8.0

离散数学——第六周作业

计83 刘轩奇 2018011025

2019.10.18

3.3 依自然演绎系统证明

(3) $A \to B, A \to \neg B \vdash \neg A$

证 (3)

$$
\begin{aligned}
&(a) A \to B, A \to \neg B, A \vdash A && (\text{肯定前提}) \\
&(b) A \to B, A \to \neg B, A \vdash A \to B && (\text{肯定前提}) \\
&(c) A \to B, A \to \neg B, A \vdash A \to \neg B && (\text{肯定前提}) \\
&(d) A \to B, A \vdash B && (\text{分离规则}) \\
&(e) A \to \neg B, A \vdash \neg B && (\text{分离规则}) \\
&(f) A \to B, A \to \neg B, A \vdash B && ((a)(b)(d)\text{传递律}) \\
&(g) A \to B, A \to \neg B, A \vdash \neg B && ((a)(c)(e)\text{传递律}) \\
&(h) A \to B, A \to \neg B \vdash \neg A && ((f)(g)\text{反证律})
\end{aligned}
$$

4.5 将下列语句符号化

(2) 凡有理数都可写为分数。

(5) 过平面上两个点，有且仅有一条直线通过。

(6) 凡实数都能比较大小。

(7) 在北京工作的人未必都是北京人。

(8) 只有一个北京。

(10) 如果明天天气好，有些学生将去香山。

答 (2) $P(x): x$是有理数；$Q(x): x$可写成分数。

语句可化为$(\forall x)(P(x) \to Q(x))$。

(5) $P(x): x$是平面上的点；$Q(x): x$是直线；$R(x,y): x$通过y。

语句可化为$(\forall x)(\forall y)((P(x) \wedge P(y) \wedge \neg E(x,y))$

(6) $P(x): x$为实数；$Q(x,y): x,y$能比较大小。

语句可化为$(\forall x)(\forall y)((P(x) \wedge P(y)) \to Q(x,y))$

(7) $P(x): x$是人；$Q(x): x$在北京工作；$R(x): x$是北京人。

语句可化为$\neg(\forall x)(P(x) \wedge Q(x) \to R(x))$

(8) $P(x)$: x是北京；$E(x,y)$: x,y相同。
语句可化为$(\exists x)(P(x)\wedge(\forall y)(P(x)\rightarrow E(x,y)))$
(10) P : 明天天气好；$Q(x)$: x是学生；$R(x)$: x去香山。
语句可化为$P\rightarrow(\exists x)(Q(x)\wedge R(x))$

4.6 设$P(x)$表示x是有理数，$Q(x)$表示x是实数，$R(x)$表示x是无理数，$L(x)$表示x是正整数，$S(x)$表示x是偶数，$W(x)$表示x是奇数，试将下列公式翻译成自然语句。
(3) $\neg(\forall x)(Q(x)\rightarrow P(x))$
(6) $(\forall x)(L(x)\rightarrow S(x)\bar{\vee}W(x)))$
(9) $(\forall x)(L(x)\rightarrow P(x))\wedge\neg(\forall x)(P(x)\rightarrow I(x))$

答 (3) 不是所有实数都是有理数。
(6) 任意正整数不是偶数就是奇数。
(9) 任意正整数都是有理数，但并非所有有理数都是正整数。

4.7 设个体域为$\{a,b,c\}$，试将下列公式写成命题逻辑公式
(3) $(\forall x)P(x)\wedge(\exists x)Q(x)$
(4) $(\forall x)(P(x)\rightarrow Q(x))$
(5) $(\forall x)\neg P(x)\vee(\forall x)P(x)$

答 (3) $P(a)\wedge P(b)\wedge P(c)\wedge(Q(a)\vee Q(b)\vee Q(c))$
(4) $(P(a)\rightarrow Q(a))\wedge(P(b)\rightarrow Q(b))\wedge(P(c)\rightarrow Q(c))$
(5) $(\neg P(a)\vee P(a))\wedge(\neg P(b)\vee P(b))\wedge(\neg P(c)\vee P(c))$

4.8 判断下列公式是普遍有效的，不可满足的还是可满足的？
(1) $(\forall x)P(x)\rightarrow P(y)$
(2) $(\exists x)(P(x)\wedge Q(x))\rightarrow((\exists x)P(x)\wedge(\exists x)Q(x))$
(3) $(\forall x)P(x)$
(4) $(\exists x)(P(x)\wedge\neg P(x))$
(5) $(\forall x)(P(x)\rightarrow Q(x))$
(6) $(\forall x)(P(x)\vee\neg P(x))$
(7) $((\exists x)P(x)\wedge(\exists x)Q(x))\rightarrow(\exists x)(P(x)\wedge Q(x))$

答 (1) 普遍有效； (2) 普遍有效； (3) 可满足； (4) 不可满足； (5) 可满足； (6) 普遍有效； (7) 可满足。

4.9 给出一个公式，使其在$\{1,2\}$上是可满足的，而在$\{1\}$上是不可满足的。

答 $P(x):x=2$, 公式: $(\exists x)P(x)$

-2.0，不能对谓词有解释

4.10 设个体域为$\{a,b\}$，并对$P(x,y)$设定为$P(a,a)=\mathrm{T}$, $P(a,b)=\mathrm{F}$, $P(b,a)=\mathrm{F}$, $P(b,b)=\mathrm{T}$，计算下列公式的真值。

(3) $(\forall x)(\forall y)P(x,y)$

(5) $(\exists y)\neg P(a,y)$

(7) $(\forall x)(\forall y)(P(x,y)\rightarrow P(y,x))$

解 (3) $x=a,y=b,P(x,y)=\mathrm{F}$

$\therefore (\forall x)(\forall y)P(x,y)=\mathrm{F}$

(5) $y=b,\neg P(a,y)=\mathrm{T}$

$\therefore (\exists y)\neg P(a,y)=\mathrm{T}$

(7)

$$x=a,y=a,P(x,y)=P(y,x)=\mathrm{T},P(x,y)\rightarrow P(y,x)=\mathrm{T}$$
$$x=a,y=b,P(x,y)=P(y,x)=\mathrm{F},P(x,y)\rightarrow P(y,x)=\mathrm{T}$$
$$x=b,y=a,P(x,y)=P(y,x)=\mathrm{F},P(x,y)\rightarrow P(y,x)=\mathrm{T}$$
$$x=b,y=b,P(x,y)=P(y,x)=\mathrm{T},P(x,y)\rightarrow P(y,x)=\mathrm{T}$$
$$\therefore (\forall x)(\forall y)(P(x,y)\rightarrow P(y,x))=\mathrm{T}$$