10.0

离散数学——第三周作业

计83 刘轩奇 2018011025

2019.09.27

1.6 将下列公式写成波兰式和逆波兰式。

(1) $P \to Q \vee R \vee S$

(2) $P \wedge \neg R \leftrightarrow P \vee Q$

(3) $\neg\neg P \vee (W \wedge R) \vee \neg Q$

解 (1) 波兰式 $\to P \vee \vee QRS$ ，逆波兰式 $PQR \vee S \vee \to$。

(2) 波兰式 $\leftrightarrow \wedge P \neg R \vee PQ$ ，逆波兰式 $PR\neg \wedge PQ \vee \leftrightarrow$。

(3) 波兰式 $\vee \vee \neg\neg P \wedge WR \neg Q$ ，逆波兰式 $P\neg\neg WR \wedge \vee Q \neg \vee$。

2.1 证明下列等值公式。

(1) $P \to (Q \wedge R) = (P \to Q) \wedge (P \to R)$

(3) $((P \to \neg Q) \to (Q \to \neg P)) \wedge R = R$

(5) $P \to (Q \to R) = (P \wedge Q) \to R$

证 (1)

$$\begin{aligned} P \to (Q \wedge R) &= \neg P \vee (Q \wedge R) \\ &= (\neg P \vee Q) \wedge (\neg P \vee R) \\ &= (P \to Q) \wedge (P \to R) \end{aligned}$$

(3)

$$\begin{aligned} ((P \to \neg Q) \to (Q \to \neg P)) \wedge R &= ((\neg P \vee \neg Q) \to (\neg Q \vee \neg P)) \wedge R \\ &= R \end{aligned}$$

(5)

$$\begin{aligned} P \to (Q \to R) &= P \to (\neg Q \vee R) \\ &= \neg P \vee (\neg Q \vee R) \\ &= (\neg P \vee \neg Q) \vee R \\ &= \neg(P \wedge Q) \vee R \\ &= (P \wedge Q) \to R \end{aligned}$$

2.2 由下列真值表，分别从T和F来列写出A, B和C的表达式，并分别以符号m_i和M_i表示。

P	Q	A	B	C
F	F	T	T	T
F	T	T	F	F
T	F	T	F	F
T	T	F	T	F

解

$$\begin{aligned}
A &= (\neg P \wedge \neg Q) \vee (\neg P \wedge Q) \vee (P \wedge \neg Q) \\
&= m_0 \vee m_1 \vee m_2 \\
&= (\neg Q \vee \neg P) \\
&= M_0 \\
B &= (\neg P \wedge \neg Q) \vee (P \wedge Q) \\
&= m_0 \vee m_3 \\
&= (P \vee \neg Q) \wedge (\neg P \vee Q) \\
&= M_1 \wedge M_2 \\
C &= (\neg P \wedge \neg Q) \\
&= m_0 \\
&= (P \vee \neg Q) \wedge (\neg P \vee Q) \wedge (\neg P \vee \neg Q) \\
&= M_0 \wedge M_1 \wedge M_2
\end{aligned}$$

2.3 用$\uparrow$和$\downarrow$分别表示出$\neg, \wedge, \vee, \to$和$\leftrightarrow$。

解 (1) 用$\uparrow$

$$\begin{aligned}
\neg P &= \neg(P \wedge P) \\
&= P \uparrow P \\
P \wedge Q &= \neg(\neg(P \wedge Q)) \\
&= \neg(P \uparrow Q) \\
&= (P \uparrow Q) \uparrow (P \uparrow Q) \\
P \vee Q &= \neg(\neg P \wedge \neg Q) \\
&= \neg P \uparrow \neg Q \\
&= (P \uparrow P) \uparrow (Q \uparrow Q) \\
P \to Q &= \neg P \vee Q \\
&= (\neg P \uparrow \neg P) \uparrow (Q \uparrow Q) \\
&= P \uparrow (Q \uparrow Q) \\
P \leftrightarrow Q &= (P \wedge Q) \vee (\neg P \wedge \neg Q) \\
&= \neg\neg((P \wedge Q) \vee (\neg P \wedge \neg Q)) \\
&= \neg(\neg(P \wedge Q) \vee \neg(\neg P \wedge \neg Q)) \\
&= \neg(P \uparrow Q) \wedge (\neg P \uparrow Q) \\
&= (P \uparrow Q) \uparrow (\neg P \uparrow \neg Q) \\
&= (P \uparrow Q) \uparrow ((P \uparrow P) \uparrow (Q \uparrow Q))
\end{aligned}$$

(2) 用$\downarrow$

$$
\begin{aligned}
\neg P &= \neg(P \vee P) \\
&= P \downarrow P \\
P \wedge Q &= \neg(\neg P \vee \neg Q) \\
&= \neg P \downarrow \neg Q \\
&= (P \downarrow P) \downarrow (Q \downarrow Q) \\
P \vee Q &= \neg\neg(P \vee Q) \\
&= \neg(P \downarrow Q) \\
&= (P \downarrow Q) \downarrow (P \downarrow Q) \\
P \rightarrow Q &= \neg P \vee Q \\
&= (\neg P \downarrow Q) \downarrow (\neg P \downarrow Q) \\
&== ((P \downarrow P) \downarrow Q) \downarrow ((P \downarrow P) \downarrow Q) \\
P \leftrightarrow Q &= (P \wedge Q) \vee (\neg P \wedge \neg Q) \\
&= (\neg(\neg P \vee \neg Q) \vee (\neg(P \vee Q)) \\
&= (\neg P \downarrow \neg Q) \vee (P \downarrow Q) \\
&= \neg\neg((\neg P \downarrow Q) \vee (P \downarrow Q)) \\
&= \neg((\neg P \downarrow \neg Q) \downarrow (P \downarrow Q)) \\
&= \neg(((P \downarrow P) \downarrow (Q \downarrow Q)) \downarrow (P \downarrow Q)) \\
&= (((P \downarrow P) \downarrow (Q \downarrow Q)) \downarrow (P \downarrow Q)) \downarrow (((P \downarrow P) \downarrow (Q \downarrow Q)) \downarrow (P \downarrow Q))
\end{aligned}
$$

2.4 证明

(1) $A \rightarrow B$与$B^* \rightarrow A^*$同永真、同可满足。

(2) $A \leftrightarrow B$与$A^* \leftrightarrow B^*$同永真、同可满足。

证 (1)

$$A \rightarrow B = \neg B \rightarrow \neg A = B^{*-} \rightarrow A^{*-}$$

而$B^{*-} \rightarrow A^{*-}$与$B^* \rightarrow A^*$同永真、同可满足。

$\therefore A \rightarrow B$与$B^* \rightarrow A^*$同永真、同可满足。

(2)

$$
\begin{aligned}
A \leftrightarrow B &= \neg\neg(A \leftrightarrow B) \\
&= \neg(A \leftrightarrow \neg B) \\
&= (\neg A) \leftrightarrow (\neg B) \\
&= (A^{*-}) \leftrightarrow (B^{*-})
\end{aligned}
$$

而$(A^{*-}) \leftrightarrow (B^{*-})$与$A^* \leftrightarrow B^*$同永真、同可满足。

$\therefore A \leftrightarrow B$与$A^* \leftrightarrow B^*$同永真、同可满足。