离散数学——第十二周作业

计83 刘轩奇 2018011025

2019.11.29

10.13 对A到B的关系R，$a \in A$，定义B的一个子集$R(a) = \{b|aRb\}$，在$C = \{-4, -3, -2, -1, 0, 1, 2, 3, 4\}$上定义$R = \{\langle x, y\rangle|x\langle y\}$, $S = \{\langle x, y\rangle|x-1 < y < x+2\}$, $\mathrm{T} = \{\langle x, y\rangle|x^2 \leq y\}$，写出集合$R(0), R(1), S(0), S(-1), \mathrm{T}(0), \mathrm{T}(-1)$.

解

$$R(0) = \{1, 2, 3, 4\}$$
$$R(1) = \{2, 3, 4\}$$
$$S(0) = \{0, 1\}$$
$$S(-1) = \{-1, 0\}$$
$$T(0) = \{0, 1, 2, 3, 4\}$$
$$T(1) = \{1, 2, 3, 4\}$$

10.14 对命题："集合A上的一个关系R，如果是对称的和传递的，就一定是自反的。因为xRy和yRx蕴含xRx。"依据定义找出错误。在$\{1, 2, 3\}$上构造一个关系，它是对称的和传递的，但不是自反的。

答 R中可能不存在任何一个y使得xRy, yRx成立，因而xRx不一定成立。
例如空关系是对称且传递的，但不是自反的。

10.15 对集合$A = \{1, 2, 3\}$上，下列8种关系图（图见书第189面，此处省略），说明每个关系具有的性质。

解 如表 10-15 所示。

10.16 对集合$A = \{1, 2, 3, \cdots, 10\}$，$A$上的关系$R$和$S$各有什么性质。

$$R = \{\langle x, y\rangle|x + y = 10\}$$

$$S = \{\langle x, y\rangle|x + y \text{ 是偶数 }\}$$

答 R :对称性；S :自反性、对称性、传递性。

10.17 对A上的关系R，证明：
(1) R是自反的 $\iff I_A \subseteq R$

关系	自反性	反自反性	对称性	传递性	反对称
R_1	×	×	×	×	
R_2	×	×	✓	✓	✓
R_3	✓	×	✓	✓	
R_4	✓	×	×	✓	
R_5	×	×	×	×	
R_6	×	✓	✓	×	
R_7	×	✓	✓	×	✓
R_8	✓	×	✓	×	

表 10-15

证 (1)

充分性 若R是自反的，则$(\forall x)(x \in A \to (x,x) \in R)$

$$\langle x, y\rangle \in I_A \iff x \in A \wedge x = y \implies \langle x, y\rangle \in R \wedge x = y$$

$$\therefore I_A \subseteq R$$

必要性 若$I_A \subseteq R$

$$x \in A \implies \langle x, x\rangle \in I_A \implies \langle x, x\rangle \in R$$

则R是自反的。

10.18 对A上的关系R_1和R_2，判定下列命题的真假。真的证明之，假的举反例。

(1) 若R_1和R_2是自反的，则$R_1 \circ R_2$是自反的。

(3) 若R_1和R_2是对称的，则$R_1 \circ R_2$是对称的。

解 (1) 真。

$$x \in A \implies \langle x, x\rangle \in R_1 \wedge \langle x, x\rangle \in R_2 \implies \langle x, x\rangle \in R_1 \circ R_2$$

(3) 假。反例：

$$A = \{1,2,3\}, R_1 = \{\langle 2,3\rangle, \langle 3,2\rangle\}, R_2 = \{\langle 1,2\rangle, \langle 2,1\rangle\}, R_1 \circ R_2 = \{\langle 1,3\rangle\}$$

不是对称的。

10.19 对集合$A = \{1,2,3\}$，给出A上的关系R的例子，使它具有下列性质。

(1) 对称的且反对称的且传递的。

(3) 不是对称的且不是反对称的且传递的。

答 (1) $R = I_A = \{\langle 1,1\rangle, \langle 2,2\rangle, \langle 3,3\rangle\}$

(3) $R = \{\langle 1,1\rangle, \langle 1,2\rangle, \langle 2,1\rangle, \langle 2,2\rangle, \langle 1,3\rangle, \langle 2,3\rangle\}$

10.20 对集合$A=\{1,2,3,4\}$，A上的关系R为

$$R=\{\langle 1,2\rangle,\langle 4,3\rangle,\langle 2,2\rangle,\langle 2,1\rangle,\langle 3,1\rangle\}$$

说明R不是传递的。构造A上的关系R_1，使$R\subseteq R_1$且R_1是传递的。

解 $\langle 1,2\rangle\in R,\langle 2,1\rangle\in R$,但$\langle 1,1\rangle\notin R$则$R$不是传递的。

$$R_1=\{\langle 1,1\rangle,\langle 1,2\rangle,\langle 2,1\rangle,\langle 2,2\rangle,\langle 3,1\rangle,\langle 3,2\rangle,\langle 4,1\rangle,\langle 4,2\rangle,\langle 4,3\rangle\}$$

10.22 对集合$A=\{a,b,c,d\}$上的两个关系

$$R_1=\{\langle a,a\rangle,\langle a,b\rangle,\langle b,d\rangle\}$$
$$R_2=\{\langle a,d\rangle,\langle b,c\rangle,\langle b,d\rangle,\langle c,b\rangle\}$$

求$R_1\circ R_2$,$R_2\circ R_1$,R_1^2,R_2^2。

解

$$R_1\circ R_2=\{\langle c,d\rangle\}$$
$$R_2\circ R_1=\{\langle a,d\rangle,\langle a,c\rangle\}$$
$$R_1^2=\{\langle a,a\rangle,\langle a,b\rangle,\langle a,d\rangle\}$$
$$R_2^2=\{\langle b,b\rangle,\langle c,c\rangle,\langle c,d\rangle\}$$

10.24 $A=\{a,b,c,d,e\}$上的关系R的关系图如下。给出$r(R),s(R),t(R)$的关系图。

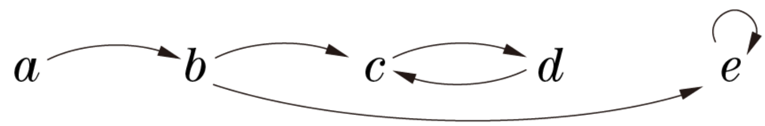
解 如图10-24所示。

10.27 对$A=\{a,b,c,d\}$上的关系

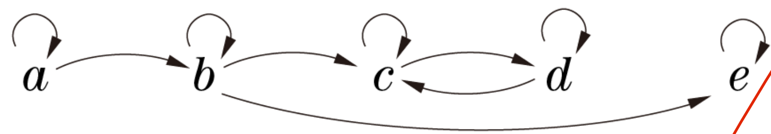
$$R=\{\langle a,b\rangle,\langle b,a\rangle,\langle b,c\rangle,\langle c,d\rangle\}$$

(1) 分别用矩阵运算和作图法求$r(R),s(R),t(R)$。

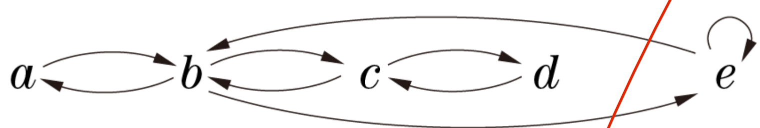
(2) 用Warshall算法求$t(R)$。



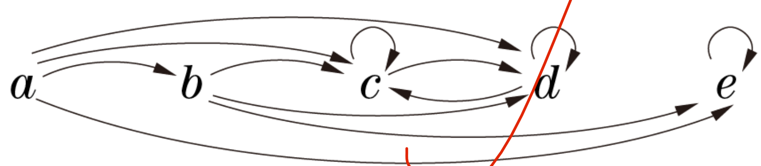
(a) R



(b) $r(R)$



(c) $s(R)$



(d) $t(R)$

图 10-24

解 (1) 矩阵运算法：

$$M(R)=\begin{bmatrix}0&1&0&0\\1&0&1&0\\0&0&0&1\\0&0&0&0\end{bmatrix}$$

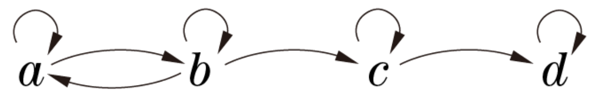
$$M(r(R))=M(R\cup I_A)=\begin{bmatrix}1&1&0&0\\1&1&1&0\\0&0&1&1\\0&0&0&1\end{bmatrix}$$

$$M(s(R))=M(R\cup R^{-1})=\begin{bmatrix}0&1&0&0\\1&0&1&0\\0&1&0&1\\0&0&1&0\end{bmatrix}$$

$$M(t(R))=M(R\cup R^2\cup R^3\cup R^4)=\begin{bmatrix}1&1&1&1\\1&1&1&1\\0&0&0&1\\0&0&0&0\end{bmatrix}$$

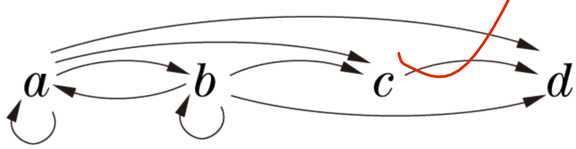
作图法，如图 10-27 所示：

(a) R



(b) $r(R)$

(c) $s(R)$



(d) $t(R)$

图 10-27

以上两种方法均可得

$$
\begin{aligned}
r(R) &= \{\langle a,a\rangle,\langle a,b\rangle,\langle b,a\rangle,\langle b,b\rangle,\langle b,c\rangle,\langle c,c\rangle,\langle c,d\rangle,\langle d,d\rangle\}\\
s(R) &= \{\langle a,b\rangle,\langle b,a\rangle,\langle b,c\rangle,\langle c,b\rangle,\langle c,d\rangle,\langle d,c\rangle\}\\
t(R) &= \{\langle a,a\rangle,\langle a,b\rangle,\langle a,c\rangle,\langle a,d\rangle,\langle b,a\rangle,\langle b,b\rangle,\langle b,c\rangle,\langle b,d\rangle,\langle c,d\rangle\}
\end{aligned}
$$

(2)

$$B = M(R) = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

$$B_1 = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

$$B_2 = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

$$B_3 = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

$$B_4 = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} = M(R_+)$$

$$\therefore t(R) = \{\langle a, a\rangle, \langle a, b\rangle, \langle a, c\rangle, \langle a, d\rangle, \langle b, a\rangle, \langle b, b\rangle, \langle b, c\rangle, \langle b, d\rangle, \langle c, d\rangle\}$$