

一元微积分期末考题 答案

一. 填空题 (每空 3 分, 共 15 空) (请将答案直接填写在横线上!)

1. $\int \frac{\ln x}{(1-x)^2} dx =$ _____

答案: $\frac{\ln x}{1-x} + \ln |1-x| - \ln x + C$

2. $\int \frac{dx}{1+\cos^2 x} =$ _____。

答案: $\frac{1}{\sqrt{2}} \arctan\left(\frac{1}{\sqrt{2}} \tan x\right) + C$

3. $\int_1^{+\infty} \frac{\arctan x}{x^2} dx =$ _____

解: $\int_1^{+\infty} \frac{\arctan x}{x^2} dx = -\frac{\arctan x}{x} \Big|_1^{+\infty} + \int_1^{+\infty} \frac{dx}{x(1+x^2)} = \frac{\pi}{4} + \frac{\ln 2}{2}$

4. $\int xf(x)dx = \arctan x + C$, 则 $\int \frac{1}{f(x)} dx =$ _____。

答案: $\frac{x^2}{2} + \frac{x^4}{4} + C$

5. $\int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} \frac{(1+x)\cos x}{1+\sin^2 x} dx =$ _____。

答案: $\frac{\pi}{2}$

6. $\frac{d}{dx} \left(\int_x^{x^2} e^{t^2} dt \right) =$ _____。

答案: $2xe^{x^4} - e^{x^2}$

7. 设 $f(x)$ 为连续函数, $f(0) \neq 0$, $F(x) = \int_0^x t^2 f(t) dt$, 当 $x \rightarrow 0$ 时, $F(x)$ 与 x^k 是同阶无穷小, 则 $k =$ _____。

答案: 3

8. 将 $(x-3)^2 + y^2 = 1$ 绕 y 轴转一圈, 则所得图形围成的体积为 _____。

答案: $6\pi^2$

9. 设 $m > 0$, 且广义积分 $\int_0^{+\infty} \frac{dx}{\sqrt{x+x^m}}$ 收敛, 则 m 的范围为 _____

答案: $m > 1$

10. 幂级数 $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{x^{2n}}{2^n + (-5)^n}$ 的收敛域为_____。

答案: $(-\sqrt{5}, \sqrt{5})$

11. 级数 $\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{(-1)^n \sin \frac{1}{n}}{n^p}$ 条件收敛, 则参数 p 的范围为_____。

答案: $-1 < p \leq 0$

12. 在 $x_0 = 0$ 点, 函数 $\int_0^x e^{-t^2} dt$ 的幂级数展开为

答案: $\sum_{n=0}^{+\infty} (-1)^n \frac{x^{2n+1}}{n!(2n+1)}, x \in \mathbb{R}$

13. $y' = e^x + e^{x+y}$, 的通解是_____。

答案: $\ln \frac{e^y}{1+e^y} = e^x + C$

14. $xdy + (x-2y)dx = 0$ 满足 $y(1) = 0$ 的解为_____。

答案: $y = x - x^2$

15. 初值问题 $\begin{cases} y'' + 2x(y')^2 = 0 \\ y(0) = 1, y'(0) = 0 \end{cases}$ 的解为_____。

答案: $y = 1$

二. 计算题 (每题 10 分, 共 40 分)

1. 求 p 的范围, 使得 $\int_1^{\infty} \sin \frac{\pi}{x} \frac{dx}{\ln^p x}$ 收敛

解: $\int_1^{+\infty} \sin \frac{\pi}{x} \frac{dx}{\ln^p x} = \int_1^2 \sin \frac{\pi}{x} \frac{dx}{\ln^p x} + \int_2^{+\infty} \sin \frac{\pi}{x} \frac{dx}{\ln^p x},$

$x=1$ 附近, $\sin \frac{\pi}{x} \frac{1}{\ln^p x} \sim \pi \left(1 - \frac{1}{x}\right) \frac{1}{(x-1)^p}$, 所以仅当 $2-p > 0$ 时 $\int_1^2 \sin \frac{\pi}{x} \frac{dx}{\ln^p x}$ 收敛

.....5 分

$x \rightarrow +\infty, \sin \frac{\pi}{x} \frac{1}{\ln^p x} \sim \frac{\pi}{x \ln^p x}$ 对任意的 p 成立, 所以只需要考虑广义积分 $\int_2^{\infty} \frac{\pi}{x \ln^p x} dx$

的收敛性。因为 $\int_2^a \frac{dx}{x \ln^p x} = \int_{\ln 2}^{\ln a} \frac{du}{u^p}$, 所以仅当 $p > 1$ 时广义积分 $\int_2^\infty \frac{\pi}{x \ln^p x} dx$ 收敛。
.....5 分

最终, 我们得到仅当 $p \in (1, 2)$ 时 $\int_1^\infty \sin \frac{\pi}{x} \frac{dx}{\ln^p x}$ 收敛。

2. 计算摆线 $x = t - \sin t, y = 1 - \cos t, t \in [0, 2\pi]$, 绕 x 轴旋转体的体积和表面积。

解: 旋转体的体积

$$V = \int_0^{2\pi} \pi y^2 dx = \int_0^{2\pi} \pi (1 - \cos t)^3 dt = \int_0^{2\pi} \pi (1 - 3\cos t + 3\cos^2 t - \cos^3 t) dt = 5\pi^2$$

.....5 分

旋转体的表面积

$$S = 2\pi \int_0^{2\pi} y \sqrt{x'^2 + y'^2} dt = 2\pi \int_0^{2\pi} (1 - \cos t) \sqrt{2 - 2\cos t} dt = 8\pi \int_0^{2\pi} \sin^3 \frac{t}{2} dt = \frac{64}{3}\pi$$

.....5 分

3. 求级数 $\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{(-1)^n n^2}{2^n}$ 的和。

解: 记 $S(x) = \sum_{n=1}^{+\infty} n^2 x^n$, 则 $\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{(-1)^n n^2}{2^n} = S\left(-\frac{1}{2}\right)$,

$$\frac{S}{x} = \sum_{n=1}^{+\infty} n^2 x^{n-1}, \quad \int_0^x \frac{S}{x} dx = \sum_{n=1}^{+\infty} n x^n, \dots\dots\dots 3 \text{ 分}$$

$$\frac{1}{x} \int_0^x \frac{S}{x} dx = \sum_{n=1}^{+\infty} n x^{n-1}, \quad \int_0^x \left(\frac{1}{x} \int_0^x \frac{S}{x} dx \right) dx = \sum_{n=1}^{+\infty} x^n = \frac{x}{1-x}, \quad \dots\dots\dots 3 \text{ 分}$$

故 $\frac{1}{x} \int_0^x \frac{S}{x} dx = \frac{1}{(1-x)^2}, \quad \int_0^x \frac{S}{x} dx = \frac{x}{(1-x)^2},$

$$\frac{S(x)}{x} = \frac{1+x}{(1-x)^3}, \quad S(x) = \frac{x(1+x)}{(1-x)^3},$$

$$\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{(-1)^n n^2}{2^n} = S\left(-\frac{1}{2}\right) = -\frac{2}{27} \quad \dots\dots\dots 4 \text{ 分}$$

4. 设 $f(x) \in C(0, +\infty)$, 且对任意 $x > 0$ 满足 $x \int_0^1 f(tx) dt = -2 \int_0^x f(t) dt + xf(x) + x^4$,

$f(1) = 0$, 求 $f(x)$ 。

解: 令 $u = tx$, 则原方程可化为 $\int_0^x f(u) du = -2 \int_0^x f(t) dt + xf(x) + x^4$

两边求导得, $f(x) = -2f(x) + f(x) + xf'(x) + 4x^3$,

从而得一阶线性 ODE, $f'(x) - \frac{2}{x}f(x) = -4x^2$,5 分

解得, $f(x) = x^2(C - 4x)$, 由于 $f(1) = 0$, 得 $C = 4$

所以 $f(x) = x^2(4 - 4x)$ 。5 分

三. 证明题

1. (8 分) 已知函数 $y = f(x) = x \ln x + \sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^{n+2}}{(n+1) \cdot (n+1)!}$ 。求 $f(x)$ 的定义域, 并证明

$y = f(x)$ 满足微分方程 $xy' - y = xe^x$, 并且 $\lim_{x \rightarrow 0^+} y(0) = 0$ 。

证明: $x \ln x$ 的定义域为 $(0, +\infty)$, $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^{n+2}}{(n+1) \cdot (n+1)!}$ 收敛域为 $(-\infty, +\infty)$ 。

所以函数 $f(x)$ 的定义域为 $(0, +\infty)$ 。2 分

以下证明 $f(x)$ 为所设初值问题的解。

$$y' = 1 + \ln x + \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(n+2)x^{n+1}}{(n+1) \cdot (n+1)!}$$

$$\Rightarrow xy' = x + x \ln x + \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(n+2)x^{n+2}}{(n+1) \cdot (n+1)!}$$

$$\Rightarrow xy' - y = x + \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(n+2)x^{n+2}}{(n+1) \cdot (n+1)!} - \sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^{n+2}}{(n+1) \cdot (n+1)!}$$

$$= x + x \sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^{n+1}}{(n+1)!} = x + x \left((-1) + 1 + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{x^n}{n!} \right) = xe^x. \quad \dots\dots\dots 4 \text{ 分}$$

$$\lim_{x \rightarrow 0^+} y(x) = \lim_{x \rightarrow 0^+} (x \ln x) + \lim_{x \rightarrow 0^+} \sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^{n+2}}{(n+1) \cdot (n+1)!} = 0 \quad \dots\dots\dots 2 \text{ 分}$$

2. (7 分) 设 $f(x)$ 在 $[0,1]$ 上可导, 且 $f(0) = 0, 0 < f'(x) < 1, \forall x \in [0,1]$, 求证:

$$\left[\int_0^1 f(x) dx \right]^2 > \int_0^1 [f(x)]^3 dx$$

证明：记 $\varphi(x) = \left[\int_0^x f(t) dt \right]^2 - \int_0^x [f(t)]^3 dt$

则 $\varphi'(x) = 2f(x) \left[\int_0^x f(t) dt \right]^2 - f^3(x) = f(x) \left[2 \int_0^x f(t) dt - f^2(x) \right] \dots\dots\dots 2 \text{ 分}$

记 $\psi(x) = \left[2 \int_0^x f(t) dt - f^2(x) \right]$

则 $\psi'(x) = 2f(x)[1 - f'(x)] \dots\dots\dots 2 \text{ 分}$

因为 $f(x)$ 在 $[0,1]$ 上可导，且 $f(0) = 0, 0 < f'(x) < 1, \forall x \in [0,1]$ ，

$$f(x) > 0, \quad 1 - f'(x) > 0, \quad \forall x \in [0,1]$$

故 $\psi(x) > 0, \forall x \in [0,1]$ ， $\varphi'(x) > 0, \forall x \in [0,1]$ 。又 $\varphi(0) = 0$ ，所以

$$\varphi(x) = \left[\int_0^x f(t) dt \right]^2 - \int_0^x [f(t)]^3 dt > 0, \forall x \in (0,1]$$

$$\varphi(1) = \left[\int_0^1 f(t) dt \right]^2 - \int_0^1 [f(t)]^3 dt > 0 \dots\dots\dots 3 \text{ 分}$$