Chapter 6

函数逼近和函数插值

第六章-最佳平方逼近

- 从函数簇中找出一个函数 p(x) 使 p(x) – f(x) 最小
- 最小的度量
  - 函数范数： 1范数, 2范数, 无穷范数的公式
  - 内积 $\langle u(x), v(x)\rangle = \int_a^b u(x)v(x)dx$
- 最佳平方接近
  - $[\varphi_0, \varphi_1, \ldots \varphi_n] \rightarrow$ Gram 矩阵 $\begin{bmatrix} \langle\varphi_1,\varphi_1\rangle & \langle\varphi_2,\varphi_1\rangle & \cdots & \langle\varphi_n,\varphi_1\rangle \\ \langle\varphi_1,\varphi_2\rangle & \langle\varphi_2,\varphi_2\rangle & \cdots & \langle\varphi_n,\varphi_2\rangle \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \langle\varphi_1,\varphi_n\rangle & \langle\varphi_2,\varphi_n\rangle & \cdots & \langle\varphi_n,\varphi_n\rangle \end{bmatrix}$,
  - 求解Gx = b, $\boldsymbol{b} = \begin{bmatrix} \langle f,\varphi_1\rangle \\ \langle f,\varphi_2\rangle \\ \vdots \\ \langle f,\varphi_n\rangle \end{bmatrix}$
  - $S^* = \Sigma_{j=1}^{n} x_j^* \varphi_j$

Gram矩阵是对称正定矩阵
Gram矩阵对于$\{t, t^2, \ldots. t^n\}$ 是病态的,
所以需要正交基

第六章-正交化

- Gram-Schmidt 正交化
  - k 从 0 到 n, 分别计算 $\varphi_k(t) = t^{k-1} - \sum_{j=1}^{k-1} \frac{\langle t^{k-1}, \varphi_j(t)\rangle}{\langle \varphi_j(t), \varphi_j(t)\rangle} \varphi_j(t)$
- Lagrange 多项式(定义在[-1, 1]上)
  - $\mathrm{P}_0(t) = 1, \mathrm{P}_1(t) = t, \mathrm{P}_2(t) = 0.5(3t^2 - 1)$
  - $(\mathrm{k} + 1)P_{k+1}(t) = (2k + 1)tP_k(t) - kP_{k-1}(t)$
  - 不同定义域之间的转换

$$\tilde{P}_k(s) = P_k\left(\frac{2s - (a+b)}{b - a}\right)$$

第六章-最小二乘法

- 最小二乘法的定义，和最佳平方逼近的不同点
- 法方程方法求解
  - 求解 $\boldsymbol{A}^T\boldsymbol{A}\boldsymbol{x} = \boldsymbol{A}^T\boldsymbol{f}$
  - 前提是基函数关于取值点线性无关(有关结论)
  - 重复点的处理
  - 正交变换
- QR分解法求解

$$\underset{m\times n}{\boldsymbol{A}} = \underset{m\times m}{\boldsymbol{Q}}\ \underset{m\times n}{\boldsymbol{R}} \qquad \text{设}\boldsymbol{Q}=[\underset{n\text{列}}{\boldsymbol{Q}_1}\quad \boldsymbol{Q}_2],\ \boldsymbol{R}=\begin{bmatrix}\boldsymbol{R}_1\\ \boldsymbol{R}_2\end{bmatrix}\begin{matrix}n\text{行}\\ \\ \end{matrix}$$

求解 $\boldsymbol{R}_1\boldsymbol{x}=\boldsymbol{Q}_1^T\boldsymbol{f}$ ，$\|\boldsymbol{Q}_2^T\boldsymbol{f}\|_2^2$ 即为所求值

第六章- 多项式插值

- n个点不同, 可以保证插值多项式存在且唯一
- Lagrange 插值

$$L_n(x) = \sum_{k=0}^{n} y_k l_k(x), \quad l_k(x) = \frac{(x-x_0)\cdots(x-x_{k-1})(x-x_{k+1})\cdots(x-x_n)}{(x_k-x_0)\cdots(x_k-x_{k-1})(x_k-x_{k+1})\cdots(x_k-x_n)}$$

$$\omega_{n+1}(x) = \prod_{j=0}^{n}(x-x_j)$$

- Lagrange 插值余项

$$R_n(x) = \frac{f^{(n+1)}(\xi)}{(n+1)!}\omega_{n+1}(x), \text{其中}\xi \in (a,b), \text{且依赖于}x$$

第六章- 多项式插值

- Newton 插值
  - $N_n(x) = c_0 + c_1(x - x_0) + \cdots + c_n(x - x_0)\cdots(x - x_{n-1})$
  - c0, c1, c2….cn 通过差商表来计算
- 差商的计算

有k-1个节点相同

$$f[x_0, \dots, x_k] = \frac{f[x_1, \dots, x_k] - f[x_0, \dots, x_{k-1}]}{x_k - x_0}$$

- 差商的性质(Th6.8, Th6.9)
- 插值余项
  - $f[x, x_0, \dots, x_n](x - x_0)\cdots(x - x_n)$
  - 和拉格朗日余项的关系 $f[x, x_0, \dots, x_n] = \dfrac{f^{(n+1)}(\xi)}{(n+1)!}$

第六章- 分段多项式插值

- 单个多项式插值的缺陷
- 分段线性插值

$$I_h(x)=\sum_{j=0}^{n} f_j l_j(x) \qquad l_j(x)=\begin{cases}\dfrac{x-x_{j-1}}{x_j-x_{j-1}}, x_{j-1}\le x\le x_j\ (j=0\text{时略去})\\ \dfrac{x-x_{j+1}}{x_j-x_{j+1}}, x_j\le x\le x_{j+1}\ (j=n\text{时略去})\\ 0, \quad x\notin[x_{j-1},x_{j+1}]\end{cases}$$

- 分段线性插值余项

$$|f(x)-I_h(x)|\le\frac{M_2}{2}\max_{x_j\le x\le x_{j+1}}\left|(x-x_j)(x-x_{j+1})\right|\le\frac{M_2}{8}h^2$$

其中 $M_2=\max\limits_{a\le x\le b}|f''(x)|$ $\qquad h=\max\limits_{j}(x_{j+1}-x_j)$

第六章- 分段多项式插值

- 分段Hermit插值(函数值,导数值都相同)

$$H_{2n+1}(x) = \sum_{j=0}^{n} \left[f_j \alpha_j(x) + f_j' \beta_j(x)\right]$$

$$\alpha_j(x) = \left[1 - 2(x - x_j) l_j'(x_j)\right] l_j^2(x)$$

$$\beta_j(x) = (x - x_j) l_j^2(x)$$

- 一种特殊情况：二点三次埃尔米特插值,公式见课本,建议抄下来

$$H_h(x) = f_k \tilde{\alpha}_k(x) + f_{k+1} \tilde{\alpha}_{k+1}(x) + f_k' \tilde{\beta}_k(x) + f_{k+1}' \tilde{\beta}_{k+1}(x)$$

- 保形分段插值(对导数值的近似)

$$\frac{w_{k-1} + w_k}{f_k'} = \frac{w_{k-1}}{d_{k-1}} + \frac{w_k}{d_k} \quad w_{k-1} = h_{k-1} + 2h_k,\ w_k = 2h_{k-1} + h_k$$

第六章-样条函数插值

- 样条函数插值(进一步, 函数,导数,二阶导数都相同)
- N 个区间内有 N 个三次函数, 需要求出 4N 个参数
- 已知的等式有 4N – 2个, 需要额外的2个条件
- 把n个点出二次导数作为变量, 推出小区间内的函数形式

$$S(x)=M_j\frac{(x_{j+1}-x)^3}{6h_j}+M_{j+1}\frac{(x-x_j)^3}{6h_j}+(f_j-\frac{M_jh_j^2}{6})\frac{x_{j+1}-x}{h_j}+(f_{j+1}-\frac{M_{j+1}h_j^2}{6})\frac{x-x_j}{h_j}$$

- 得到的限制 → “三弯矩” 方程

$$\mu_jM_{j-1}+2M_j+\lambda_jM_{j+1}=d_j,(j=1,\ldots,n-1)$$