第五周作业

1. 设 $T: \mathbb{C}^n \longrightarrow \mathbb{C}^n$，求 $\mathbb{C}^n$ 的
$x \longmapsto Ax$

广义特征子空间分解，求可逆阵 P，使得 $P^{-1}AP$ 是分块对角阵，且每一块是上三角阵.

① $n=3$, $A=\begin{pmatrix} 4 & -5 & 2 \\ 5 & -7 & 3 \\ 6 & -9 & 4 \end{pmatrix}$

② $n=3$, $A=\begin{pmatrix} 1 & -3 & 4 \\ 4 & -7 & 8 \\ 6 & -7 & 7 \end{pmatrix}$

③ $n=4$, $A=\begin{pmatrix} 0 & -2 & 3 & 2 \\ 1 & 1 & -1 & -1 \\ 0 & 0 & 2 & 0 \\ 1 & -1 & 0 & 1 \end{pmatrix}$

2. 设 $T: \mathbb{C}^n \to \mathbb{C}^n$ 线性变换，
$x \mapsto Ax$

λ_0 是一个特征值，令 $k \geq 1$，

$$N_{\lambda_0,k} = \{x \in \mathbb{C}^n \mid (A-\lambda_0 I_n)^k x = 0\}$$

证明：$\exists\, k_0 \geq 1$，使得

$$N_{\lambda_0,k_0} = N_{\lambda_0,k_0+1} = N_{\lambda_0,k_0+2} = \cdots = G_{\lambda_0}$$

3. 设 $T: \mathbb{C}^n \longrightarrow \mathbb{C}^n$ 是一个线性变换,
$x \longmapsto Ax$

展示: ① $\mathbb{C}^n \supseteq C(A) \supseteq C(A^2) \supseteq C(A^3) \supseteq \cdots$

② 存在 $k_0 \geq 1$, $C(A^{k_0}) = C(A^{k_0+1})$

③ 若 $C(A^{k_0}) = C(A^{k_0+1})$, 则 $C(A^{k_0+1}) = C(A^{k_0+2})$

4. 设 $T: \mathbb{C}^5 \longrightarrow \mathbb{C}^5$ 满足 $C(A^4) \neq C(A^5)$, 则 A 是幂零阵(即存在
$x \longmapsto Ax$

$t \in \mathbb{N}$, $A^t = 0$)

5. 设 $T: \mathbb{C}^n \longrightarrow \mathbb{C}^n$ 是一个线性
$x \longmapsto Ax$

变换, , 令 $G_{\lambda_0}(T)$ 是 T 关

于 λ_0 的广义特征子空间.

证明: (1) 若 A 可逆, 则 $G_{\lambda_0}(T) = G_{\lambda_0^{-1}}(T^{-1})$

(2) 若对于任意特征值 λ.

$G_\lambda(T) = V_\lambda(T)$ (特征子空间)

则 T 可对角化;

(3) 应用(2), 证明若 $A^2 = A$,

则 T 可对角化.

6. 设 $T: \mathbb{C}^n \to \mathbb{C}^n$ 是一个线性

$x \mapsto Ax$

变换，A 不幂零，证明：

$$\mathbb{C}^n = N(A^{n-1}) \oplus C(A^{n-1}).$$

(参看 8.5 证明，提示，因为 $\dim N(A^n) < n$

$$N(A^{n-1}) = N(A^n).$$

则 $\mathbb{C}^n = N(A^n) + C(A^n)$

$$= N(A^{n-1}) \oplus C(A^n)$$

但 $C(A^n) \subseteq C(A^{n-1})$，检查

$$\dim N(A^{n-1}) + C(A^{n-1}) = \dim N(A^{n-1}) + \dim C(A^{n-1})$$

$$= n.)$$