10.0

离散数学——第五周作业

计83 刘轩奇 2018011025

2019.10.11

2.9 证明下列推理关系：

(1) 在大城市球赛中，如果北京队第三，那么如果上海队第二，那么天津队第四。沈阳队不是第一或北京队第三。上海队第二。从而知，如果沈阳队第一，那么天津队第四。

(2) 如果国家不对农产品给与补贴，那么国家就要对农产品进行控制。如果对农产品进行控制，农产品就不会短缺。或者农产品短缺或者农产品过剩。事实上农产品不过剩。从而国家对农产品给与了补贴。

解 (1) P：北京队第三；Q：上海队第二；R：天津队第四；S：沈阳队第一。

欲证：$P \to (Q \to R), \neg S \vee P, Q \Rightarrow S \to R$

$(a)\neg S \vee P$	前提
$(b) S \to P$	(a)置换
$(c) S$	附加前提
$(d) P$	$(b)(c)$分离
$(e) P \to (Q \to R)$	前提
$(f) Q \to R$	$(d)(e)$分离
$(g) Q$	前提
$(h) R$	$(f)(g)$分离
$(i) S \to R$	条件证明规则

(2) P：国家对农产品给与补贴；Q：国家对农产品进行控制；R：农产品短缺；S：农产品过剩。

欲证：$\neg P \to Q, Q \to \neg R, R \leftrightarrow \neg S, \neg S \Rightarrow P$

$(a)\neg S$	前提
$(b) R \leftrightarrow \neg S$	前提
$(c) R$	$(a)(b)$分离
$(d) Q \to \neg R$	前提
$(e) R \to \neg Q$	(d)置换
$(f)\neg Q$	$(c)(e)$分离
$(g)\neg P \to Q$	前提
$(h)\neg Q \to P$	(g)置换
$(i) P$	$(f)(h)$分离

2.10 如果合同是有效的，那么张三应受罚。如果张三受罚，他将破产。如果银行给张三贷款，他就不会破产。事实上，合同有效并且银行给张三贷款了。验证这些前提是否有矛盾。

解 P：合同有效；Q：张三受罚；R：张三破产；S：银行给张三贷款。

条件：$P \to Q, Q \to R, S \to \neg R, P \wedge S$

$(a) P \wedge S$	前提
$(b) P$	由(a)
$(c) P \to Q$	前提
$(d) Q$	$(b)(c)$分离
$(e) Q \to R$	前提
$(f) R$	$(d)(e)$分离
$(g) S$	由(a)
$(h) S \to \neg R$	前提
$(i) \neg R$	$(g)(h)$分离
$(j) \square$	由$(f)(i)$

2.12 利用归结法证明：

(1) $(P \vee Q) \wedge (P \to R) \wedge (Q \to R) \Rightarrow R$

(3) $\neg(P \wedge \neg Q) \wedge (\neg Q \vee R) \wedge \neg R \Rightarrow \neg P$

证 (1) 子句集 $\{P \vee Q, P \to R, Q \to R, \neg R\}$

$(a) P \vee Q$	
$(b) P \to R$	
$(c) Q \to R$	
$(d) \neg R$	
$(e) \neg P \vee R$	(b)置换
$(f) Q \vee R$	$(a)(e)$归结
$(g) \neg Q \vee R$	(c)置换
$(h) R \vee R$	$(f)(g)$归结
$(i) R$	(h)置换
$(j) \square$	$(d)(i)$归结

(3)子句集 $\{\neg P \vee Q, \neg Q \vee R, \neg R, P\}$

$(a) \neg P \vee Q$	
$(b) \neg Q \vee R$	
$(c) \neg R$	
$(d) P$	
$(e) \neg P \vee R$	$(a)(b)$归结
$(f) \neg P$	$(c)(e)$归结
$(g) \square$	$(d)(f)$归结

2.11 若 $P_i \to Q_i (i = 1, \cdots, n)$ 为真，$P_1 \vee P_2 \vee \cdots \vee P_n$ 和 $\neg(Q_i \wedge Q_j)(i \neq j)$ 也为真。试证明必有 $Q_i \to P_i (i = 1, \cdots, n)$ 为真。

证

$(a)\neg(Q_i \wedge Q_j)$	前提
$(b)Q_i \to \neg Q_j$	(a)置换
$(c)P_i \to Q_i$	前提
$(d)P_i \to \neg Q_j$	$(b)(c)$分离
$(e)\neg Q_i \to \neg P_i$	(c)置换
$(f)P_i \to \neg P_j$	$(d)(e)$分离
$(g)P_i \to (\neg P_1 \wedge \neg P_2 \cdots \wedge \neg P_{i-1} \wedge \neg P_{i+1} \cdots \wedge \neg P_n)$	由(f)
$(h)\neg P_i \vee (\neg P_1 \wedge \neg P_2 \cdots \wedge \neg P_{i-1} \wedge \neg P_{i+1} \cdots \wedge \neg P_n)$	(g)置换
$(i)P_1 \vee P_2 \vee \cdots \vee P_n$	前提
$(j)P_i \vee (P_1 \vee P_2 \vee \cdots \vee P_{i-1} \vee P_{i+1} \vee \cdots \vee P_n)$	(i)置换
$(k)\neg(P_1 \vee P_2 \vee \cdots \vee P_{i-1} \vee P_{i+1} \vee \cdots \vee P_n) \to P_i$	(j)置换
$(l)(\neg P_1 \wedge \neg P_2 \cdots \wedge \neg P_{i-1} \wedge \neg P_{i+1} \cdots \wedge \neg P_n) \to P_i$	(k)置换
$(m)Q_i \to (\neg Q_1 \wedge \neg Q_2 \cdots \wedge \neg Q_{i-1} \wedge \neg Q_{i+1} \wedge \cdots \wedge Q_n)$	由(b)
$(n)Q_i \to (\neg P_1 \wedge \neg P_2 \cdots \wedge \neg P_{i-1} \wedge \neg P_{i+1} \cdots \wedge \neg P_n)$	由$(e)(m)$三段论
$(o)Q_i \to P_i$	由$(l)(m)$三段论

3.1 依公理系统证明

(1) $\vdash \neg(P \wedge Q) \to (\neg P \vee \neg Q)$

(3) $\vdash P \to (Q \vee P)$

证 (1)

$(a) \vdash \neg\neg P \to P$	定理3.2.5
$(b) \vdash \neg\neg(\neg P \vee \neg Q) \to (\neg P \vee \neg Q)$	代入$\dfrac{P}{\neg P \vee \neg Q}$
$(c) \vdash \neg(P \wedge Q) \to (\neg P \vee \neg Q)$	定义(2)

(3)

$(a) \vdash (Q \to R) \to ((P \to Q) \to (P \to R))$	定理3.2.1
$(b) \vdash ((P \vee Q) \to (Q \vee P)) \to ((P \to (P \vee Q) \to (P \to (Q \vee P)))$	代入$\dfrac{Q}{(P \vee Q)}, \dfrac{R}{(Q \vee P)}$
$(c) \vdash ((P \vee Q)) \to (Q \vee P))$	公理3
$(d) \vdash ((P \to (P \vee Q) \to (P \to (Q \vee P))$	$(b)(c)$分离
$(e) \vdash (P \to (P \vee Q))$	公理2
$(f) \vdash P \to (Q \vee P)$	$(d)(e)$分离

3.2 依王浩算法判断下述蕴含式是否正确

(1) $\neg Q \wedge (P \to Q) \Rightarrow \neg P$

解

$$
\begin{aligned}
&(a)\neg Q \wedge (P \to Q) \overset{s}{\Rightarrow} \neg P && \text{(写成相继式)}\\
&(b)\neg Q, (P \to Q) \overset{s}{\Rightarrow} \neg P && (\wedge \Rightarrow)\\
&(c)Q, \neg Q \overset{s}{\Rightarrow} \neg P \text{而且} \neg Q \overset{s}{\Rightarrow} P, \neg P && (\to\Rightarrow)\\
&(d)Q \overset{s}{\Rightarrow} \neg P, Q \text{而且} \overset{s}{\Rightarrow} P, \neg P, Q && (\neg \Rightarrow)\\
&(e)P, Q \overset{s}{\Rightarrow} Q \text{而且} P \overset{s}{\Rightarrow} P, Q && (\Rightarrow \neg)
\end{aligned}
$$

上式无联结词而且 $\overset{s}{\Rightarrow}$ 两端均有共同的命题变项，从而是公理，则原蕴含式正确。