10.0

离散数学——第四周作业

计83 刘轩奇 2018011025

2019.09.28

2.5 给出下列公式的合取范式、析取范式、主合取范式和主析取范式。并给出所有使公式为真的解释。

(3) $(\neg P \vee \neg Q) \to (P \leftrightarrow \neg Q)$

(5) $P \wedge (Q \vee (\neg P \wedge R))$

(7) $P \to (Q \wedge (\neg P \leftrightarrow Q))$

解 (3)

$$\begin{aligned}
(\neg P \vee \neg Q) \to (P \leftrightarrow \neg Q) &= \neg(\neg P \vee \neg Q) \vee (P \wedge \neg Q) \vee (\neg P \wedge Q) \\
&= (P \wedge Q) \vee (P \wedge \neg Q) \vee (\neg P \wedge Q) && \text{(析取范式)} \\
&= \bigvee_{1;2;3} && \text{(主析取范式)} \\
(\neg P \vee \neg Q) \to (P \leftrightarrow \neg Q) &= \neg(\neg P \vee \neg Q) \vee ((P \vee Q) \wedge (\neg P \vee \neg Q)) \\
&= (P \wedge Q) \vee ((\neg P \vee \neg Q) \wedge (P \vee Q)) \\
&= P \vee Q && \text{(合取范式)} \\
&= \bigwedge_{3} && \text{(主合取范式)}
\end{aligned}$$

该式在$P = \mathrm{T}$或$Q = \mathrm{T}$时为真。

(5)

$$\begin{aligned}
P \wedge (Q \vee (\neg P \wedge R)) &= P \wedge (Q \vee \neg P) \wedge (Q \vee R) && \text{(合取范式)} \\
&= (P \vee (Q \wedge \neg Q) \vee (R \wedge \neg R)) \wedge (Q \vee \neg P \vee (R \wedge \neg R)) \\
&\quad \wedge (Q \vee R \vee (P \wedge \neg P)) \\
&= (P \vee Q \vee R) \wedge (P \vee Q \vee \neg R) \wedge (P \vee \neg Q \vee R) \\
&\quad \wedge (P \vee \neg Q \vee \neg R) \wedge (\neg P \vee Q \vee R) \wedge (\neg P \vee Q \vee \neg R) \\
&\quad \wedge (P \vee Q \vee R) \wedge (\neg P \vee Q \vee R) \\
&= \bigwedge_{2;3;4;5;6;7} && \text{(主合取范式)} \\
&= \bigvee_{6;7} && \text{(主析取范式)} \\
&= (P \wedge Q) && \text{(析取范式)}
\end{aligned}$$

该式在$P = \mathrm{T}$且$Q = \mathrm{T}$时为真。

(7)

$$\begin{aligned}
P \to (Q \wedge (\neg P \leftrightarrow Q)) &= \neg P \vee (Q \wedge ((\neg P \wedge Q) \vee (P \wedge \neg Q))) \\
&= \neg P \vee (Q \wedge \neg P \wedge Q) \vee (Q \wedge P \wedge \neg Q) \\
&= \neg P \vee (Q \wedge \neg P) \\
&= \neg P && \text{(合取范式、析取范式)} \\
&= \bigvee_{0;1} && \text{(主析取范式)} \\
&= \bigwedge_{0;1} && \text{(主合取范式)}
\end{aligned}$$

该式在$P = \mathrm{F}$时为真。

2.6 分别以$A \to B$永真, $A \wedge \neg B$永假以及解释法来证明下列各重言蕴含式$A \Rightarrow B$。

证 (2) $(P \to (Q \to R)) \Rightarrow (P \to Q) \to (P \to R)$

(a) $A \to B$永真

$$(P \to (Q \to R)) \to ((P \to Q) \to (P \to R)) = (P \to (Q \to R)) \to (P \to (Q \to R)) = \mathrm{T}$$

(b) $A \wedge \neg B$永假

$$(P \to (Q \to R)) \wedge \neg((P \to Q) \to (P \to R)) = (P \to (Q \to R)) \wedge \neg(P \to (Q \to R)) = \mathrm{F}$$

(c) 解释法

$$P \to (Q \to R) = \mathrm{T}$$

若$P = \mathrm{T}$则$P \to Q = \mathrm{T}, (P \to R) = \mathrm{T}, (P \to Q) \to (P \to R) = \mathrm{T}$。
若$P = \mathrm{F}$则$(P \to Q) \to (P \to R) = \mathrm{T}$。
综上，蕴含式成立。

(4) $(P \wedge Q) \to R \Rightarrow P \to (Q \to R)$

(a) $A \to B$永真

$$\begin{aligned} ((P \wedge Q) \to R) \to (P \to (Q \to R)) &= (\neg(P \wedge Q) \vee R) \to (\neg P \vee (\neg Q \vee R)) \\ &= (\neg P \vee \neg Q \vee R) \to (\neg P \vee \neg Q \vee R) \\ &= \mathrm{T} \end{aligned}$$

(b) $A \wedge \neg B$永假

$$\begin{aligned} ((P \wedge Q) \to R) \wedge \neg(P \to (Q \to R)) &= (\neg P \vee \neg Q \vee R) \wedge \neg(\neg P \vee \neg Q \vee R) \\ &= \mathrm{F} \end{aligned}$$

(c) 解释法

$$\begin{aligned} &(P \wedge Q) \to R = \mathrm{T} \\ &\therefore \neg(P \wedge Q) \vee R = \mathrm{T} \\ &\therefore P \to (\neg Q \vee R) = \mathrm{T} \\ &\therefore P \to (Q \to R) = \mathrm{T} \end{aligned}$$

2.7 判断下列推理式是否正确?

(9) $(P \wedge Q) \to R \Rightarrow (P \to R) \wedge (Q \to R)$

(11) $P \to Q \Rightarrow (P \to R) \to (Q \to R)$

(13) $\neg(P \to Q) \wedge (Q \to P) \Rightarrow P \wedge \neg Q$

(15) $(P \to Q) \wedge (R \to Q) \wedge (S \to Q) \Rightarrow (P \wedge R \wedge \neg S \to Q)$

解 (9)

$$\begin{aligned} ((P \wedge Q) \to R) \to ((P \to R) \wedge (Q \to R)) &= \neg(\neg(P \wedge Q) \vee R) \vee ((\neg P \vee R) \wedge (\neg Q \vee R)) \\ &= \neg(\neg P \vee \neg Q \vee R) \vee (\neg P \wedge Q) \vee R \\ &= (P \wedge Q \wedge \neg R) \vee R \vee (\neg P \wedge \neg Q) \end{aligned}$$

当$R = \mathrm{F}, P = \mathrm{T}, Q = \mathrm{F}$时，上式为F，则推理不正确。

(11)

$$
\begin{aligned}
(P \to Q) \to ((P \to R) \to (Q \to R)) &= \neg(\neg P \vee Q) \vee (\neg(\neg P \vee R) \vee (\neg Q \vee R)) \\
&= (P \wedge \neg Q) \vee (P \wedge \neg R) \vee (\neg Q \vee R) \\
&= (P \wedge \neg Q) \vee \neg Q \vee R \vee (P \wedge \neg R) \\
&= \neg Q \vee R \vee (P \wedge \neg R)
\end{aligned}
$$

当$P = \mathrm{F}, Q = \mathrm{T}, R = \mathrm{F}$时，上式为F，则推理不正确。

(13) 设 $\neg(P \to Q) \wedge (Q \to P) = \mathrm{T}$
则 $P \to Q = \mathrm{F}, Q \to P = \mathrm{T}$
由 $P \to Q = \mathrm{F}$ 知，$P = \mathrm{T}, Q = \mathrm{F}$
则 $P \wedge \neg Q = \mathrm{T}$，推理正确。

(15) 只要验证 $(P \to Q) \wedge (R \to Q) \wedge (S \to Q) \wedge (P \wedge R \wedge \neg S) \Rightarrow Q$ 即可。
$P \to Q = \mathrm{T}, R \to Q = \mathrm{T}, S \to Q = \mathrm{T}, P \wedge R \wedge \neg S = \mathrm{T}$ 即 $P = R = \mathrm{T}, S = \mathrm{F}$
由 $P \to Q = \mathrm{T}, P = \mathrm{T}$ 知 $Q = \mathrm{T}$，从而推理正确。

2.8 使用推理规则证明

(4) $P \vee Q \to R \wedge S, S \vee E \to U \Rightarrow P \to U$

(6) $\neg Q \vee S, (E \to \neg U) \to \neg S \Rightarrow Q \to E$

证 (4)

$(a)(P \vee Q) \to (R \wedge S)$	前提引入
$(b)(S \vee E) \to U$	前提引入
$(c)P$	附加前提引入
$(d)P \vee Q$	(c)置换
$(e)R \wedge S$	$(a)(d)$分离
$(f)S$	(e)置换
$(g)S \vee E$	(f)置换
$(h)U$	$(b)(g)$分离
$(i)P \to U$	条件证明规则

(6)

$(a)\neg(Q \vee S)$	前提引入
$(b)(E \to \neg U) \to \neg S$	前提引入
$(c)Q$	附加前提引入
$(d)Q \to S$	(a)置换
$(e)S$	$(c)(d)$分离
$(f)S \to \neg(E \to \neg U)$	(b)置换
$(g)\neg(E \to \neg U)$	$(e)(f)$分离
$(h)E \wedge U$	(g)置换
$(i)E$	(h)
$(j)Q \to E$	条件证明规则