{p-1}}{(az+b)^m} \ln z$，则 $g(z)$ 有一个 $m$ 阶零点 $z_0 = -\dfrac{b}{a}$，取积分围道如下图所示




其中 $R$ 足够大，$\epsilon$ 足够小，使 $z_0$ 在围道内。则在 $x$ 轴下沿，$\ln z$ 的值相比 $x$ 轴上沿增加了 $2\pi i$。应用留数定理，有

$$\int_{C_R} g(z)dz + \int_{C_\epsilon} g(z)dz + \int_\epsilon^R \frac{z^{p-1}}{(az+b)^m}\ln z dz - \int_\epsilon^R \frac{z^{p-1}}{(az+b)^m}(\ln z + 2\pi i)dz = 2\pi i Rez[g(z), z_0]$$

其中

$$\begin{aligned}
\left|\int_{C_R} g(z)dz\right| &= \left|\int_{C_R} \frac{z^{p-1}}{(az+b)^m}\ln z dz\right| \\
&\le \left|\int_0^{2\pi} \frac{(Re^{i\theta})^{p-1}}{(aRe^{i\theta}+b)^m}(\ln R + i\theta) iRe^{i\theta} d\theta\right| \\
&\le 2\pi \left|\frac{(Re^{i\theta})^{p-1}}{(aRe^{i\theta}+b)^m}(\ln R + i\theta) iRe^{i\theta}\right| \\
&\le \frac{2\pi R^p}{(aR-b)^m}(\ln R + 2\pi) \to 0 (R \to +\infty)
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\left|\int_{C_\epsilon} g(z)dz\right| &= \left|\int_{C_\epsilon} \frac{z^{p-1}}{(az+b)^m}\ln z dz\right| \\
&\le \left|\int_0^{2\pi} \frac{(\epsilon e^{i\theta})^{p-1}}{(a\epsilon e^{i\theta}+b)^m}(\ln \epsilon + i\theta) i\epsilon e^{i\theta} d\theta\right| \\
&\le 2\pi \left|\frac{(\epsilon e^{i\theta})^{p-1}}{(a\epsilon e^{i\theta}+b)^m}(\ln \epsilon + i\theta) i\epsilon e^{i\theta}\right| \\
&\le \frac{2\pi \epsilon^p}{(b-a\epsilon)^m}(2\pi - \ln \epsilon) \to 0 (\epsilon \to 0)
\end{aligned}$$

这是由于 $m > p \ge 1$。于是，令 $\epsilon \to 0, R \to +\infty$，移项得到

$$I_1 = -\frac{1}{n} Rez[g(z), z_0]$$

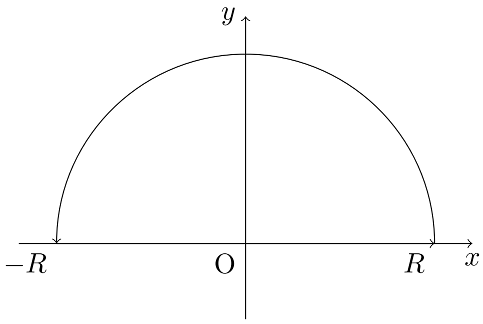
由留数计算公式

$$\begin{aligned}
Rez[g(z), z_0] &= \frac{1}{(m-1)!}\lim_{z\to z_0} \frac{d^{m-1}}{dz^{m-1}}((z-z_0)^m g(z)) \\
&= \frac{1}{(m-1)!}\lim_{z\to z_0} \frac{d^{m-1}}{dz^{m-1}}\left(\frac{z^{p-1}\ln z}{a^m}\right) \\
&= \frac{1}{(m-1)!}\lim_{z\to z_0} \frac{(-1)^{m-1-p}(p-1)!(m-1-p)!}{a^m z^{m-p}} \\
&= -\frac{(p-1)!(m-1-p)!}{(m-1)! a^p b^{m-p}}
\end{aligned}$$

于是

$$I_1 = \frac{(p-1)!(m-1-p)!}{n(m-1)! a^p b^{m-p}}$$

(2) 由于 $a>0$ 且 $ac>b^2\geq 0$，所以判别式 $\Delta=b^2-4ac<0$，可以知道 $ax^2+bx+c=0$ 有两个共轭的复根，分别在上半平面和下半平面。设 $f(z)=\dfrac{1}{(az^2+bz+c)^n}$，则 $f(z)$ 有 2 个 $n$ 阶极点，在上半平面的为 $z_1=-\dfrac{b}{2a}+i\dfrac{\sqrt{4ac-b^2}}{2a}$，在下半平面的是 $z_1=-\dfrac{b}{2a}-i\dfrac{\sqrt{4ac-b^2}}{2a}$。取积分围道如下图所示




其中，$R$ 足够大以使 $z_1$ 在围道内。由留数定理

$$\int_{-R}^{R}f(z)dz+\int_{C_R}f(z)dz=2\pi iRez[f(z),z_1]$$

而

$$\begin{aligned}\left|\int_{C_R}f(z)dz\right|&=\left|\int_{C_R}\frac{1}{(az^2+bz+c)^n}dz\right|\\&=\left|\int_0^{\pi}\frac{1}{(aR^2e^{2i\theta}+bRe^{i\theta}+c)^2}iRe^{i\theta}d\theta\right|\\&\leq\pi\left|\frac{1}{(aR^2e^{2i\theta}+bRe^{i\theta}+c)^n}iRe^{i\theta}\right|\\&\leq\frac{\pi R}{(aR^2-bR-c)^n}\to 0(R\to+\infty)\end{aligned}$$

因此，令 $R\to+\infty$，有

$$I_2=2\pi iRez[f(z),z_1]$$

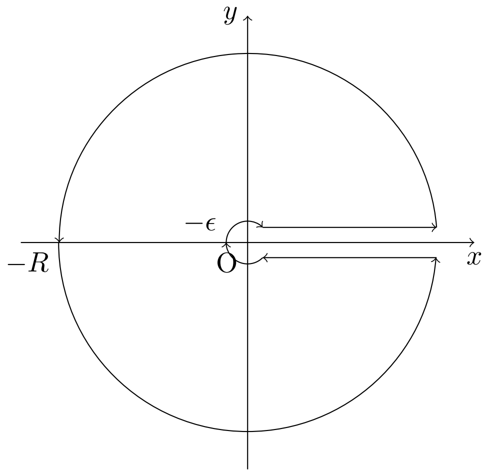
由留数计算公式

$$\begin{aligned}Rez[f(z),z_1]&=\frac{1}{(n-1)!}\lim_{z\to z_1}\frac{d^{n-1}}{dz^{n-1}}((z-z_1)^nf(z))\\&=\frac{1}{(n-1)!}\lim_{z\to z_1}\frac{d^{n-1}}{dz^{n-1}}\frac{1}{a^n(z-z_2)^n}\\&=\frac{1}{(n-1)!a^n}\frac{(-1)^{n-1}(2n-2)!}{(n-1)!(z_1-z_2)^{2n-1}}\\&=-\frac{a^{n-1}(2n-2)!\sqrt{4ac-b^2}i}{(4ac-b^2)^n((n-1)!)^2}\end{aligned}$$

于是

$$I_2=\frac{2\pi a^{n-1}(2n-2)!\sqrt{4ac-b^2}}{((n-1)!)^2(4ac-b^2)^n}$$

(3) 仿照 (1) 的方法，设 $g(z)=\dfrac{z^{m-1}}{1+z+\cdots+z^{n-1}}\ln z$，则 $g(z)$ 有 $n-1$ 个 1 阶极点 $\omega,\omega^2,\dots,\omega^{n-1}$，其中 $\omega=e^{i\frac{2\pi}{n}}$ 为单位根。取积分围道如下图所示




其中 $R$ 足够大，$\epsilon$ 足够小，使 $\omega,\omega^2,\dots,\omega^{n-1}$ 在围道内。则在 $x$ 轴下沿，$\ln z$ 的值相比 $x$ 轴上沿增加了 $2\pi i$。应用留数定理，有

$$\int_{C_R} g(z)dz+\int_{C_\epsilon} g(z)dz+\int_\epsilon^R \frac{z^{m-1}}{1+z+\cdots+z^{n-1}}\ln z dz-\int_\epsilon^R \frac{z^{m-1}}{1+z+\cdots+z^{n-1}}(\ln z+2\pi i)dz = 2\pi i\sum_{k=1}^{n-1} Rez[g(z),\omega^k]$$

由于 $n>m+1$，沿圆周的积分可做如下估计

$$\begin{aligned}\left|\int_{C_R} g(z)dz\right| &= \left|\int_{C_R} \frac{z^{m-1}}{1+z+\cdots+z^{n-1}}\ln z dz\right| \\ &\le \left|\int_0^{2\pi} \frac{(Re^{i\theta})^{m-1}}{1+Re^{i\theta}+\cdots+(Re^{i\theta})^{n-1}}(\ln R+i\theta)iRe^{i\theta}d\theta\right| \\ &\le 2\pi\left|\frac{(Re^{i\theta})^{m-1}}{1+Re^{i\theta}+\cdots+(Re^{i\theta})^{n-1}}(\ln R+i\theta)iRe^{i\theta}\right| \\ &\le \frac{2\pi R^m}{R^{n-1}-R^{n-2}-\cdots-R-1}(\ln R+2\pi)\to 0(R\to+\infty)\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\left|\int_{C_\epsilon} g(z)dz\right| &= \left|\int_{C_\epsilon} \frac{z^{m-1}}{1+z+\cdots+z^{n-1}}\ln z dz\right| \\ &\le \left|\int_0^{2\pi} \frac{(\epsilon e^{i\theta})^{m-1}}{1+\epsilon e^{i\theta}+\cdots+(\epsilon e^{i\theta})^{n-1}}(\ln \epsilon+i\theta)i\epsilon e^{i\theta}d\theta\right| \\ &\le 2\pi\left|\frac{(\epsilon e^{i\theta})^{m-1}}{1+\epsilon e^{i\theta}+\cdots+(\epsilon e^{i\theta})^{n-1}}(\ln \epsilon+i\theta)i\epsilon e^{i\theta}\right| \\ &\le \frac{2\pi \epsilon^m}{1-\epsilon-\cdots-\epsilon^{n-1}}(2\pi-\ln\epsilon)\to 0(\epsilon\to 0)\end{aligned}$$

于是，令 $\epsilon\to 0, R\to+\infty$，移项得到

$$I_3=-\sum_{k=1}^{n-1} Rez[g(z),\omega^k]$$

由留数计算公式并结合洛必达法则

$$\begin{aligned}Rez[g(z),\omega^k] &= \lim_{z\to\omega^k}(z-\omega^k)g(z) \\ &= \lim_{z\to\omega^k}\frac{z^{m-1}(z-1)(z-\omega^k)\ln z}{z^n-1} \\ &= \lim_{z\to\omega^k}\frac{z^{m-2}(z-1)(z-\omega^k)+((m+1)z^m-m(1+\omega^k)z^{m-1}+(m-1)\omega^k z^{m-2})\ln z}{nz^{n-1}} \\ &= \frac{2\pi i}{n^2}k(\omega^{k(m+1)}-\omega^{km})\end{aligned}$$

因此

$$\sum_{k=1}^{n-1} Rez[g(z),\omega^k]=\frac{2\pi i}{n^2}\left(\sum_{k=1}^{n-1}k(\omega^{m+1})^k-\sum_{k=1}^{n-1}k(\omega^m)^k\right)$$

当 $x \neq 1$ 时,设 $S = \sum_{k=1}^{n-1} kx^k$,则 $xS = \sum_{k=2}^{n}(k-1)x^k$,两式相减并移项得到 $S = \frac{(n-1)x^n - (x+x^2+\cdots+x^{n-1})}{x-1} = \frac{(n-1)x^n - \frac{x^n - x}{x-1}}{x-1}$。分别令 $x = \omega^{m+1}, \omega^m$,得到

$$\sum_{k=1}^{n-1} k(\omega^{m+1})^k = \frac{n}{\omega^{m+1}-1} = \frac{n}{2i\sin\frac{(m+1)\pi}{n} e^{i\frac{(m+1)\pi}{n}}}$$

$$\sum_{k=1}^{n-1} k(\omega^{m})^k = \frac{n}{\omega^{m}-1} = \frac{n}{2i\sin\frac{m\pi}{n} e^{i\frac{m\pi}{n}}}$$

于是

$$\sum_{k=1}^{n-1} Rez[g(z), \omega^k] = \frac{\pi}{n}\left(\frac{1}{\sin\frac{(m+1)\pi}{n} e^{i\frac{(m+1)\pi}{n}}} - \frac{1}{\sin\frac{m\pi}{n} e^{i\frac{m\pi}{n}}}\right) = \frac{\pi(\sin\frac{m\pi}{n} - \sin\frac{(m+1)\pi}{n} e^{i\frac{\pi}{n}})}{n\sin\frac{(m+1)\pi}{n}\sin\frac{m\pi}{n} e^{i\frac{(m+1)\pi}{n}}} = -\frac{\pi\sin\frac{\pi}{n}}{n\sin\frac{(m+1)\pi}{n}\sin\frac{m\pi}{n}}$$

从而

$$I_3 = -\sum_{k=1}^{n-1} Rez[g(z), \omega^k] = \frac{\pi\sin\frac{\pi}{n}}{n\sin\frac{m\pi}{n}\sin\frac{(m+1)\pi}{n}}$$

12. (20) 用分式线性映射叠加映射的方法 (几何方法) 求出一个分式线性映射 $\omega = \frac{az+b}{cz+d}, a, b, c, d \in \mathbf{C}, ad - bc \neq 0$,将异心圆环域 $D_1$ 映成同心圆环域 $D_2$,并求出 $r$ 来。这里

$$D_1 = \{z||z - z_1| > r_1, |z - z_2| < r_2, z_1 \neq z_2 \text{且} |z_1 - z_2| + r_1 < r_2\}$$

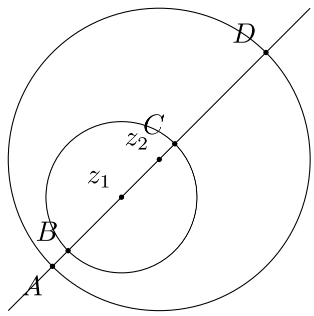
$$D_2 = \{z|r < |z| < 1, 0 < r < 1\}$$

或

$$D_2 = \{z|1 < |z| < r, r > 1\}$$

(注:不能用共同对称点的方法)

解: 设穿过两圆圆心 $z_1, z_2$ 的直线沿 $z_1$ 到 $z_2$ 的方向与两圆分别交于 $A, B, C, D$




则直线倾角为

$$\theta_0 = \arg(z_2 - z_1)$$

可表示出四点为

$$A = z_2 - r_2 e^{i\theta_0}$$

$$B = z_1 - r_1 e^{i\theta_0}$$

$$C = z_1 + r_1 e^{i\theta_0}$$

$$D = z_2 + r_2 e^{i\theta_0}$$

同时

$$z_2 - z_1 = |z_1 - z_2| e^{i\theta_0}$$

设分式线性变换

$$w_1(z) = \frac{z-A}{D-z} = \frac{z-z_2+r_2e^{i\theta_0}}{z_2+r_2e^{i\theta_0}-z}$$

则 $w_1$ 将 $A$ 映射为原点，将 $D$ 映射为实轴上正无穷远点，而

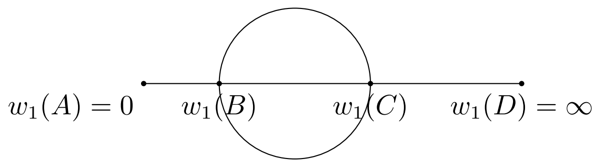
$$w_1(B) = \frac{z_1-z_2-r_1e^{i\theta_0}+r_2e^{i\theta_0}}{z_2-z_1+r_2e^{i\theta_0}+r_1e^{i\theta_0}} = \frac{r_2-r_1-|z_1-z_2|}{r_1+r_2+|z_1-z_2|}$$

$$w_1(C) = \frac{z_1-z_2+r_1e^{i\theta_0}+r_2e^{i\theta_0}}{z_2-z_1+r_2e^{i\theta_0}-r_1e^{i\theta_0}} = \frac{r_1+r_2-|z_1-z_2|}{r_2-r_1+|z_1-z_2|}$$

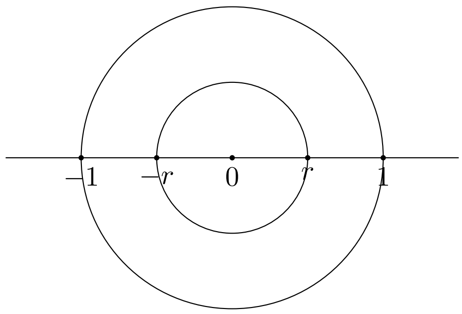
均在实轴正半轴上，且

$$\frac{w_1(B)}{w_1(C)} = \frac{(r_2-r_1)^2-|z_1-z_2|^2}{(r_1+r_2)^2-|z_1-z_2|^2} < 1$$

因此 $w_1(C)$ 在 $w_1(B)$ 右侧。由分式线性变换的保圆性，两个圆分别被映射为实轴正半轴和直径在实轴上的一个圆，如下图所示



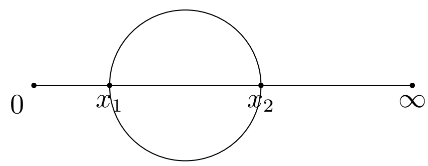

下面对 $D_2$ 进行类似的变换。当 $0<r<1$ 时，$D_2$ 如下图所示




令分式线性变换

$$w_2(z) = \frac{z+1}{1-z}$$

则同理可验证 $D_2$ 被映射为




其中

$$x_1 = \frac{1-r}{1+r}$$

$$x_2 = \frac{1+r}{1-r}$$

再通过伸缩变换

$$w_3(z) = kz, k \in \mathbf{R}$$

将 $w_1(D_1)$ 和 $w_2(D_2)$ 联系起来。设 $w_3(w_1(D_1)) = w_2(D_2)$，则只需

$$w_3\left(\frac{r_2-r_1-|z_1-z_2|}{r_1+r_2+|z_1-z_2|}\right) = \frac{1-r}{1+r}$$

$$w_3\left(\frac{r_1+r_2-|z_1-z_2|}{r_2-r_1+|z_1-z_2|}\right)=\frac{1+r}{1-r}$$

解得

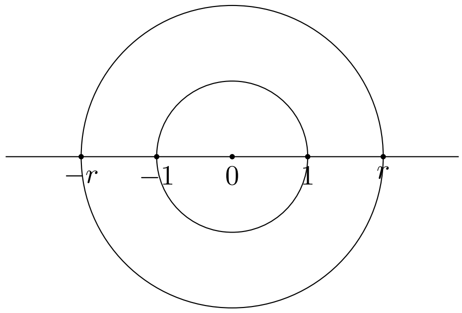
$$\begin{cases} k=\sqrt{\dfrac{(r_2+|z_1-z_2|)^2-r_1^2}{(r_2-|z_1-z_2|)^2-r_1^2}} \\ r=\dfrac{r_1^2+r_2^2-|z_1-z_2|^2-\sqrt{(r_1^2+r_2^2+|z_1-z_2|)^2-4r_1^2r_2^2}}{2r_1r_2} \end{cases}$$

于是所求的分式线性映射为

$$w(z)=w_2^{-1}(w_3(w_1(z)))=\frac{kw_1(z)-1}{1+kw_1(z)}=\frac{|z_1-z_2|(k+1)z-|z_1-z_2|(k+1)z_2+(k-1)r_2(z_2-z_1)}{|z_1-z_2|(k-1)z-|z_1-z_2|(k-1)z_2+(k+1)r_2(z_2-z_1)}$$

其中 $k$ 表达式如上所示，$r$ 也已求出。

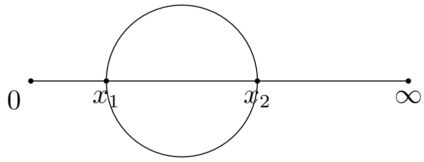
当 $r>1$ 时，如下图所示




令分式线性变换

$$w_2(z)=\frac{z+r}{r-z}$$

则同理可验证 $D_2$ 被映射为




其中

$$x_1=\frac{r-1}{1+r}$$
$$x_2=\frac{1+r}{r-1}$$

再通过伸缩变换

$$w_3(z)=kz,k\in\mathbf{R}$$

将 $w_1(D_1)$ 和 $w_2(D_2)$ 联系起来。设 $w_3(w_1(D_1))=w_2(D_2)$，则只需

$$w_3\left(\frac{r_2-r_1-|z_1-z_2|}{r_1+r_2+|z_1-z_2|}\right)=\frac{r-1}{1+r}$$
$$w_3\left(\frac{r_1+r_2-|z_1-z_2|}{r_2-r_1+|z_1-z_2|}\right)=\frac{1+r}{r-1}$$

解得

$$\begin{cases} k=\sqrt{\dfrac{(r_2+|z_1-z_2|)^2-r_1^2}{(r_2-|z_1-z_2|)^2-r_1^2}} \\ r=\dfrac{r_1^2+r_2^2-|z_1-z_2|^2+\sqrt{(r_1^2+r_2^2+|z_1-z_2|)^2-4r_1^2r_2^2}}{2r_1r_2} \end{cases}$$

于是所求的分式线性映射为

$$w(z)=w_2^{-1}(w_3(w_1(z)))=\frac{krw_1(z)-r}{1+kw_1(z)}=\frac{|z_1-z_2|(k+1)rz-|z_1-z_2|(k+1)rz_2+(k-1)rr_2(z_2-z_1)}{|z_1-z_2|(k-1)z-|z_1-z_2|(k-1)z_2+(k+1)r_2(z_2-z_1)}$$

其中 $k,r$ 表达式如上所示，$r$ 也已求出。