

1. 设 $A = \begin{pmatrix} 4 & 1 & 0 & 0 \\ -4 & 0 & 0 & 0 \\ -9 & -5 & 2 & 3 \\ 0 & 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}$

求 A 的 Jordan 标准型 J , 和可逆阵 P , 使得 $P^{-1}AP = J$

2. 设 $A = \begin{pmatrix} 3 & 1 & 0 & 0 \\ -4 & -1 & 0 & 0 \\ 7 & 1 & 2 & 1 \\ -17 & -6 & -1 & 0 \end{pmatrix}$

求 A 的 Jordan 标准型, 和可逆阵 P , 使 $P^{-1}AP = J$

3. 设 $A \in M_n(\mathbb{C})$, 若 A 有 n 个互异特征值. 证明: A 的特征多项式等于极小多项式.

4. 设 $A \in M_n(\mathbb{C})$. 若 $m_A(x)$ 的次数等于 n , 证明: A 的 Jordan 标准型的各个 Jordan 块的主对角线元素互不相同.

(转下页)

5. 设 $A \in M_n(\mathbb{C})$, $A^2 = A$.

证明: $|\lambda I_n - A| = \lambda^m (\lambda - 1)^{n-m}$

其中 $m = \dim_{\mathbb{C}} N(A)$

6. 设 $A \in M_n(\mathbb{C})$, $m_A(x) = x^5 + 2x^4 - 7x^3 - 6x^2 + 5x + 4$.

证明: A 可逆并求 A^{-1} 的极小多项式.

(提示: 若 $a_k A^k + \dots + a_1 A + a_0 I_n = 0$

且 A 可逆, 则 (两边乘 A^{-k}).

$$a_k I_n + a_{k-1} A^{-1} + \dots + a_1 (A^{-1})^{k-1} + a_0 A^{-k} = 0$$