10

离散数学——第十五周作业

计83 刘轩奇 2018011025

2019.12.20

12.2 用等势定义证明$[0,1] \approx [a,b], (a,b \in \mathbb{R}, a < b)$.

证 $f : [0,1] \to [a,b], f(x) = a + x(b-a)$是双射函数，从而$[0,1] \approx [a,b], (a,b \in \mathbb{R}, a < b)$

12.4 写出$\mathbb{N}$的三个与$\mathbb{N}$等势的真子集。

答 正自然数集合$\mathbb{N}^+ = \mathbb{N} - \{0\}$
偶自然数集合$\mathbb{N}_{\text{even}} = \{x | (\exists y)(y \in \mathbb{N} \wedge x = 2y)\}$
奇自然数集合$\mathbb{N}_{\text{odd}} = \mathbb{N}^+ - \mathbb{N}_{\text{even}} = \{x | (\exists y)(y \in \mathbb{N} \wedge x = 2y + 1)\}$

12.7 对于任意的基数k, l和无限基数m，如果$2 \leq k \leq m$且$2 \leq l \leq m$，证明
(1) $k^m = 2^m$
(2) $k^m = l^m$

证 (1)

$$2^m \leq k^m \leq m^m \leq 2^m$$

$$\therefore k^m = 2^m$$

(2) $k^m = 2^m$，同理$l^m = 2^m$，从而

$$k^m = l^m$$

12.9 证明平面上直角坐标系中的所有整数坐标点的集合使可数集。

证 设所有整数坐标点的集合为$A = \{(x,y) | x \in \mathbb{Z} \wedge y \in \mathbb{Z}\}$

$$\text{cardA} = \text{card}(\mathbb{Z} \times \mathbb{Z}) = \aleph_0 \cdot \aleph_0 = \aleph_0$$

从而A是可数集。

12.10 计算下列集合的基数。

(1) $A=\{a,b,c\}$

(2) $B=\{x|(\exists n)(n\in\mathbb{N}\wedge x=n^2)\}$

(3) $D=\{x|(\exists n)(n\in\mathbb{N}\wedge x=n^5)\}$

(4) $B\cap D$

(5) $B\cup D$

(6) $\mathbb{N}_\mathbb{N}$

(7) $\mathbb{R}_\mathbb{R}$

解 (1) $\mathrm{cardA}=3$

(2) $f:\mathbb{N}\to B, f(x)=x^2$是双射函数，则$\mathrm{cardB}=\aleph_0$

(3) $f:\mathbb{N}\to D, f(x)=x^5$是双射函数，则$\mathrm{cardD}=\aleph_0$

(4) 记$C=B\cap D$，显然$1=1^2=1^5$从而$1\in C$；同时$1024=32^2=4^5$，则$1024\in C$。另外易知C是自然数集$\mathbb{N}$的子集，则$\mathrm{cardC}\leq\aleph_0$。

假设C是有限集，可令a是全序集$\langle\mathbb{N},\leq\rangle$上定义的$C$的最大元。则必有$a\geq 1024$。取$b=a^10=(a^2)^5=(a^5)^2>a$，则$b\in C$，这与$a$是$C$的最大元相矛盾。从而$C$不是有限集，$\mathrm{cardC}\geq\aleph_0$

综上，$\mathrm{cardC}=\aleph_0$

(5) $\aleph_0\leq\mathrm{card(B\cup D)}\leq\aleph_0+\aleph_0=\aleph_0,\therefore\mathrm{card(B\cup D)}=\aleph_0$

(6) $\mathrm{card}(\mathbb{N}_\mathbb{N})=\aleph_0^{\aleph_0}=2^{\aleph_0}=\aleph_1$

(7) $\mathrm{card}(\mathbb{R}_\mathbb{R})=\aleph_1^{\aleph_1}=2^{\aleph_1}=\aleph_2$