

微积分 A2 期中练习

2020 年 4 月 18 日

系名_____ 班级_____ 姓名_____ 学号_____

1. (20 分) 设 $D = \{(x, y) \mid x + y \neq 0\}$, $f(x, y) = \frac{x-y}{x+y}$, 问:

$\lim_{x \rightarrow 0} \lim_{y \rightarrow 0} f(x, y)$, $\lim_{y \rightarrow 0} \lim_{x \rightarrow 0} f(x, y)$, 和 $\lim_{\substack{(x,y) \rightarrow (0,0) \\ (x,y) \in D}} f(x, y)$ 是否存在, 若存在, 求值, 若不

存在, 证明你的结论。

解: $\lim_{x \rightarrow 0} \lim_{y \rightarrow 0} f(x, y) = 1$,5 分

$\lim_{y \rightarrow 0} \lim_{x \rightarrow 0} f(x, y) = -1$ 。5 分

$\lim_{\substack{(x,y) \rightarrow (0,0) \\ (x,y) \in D}} f(x, y)$ 不存在。5 分

因为 $\lim_{\substack{x \rightarrow 0 \\ y = -x+x^2}} f(x, y)$ 不存在。5 分

2. (20 分) 设 $f(x, y)$ 二阶连续可微, 证明:

$$\lim_{h \rightarrow 0^+} \frac{f(2h, e^{-\frac{1}{2h}}) - 2f(h, e^{-\frac{1}{h}}) + f(0, 0)}{h^2} = \frac{\partial^2 f}{\partial x^2}(0, 0)。$$

证明: 由泰勒公式,

$$\begin{aligned} f(x, y) &= f(0, 0) + \frac{\partial f}{\partial x}(0, 0)x + \frac{\partial f}{\partial y}(0, 0)y \\ &\quad + \frac{1}{2} \frac{\partial^2 f}{\partial x^2}(0, 0)x^2 + \frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}(0, 0)xy + \frac{1}{2} \frac{\partial^2 f}{\partial y^2}(0, 0)y^2 + o(x^2 + y^2), \quad (x, y) \rightarrow (0, 0) \end{aligned}$$

所以

$$\begin{aligned} f(2h, e^{-\frac{1}{2h}}) &= f(0, 0) + \frac{\partial f}{\partial x}(0, 0)2h + \frac{\partial f}{\partial y}(0, 0)e^{-\frac{1}{2h}} \\ &\quad + \frac{1}{2} \frac{\partial^2 f}{\partial x^2}(0, 0)(2h)^2 + \frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}(0, 0)(2h)e^{-\frac{1}{2h}} + \frac{1}{2} \frac{\partial^2 f}{\partial y^2}(0, 0)e^{-\frac{1}{h}} + o(4h^2 + e^{-\frac{1}{h}}) \\ &= f(0, 0) + 2 \frac{\partial f}{\partial x}(0, 0)h + 2 \frac{\partial^2 f}{\partial x^2}(0, 0)h^2 + o(h^2), \quad h \rightarrow 0^+ \end{aligned}$$

.....8 分

$$\begin{aligned}
f(h, e^{-\frac{1}{h}}) &= f(0, 0) + \frac{\partial f}{\partial x}(0, 0)h + \frac{\partial f}{\partial y}(0, 0)e^{-\frac{1}{h}} \\
&\quad + \frac{1}{2} \frac{\partial^2 f}{\partial x^2}(0, 0)h^2 + \frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}(0, 0) \cdot h \cdot e^{-\frac{1}{h}} + \frac{1}{2} \frac{\partial^2 f}{\partial y^2}(0, 0)e^{-\frac{2}{h}} + o(h^2 + e^{-\frac{2}{h}}) \\
&= f(0, 0) + \frac{\partial f}{\partial x}(0, 0)h + \frac{1}{2} \frac{\partial^2 f}{\partial x^2}(0, 0)h^2 + o(h^2), \quad h \rightarrow 0^+
\end{aligned}$$

.....8 分

$$\lim_{h \rightarrow 0^+} \frac{f(2h, e^{-\frac{1}{2h}}) - 2f(h, e^{-\frac{1}{h}}) + f(0, 0)}{h^2} = \frac{\partial^2 f}{\partial x^2}(0, 0).$$

.....4 分

注：用洛必达法则也可以证明，会用到链式法则。

3. (20 分) 设 $f(x, y) > 0$ ，且在全平面二阶连续可微，请给出 $f(x, y)$ 可以表示成关于 x 的一元函数与成关于 y 的一元函数的乘积的充分必要条件，并证明你的结论。

解：若 $f(x, y)$ 可以表示成关于 x 的一元函数与成关于 y 的一元函数的乘积，则

$\ln f = u(x) + v(y)$ ，其充分必要条件为

$$\frac{\partial^2}{\partial x \partial y}(\ln f) = 0,$$

即 $f \cdot f''_{yx} = f'_x \cdot f'_y$ 。

.....20 分

注：答案形式不唯一。类似的答案都给分。

4. (20 分) 设函数 $u(t)$ 二阶连续可微，且二元函数 $z = u(\sqrt{x^2 + y^2})$ 满足：

$$\frac{\partial^2 z}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 z}{\partial y^2} = x^2 + y^2 \quad (x^2 + y^2 > 0)$$

求证： $u(t)$ 满足常微分方程 $u''(t) + \frac{1}{t}u'(t) = t^2$ 。

解：记 $t = \sqrt{x^2 + y^2}$

$$\frac{\partial z}{\partial x} = \frac{x}{\sqrt{x^2 + y^2}} u'(t),$$

$$\frac{\partial^2 z}{\partial x^2} = \frac{x^2}{x^2 + y^2} u''(t) + \frac{y^2}{(x^2 + y^2)^{\frac{3}{2}}} u'(t);$$

.....8 分

同理， $\frac{\partial z}{\partial y} = \frac{y}{\sqrt{x^2 + y^2}} u'(t)$ ，

$$\frac{\partial^2 z}{\partial y^2} = \frac{y^2}{x^2 + y^2} u''(t) + x \frac{y^2}{(x^2 + y^2)^{\frac{3}{2}}} u'(t). \quad \text{.....8 分}$$

代入方程 $\frac{\partial^2 z}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 z}{\partial y^2} = x^2 + y^2$, $u''(t) + \frac{1}{t} u'(t) = t^2$4 分

5. (20 分) 设 $t > 0$, $I(t) = \int_0^{+\infty} e^{-\left(x^2 + \frac{t^2}{x^2}\right)} dx$.

(I) 求 $I'(t)$ (可以用广义积分表示 $I'(t)$);

(II) 求 $I(t)$ 满足的常微分方程。

解: (I) 因为 $\int_0^{+\infty} \frac{2t}{x^2} e^{-\left(x^2 + \frac{t^2}{x^2}\right)} dx$ 关于 $t \in [\delta, M]$ 一致收敛, 其中 $\delta > 0$, 所以当 $t > 0$ 时,

$$I'(t) = -2t \int_0^{+\infty} \frac{1}{x^2} e^{-\left(x^2 + \frac{t^2}{x^2}\right)} dx. \quad \text{.....10 分}$$

注: 不写“一致收敛”, 扣 2 分。

(II) 令 $x = \frac{t}{u}$, 则当 $t > 0$ 时,

$$I'(t) = -2t \int_0^{+\infty} \frac{1}{x^2} e^{-\left(x^2 + \frac{t^2}{x^2}\right)} dx = -2 \int_0^{+\infty} e^{-\left(u^2 + \frac{t^2}{u^2}\right)} du = -2I(t). \quad \text{.....10 分}$$