

第六周作业



1. 设 $A \in M_n(\mathbb{C})$, A 的所有特征值均为 0, 则 $A^n = 0$.

2. 设 $A \in M_n(\mathbb{C})$, 且存在 $k \geq 1$, $A^k = 0$
则对于 $\forall l \geq 1$, $\text{tr}(A^l) = 0$
(注: $\text{tr}(A)$ 是 A 的对角元之和,
本题逆命题也对, 不作为习题).

3. 设 A, B 是 3 阶方阵, $A^3 = B^3 = 0$
但 $A^2 \neq 0, B^2 \neq 0$, A, B 是否相似?

4. 若 $A \in M_n(\mathbb{C})$, 且存在 $k \geq 1$, $A^{k-1} \neq 0$
 $A^k = 0$.

(1) 证明: $I_n - A$ 是可逆阵

(2) 求 $(I_n - A)^{-1} = ?$ 求 $\det(I_n - A) = ?$

5. 设 $A \in M_n(\mathbb{C})$, $A^n = 0$, $A^{n-1} \neq 0$

证明: 不存在 $B \in M_n(\mathbb{C})$, $B^2 = A$.

(提示: A, B 均幂零, $A^{n-1} \neq 0 \Rightarrow$

$\text{rank}(A) = n-1$, $\dim N(A) = 1$)

6. 设 $T: \mathbb{C}^n \rightarrow \mathbb{C}^n$ 是一个幂零
 $x \mapsto Ax$

变换, 求 \mathbb{C}^n 的循环子空间直和
分解, 其中 A 有如下几种情形:

$$(1) n=3, A = \begin{pmatrix} 1 & -1 & -1 \\ 2 & -2 & -2 \\ -1 & 1 & 1 \end{pmatrix}$$

$$(2) n=3, A = \begin{pmatrix} 0 & -3 & 3 \\ -2 & -7 & 13 \\ -1 & -4 & 7 \end{pmatrix}$$

$$(3) n=4. A = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 0 & 0 \\ 1 & -1 & 0 & 0 \\ 3 & 0 & 3 & -3 \\ 4 & -1 & 3 & -3 \end{pmatrix}$$