1. 设 $A = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$, $B = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$

证明: $e^A \cdot e^B \neq e^{A+B}$

2. 设 $A \in M_n(\mathbb{C})$.

证明: $\cos A = \frac{1}{2}(e^{iA} + e^{-iA})$

$\sin A = \frac{1}{2i}(e^{iA} - e^{-iA})$

由此证明: $\cos^2 A + \sin^2 A = I_n$.

3. 计算 e^A

(1) $A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 2 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & 4 & 2 \end{pmatrix}$ (2) $A = \begin{pmatrix} 0 & -a \\ a & 0 \end{pmatrix}$

4. 设 $A \in M_n(\mathbb{C})$, 求 e^A 的行列式
(提示: 求 e^A 的特征值和 A 特征值
关系)

5. 计算 $\sin(e^{cI_n})$ 和 $\cos(e^{cI_n})$
其中 $c \neq 0$.

6. 设 $A \in M_n(\mathbb{C})$, A 的特征值模长均 < 1
证明: $\lim\limits_{k \to +\infty} A^k = 0$