第一次习题课

冯栩

2019.03.27

1.1

求的半径为 R，球的体积公式为 $V=f(R)=\frac{4}{3}\pi R^3$，因此球体积的误差限为

$$\varepsilon(V^*)=f(R^*)-f(R)=|f'(R)|\varepsilon(R^*)=4\pi(R^*)^2\varepsilon(R^*)$$

所以其余体积的相对误差限为

$$\varepsilon_r=\left|\frac{\varepsilon(V^*)}{V^*}\right|=\left|\frac{4\pi(R^*)^2\varepsilon(R^*)}{\frac{4}{3}\pi(R^*)^3}\right|=3\left|\frac{\varepsilon(R^*)}{R^*}\right|=3\varepsilon_r(R^*)=1\%$$

因此

$$\varepsilon_r(R^*)=\frac{1}{3}\times 1\%\approx 0.0033$$

1.2

- 1) 绝对误差:
  $\sin(x+h)-\sin(x)\approx\sin'(x)(x+h-x)=h\cos(x)$
  (or $2\cos(x+\frac{h}{2})\sin(\frac{h}{2})$)
- 2) 相对误差: $\epsilon=\frac{\sin(x+h)-\sin(x)}{\sin(x)}=h\frac{\cos(x)}{\sin(x)}=\frac{h}{\tan(x)}$
- 3) 条件数: $cond=\left|\frac{x\sin'(x)}{\sin(x)}\right|=\left|\frac{x\cos(x)}{\sin(x)}\right|=\left|\frac{x}{\tan(x)}\right|$
- 4) 当 $x=k\pi, k\neq 0$ 的时候，这个问题高度敏感

1.4

$$Y_{100} = Y_{99} - \frac{1}{100}\sqrt{783} = \cdots = Y_0 - \sqrt{783}$$

由 $\sqrt{783} \approx 27.982$，则

$$|e(Y_{100}^*)| = |Y_{100}^* - Y_{100}| = |\sqrt{783} - 27.982| \leq \frac{1}{2} \times 10^{-3}$$

因此，计算 Y_{100} 的误差限为 $\frac{1}{2} \times 10^{-3}$

1.6

- 1) $\varepsilon(y_{10}) = \frac{1}{2} \times 10^{-2} \times 10^{10} = 5 \times 10^{7}$，考虑到准确值 $y_{10} \approx 10^{10}$，这个算法相对误差没有放大，因此是稳定的
- 2) 该过程等价于 $y_{10} = 10^{10}x - 1111111111 = f(x)$，$cond \approx |xf'(x)/f(x)| = |10^{10}x/y_{10}| \approx 1$，稳定

1.3

- 本题计算部分理解成 4 位精度系统或者保留到 4 位都认为正确
- 两个结论：1、有效位数越多，计算精度越高；2、两个相差不大的数相减产生抵消，造成精度损失

1.8

针对 x 扰动，条件数

$$cond = \left| \frac{\frac{f(x+\Delta x,y)-f(x,y)}{f(x,y)}}{\frac{(x+\Delta x,y)-(x,y)}{(x,y)}} \right| = \left| \frac{\frac{\Delta x}{x-y}}{\frac{|x+\Delta x|-|x|}{|x|+|y|}} \right|$$

$$= \left| \frac{|x|+|y|}{x-y} \right| = \frac{1}{\varepsilon}$$

加减法运算本身对扰动不明感，但是参与运算时的数据如果发生抵消现象，条件数也会变得很大

1.9(1)

$$
\begin{aligned}
x &= \pm(d_0 + \frac{d_1}{\beta} + \frac{d_2}{\beta^2} + \cdots + \frac{d_{p-1}}{\beta^{p-1}})\beta^E \\
x &\leq (\beta - 1 + \frac{\beta - 1}{\beta} + \cdots + \frac{\beta - 1}{\beta^{p-1}})\beta^E \\
&= (\beta - 1)\frac{1 - \frac{1}{\beta^p}}{1 - \frac{1}{\beta}}\beta^E \\
&= \beta^{U+1}(1 - \beta^{-p})
\end{aligned}
$$

2.1

不妨设区间 $[a,b]$ 为 $[1.4,1.55]$，$\varphi(x)=1+1/x^2$, 则 $\forall x\in[1.4,1.55]$，有 $1.4\le\varphi(x)\le 1.55$，此时有两种算法:

- $|\varphi(x)-\varphi(y)|=\left|\frac{1}{x^2}-\frac{1}{y^2}\right|=\left(\frac{1}{xy^2}+\frac{1}{x^2y}\right)|x-y|\le\frac{2}{1.4^3}|x-y|\approx 0.73|x-y|$，利用李普希兹系数 $L=0.73$，该迭代公式收敛
- $\varphi'(x)=\left|\frac{-2}{x^3}\right|<1$，因此局部收敛

2.3

由题意可知，$f(x)$ 为单调递增函数，因此 $f(x)=0$ 只存在唯一的根 x^*，以及 x_0 使得 $f(x_0)<0$。
设迭代函数为 $\varphi(x)=x-\lambda f(x)$，则 $\varphi'(x)=1-\lambda f'(x)$，由于 $\lambda>0$，同时 $0<m\leq f'(x)\leq M$, 故

$$1-\lambda M<\varphi'(x)<1-\lambda m$$

而 $0<\lambda<2/M$，因此

$$|\varphi'(x)|\leq max|1-\lambda M|,|1-\lambda m|<1$$

综上，迭代过程收敛于 x^*

2.5

首先带入 $x_{k+1} = x_k = \sqrt{a}$，等式两边相等。

$$\varphi(x) = \frac{x(x^2+3a)}{3x^2+a}$$
$$\varphi'(x) = \frac{3(x^2-a)^2}{(3x^2+a)^2}$$
$$\varphi''(x) = \frac{48ax(x^2-a)}{(3x^2+a)^3}$$
$$\varphi'''(x) = \frac{-48a(9x^4-18ax^2+a^2)}{(3x^2+a)^4}$$

故 $\varphi'(x) = \varphi''(x) = 0$，$\varphi'''(x) = 3/2a \neq 0$，因此，该迭代公式是计算 $\sqrt(a)$ 的三阶方法

2.5

对 $x_{k+1}=\varphi(x_k)$ 作 Taylor 展开

$$\begin{aligned} x_{k+1}-x^* &= \varphi(x_k)-\varphi(x^*) \\ &= \varphi'(x^*)(x_k-x^*)+\varphi''(x^*)\frac{(x_k-x^*)^2}{2!}+\varphi'''(\xi_k)\frac{(x_k-x^*)^3}{3!} \end{aligned}$$

ξ_k 在 x_k 和 x^* 之间，因此 $\lim_{k\to\infty}\frac{x_{k+1}-x^*}{(x_k-x^*)^3}=\frac{1}{3!}\varphi'''(x^*)$，因此

$$\lim_{k\to\infty}\frac{\sqrt{a}-x_{k+1}}{(\sqrt{a}-x_k)^3}=\frac{1}{3!}\frac{3}{2a}=\frac{1}{4a}$$

2.4

设 $f(x)=x^3-a$，则 $f'(x)=3x^2$。所以，求立方根 $\sqrt[3]{a}$ 的 Newton 迭代公式为

$$x_{k+1}=x_k-\frac{f(x_k)}{f'(x_k)}=x_k-\frac{x_k^3-a}{3x_k^2}=\frac{2}{3}x_k+\frac{a}{3x_k^2}$$

易知 $f(x)$ 有单根 x^*，$f'(x)=3x^2$，$f''(x)=6x$，在 x^* 附近有连续的二阶导数，根据定理 2.8，该解序列至少是局部二阶收敛的。注意：当 $a=0$ 时有

$$\lim_{x_k\to x^*}\frac{x_{k+1}-x^*}{(x_k-x^*)^2}=\frac{1}{\sqrt[3]{a}}=\infty$$

因此此时为一阶局部收敛

2.6

$$\varphi'(x) = \frac{f(x)f''(x)}{[f'(x)]^2}$$

$$\varphi''(x) = \frac{[f'(x)f''(x) + f(x)f'''(x)]f'(x) - 2f(x)[f''(x)]^2}{[f'(x)]^3}$$

带入 $x = x^*$，$f(x^*) = 0$ 即可

2.9

- 1) $x_{k+1} = \frac{2x_k^3+1}{3x_k^2-3}$，$x_1 \approx 1.889$，$x_2 \approx 1.879$
- 2) $x_{k+1} = x_k - \frac{x_k^3-3x_k-1}{(x_k^3-3x_k-1)-(x_{k-1}^3-3x_{k-1}-1)}(x_k - x_{k-1})$，
  $x_2 \approx 1.881$，$x_3 \approx 1.879$，不是平行弦

3.2

不妨设 $\max_{1\le i\le n}|\mathbf{x}_i| = |\mathbf{x}_k|, (1\le k\le n)$，即 $|\mathbf{x}_k|\ge|\mathbf{x}_i|$，则

$$||\mathbf{x}||_\infty = |\mathbf{x}_k| \le ||\mathbf{x}||_1 = \sum_{i=1}^{n}|\mathbf{x}_i| \le \sum_{i=1}^{n}|\mathbf{x}_k| = n||\mathbf{x}||_\infty$$

3.3

- 正定性：因为 $||\mathbf{Px}||$ 为向量范数，所以 $||\mathbf{Px}|| \geq 0$，并且 $||\mathbf{Px}|| = 0$ 当且仅当 $\mathbf{Px} = 0$；由于 $\mathbf{P}$ 非奇异，因此当 $\mathbf{Px} = 0$ 时当且仅当 $x = 0$。
- 对 $\forall \alpha \in \mathbb{R}$

$$||\alpha\mathbf{x}||_p = ||\mathbf{P}(\alpha\mathbf{x})|| = ||\alpha\mathbf{Px}|| = |\alpha|\,||\mathbf{Px}|| = |\alpha|\,||\mathbf{x}||_p$$

- 三角不等式:

$$||\mathbf{x} + \mathbf{y}||_p = ||\mathbf{Px} + \mathbf{Py}|| \leq ||\mathbf{Px}|| + ||\mathbf{Py}|| = ||\mathbf{x}||_p + ||\mathbf{y}||_p$$

3.5

$$cond(\mathbf{A})_2 = \sqrt{\frac{\lambda_{\max}(\mathbf{A}^{\mathrm{T}}\mathbf{A})}{\lambda_{\min}(\mathbf{A}^{\mathrm{T}}\mathbf{A})}} = \sqrt{\frac{\lambda_{\max}(\mathbf{I})}{\lambda_{\min}(\mathbf{I})}} = 1$$

3.8

(1) 根据矩阵 $\mathbf{A}$ 的正定性带入 $\mathbf{e}_i$(第 i 个元素为 1 其余为 0 的向量) 即可
(2) 根据高斯消去过程

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ \alpha/a_{11} & \mathbf{I} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} a_{11} & \alpha^{\mathrm{T}} \\ \alpha & \mathbf{A}_{22} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} a_{11} & \alpha^{\mathrm{T}} \\ 0 & \mathbf{A}_{22} - \alpha\alpha^{\mathrm{T}}/a_{11} \end{bmatrix}$$

由 $\mathbf{A}_2 = \mathbf{A}_{22} - \alpha\alpha^{\mathrm{T}}/a_{11}$ 易知其对称性。对于任意 $\mathbf{x} \in \mathbb{R}^{n-1}, \mathbf{x} \neq 0$，做向量 $\widehat{\mathbf{x}} = (x_1, \mathbf{x})$，有

$$\begin{aligned} \widehat{\mathbf{x}}^{\mathrm{T}}\mathbf{A}\widehat{\mathbf{x}} &= a_{11}x_1^2 + 2x_2\alpha^{\mathrm{T}}\mathbf{x} + \mathbf{x}^{\mathrm{T}}\mathbf{A}_{22}\mathbf{x} \\ &= \mathbf{x}^{\mathrm{T}}(\mathbf{A}_2 + \alpha\alpha^{\mathrm{T}}/a_{11})\mathbf{x} + a_{11}x_1^2 + 2x_1\alpha^{\mathrm{T}}\mathbf{x} \\ &= \mathbf{x}^{\mathrm{T}}\mathbf{A}_2\mathbf{x} + a_{11}(x1 + \mathbf{x}^{\mathrm{T}}\alpha/a_{11})^2 > 0 \end{aligned}$$

取 $x_1 = -\mathbf{x}^{\mathrm{T}}\alpha/a_{11}$，则 $\mathbf{A}_2$ 正定性得证。综上，$\mathbf{A}_2$ 对称正定。

3.14

从右向左，避免矩阵之间的乘法。遇到求逆时应使用部分主元的 LU 分解法。

$$\begin{aligned}\mathbf{y}_1 &= \mathbf{C}^{-1}\mathbf{b} + \mathbf{A}\mathbf{b} \\ \mathbf{y}_2 &= 2(\mathbf{A}\mathbf{y}_1) + \mathbf{y}_1 \\ \mathbf{x} &= \mathbf{B}^{-1}\mathbf{y}_2\end{aligned}$$

3.15

一个非奇异矩阵 $\mathbf{A}$ 能够分解为 LU 的充要条件是：$\mathbf{A}$ 的各阶顺序主子式 $\mathbf{A}_i$ 的秩与 $\mathbf{A}$ 的前 i 列秩相同。
如果矩阵 $\mathbf{A}$ 能够分解为 LU，那么存在唯一的 LU 分解的充要条件是，$\mathbf{A}$ 的前 $n-1$ 个顺序主子式不为 0。