9.5

离散数学——第十周作业

计83 刘轩奇 2018011025

2019.11.15

9.13 给定$\mathbb{N}$的下列子集，A,B,C,D为 $A=\{1,2,7,8\}$, $B=\{x|x\bar{\{}\vee\}2<50\}$, $C=\{x|0\leq x\leq 20\wedge$ x可被3整除, $D=\{x|x=2\bar{\{}\vee\}K\wedge K\in\mathbb{N}\wedge 0\leq K\leq 5\}$. 列出下列集合的所有元素。

(3) $B-(A\cup C)$

解 (3) $B-(A\cup C)=\{0,1,2,3,4,5,6,7\}-\{0,1,2,3,6,7,8,9,12,15,18\}=\{4,5\}$

9.14 写出下列集合：

(1) $\cup\{\{3,4\},\{\{3\},\{4\}\},\{3,\{4\}\},\{\{3\},4\}\}$

(2) $\cap\{\{1,2,3\},\{2,3,4\},\{3,4,5\}\}$

解 (1) $\cup\{\{3,4\},\{\{3\},\{4\}\},\{3,\{4\}\},\{\{3\},4\}\}=\{3,4,\{3\},\{4\}\}$

(2) $\cap\{\{1,2,3\},\{2,3,4\},\{3,4,5\}\}=\{3\}$

9.15 写出下列集合，其中：$PP(A)=P(P(A)),PPP(A)=P(P(P(A)))$

(1) $\cup\{PPP(\varnothing),PP(\varnothing),P(\varnothing),\varnothing\}$

(2) $\cap\{PPP(\varnothing),PP(\varnothing),P(\varnothing)\}$

解

$$P(\varnothing)=\{\varnothing\},P(P(\varnothing))=\{\varnothing,\{\varnothing\}\},P(P(P(\varnothing)))=\{\varnothing,\{\varnothing\},\{\{\varnothing\}\},\{\varnothing,\{\varnothing\}\}\}$$

(1) $\cup\{PPP(\varnothing),PP(\varnothing),P(\varnothing),\varnothing\}=\{\varnothing,\{\varnothing\},\{\{\varnothing\}\},\{\varnothing,\{\varnothing\}\}\}$

(2) $\cap\{PPP(\varnothing),PP(\varnothing),P(\varnothing)\}=\{\varnothing\}$

9.16 设$A=\{\{\varnothing\},\{\{\varnothing\}\}\}$，写出集合：

(1) $P(A)$ 和 $\cup P(A)$

(2) $\cup A$ 和 $P(\cup A)$

解 (1) $P(A)=\{\varnothing,\{\{\varnothing\}\},\{\{\{\varnothing\}\}\},\{\{\varnothing\},\{\{\varnothing\}\}\}\},\cup P(A)=\{\{\varnothing\},\{\{\varnothing\}\}\}$

(2) $\cup(A)=\{\varnothing,\{\varnothing\}\},P(\cup(A))=\{\varnothing,\{\varnothing\},\{\{\varnothing\}\},\{\varnothing,\{\varnothing\}\}\}$

9.17 设A,B,C是任意的集合，证明：

(2) $(A-B)-C=(A-C)-(B-C)$

(4) $A\subseteq C\wedge B\subseteq C\Leftrightarrow A\cup B\subseteq C$

解 (2)

$$
\begin{aligned}
&(A-C)-(B-C)\\
=&(A\cup -C)\cup -(B\cup -C)\\
=&(A\cup -C)\cup(-B\cap C)\\
=&(A\cup -C\cup -B)\cap(A\cup -C\cup C)\\
=&(A\cup -B\cup -C)\cap(A\cup E)\\
=&((A-B)-C)\cap E\\
=&(A-B)-C
\end{aligned}
$$

(4) 充分性：

$$A\subseteq C\wedge B\subseteq C\Rightarrow(A\cup B)\subseteq(C\cup C)\Rightarrow A\cup B\subseteq C$$

必要性：若$A\cup B\subseteq C$

任意x，若$x\in A$，则$x\in A\cup B$，从而$x\in C$，则$A\subseteq C$。

任意x，若$x\in B$，则$x\in A\cup B$，从而$x\in C$，则$B\subseteq C$。

$$\therefore A\cup B\subseteq C\Rightarrow A\subseteq C\wedge B\subseteq C$$

9.18 满足下列条件的集合A,B有什么关系？

(1) $A-B=B$

(3) $A\cap B=A\cup B$

答 (1) $A=B=\varnothing$

(3) $A=B$

过程 -0.5

9.19 给出下列命题成立的充要条件：

(2) $(A-B)\cup(A-C)=\varnothing$

(4) $(A-B)\oplus(A-C)=\varnothing$

解 (2)

$$
\begin{aligned}
&(A-B)\cup(A-C)=\varnothing\\
\Longleftrightarrow&(A\cup -B)\cap(A\cup -C)=\varnothing\\
\Longleftrightarrow&A\cap -(B\cap C)=\varnothing\\
\Longleftrightarrow&A\subseteq B\cap C
\end{aligned}
$$

(4)

$$
\begin{aligned}
&(A-B)\oplus(A-C)=\varnothing\\
\Longleftrightarrow&((A-B)-(A-C)\cup((A-C)-(A-B))=\varnothing\\
\Longleftrightarrow&((A\cap -B)\cap -(A\cap -C))\cup((A\cap -C)\cap -(A\cap B))=\varnothing\\
\Longleftrightarrow&((A\cap -B)\cap(-A\cup C))\cup((A\cap -C)\cap(-A\cup B))=\varnothing\\
\Longleftrightarrow&(A\cap -A\cap -B)\cup(A\cap -B\cap C)\cup(A\cap -A\cap -C)\cup(A\cap B\cap -C)=\varnothing\\
\Longleftrightarrow&\varnothing\cup(A\cap -B\cap -C)\cup\varnothing\cup(A\cap B\cap -C)=\varnothing\\
\Longleftrightarrow&A\cap -B\cap C=\varnothing\wedge A\cap B\cap -C=\varnothing\\
\Longleftrightarrow&A-B\subseteq -C\wedge A-C\subseteq -B\\
\Longleftrightarrow&A-B\subseteq A-C\wedge A-C\subseteq A-B &&(*)\text{待后补证}\\
\Longleftrightarrow&A-B=A-C
\end{aligned}
$$

补证(*)$A-B\subseteq -C\Longleftrightarrow A-B\subseteq A-C$

$$
\begin{aligned}
A-B\subseteq -C\Longleftrightarrow&(\forall x)(x\in A-B\to x\in -C)\\
\Longleftrightarrow&(\forall x)((x\in A\wedge x\in -B)\to x\in C)\\
\Longleftrightarrow&(\forall x)((x\in A\wedge x\in -B)\to(x\in A\wedge x\in -C)\\
\Longleftrightarrow&(\forall x)(x\in A-B\to x\in A-C)\\
\Longleftrightarrow&A-B\subseteq A-C
\end{aligned}
$$

9.26 (1) 若 $A\times B=\varnothing$，则A和B应满足什么条件。
(2) 对集合 A，是否可能$A=A\times A$。

答 (1) $A\times B=\varnothing\Longleftrightarrow A=\varnothing\vee B=\varnothing$
(2) $A=A\times A\Longleftrightarrow A=\varnothing$

9.28 求1至250之间被$2,3,5$中任何一个整除的整数的个数。

解 设

$$
\begin{aligned}
E&=\{x|x\in\mathbb{N}\wedge 1\le x\le 250\}\\
A&=\{x|x\equiv 0(\bmod\ 2)\wedge x\in E\}\\
B&=\{x|x\equiv 0(\bmod\ 3)\wedge x\in E\}\\
C&=\{x|x\equiv 0(\bmod\ 5)\wedge x\in E\}
\end{aligned}
$$

$$|A|=\lfloor 250/2\rfloor=125,|B|=\lfloor 250/3\rfloor=83,|C|=\lfloor 250/5\rfloor=50$$

$$|A\cap B|=\lfloor 250/6\rfloor=83,|A\cap C|=\lfloor 250/6\rfloor=25,|B\cap C|=\lfloor 250/15\rfloor=16$$

$$|A\cap B\cap C|=\lfloor 250/30\rfloor=8$$

$$\therefore |A\cup B\cup C| = |A|+|B|+|C|-|A\cup B|-|A\cup C|-|B\cup C|+|A\cup B\cup C|$$
$$= 125+83+50-41-25-16+8 = 184$$

9.30 证明不存在集合A_1, A_2, A_3, A_4使

$$A_4 \in A_3 \wedge A_3 \in A_2 \wedge A_2 \in A_1 \wedge A_1 \in A_4$$

证 假设这样的A_1, A_2, A_3, A_4存在，则令$B = \{A_1, A_2, A_3, A_4\}$
由正则公理，B含有极小项，由对称性不妨设该极小项为A_1。则$A_1 \cap B = \varnothing$。
而$A_2 \in A_1, A_2 \in B$，则$A_2 \in A \cap B$，这与$A_1 \cap B = \varnothing$矛盾。
则假设错误，不存在这样的四个集合。

9.31 证明不存在由所有单元素集合组成的集合。

证 假设存在所有单元素集合组成的集合A。
则令$B = \{A\}$，B是单元素集合，则$B \in A$，而又有$A \in B$，这与定理9.7.7: $\neg(A_1 \in A_2 \wedge A_2 \in A_1)$矛盾。
故假设错误，不存在由所有单元素集合组成的集合。

9.32 证明存在所有素数组成的集合。

证 由无穷公理知自然数集$\mathbb{N}$存在，设谓词$P(x)$表示x为素数，则由子集公理

$$(\exists A)(\forall x)(x \in A \longleftrightarrow x \in \mathbb{N} \wedge P(x))$$

即存在$A = \{x | x为素数 \wedge x \in \mathbb{N}\}$为全体素数组成的集合。

9.33 证明若A是传递集合，则A_+是传递集合。

证

$$\begin{aligned} A\text{为传递集} &\Longleftrightarrow (\forall x)(\forall y)((x \in y \wedge y \in A) \to x \in A) \\ A^+ = A \cup \{A\} &\Longrightarrow (\forall x)(x \in A \to x \in A^+) \\ &\Longleftrightarrow ((\forall x)(\forall y)((x \in y \wedge y = A) \to x \in A^+) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} &A\text{为传递集} \wedge A^+ = A \cup \{A\} \\ \Longrightarrow &((\forall x)(\forall y)((x \in y \wedge y \in A) \to x \in A^+) \wedge (\forall x)(\forall y)((x \in y \wedge y \in A) \to x \in A^+) \\ \Longrightarrow &(\forall x)(\forall y)(((x \in y \wedge y \in A) \to x \in A^+) \wedge (((x \in y \wedge y \in A) \to x \in A^+)) \\ \Longrightarrow &(\forall x)(\forall y)((x \in y) \wedge (y \in A \vee y = A)) \to x \in A^+) \\ \Longrightarrow &(\forall x)(\forall y)((x \in y \wedge y \in A^+) \to x \in A^+) \\ \Longrightarrow &A^+\text{为传递集} \end{aligned}$$