习题课1

1. 已知有一对应

$$\{z \mid z=a+bi,\ a,b\in\mathbb{R}\} \longrightarrow M_2(\mathbb{R})$$

$$z \longmapsto \begin{pmatrix} a & -b \\ b & a \end{pmatrix}$$

能否推广这个对应到一般复方阵，即

$$M_n(\mathbb{C}) \xrightarrow{T} M_{2n}(\mathbb{R})$$

$$M=A+Bi \longmapsto \begin{pmatrix} A & -B \\ B & A \end{pmatrix}$$

（注：$A,B\in M_n(\mathbb{R})$）

使得 $T(M_1M_2)=T(M_1)\cdot T(M_2)$

$$T(M^H)=T(M)^T$$

2. 已知复数有极分解 $z=re^{i\theta}$ $(z\neq 0)$. 我们推广这个分解到复方阵 $A\in M_n(\mathbb{C})$

(1) 设 $A\in M_n(\mathbb{C})$, A 可逆，则

AA^H 是一个特征值均 >0 的 Hermite 阵.

（类比于 $\bar{z}z>0$，$z\neq 0$）

(2) 存在唯一的Hermite阵R满足$R^2=AA^H$;

且R的特征值均>0.

(3) 存在一个酉阵V，满足

$$A=R\cdot V.$$

(4) 引入记号：若$M\in M_n(\mathbb{C})$，M正规.

则存在酉阵Q，$M=Q\begin{pmatrix}\lambda_1 & & \\ & \ddots & \\ & & \lambda_n\end{pmatrix}Q^H$.

定义 $$e^M=Q\begin{pmatrix}e^{\lambda_1} & & \\ & \ddots & \\ & & e^{\lambda_n}\end{pmatrix}Q^H$$

证明：对于任一个酉阵U，存在一个Hermite阵H，$U=e^{iH}$.

3. 设 $V=\mathbb{C}^n$, $\forall u,v\in\mathbb{C}^n$, $\langle u,v\rangle=u^H v$.

证明: $\langle u,v\rangle$

$$=\frac{\|u+v\|^2-\|u-v\|^2+\|u-iv\|^2 i-\|u+iv\| i}{4}$$

4. 令 $V=\{a_0+a_1x+a_2x^2 \mid a_0,a_1,a_2\in\mathbb{C}\}$

$\forall f(x),g(x)\in V$, 定义

$$\langle f(x),g(x)\rangle=\int_{-1}^{1}\overline{f(x)}\,g(x)\,dx$$

(1) 证明: 上述 $\langle -,-\rangle$ 是一个内积, 从而 V 是一个酉空间.

(2) $\{1,x,x^2\}$ 是 V 的一组基, 应用 Gram-Schmidt 正交化, 求相应标准正交基.

(3) 求 $u(x)\in V$, 满足

$$\int_{-1}^{1}p(x)\cos(\pi x)\,dx=\int_{-1}^{1}p(x)\,u(x)\,dx$$

(提示：上述等式即

$$\int_{-1}^{1} p(x)\left[\cos(\pi x)-u(x)\right]dx=0$$

也即 $\cos\pi x-u(x)\perp V$，因此 $u(x)$ 是 $\cos(\pi x)$ 在 V 上正交投影)

5. (1) 试举例展示存在 $T:\mathbb{C}^4\to\mathbb{C}^4$，满足 T 是正规变换，但不是 Hermite 变换.

(2) 设 $T:\mathbb{C}^3\to\mathbb{C}^3$ 是正规变换，且 $T\left[\begin{pmatrix}1\\1\\1\end{pmatrix}\right]=\begin{pmatrix}2\\2\\2\end{pmatrix}$. 证明：若 $v=\begin{pmatrix}z_1\\z_2\\z_3\end{pmatrix}$ 满足 $T(v)=0$，则 $z_1+z_2+z_3=0$.

6. 令 $V = \mathrm{Span}\{1, \cos x, \cdots, \cos nx, \sin x, \cdots, \sin nx\}$

定义 $\forall f(x), g(x) \in V$

$$\langle f(x), g(x) \rangle = \int_{-\pi}^{\pi} f(x) g(x)\, dx$$

(a) 定义 $D: V \longrightarrow V$, $D(f) = f'$.

证明: $D^* = -D$ (即 D 是 skew-Hermite)

(b) 定义 $T: V \longrightarrow V$, $T(f) = f''$

证明: $T^* = T$.

7. 我们已知若 $A^H = A$, $A \in M_n(\mathbb{C})$.

且 $v^H A v = 0$, $\forall v \in \mathbb{C}^n$, 则 $A = O_{n\times n}$.

证明: "条件 $A^H = A$ 是不需要的.

(2) 结论对于实矩阵不对, 即若 $A \in M_n(\mathbb{R})$

$v^T A v = 0$, $\forall v \in \mathbb{R}^n$, 则 A 未必是零.

8. 设$\{e_1, e_2, e_3\}$是$\mathbb{C}^3$的一组标准正交基，$v_1, v_2, v_3 \in \mathbb{C}^3$满足$\|e_j - v_j\| < \frac{1}{\sqrt{3}}$，$j=1,2,3$。

证明：v_1, v_2, v_3是$\mathbb{C}^3$的一组基。

（提示：若$av_1+bv_2+cv_3=0$，考虑$\|a(e_1-v_1)+b(e_2-v_2)+c(e_3-v_3)\|$）

9. 设$\lambda_1, \cdots, \lambda_n$是$n$阶复矩阵$A=(a_{ij})$的特征值，求证：

$$\sum_{i=1}^{n} |\lambda_i|^2 \leqslant \sum_{i,j=1}^{n} |a_{ij}|^2.$$

等号成立的充要条件是A是复正规阵。