离散数学(1)
Discrete Mathematics

第十章 关系

刘世霞
shixia@tsinghua.edu.cn

知识点回顾

$A \cup B = \{x \mid x \in A \vee x \in B\}$

$-A = E - A = \{x \mid x \notin A\}$

$A \cap B = \{x \mid x \in A \wedge x \in B\}$

$A - B = \{x \mid x \in A \wedge x \notin B\}$

$A \oplus B = (A - B) \cup (B - A) = \{x \mid x \in A \,\bar{\vee}\, x \in B\}$

元素x ∈ 集合A

$A = B \Leftrightarrow (\forall x)(x \in A \leftrightarrow x \in B)$

$\mathrm{A} = B \Leftrightarrow (A \subseteq B \wedge B \subseteq A)$

$A \neq B \Leftrightarrow (\exists x)\neg(x \in A \leftrightarrow x \in B)$

$A \subseteq \mathrm{B} \Leftrightarrow (\forall x)(x \in A \rightarrow x \in B)$

$\emptyset = \{x \mid x \neq x\}$

$E = \quad x \mid x = x$

$A \subset B \Leftrightarrow (A \subseteq B \wedge A \neq B)$

对任意的集合A，$\emptyset \subseteq A$

A和B不相交 $\Leftrightarrow \neg(\exists x)(x \in A \wedge x \in B)$

$\cup A = \{x \mid (\exists z)(z \in A \wedge x \in z)\}$

$\cup\emptyset = \emptyset$

$\cap A = \{x \mid (\forall z)(z \in A \rightarrow x \in z)\}$

$\cap\emptyset$无意义

$P(A) = \{x \mid x \subseteq A\}$

	$\cup$	$\cap$	$\oplus$
交换	$A\cup B=B\cup A$	$A\cap B=B\cap A$	$A\oplus B=B\oplus A$
结合	$(A\cup B)\cup C=$ $A\cup(B\cup C)$	$(A\cap B)\cap C=$ $A\cap(B\cap C)$	$(A\oplus B)\oplus C=$ $A\oplus(B\oplus C)$
幂等	$A\cup A=A$	$A\cap A=A$	

	$\cup$与$\cap$	$\cap$与$\oplus$
分配	$A\cup(B\cap C)=(A\cup B)\cap(A\cup C)$ $A\cap(B\cup C)=(A\cap B)\cup(A\cap C)$	$A\cap(B\oplus C)=(A\cap B)\oplus(A\cap C)$
吸收	$A\cup(A\cap B)=A$ $A\cap(A\cup B)=A$	

吸收律的前提：$\cup$、$\cap$可交换

	$-$	$\sim$
$D.M$ 律	$A-(B\cup C)=(A-B)\cap(A-C)$ $A-(B\cap C)=(A-B)\cup(A-C)$	$\sim(B\cup C)=\sim B\cap\sim C$ $\sim(B\cap C)=\sim B\cup\sim C$
双重否定		$\sim\sim A=A$

	$\varnothing$	E
补元律	$A\cap\sim A=\varnothing$	$A\cup\sim A=E$
零律	$A\cap\varnothing=\varnothing$	$A\cup E=E$
同一律	$A\cup\varnothing=A$	$A\cap E=A$
否定	$\sim\varnothing=E$	$\sim E=\varnothing$

集合论公理化

- 逻辑悖论的出现对公理化提出了强烈的要求
- 集合论公理化企图实现的目标
  - 统一现代数学所有的研究对象
  - 避免所有迄今为止发现的所有悖论
  - 尽量做到
    - 合理（无矛盾性）、完美（完备性）、明晰简洁

10条集合论公理

- 外延公理
- 空集存在公理
- 无序对集合存在公理
- 并集合存在公理
- 子集公理模式(分离公理模式)
- 幂集合公理
- 正则公理
- 无穷公理
- 替换公理模式
- 选择公理

10条集合论公理

- 无穷公理的本质：可以通过类似于数学归纳法的方法构造出一个无穷集合（自然数集合）
- 空集公理、无序对公理、并集公理、幂集公理、无穷公理、分离公理和替换公理是对康托尔概况原则的具体化：既保留原规则的合理内容，又消除了悖论
- 上述公理+选择公理：集合存在性公理
- 外延公理+正则公理：对集合的限制（刻画）
  - 外延：说明集合相等的条件
  - 正则：防止低阶集合包含高阶集合的可能，避免悖论

10条集合论公理

- 分离公理模式和替换公理模式是两条公理模式
  - 允许用公式代之
  - 本质上断言一个集合在一个映射下的像也是一个集合
- 使用上述公理系统，可以描绘出集合论的积累分层时间
  - 从空集开始，迭代第使用并集公理和幂集公理，建立起越来越大的集合系统。

定理9.7.7 证明

- 定理9.7.7　集合的重要性质2
对任意的集合 A和 B，有 ¬(A∈ B ∧ B∈ A)
- 证明：反证法，假定存在集合A和B，满足$A \in B \wedge B \in A$。构造集合$\{A, B\}$，由正则公理，该集合存在极小元。
  - 先假定极小元为A。由于$B \in A$，故$A \cap \{A, B\} = B \neq \emptyset$，故$A$非极小元，矛盾。
  - 再假定极小元为B。同上可得矛盾。
- 故定理9.7.7成立。■

科学悖论是促进理论发展的一种动力。

数学的基本概念？

大部分数学家相信……

- 任何数学理论在某种意义上是关于集合的理论
- 任何数学命题是真的都意味着它在ZFC中得到证明。
  - 集合论来刻画经典数学的**基本概念**
    - **关系，函数，序，数**
  - 困难：有很多数学问题，包括连续统假设。

关系

《Shenzhen University Journal(Humanities & Social Sciences)》 2009-02

Add to Favorite Get Latest Update

The Study of Localization of Social Work Theory in Mainland China From "Guan Xi" and "Embeddedness" Perspectives

TANG Yong (School of Law, Shen Zhen Univ., Shenzhen, 518060, China)

The study of localization of social work theory has been one of the hot issues in social work domain in Mainland China, but it is not been placed in a systematic theory framework. In recent years, scholars from Mainland China reflect upon western social work theories and introd uce the concepts of "guan xi" and "embeddedness" into the study. These concepts as a new perspective provide revelation to the localizatio n of social work theory study in Mainland China.

【Key Words】 ： Localization of social work theory guan xi embeddedness

【CateGory Index】 ： C916

What Makes a Good Life

What Makes a Good Life

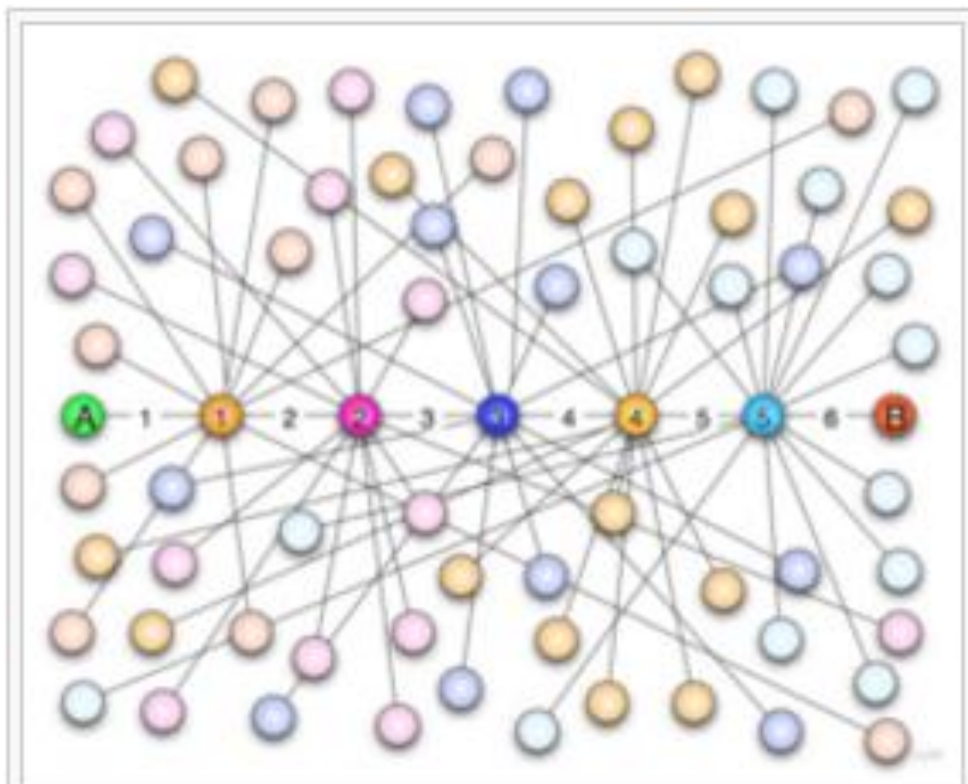
关系

- 关系是数学中最重要的概念之一
  - 父子关系、师生关系
  - 等于、大于、小于关系
  - 直线的平行、垂直关系

- 在计算机科学中有广泛应用
  - 人工智能
  - 程序设计
  - 数据库管理—关系数据库

关系很强大：六度分隔理论

- Six Degrees of Separation：1967，哈佛大学心理学教授斯坦利·米尔格拉姆：平均只需要5个中间人就可以联系任何两个互不相识的美国人



微软MSN中的六度理论之应用

- 微软的研究人员 Jure Leskovec 和 Eric Horvitz[4]过滤2006年某个单一月份的MSN简讯，利用2.4亿使用者的300亿通讯息进行比对，结果发现任何使用者只要透过平均6.6人就可以和全数据库的1,800百亿组配对产生关连。48%的使用者在6次以内可以产生关连，而高达78%的使用者在7次以内可以产生关连[5]。

Facebook

- 在2008年被证实,当时的研究依靠facebook的数据数据库和流量讯息、地域关系,论证人与人的联系环节为5.28人;约莫三年的时间,今天的研究已经证实全世界每一个人之间的联系间隔环已经缩减到4.74人。 在一些网络高度化的国家,这个数字会降低;如果是链接本国或同语种的「陌生人」,这个数字还会更下降

数学解释

- 若每个人平均认识260人，其六度就是260^6＝308,915,776,000,000（约300万亿）。消除一些节点重复，那也几乎覆盖了整个地球人口若干多倍。

同名电影

- 六度分隔理论提出后，引起世人极大关注，同时激发了人们的无限想象力。1990年，戏剧《六度分隔》上演。1993年，基于这部戏剧的同名电影《六度分隔》（Six Degrees of Separation）[6]上映。
- 影片主角的台词包括“我们之间，只需要5个人相连”，“不管是美国总统还是威尼斯的船夫，只要找到正确的5个人，我们就能联系起来”，“我们之间联系如此紧密，这让我感到十分安慰”等等。

第十章　关系

二元关系

- 最简单的关系
- 可看作对应(Correspondence)或者映射(Map)
- 关系的要素成对出现，且这两个对象有顺序的。

有序对

- 由两个元素x和y（允许$x=y$）按给定次序排列组成的二元组称为一个有序对或序偶，记作$<x, y>$，其中 x 是它的第一元素，y 是它的第二元素。
- 用集合的形式，有序对$<x, y>$定义为

$$<x,y> = \{\{x\},\{x,y\}\}$$

- 有序对$<x, y>$具有以下性质：

1. 当$x \neq y$ 时，$<x, y> \neq <y, x>$。
2. $<x, y> = <u, v>$的充要条件是 $x = u$ 且 $y = v$。

笛卡儿积(Cartesian product)

- 设A, B为集合，用A中元素为第一元素，B中元素为第二元素构成有序对。所有这样的有序对组成的集合称为A和B的笛卡儿积，记作$A \times B$。
  A和B的笛卡儿积的符号化表示为
  $A \times B = \{<x, y> | x \in A \land y \in B\}$
- $A=\{\varnothing\}$,
- $P(A)\times A = \{<\varnothing,\varnothing>, <\{\varnothing\},\varnothing>\}$

笛卡尔(1596年-1650年)

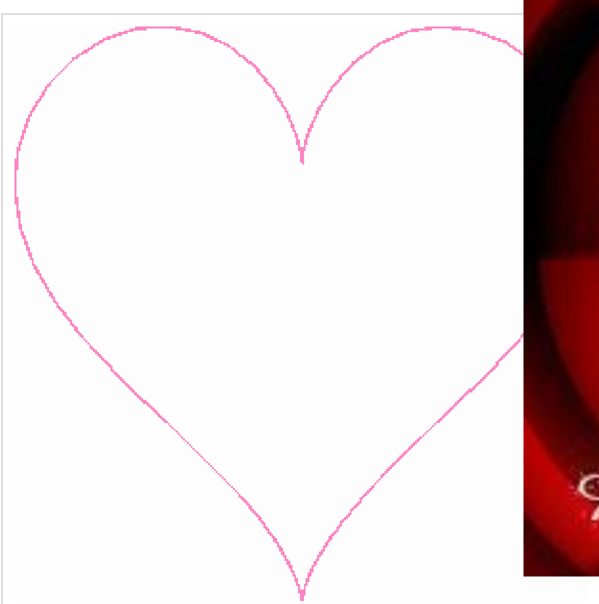
- René Descartes
- 法国哲学家、数学家、物理学家
- “我思故我在”
  - “普遍怀疑”的终点。他从这一点出发确证了人类知识的合法性。
- 解析几何之父，西方现代哲学思想的奠基人
- 数学史上最浪漫的故事
  - 瑞典一个小公国18岁的公主克里斯蒂娜
  - 日日给公主写信，因被国王拦截，克里斯蒂娜一直没收到笛卡尔的信。笛卡尔在给克里斯蒂娜寄出第十三封信后就气绝身亡了。

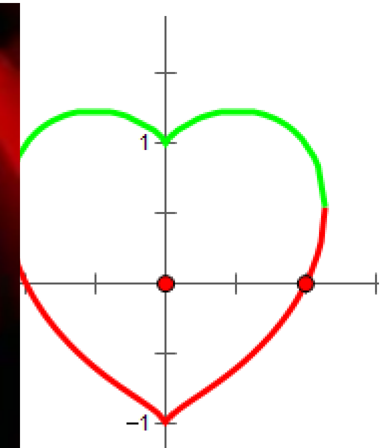
笛卡尔(1596年-1650年)

- 心形线

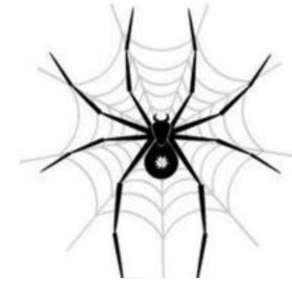
$-1)^3 = x^2y^3$

$$x = 16(\sin t)^3$$
$$y = 13\cos t - 5\cos 2t - 2\cos 3t - \cos 4$$





解析几何的创立



- 思考
  - 几何图形是直观的，而代数方程是比较抽象的，能不能把几何图形和代数方程结合起来，也就是说能不能用几何图形来表示方程呢？
  - “点”和“数”联系起来。
- 据说有一天，笛卡尔生病卧床，病情很重
  - 屋顶角上的一只蜘蛛，拉着丝垂了下来。一会功夫，蜘蛛又顺这丝爬上去，在上边左右拉丝。
  - 把蜘蛛看作一个点。他在屋子里可以上，下，左，右运动，能不能把蜘蛛的每一个位置用一组数确定下来呢？
  - 屋子里相邻的两面墙与地面交出了三条线，如果把地面上的墙角作为起点，把交出来的三条线作为三根数轴，那么空间中任意一点的位置就可以在这三根数轴上找到有顺序的三个数。
  - 反过来，任意给一组三个有顺序的数也可以在空间中找到一点P与之对应，同样道理，用一组数(x, y)可以表示平面上的一个点，平面上的一个点也可以用一组两个有顺序的数来表示，这就是坐标系的雏形。

Multiple Choice(multiple) Points: 1

Setting

有集合A，B，若B为空集，则

A $A \times B = \emptyset$

B $A \times B \neq B \times A$

C $A \times B = B \times A$

Submit

笛卡尔积及其性质

- 不适合交换律 $A\times B\neq B\times A \quad (A\neq B, A\neq\emptyset, B\neq\emptyset)$
- 不适合结合律 $(A\times B)\times C\neq A\times(B\times C) \quad (A\neq\emptyset, B\neq\emptyset)$
- 对于并或交运算满足分配律

$$A\times(B\cup C)=(A\times B)\cup(A\times C)$$

$$(B\cup C)\times A=(B\times A)\cup(C\times A)$$

$$A\times(B\cap C)=(A\times B)\cap(A\times C)$$

$$(B\cap C)\times A=(B\times A)\cap(C\times A)$$

- 若A或B中有一个为空集，则$A\times B$就是空集.

$$A\times\emptyset=\emptyset\times B=\emptyset$$

- 若$|A|=m, |B|=n,$则 $|A\times B|=mn$

有序对与笛卡儿积

- 证明: 对任意三个集合A，B，C有

$$A\times(B\cup C)=(A\times B)\cup(A\times C)$$

证明： $<x, y>\in A\times(B\cup C)$

$$\Leftrightarrow x\in A \wedge y\in B\cup C$$

$$\Leftrightarrow x\in A \wedge (y\in B \vee y\in C)$$

$$\Leftrightarrow (x\in A \wedge y\in B) \vee (x\in A \wedge y\in C)$$

$$\Leftrightarrow <x, y>\in A\times B \vee <x, y>\in A\times C$$

$$\Leftrightarrow <x, y>\in (A\times B)\cup(A\times C)$$

设A，B，C，D是任意集合，判断下列命题是否正确？

❖ $A \times B = A \times C \Rightarrow B = C$

A 正确

B 不正确

提交

有序对与笛卡儿积

- 例：设A，B，C，D是任意集合，判断下列命题是否正确？

  $A\times B=A\times C \ \Rightarrow\ B=C$

  - 不正确。取$A=\emptyset$，$B\neq C$，$A\times B = A\times C = \emptyset$

  $A-(B\times C) = (A-B)\times(A-C)$

  - 不正确。取$A = B = \{1\}$，$C = \{2\}$，

    $$A-(B\times C) = \{1\} - \{<1,2>\} = \{1\}$$

    而$(A-B)\times(A-C) = \emptyset\times\{1\} = \emptyset$

10.1 二元关系(Binary Relations)

10.1.1 二元关系（有序对的集合）

- 如果一个集合满足以下条件之一：

1. 集合非空，且它的元素都是有序对;
2. 集合是空集;

则称该集合为一个二元关系，记作R。

- 二元关系也简称关系。

10.1 二元关系(Binary Relations)

对于二元关系R，如果 $\langle x, y\rangle \in R$，也可记作 xRy。

如果$<x,y>\notin R$, 则记作$x\not R y$。

- 实例：R=$\{<1,2>,<a,b>\}$, S=$\{<1,2>,a,b\}$.
- R是二元关系, 当a, b不是有序对时，S不是二元关系
- 根据上面的记法，可以写 $1R2$, aRb, $a\not R c$ 等.

10.1 二元关系(Binary Relations)

定义10.1.1　A到B的二元关系

- 设A, B为集合，$A\times B$ 的**任一子集**所定义的二元关系称为A到B 的二元关系。
- 特别当 $A=B$ 时，$A\times A$的**任一子集**称为A上的一个二元关系。

- 例4 $A=\{0,1\}$, $B=\{1,2,3\}$, $R_1=\{<0,2>\}$, $R_2=A\times B$, $R_3=\varnothing$, $R_4=\{<0,1>\}$.
- 那么 R_1, R_2, R_3, R_4是从 A 到 B 的二元关系,
- R_3和R_4同时也是 A上的二元关系.

n元关系

定义10.1.2　n元关系（n元组的集合）

- 若 $n \in N$ 且 $n > 1$，$A_1, A_2, \ldots, A_n$ 是n个集合，则 $A_1 \times A_2 \times \ldots \times A_n$

的任一子集称为从 A_1到 A_n上的一个n元关系。

10.1 二元关系(Binary Relations)

小于等于关系 L_A, 整除关系D_A, 包含关系$R_{\subseteq}$定义:

L_A={<x,y>| x,y∈A∧x≤y}, A⊆R, R为实数集合

D_A={<x,y>| x,y∈A∧x整除y}, A⊆Z^*, Z^*为非0整数集

$R_{\subseteq}$={<x,y>| x,y∈A∧x⊆y}, A是集合族.

- A上的真包含关系可定义为:

$$R_{\subset}=\left\{\langle x, y\rangle \mid x, y \in \mathrm{A} \wedge x \subset y\right\}$$

10.1 二元关系(Binary Relations)

对任意的集合A，A的幂集P(A)上的包含关系可定义为：$R_{\subseteq} = \left\{ \langle x, y \rangle \mid x \in P(A) \wedge y \in P(A) \wedge x \subseteq y \right\}$

例如 $B=\{a, b\}$, 则 $P(B)=\{\varnothing,\{a\},\{b\},\{a,b\}\}$,

$P(B)$上的包含关系是

$R_{\subseteq}=\{<\varnothing,\varnothing>,<\varnothing,\{a\}>,<\varnothing,\{b\}>,<\varnothing,\{a,b\}>,<\{a\},\{a\}>,$
$<\{a\},\{a,b\}>,<\{b\},\{b\}>,<\{b\},\{a,b\}>,<\{a,b\},\{a,b\}>\}$

三个特殊的关系

恒等关系、全域关系和空关系

- 对任意的集合A,

  A上的**恒等关系**I_A定义为 $I_A=\{\langle x,x\rangle \mid x\in A\}$

  A上的**全域关系**(全关系)E_A定义为

  $$E_A=\{\langle x,y\rangle \mid x\in A\wedge y\in A\}$$

- 对任意的集合A,

  空集Φ是$A\times A$的子集，定义为A上的空关系。

- 例如, A={1,2}, 则
  - E_A={<1,1>,<1,2>,<2,1>,<2,2>}
  - I_A={<1,1>,<2,2>}

e
Choice
(single)

Points: 1

Setting

思考：若 $|A| = n$

A 上共可定义多少个不同的二元关系？

A 2n

B n^2

C $2^{\wedge}n^2$

D $2n^2$

提交

定义域和值域(domain & range)

- 设R是A到B的二元关系

(1)R中所有有序对的第一元素构成的集合称为R的定义域，记作***dom*(R)**。形式化表示为：

$$dom(R) = \left\{ x \,\middle|\, (\exists y)(\langle x, y\rangle \in R) \right\}$$

定义域和值域(domain & range)

(2)R中所有有序对的第二元素构成的集合称为R的值域，记作***ran(R)***。形式化表示为：

$$ran(R)=\left\{y\;\middle|\;(\exists x)(\langle x,y\rangle\in R)\right\}$$

(3)R的定义域和值域的并集称为R的域***(field)***，记作***fld(R)***。形式化表示为：

$$fld(R)=dom(R)\cup ran(R)$$

10.1 二元关系(Binary Relations)

例1 $R=\{<1,2>,<1,3>,<2,4>,<4,3>\}$, 则

- $\mathrm{dom}(R)=\{1, 2, 4\}$
- $\mathrm{ran}(R)=\{2, 3, 4\}$
- $\mathrm{fld}(R)=\{1, 2, 3, 4\}$

$\cup R=?$

$\cup\cup R=?$

10.1 二元关系(Binary Relations)

- $R=\{<1,2>,<1,3>,<2,4>,<4,3>\}$,
- $R=\{\{\{1\},\{1,2\}\}, \{\{1\},\{1,3\}\}, \{\{2\},\{2,4\}\}, \{\{4\},\{4,3\}\}\}$
- $\cup R=\{\{1\},\{1,2\},\{1,3\},\{2\},\{2,4\},\{4\},\{4,3\}\}$
- $\cup\cup R=\{1,2,3,4\}$

$$\cup A = \{x \mid (\exists z)(z \in A \wedge x \in z)\}$$

定理 10.1.1 对A到B的关系R，如果$<x,y>\in R$,则$x\in\cup\cup R$, $y\in\cup\cup R$。

- 证明：已知$<x,y>\in R$,即$\{\{x\},\{x,y\}\}\in R$

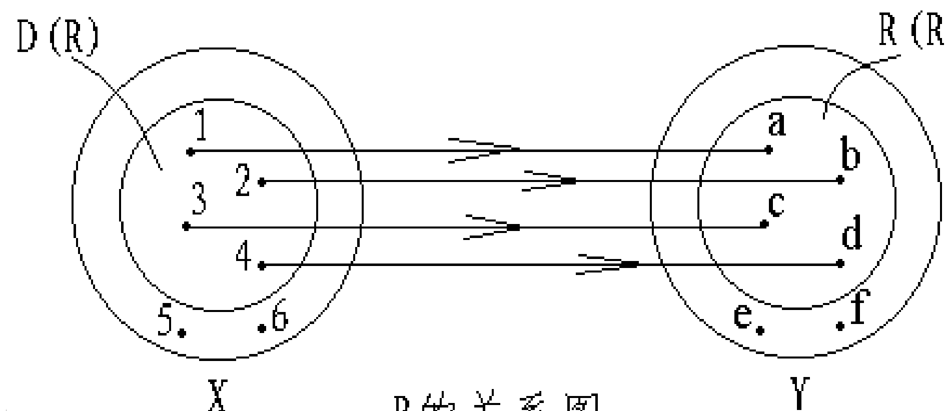
$$\{x,y\}\in\cup R$$

$$x \in\cup\cup R,\ y \in\cup\cup R$$

定理 10.1.2 对A到B的关系R，则$fld(R)=\cup\cup R$.

关系的运算

- 二元关系的定义域和值域
  - 定义域：$domR = \{x \mid \exists y(<x, y> \in R)\}$
  - 值域： $ranR = \{y \mid \exists x(<x, y> \in R)\}$
- 例
  - $X = \{1,2,3,4,5,6\}, Y = \{a, b, c, d, e, f\}$
  - $R = \{<1, a>, <2, b>. <3. c>. <4. d>\}$
  - $domR = \{1,2,3,4\}$
  - $ranR = \{a, b, c, d\}$



R的关系图

关系的表示方法

三种：集合表示法，关系矩阵和关系图。

1. 集合表示法

- 因为关系是一个集合，因此可以用集合的列举法或描述法来表示它。在前面的叙述中，已经多次采用了这两种方法。
- 例：$R_1=\{\langle a, b\rangle \mid (a+b)/5$是整数$\}$ 用的是描述法，

  $R_2=\{\langle 1, 2\rangle, \langle 2, 4\rangle, \langle 3, 3\rangle\}$ 用的是列举法。

10.2 关系矩阵和关系图

定义10.2.1 关系矩阵

- 设集合 $X=\{x_1, x_2, \ldots, x_m\}$ $Y=\{y_1, y_2, \ldots, y_n\}$
- 若R是X到Y的一个关系。则R的关系矩阵是$m \times n$矩阵，矩阵元素是r_{ij}。

$$M(R)=[r_{ij}]_{m\times n}$$

$$r_{ij}=\begin{cases}1 & 当\langle x_i,\ y_j\rangle \in R \\ 0 & 当\langle x_i,\ y_j\rangle \notin R\end{cases} \quad (1\le i\le m,\ 1\le j\le n)$$

- 若R是X上的一个关系，则R的关系矩阵是$m \times m$方阵，定义与上述类似。

举例

- 设A={2,3,4,5}，B={6,7,8,9}，由A到B的关系R定义为$R=\{\langle a,b\rangle \mid a与b互质\}$。试写出R的关系矩阵$M_R$。
- 解$R=\{\langle 2,7\rangle,\langle 2,9\rangle,\langle 3,7\rangle,\langle 3,8\rangle,\langle 4,7\rangle,\langle 4,9\rangle$ $\langle 5,6\rangle,\langle 5,7\rangle,\langle 5,8\rangle,\langle 5,9\rangle\}$，所以关系矩阵为

$$\begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 1 \end{bmatrix}$$

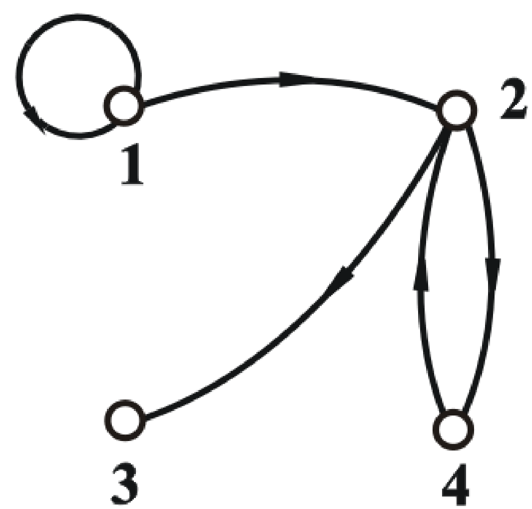
10.2 关系矩阵和关系图

定义10.2.2 关系图

- 设集合$X=\{x_1, x_2,\ldots, x_m\}$ $Y=\{y_1,y_2,\ldots y_n\}$。若R是X到Y的一个关系，则R的关系图是一个**有向图(digraph)** $\boldsymbol{G(R)=(V,E)}$,它的顶点集是$V=X\cup Y$，边集是E，从x_i到y_j的有向边$e_{ij}\in E$，当且仅当$<x_i,y_j>\in R$。
- 若**R**是**X**上的一个关系，则**R**的关系图是上述情形的特例。

- $A=\{1,2,3,4\}$,
- $R=\{<1,1>,<1,2>,<2,3>,<2,4>,<4,2>\}$,
- R的关系矩阵M_R和关系图G_R如下：

$$M_R=\begin{bmatrix}1&1&0&0\\0&0&1&1\\0&0&0&0\\0&1&0&0\end{bmatrix}$$



关系及其表示

关系图

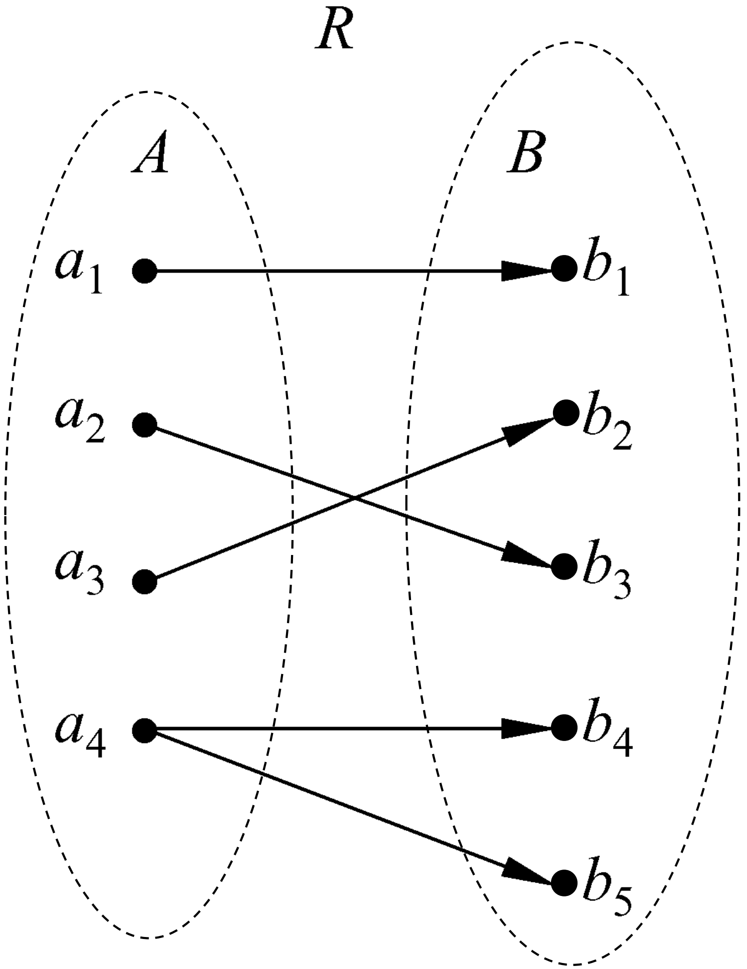
- **情形1：** R是从A到B的关系, 采用如下的图示:

  1）用大圆圈表示集合A和B，里面的小圆圈（或实心圆）表示集合中的元素;

  2）若$a\in A$，$b\in B$，且$<a,b>\in R$，则在图中将表示a和b的小圆圈用直线或弧线连接起来, 并加上从结点a到结点b方向的箭头。

关系及其表示

- **例如：**
- $A=\{a_1, a_2, a_3, a_4\}$
- $B=\{b_1, b_2, b_3, b_4, b_5\}$
- $R=\{(a_1, b_1), (a_2, b_3),$ $(a_3, b_2), (a_4, b_4), (a_4, b_5)\}$



关系及其表示

- **情形2**：R是A上的关系，其画法如下:

1) 集合A中的每一个元素a用带有元素符号的顶点(称作顶点a)表示。
2) 若a, $b \in A$, 且$<a,b> \in R$, 则将顶点a和顶点b用一条带有箭头的有向边连接起来，其方向由顶点a指向顶点b。

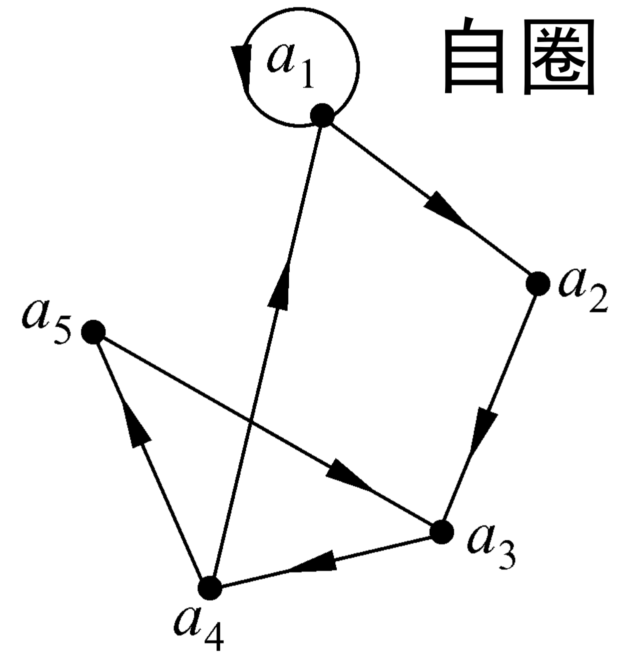
关系及其表示

【例】$A=\{a_1, a_2, a_3, a_4, a_5\}$，

$R=\{(a_1, a_1), (a_1, a_2), (a_2, a_3),$

$(a_3, a_4), (a_4, a_1), (a_4, a_5), (a_5, a_3)\}$。

- 求R的关系图。



10.3 关系的逆、合成、限制和象

定义10.3.1 关系的逆、合成、限制和象

- 对X到Y的关系R，Y到Z的关系S，定义:

（1）R的**逆(inversion)**R^{-1}为Y到X的关系

$$R^{-1}=\{\langle x, y\rangle \mid \langle y, x\rangle \in R\}$$

- 例1 令A={1,2,3,4},

R={<1,2>, <2,3>, <1,4>, <2,2>}

R^{-1}={<2,1>, <3,2>, <4,1>, <2,2>}

- 显然有：设R是任意的关系, 则$(R^{-1})^{-1}=R$

关系的逆

- 二元关系的逆关系 $R^{-1}=\{<x,y>|<y,x>\in R\}$
  - R^{-1}就是将R中的所有有序对的两个元素交换次序成为R^{-1}，故$|R|=|R^{-1}|$
- 说明
  - R^{-1}的关系矩阵是R的关系矩阵的转置，即$M_{R^{-1}}=(M_R)^T$
  - R^{-1}的关系图就是将R的关系图中的弧改变方向即可以

关系的逆-举例

$R=\{<a,a>,<a,d>,<b,d>,<c,a>,$
$<c,b>,<d,c>\}$

$R^{-1}=\{<a,a>,<d,a>,<d,b>,<a,c$
$>,<b,c>,<c,d>\}$

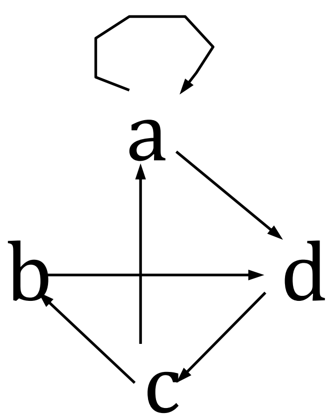
$$M_R=\begin{matrix}1&0&0&1\\0&0&0&1\\1&1&0&0\\0&0&1&0\end{matrix}\qquad M_R^{-1}=M_R^{T}=\begin{matrix}1&0&1&0\\0&0&1&0\\0&0&0&1\\1&1&0&0\end{matrix}$$

关系的逆–举例

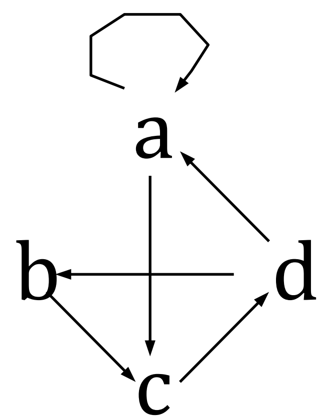
$$R=\{<a,a>,<a,d>,<b,d>,<c,a>,\\<c,b>,<d,c>\}$$

$$R^{-1}=\{<a,a>,<d,a>,<d,b>,<a,c>,\\<b,c>,<c,d>\}$$

R的关系图



R^{-1}的关系图



Poll 1 answer(s) at most

Setting

R与S的合成(composite relation) SoR计算，你觉得哪种更好？

A 先R后S

B 先S后R

C 无所谓

D 想不清

提交

10.3　关系的逆、合成、限制和象

(2)R与S的**合成(composite relation) $S \circ R$**为X到Z的关系

$$S \circ R = \{\langle x, y\rangle | (\exists z)(\langle x, z\rangle \in R \wedge \langle z, y\rangle \in S)\}$$

先R后S，先右后左

关系的合成

- 关系的复合

  $S \circ R = \{ <x,y> | \exists t(<x,t> \in R \wedge <t,y> \in S)\}$

- 例
  - $A=\{1,2,3,4,5\}, B=\{3,4,5\}, C=\{1,2,3\}$
  - $R=\{<x, y> | x + y = 6\} = \{ <1,5>, <2,4>, <3,3>\}$
  - $S=\{<y, z> | y - z = 2\} = \{ <3,1>, <4,2>, <5,3>\}$
  - $S \circ R=\{<1,3>,<2,2>,<3,1>\}$

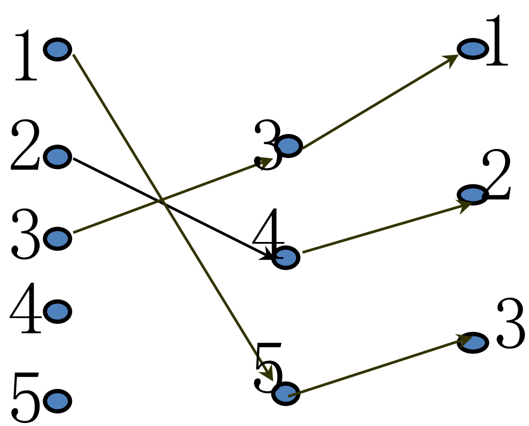
$A=\{1,2,3,4,5\}, B=\{3,4,5\}, C=\{1,2,3\}$

$R=\{<x, y> \mid x+y=6\} = \{<1,5>, <2,4>, <3,3>\}$

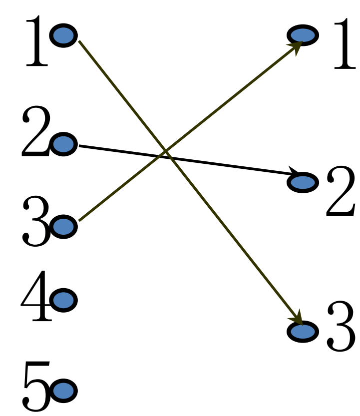
$S=\{<y, z> \mid y-z=2\} = \{<3,1>, <4,2>, <5,3>\}$

$S \circ R=\{<1,3>,<2,2>,<3,1>\}$

从而S●R的关系图



R S



$S \circ R$

关系的合成

- 例： $A=\{a,b,c,d,e\}$
  - $R=\{<a,b>,<c,d>,<b,b>\}$
  - $S=\{<d,b>,<b,e>,<c,a>\}$
  - $S\circ R=\{<a,e>,<c,b>,<b,e>\}$ 复合关系
  - $R\circ S=\{<d,b>,<c,b>\}$
  - $R\circ R=\{<a,b>,<b,b>\}$
  - $S\circ S=\{<d,e>\}$
- 注意： $R\circ S\neq S\circ R$

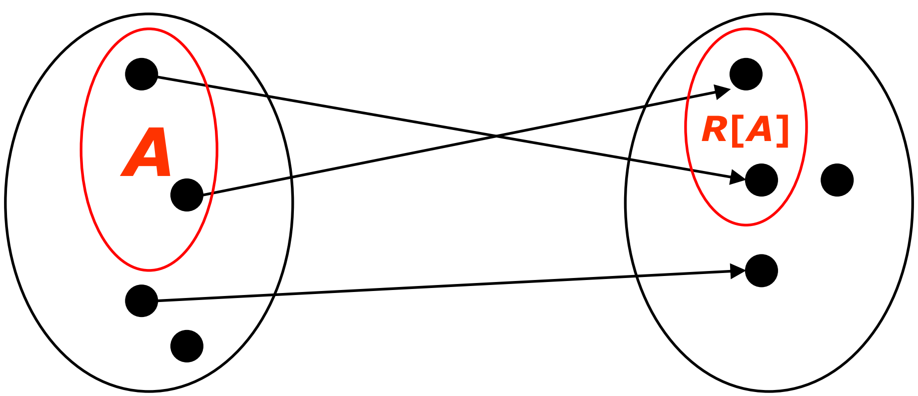
关系的限制和象

(3)对任意的集合A，定义**R在A上的限制R↑A**为A到Y的关系, 其中R是X到Y的关系。

$$R\uparrow A=\{\langle x,y\rangle \mid \langle x,y\rangle\in R\wedge x\in A\}$$

(4) **A在R下的象R[A]**为集合

$$R[A]=\{y \mid (\exists x)(x\in A\wedge\langle x,y\rangle\in R)\}$$



关系的限制和象

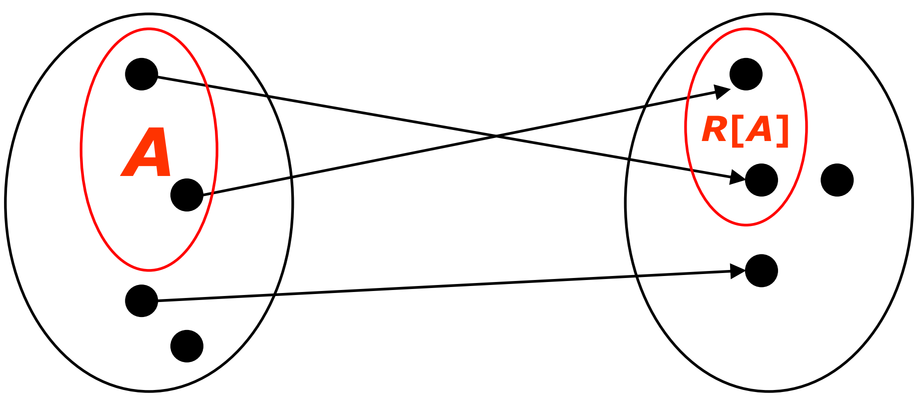
例：$R = \{<1, 2>, <1, 3>, <2,2>, <2,4>, <3,2>\}$，求：

$R \uparrow \{1\}$ $\qquad R \uparrow \emptyset$ $\qquad R \uparrow \{2,3\}$

$R[\{1\}]$ $\qquad R[\emptyset]$ $\qquad R[\{2, 3\}]$

$$R \uparrow A = \{\langle x, y\rangle \mid \langle x, y\rangle \in R \wedge x \in A\}$$

$$R[A] = \{y \mid (\exists x)(x \in A \wedge \langle x, y\rangle \in R)\}$$



关系的运算

优先顺序：

- 逆运算优先于其他运算
- 关系运算优先于集合运算
- 没有规定优先权的运算以括号决定运算顺序

关系的运算

- 定理：设R是任意的关系，则
  - $(R^{-1})^{-1}=R$
  - $\mathrm{dom}R^{-1}=\mathrm{ran}R$
  - $\mathrm{ran}R^{-1}=\mathrm{dom}R$

$$R^{-1}=\{<x,y>|<y,x>\in R\}$$

关系的运算

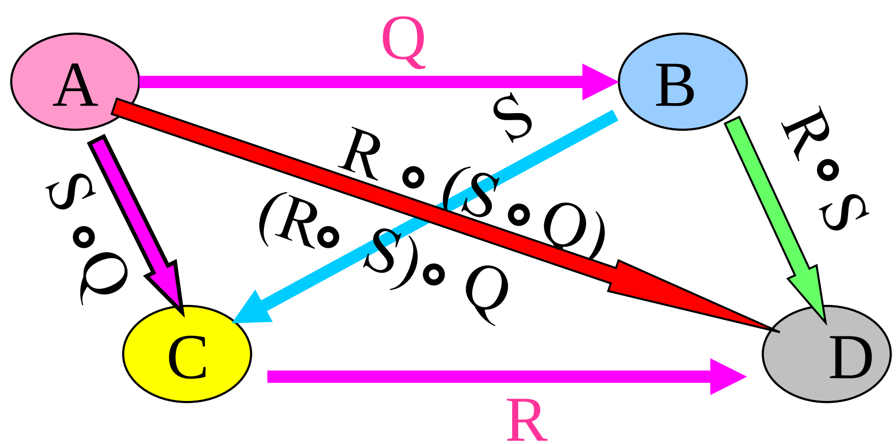
- 定理：设R，S，Q是任意的关系

  ①$(R\circ S)\circ Q = R\circ(S\circ Q)$

  ②$(R\circ S)^{-1} = S^{-1}\circ R^{-1}$

令 Q⊆A×B　　S⊆B×C　　R⊆C×D

可以形象表示:



$$(R\circ S)^{-1} = S^{-1}\circ R^{-1}$$

证明：$<x, y> \in (R\circ S)^{-1}$

$\Leftrightarrow <y, x> \in R\circ S$

$\Leftrightarrow \exists t(<y, t> \in S \wedge <t, x> \in R)$

$\Leftrightarrow \exists t(<x, t> \in R^{-1} \wedge <t, y> \in S^{-1})$

$\Leftrightarrow <x, y> \in S^{-1}\circ R^{-1}$

关系的运算-举例

$R=\{\langle a,a\rangle,\langle a,c\rangle,\langle b,b\rangle,\langle c,b\rangle,\langle c,c\rangle\}$

$S=\{\langle a,1\rangle,\langle a,4\rangle,\langle b,2\rangle,\langle c,4\rangle,\langle c,5\rangle\}$

$S\circ R=\{\langle a,1\rangle, \langle a,4\rangle,\langle a,5\rangle,\langle b,2\rangle,\langle c,2\rangle, \langle c,4\rangle,\langle c,5\rangle\}$

$(S\circ R)^{-1}=\{\langle 1,a\rangle, \langle 4,a\rangle, \langle 5,a\rangle, \langle 2,b\rangle, \langle 2,c\rangle, \langle 4,c\rangle,\langle 5,c\rangle\}$

$R^{-1}=\{\langle a,a\rangle, \langle c,a\rangle,\langle b,b\rangle,\langle b,c\rangle,\langle c,c\rangle\}$

$S^{-1}=\{\langle 1,a\rangle,\langle 4,a\rangle,\langle 2,b\rangle,\langle 4,c\rangle, \langle 5,c\rangle\}$

$R^{-1}\circ S^{-1}=\{\langle 1,a\rangle, \langle 4,a\rangle,\langle 2,b\rangle,\langle 2,c\rangle, \langle 4,c\rangle,\langle 5,a\rangle,\langle 5,c\rangle\}$

关系的运算

- 定理: 设R为A上关系，则

  $$R\circ I_A = I_A \circ R = R$$

- 定理:
  - $R\circ(S\cup T)=R\circ S\cup R\circ T$
  - $R\circ(S\cap T)\subseteq R\circ S\cap R\circ T$
  - $(S\cup T)\circ X=S\circ X\cup T\circ X$
  - $(S\cap T)\circ X\subseteq S\circ X\cap T\circ X$

$$R\circ(S\cup T)=R\circ S\cup R\circ T$$

对于任意<x,y>, 可得

$<x,y>\in R\circ(S\cup T)$

$\Leftrightarrow \exists z(<x,z>\in S\cup T \wedge <z,y>\in R)$

$\Leftrightarrow \exists z(\ (<x,z>\in S\vee <x,z>\in T)\wedge <z,y>\in R)$

$\Leftrightarrow \exists z((<x,z>\in S\wedge <z,y>\in R)\vee(<x,z>\in T\wedge <z,y>\in R))$

$\Leftrightarrow \exists z(<x,z>\in S\wedge <z,y>\in R)\vee\exists z(<x,z>\in T\wedge <z,y>\in R)$

$\Leftrightarrow <x,y>\in R\circ S\vee <x,y>\in R\circ T$

$\Leftrightarrow <x,y>\in(R\circ S)\cup(R\circ T)$

所以 $R\circ(S\cup T)=(R\circ S)\cup(R\circ T)$

关系的运算

- 定理:
  - $R\uparrow(A\cup B) = R\uparrow A\cup R\uparrow B$
  - $\mathrm{R}[\mathrm{A}\cup B] = R[A]\cup R[B]$
  - $R\uparrow(A\cap B) = R\uparrow A\cap R\uparrow B$
  - $\mathrm{R}[A\cap B] \subseteq R[A]\cap R[B]$

定理: $R[A \cap B] \subseteq R[A] \cap R[B]$

证明： $\forall y \in R\,[A \cap B]$

$\Leftrightarrow \exists x(<x, y> \in R \wedge x \in A \cap B)$

$\Leftrightarrow \exists x(<x, y> \in R \wedge x \in A \wedge x \in B)$

$\Leftrightarrow \exists x((<x, y> \in R \wedge x \in A) \wedge (<x, y> \in R \wedge x \in B))$

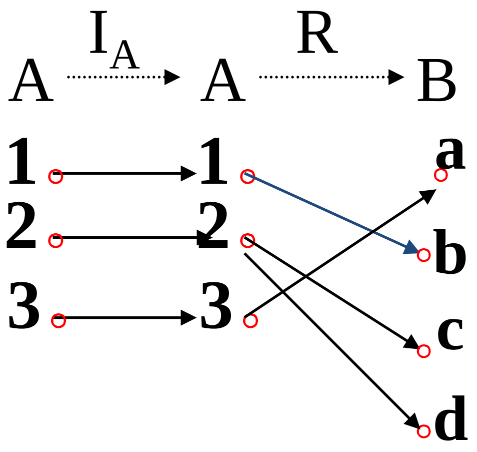
$\Rightarrow \exists x(<x, y> \in R \wedge x \in A) \wedge \exists x(<x, y> \in R \wedge x \in B)$

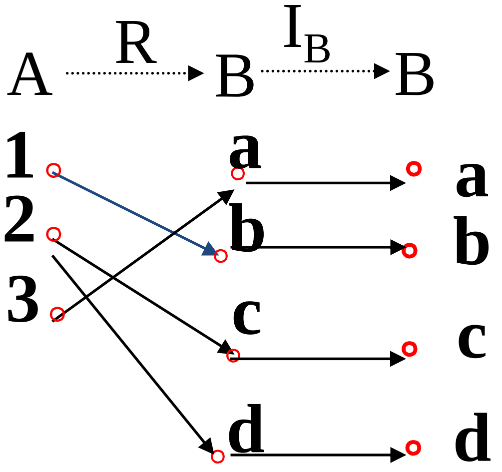
$\Leftrightarrow y \in R[A] \wedge y \in R[B]$

$\Leftrightarrow y \in R[A] \cap R[B]$

3. R是从A到B的关系，则 $R\circ I_A=I_B\circ R=R$

例：令A={1,2,3}, B={a,b,c,d}





从这两个图看出它们的复合都等于R。

关系的运算

- R的n次幂记为R^n
  - $R^0 = I_A$
  - $R^{n+1} = R^n \circ R$
- 定理: 设R是集合A上的关系，m,n∈N
  - $R^m \circ R^n = R^{m+n}$
  - $(R^m)^n = R^{mn}$

证明思路：使用归纳法(n)并利用复合关系的结合律

$$R^m \circ R^n = R^{m+n}$$

对于任给的$m \in N$, 对n用归纳法。

若n=0, 则有

$$R^m \circ R^0 = R^m \circ I_A = R^{m+0}$$

假设$R^m \circ R^n = R^{m+n}$，则有

$$\begin{aligned} R^m \circ R^{n+1} &= R^m \circ (R^n \circ R) \\ &= (R^m \circ R^n) \circ R \\ &= R^{m+n} \circ R \\ &= R^{m+n+1} \end{aligned}$$

$$R^{n+1} = R^n \circ \mathrm{R}$$

关系的运算

- 例$R=\{<1,2>,<2,1>,<2,3>,<3,4>,<4,5>\}$
  - $R^0=\{<1,1>,<2,2>,<3,3>,<4,4>,<5,5>\}$
  - $R^1 = R$
  - $R^2 = \{<1,1>, <1,3>,<2,2>, <2,4>,<3,5>\}$
  - $R^3 = R^2 \circ R = \{<1,2>,<1,4>,<2,1>,<2,3>,<2,5>\}$
  - $R^4 = R^3 \circ R = \{<1,1>,<1,3>, <1,5>,<2,2>, <2,4>\}$
  - $R^5 = R^4 \circ R = \{<1,2>,<1,4>,<2,1>,<2,3>,<2,5>\}$

10.3 关系的逆、合成、限制和象

10-3-2 SoR的关系矩阵

设A是有限集合，|A|=n。关系R和S都是A上的关系，R和S的关系矩阵$M(R)=[r_{ij}]$和$M(S)=[s_{ij}]$都是n×n的方阵。于是R与S的合成 SoR 的关系矩阵

$M(SoR)=[W_{ij}]$ n×n

可以用下述的矩阵逻辑乘计算（类似于矩阵乘法）。记作$M(SoR)=M(R)\cdot M(S)$

其中 $$w_{ij}=\bigvee_{k=1}^{n}(r_{ik}\wedge s_{kj})$$

关系的矩阵运算是布尔运算

- 只涉及0和1。

  布尔加：0+0=0，1+1=1，0+1=1+0=1

  布尔乘：1*1=1，1*0=0*1=0*0=0

- 矩阵表示

R={<1,2>,<3,4>,<2,2>}

S={<4,2>,<2,4>,<3,1>,<1,3>}

- 则

$$M_R = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}, M_S = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

$$\boldsymbol{M}_{R \circ S} = \mathbf{M}_S * \mathbf{M}_R,$$

$$\boldsymbol{M}_{S \circ R} = \boldsymbol{M}_R * \mathbf{M}_S$$

$$\boldsymbol{M}_{R^2} = \mathbf{M}_R{}^2$$

$$\boldsymbol{M}_{R^3} = \mathbf{M}_R{}^3$$

$$M_R = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}, M_S = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

$$M_{R \circ S} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \end{bmatrix}, M_{S \circ R} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

- 复合关系运算不满足交换律，但关系的复合运算满足结合律。
- 复合关系可以用图形表示，也可以用矩阵来求。
- 关系的矩阵运算是布尔运算，只涉及0和1。

  布尔加：0+0=0，1+1=1，0+1=1+0=1

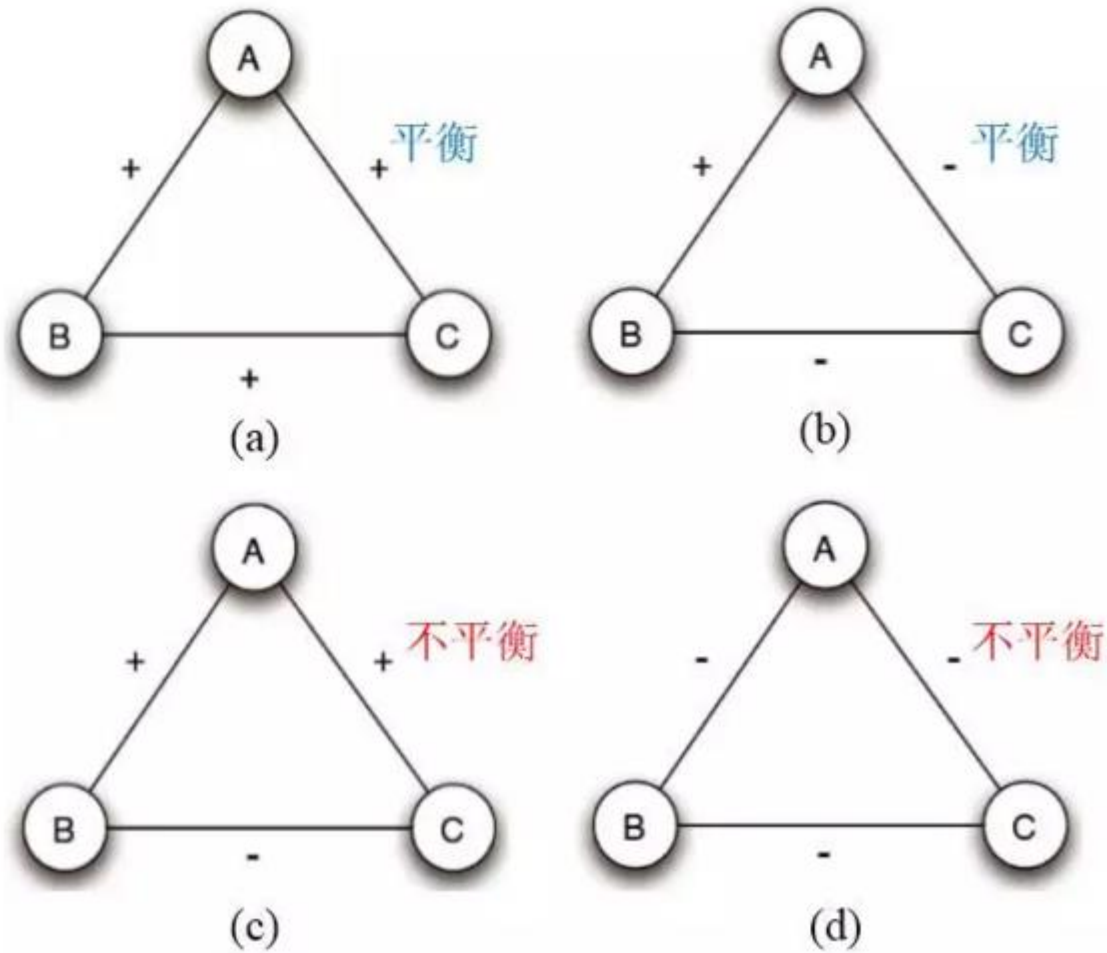
  布尔乘：1*1=1，1*0=0*1=0*0=0

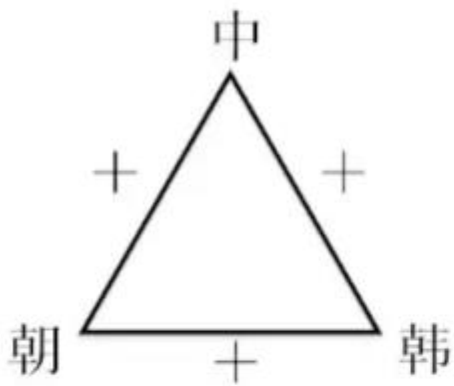
复合关系在社会关系网络中的应用

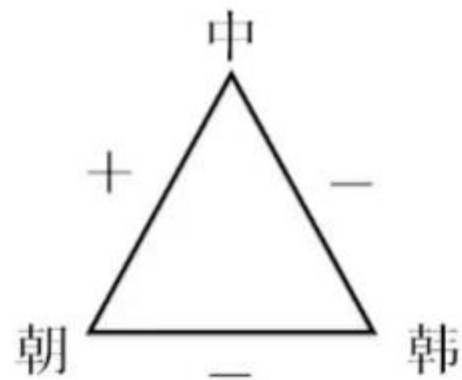
- 社会网络中，两个节点之间的关系（边）可能携带着各种各样的社会性含义
- 除了强弱以外，还有支持（＋）与反对（－），朋友（＋）与敌人（－）等利害关系 。

人和人之间如此，国和国之间的外交关系也如此，而且后者常常显现得更加明显（同盟条约、领土争端之类）

从社会心理学角度看

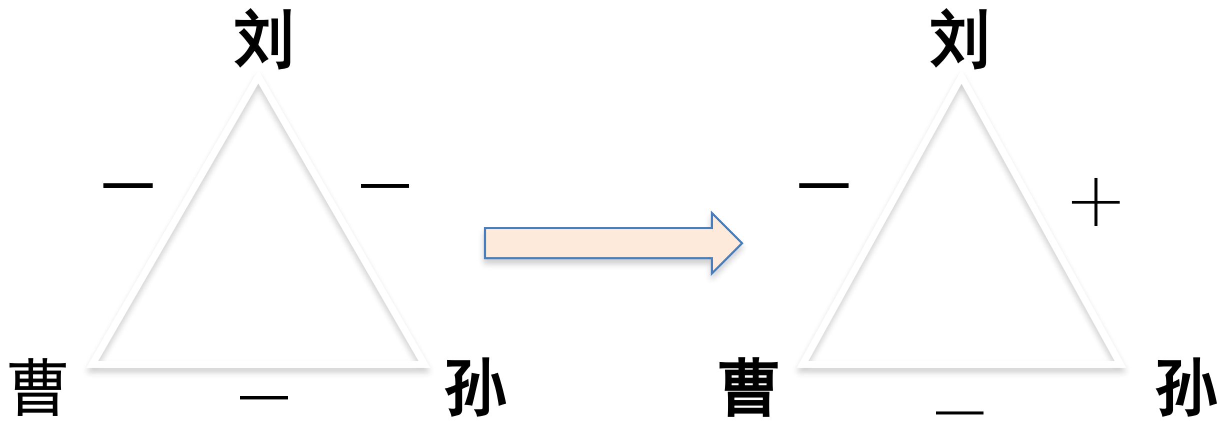



中
+
+
朝
+
韩

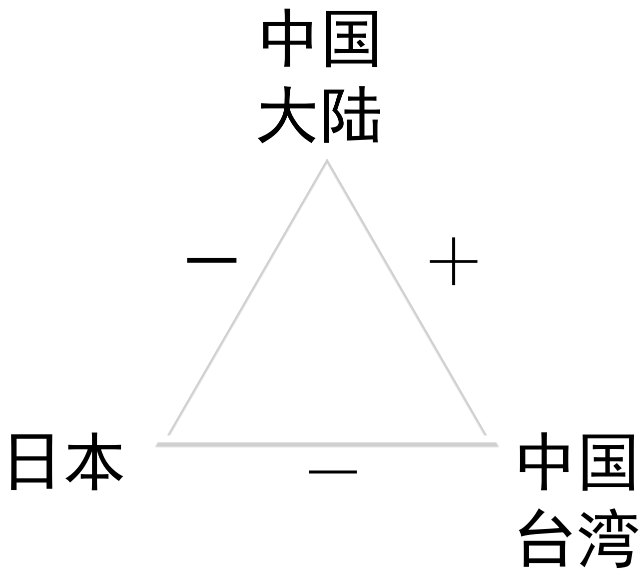

中
+
−
朝
−
韩

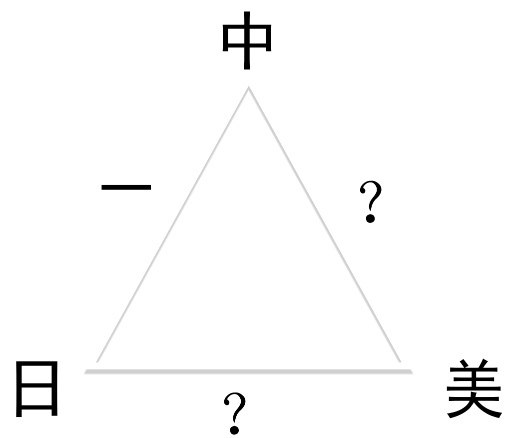
三国演义中的关系

- 原则上，都是想自得天下，也就是互为敌人，但不时出现两家联合斗另一家的形势



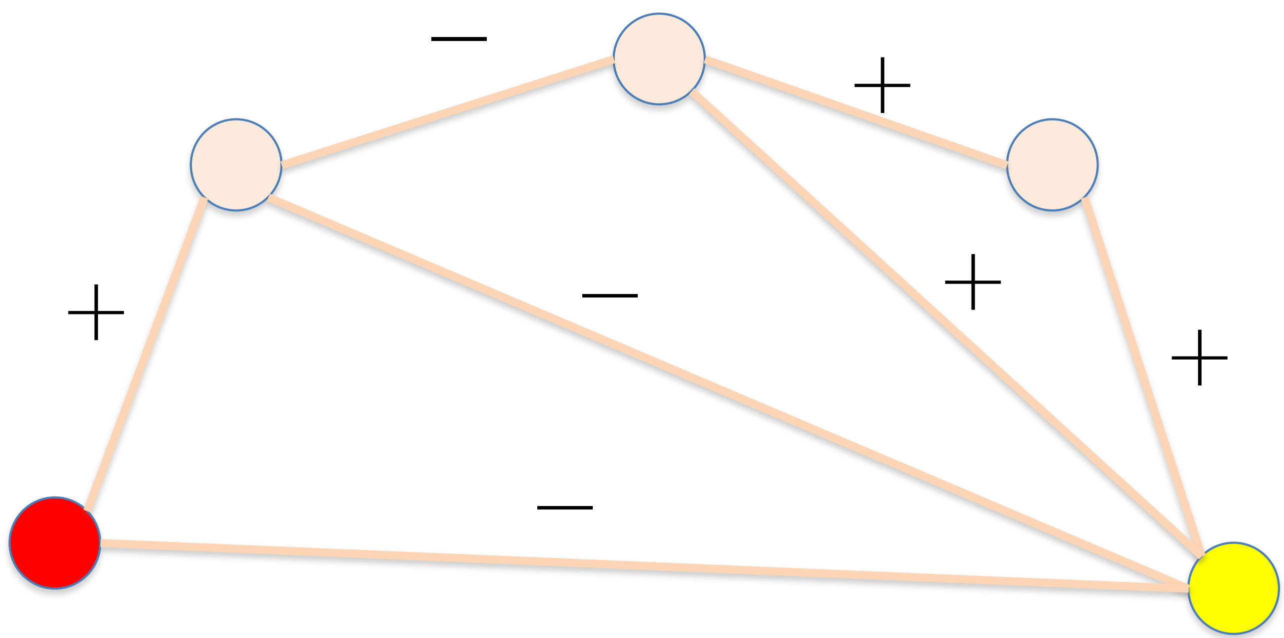
钓鱼岛问题中的关系





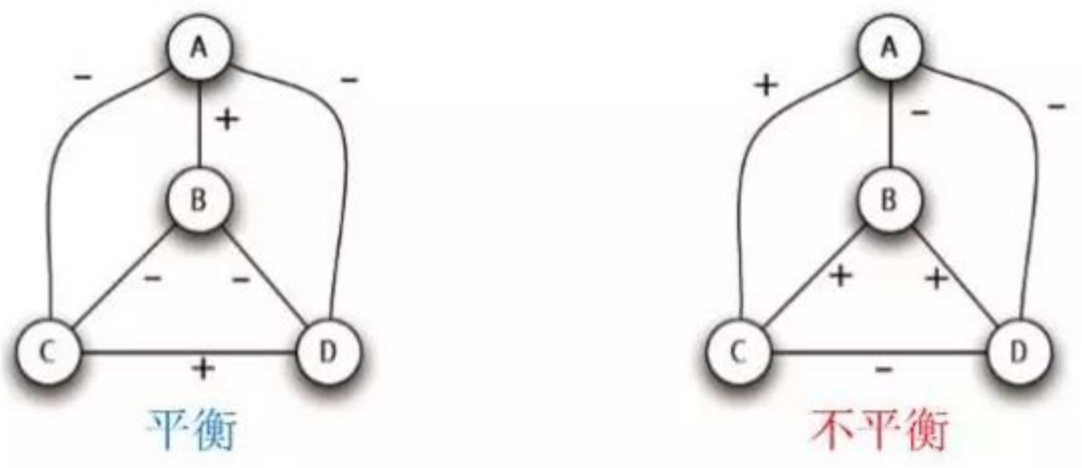
一般地，我们可以回答

- “你朋友的敌人的朋友的朋友”更可能是你的朋友还是敌人？

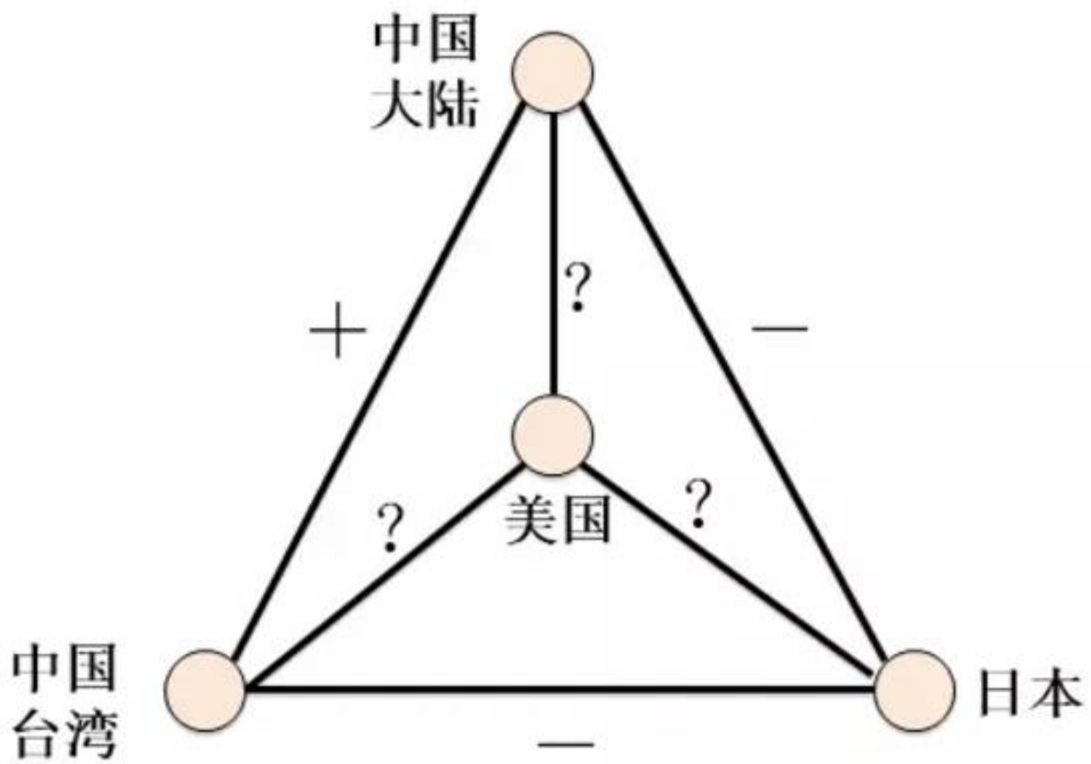


平衡定理

- 如果一个标记了“＋、－”关系的完全图是平衡的，那么，（1）要么它的所有节点两两都是朋友；（2）要么它的节点可以被分为两组，X和Y，其中X组内的节点两两都是“＋”关系，Y组内的节点两两也都是“＋”关系，而X组中的每个节点与Y组中每个节点之间都是“－”关系



思考



10.4 关系的性质

- 自反性
  - $\forall a \in A$，有$<a,a> \in R$，则R为A上的**自反关系**
- 反自反性
  - $\forall a \in A$，有$<a,a> \notin R$，R为A上的**反自反关系**
- 例 $A=\{a,b,c\}$
  - $R_1=\{<a,a>,<b,b>,<c,c>,<a,b>,<c,a>\}$
  - $R_2=\{<a,b>,<b,c>,<c,a>\}$

e
Choice
(single)

Points: 1

Setting

$$R_3=\{<a,a>,<b,c>\}$$

A R_3不是自反的，也不是非自反的。

B R_3是自反的，不是非自反的。

C R_3不是自反的，是非自反的。

D R_3是自反的，也是非自反的。

提交

10.4 关系的性质

- 例：R是Z_+上的整除关系，则R具有自反性
  - 证明：$\forall x \in Z_+$， x能整除x,
  - $\therefore \langle x,x \rangle \in R$，$\therefore$R具有自反性
- 例：R是Z上的同余关系，则R具有自反性

  证明：$\forall x \in Z$，$(x-x)/k=0$,

  $\therefore$x与x同余$\therefore \langle x,x \rangle \in R \therefore$R具有自反性
- 其它≤，≥关系，均是自反关系
- 实数上的<,>关系,均是反自反关系

10.4 关系的性质

- 关系矩阵的特点？
  - 自反关系的关系矩阵的对角元素均为1
  - 反自反关系的关系矩阵的对角元素均为0
- 关系图的特点？
  - 自反关系的关系图中每个顶点都有环
  - 反自反关系的关系图中每个顶点都没有环
- 定理：R是A上的关系，则：
  - R是自反关系的充要条件是$I_A \subseteq R$
  - R是反自反关系的充要条件是$R \cap I_A = \Phi$

10.4 关系的性质

- 对称关系R
  - $\forall a,b\in A$,如果$<a,b>\in R$,则必有$<b,a>\in R$
- 例
  - $R_1=\{<1,1>,<2,3>,<3,2>\}$
  - R_1是对称的
  - $R_2=\{<1,1>,<3,3>\}$
  - R_2是对称的
  - $R_3=\{<2,2>,<2,3>,<3,2>,<3,1>\}$
  - R_3不是对称的

10.4 关系的性质

- 关系矩阵特点？
  - 对称关系的关系矩阵是对称矩阵
- 关系图特点？
  - 如果两个顶点之间有边，一定是一对方向相反的边（无单边）
- 定理： R在A上对称当且仅当$R=R^{-1}$

证明：必要性 $<x,y>\in R \Leftrightarrow <y,x>\in R \Leftrightarrow <x,y>\in R^{-1}$

充分性$<x,y>\in R \Leftrightarrow <y,x>\in R^{-1} \Leftrightarrow <y,x>\in R$

10.4 关系的性质

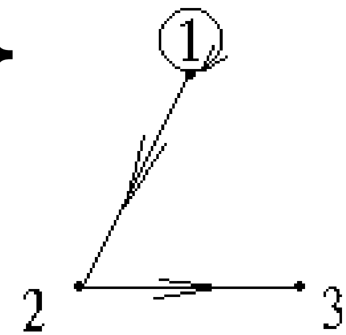
- 反对称关系R
  - $\forall a,b \in A$,如果$<a,b> \in R$且$<b,a> \in R$,则必有$a = b$
  - $\forall a,b \in A$,如果$a \neq b$, $<a,b> \in R$,则必有$<b,a> \notin R$

- 例: $A = \{a,b,c\}$
  - $R = \{<a,a>,<b,b>\}$
  - $S = \{<a,b>,<a,c>\}$
  - $T = \{<a,c>,<b,a>,<a,b>\}$
  - R, S是反对称的, T不是反对称的

Choice (multiple) Points: 1

Setting

- $R_2=\{<1,1>,<1,2>,<2,3>\}$



A 自反

B 非自反

C 反对称

D 传递

E 对称

提交

10.4 关系的性质

- 例: 实数集合上≤关系是反对称关系
  - ∀x,y∈实数集,如x≠y,且x≤y,则y≤x不成立
- 例：≥,<,>关系,均是反对称关系

- 反对称关系矩阵和关系图特点？
  - 若r_{ij}=1，且i≠j，则r_{ji}=0
  - 如果两个顶点之间有边，一定是一条有向边（无双向边）
- 定理：R在A上反对称当且仅当$R \cap R^{-1} \subseteq I_A$

10.4 关系的性质

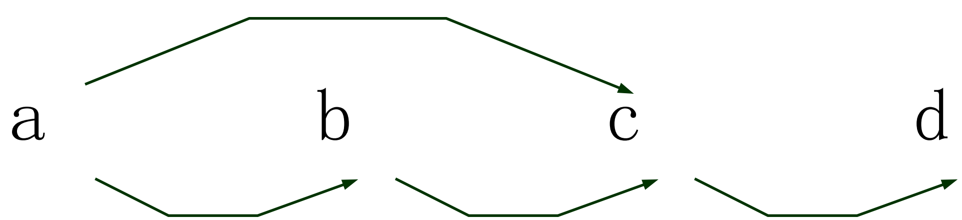
- **传递关系**
  - $\forall a,b,c \in A$,如果$<a,b> \in R, <b,c> \in R$, 必有$<a,c> \in R$
- 例
  - $R_1 = \{<x,y>,<z,x>,<z,y>\}$
  - 是传递关系
  - $R_2 = \{<a,b>,<c,d>\}$
  - 是传递关系
  - $R_3 = \{<a,b>,<b,a>\}$
  - 不是传递关系

10.4 关系的性质

- 例:整除关系R_D是Z_+上的传递关系
  - $\forall x, y, z \in Z_+$，如$<x, y>\in R_D$，$<y, z>\in R_D$，即x能整除y，且y能整除z,则必有x能整除z，$<x, z>\in R_D$
- 例:P(A)上的包含关系$\subseteq$具有传递性
  - 若$u \subseteq v, v \subseteq w$,则必有$u \subseteq w$
- 例:实数集上的$\le$关系具有传递性
  - 若$x \le y, y \le z$必有$x \le z$

10.4 关系的性质

- 传递关系关系图特点？
  - 如果结点a能通过有向弧组成的有向路径通向结点x,则a必须有有向弧直接指向x,否则R就不是传递的
- 例：R={<a,b>,<b,c>,<c,d>,<a,c>}



- **定理**：R在A上传递当且仅当$R\circ R \subseteq R$

10.4 关系的性质

自　反： $\forall x(x \in X \to xRx)$

反自反： $\forall x(x \in X \to x\not{R}x)$

对　称： $\forall x \forall y(x \in X \wedge y \in X \wedge xRy \to yRx)$

反对称： $\forall x \forall y(x \in X \wedge y \in X \wedge xRy \wedge yRx \to x = y)$

传　递：

$$\forall x \forall y \forall z(x \in X \wedge y \in X \wedge z \in X \wedge xRy \wedge yRz \to xRz)$$

10.4 关系的性质

- 设A是集合，R_1和R_2是A上的关系
  - 若R_1，R_2是自反和对称的，则$R_1 \cup R_2$也是自反的和对称的
  - 若R_1和R_2是传递的，则$R_1 \cap R_2$也是传递的

10.4 关系的性质

- 设A是集合，R_1和R_2是A上的关系
  - 若R_1，R_2是自反的和对称的，则$R_1 \cup R_2$也是自反的和对称的

证明：R_1，R_2是自反的$\Rightarrow \mathrm{I}_A \subseteq R_1$，$\mathrm{I}_A \subseteq R_2$

所以$\mathrm{I}_A \subseteq R_1 \cup R_2$

R_1，R_2是对称的$\Rightarrow R_1 = R_1^{-1}$和$R_2 = R_2^{-1}$

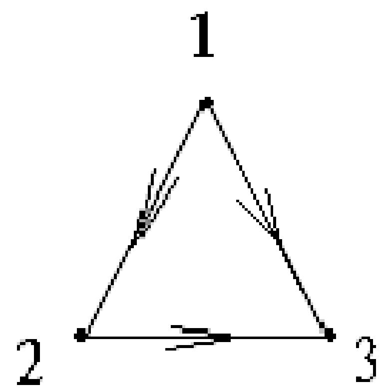
所以$(R_1 \cup R_2)^{-1} = R_1^{-1} \cup R_2^{-1} = R_1 \cup R_2$

R是自反关系的充要条件是$\mathrm{I}_A \subseteq \mathrm{R}$

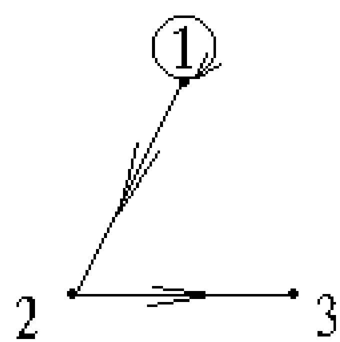
R在A上对称当且仅当$\mathrm{R}=\mathrm{R}^{-1}$

10.4 关系的性质

- 例： X={1,2,3}，判断关系的性质
- $R_1=\{<1,2>,<2,3>,<1,3>\}$
  - 反自反
  - 反对称
  - 可传递



- $R2=\{<1,1>,<1,2>,<2,3>\}$
  - 反对称



	自反 Reflexive （10.4.1）	反自反 Irreflexive （10.4.1）	对称 Symmetric （10.4.2）	反对称 Antisymmetric （10.4.2 ）	传递 Transitive （10.4.3 ）
定义要点	$x \in A \rightarrow xRx$	$x \in A \rightarrow x\not{R}x$ $\langle x, x\rangle \notin R$	$xRy \rightarrow yRx$ $\langle x, y\rangle \in R \rightarrow$ $\langle y, x\rangle \in R$	$xRy \wedge x \neq y$ $\rightarrow y\not{R}x$ $xRy \wedge yRx$ $\rightarrow x = y$	$xRy \wedge yRz$ $\rightarrow xRz$ $\langle x, y\rangle \in R \wedge$ $\langle y, z\rangle \in R \rightarrow$ $\langle x, z\rangle \in R$
关系矩阵的特点	$r_{ii} = 1$;主对角元均为1	$r_{ii} = 0$;主对角元均为0	对称矩阵 $r_{ij} = r_{ji}$	若$r_{ij} = 1 \wedge$ $i \neq j$ $\rightarrow r_{ji} = 0$	无直观特点或难以直接判断
关系图的特点	每个结点都有自圈	每个结点都没有自圈	若两个结点之间有边，一定是一对方向相反的边	若两个结点之间有边，一定是一条有向边	若从结点x_i到x_j有边，x_j到x_k有边，则从x_i到x_k一定有边

运算性质

- 已知 R， R_1， R_2是A上满足相应性质的关系，
- 问题：经过并，交，补，求逆，合成运算后是否还具有原来的性质？

运算 \ 性质	自反性	反自反性	对称性	反对称性	传递性
R^{-1}	√	√	√	√	√
$R_1 \cap R_2$	√	√	√	√	√
$R_1 \cup R_2$	√	√	√	×	×
$R_1 - R_2$	×	√	√	√	×
$R_1 \circ R_2$	√	×	×	×	×

注： √表示经过左端的运算仍保持原来的性质，×则表示原来的性质不再满足。

需按纵列理解，不能按横向。如不存在一个关系，它既是自反的又是反自反的。

$R_1 \circ R_2$：反自反性

- $A = \{1,2,3\}$
- $R_1=\{<1,2>,<2,3>\}$
- $R_2=\{<2,1>,<3,2>\}$
- $R_1 \circ R_2=\{<2,2>,<3,3>\}$

$R_1 \circ R_2$: 传递性

- $A = \{1,2,3\}$
- $R_1=\{<1,2>, <2,3>, <1,3>\}$
- $R_2=\{<3,1>, <1,2>, <3,2>\}$
- $R_1 \circ R_2=\{<3,2>, <3,3>,<1,3>\}$

几个主要关系的性质

关系 \ 性质	自反性	反自反性	对称性	反对称性	传递性
恒等关系 I_A					
全域关系 E_A					
A**上的空关系** Φ					
N**上的整除关系**					
包含关系 $\subseteq$					
真包含关系 $\subset$					

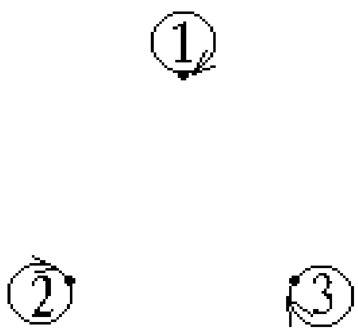
A是非空的

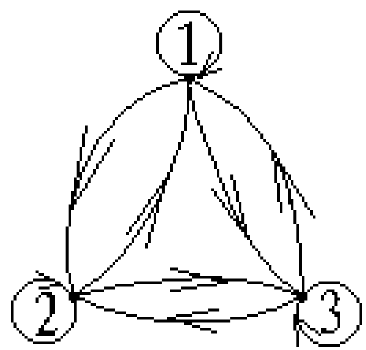
几个主要关系的性质

性质 关系	自反性	反自反性	对称性	反对称性	传递性
恒等关系 I_A	√	×	√	√	√
全域关系 E_A	√	×	√	×	√
A**上的空关系** Φ	×	√	√	√	√
N**上的整除关系**	√	×	×	√	√
包含关系 $\subseteq$	√	×	×	√	√
真包含关系 $\subset$	×	√	×	√	√

10.4 关系的性质

- $R_3=\{<1,1>,<2,2>,<3,3>\}$
- 自反，对称，反对称，可传递的

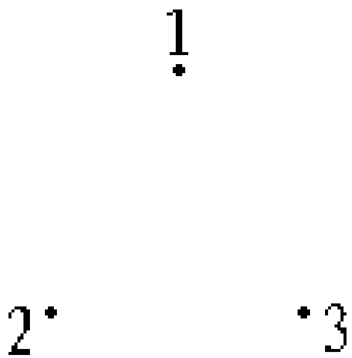




- $R_4= E_x$
- 自反，对称，可传递的

10.4 关系的性质

- $X=\{1,2,3\}$, $R_5=\varnothing$
  - 反自反的，对称的，反对称的，可传递的



- 若$X=\varnothing$，X上的空关系
  - 自反的，反自反的，对称的，反对称的，可传递的

谢谢

shixia@tsinghua.edu.cn