线性代数期中考试

1. 问答题(10分)

   (1) 找一个5阶置换矩阵P使得$P^6 = I_5$但是$P, P^2, \cdots, P^5 \neq I_5$。

   (2) 设A, B, C分别为$3 \times 100, 100 \times 2, 2 \times 100$阶矩阵，分别计算$A(BC)$与$(AB)C$所需乘法的次数。

   (3) 矩阵A的约化阶梯形唯一吗？为什么？

   (4) 哪些三阶方阵与任意三阶方阵相乘可交换？为什么？

   (5) 设W_1, W_2均是V的线性子空间，什么条件下$W_1 \cup W_2$也是V的子空间？

2. (15分) 定义矩阵$S = \begin{pmatrix} 6 & 3 & 1 \\ 3 & 2 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}$.

   (1) 求上三角阵U和下三角阵L使得$S = UL$.

   (2) 求S的逆矩阵。

   (3) 求S的LDU分解。

3. (10分) 设a, b, c是三个实数。定义$A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & a & b \\ 1 & a^2 & b^2 \end{pmatrix}$.

   (1) 给出A可逆的充要条件。

   (2) 求A的逆矩阵。

4. (10分) n 阶实方阵A称为正交阵，如果$AA^T = I_n$.

   (1) 求出所有的2阶正交阵。

   (2) 给出一个4阶正交阵A使得A中的所有元素的绝对值相等。

5. (10分) 求如下六阶矩阵K的LU分解：

$$K = \begin{pmatrix} -2 & 1 & & \\ 1 & -2 & \ddots & \\ & \ddots & \ddots & 1 \\ & & 1 & -2 \end{pmatrix}$$

6. (20分) 给定矩阵$A=\begin{pmatrix}0&0&0&1&5\\1&2&0&1&6\\2&4&1&1&4\\1&2&0&0&1\end{pmatrix}$.

(1)求矩阵A的约化阶梯形R。

(2)找到A的一组线性无关的列向量，使得其张成$C(A)$。

(3)求$Ax=\vec{0}$的一组特解，使得其张成$N(A)$。

(4)求一个非零4维向量v使得$v^TA=(0,0,0,0,0)$.

7. (10分) 设A是一个$m\times n$阶矩阵。

(1) 设F是一个n阶可逆方阵。证明

$$C(A)=C(AF).$$

(2)设E是一个m阶可逆方阵，是否有$C(A)=C(EA)$？是否有$r(A)=r(EA)$？请说明理由。

8. (5分) 设A为2×3阶矩阵，证明A^TA必不可逆。

9. (10分) 设V是所有实值连续函数全体构成的线性空间，W为所有次数不超过n的实系数多项式全体。

(1) 证明W是V的一个线性子空间。

(2) 找到W中的一组函数使得它们张成的子空间正好是W。

10. **选做题：** 方阵A称为有UL分解，如果$A=UL$，其中U是上三角矩阵，且对角线上全为1；L为下三角矩阵，且对角线上全不为零。

试给出一个方阵A有UL分解的充要条件。并给出证明。