



# 第一章 命题逻辑的基本概念

(1.6-2.4)

刘世霞

shixia@tsinghua.edu.cn

# 内容回顾：命题



- 命题
  - 是一个能判断真假且非真即假的陈述句
  - 两个特征
- 简单命题与复合命题



下面哪个是命题

- ☒ A 北京是中国的首都
- ☒ B 任意充分大的偶数都可以表示成两个素数之和
- ☐ C 我正在说假话。
- ☐ D  $x$ 大于 $y$ 。

# 内容回顾：基本复合命题 (5个常用联结词) 的真值表



$p$	$q$	$\neg p$	$p \wedge q$	$p \vee q$	$p \rightarrow q$	$p \leftrightarrow q$
0	0	1	0	0	1	1
0	1	1	0	1	1	0
1	0	0	0	1	0	0
1	1	0	1	1	1	1

# 内容回顾:常用的联结词



五种最基本、最常用的联结词  $\neg$ ,  $\wedge$ ,  $\vee$ ,  $\rightarrow$ ,  $\leftrightarrow$ , 将它们组成一个集合

$\{\neg, \wedge, \vee, \rightarrow, \leftrightarrow\}$ ,

称为一个**联结词集**。

其中 $\neg$ 为**一元联结词**,

其余的都是**二元联结词**。



# 内容回顾：关于联结词的几点说明

- 对简单命题多次使用联结词集中的联结词，可以组成更为复杂的复合命题。
- 求复合命题的真值时，除依据前面的真值表外，还要规定联结词的优先顺序
- 教材中规定的**联结词优先顺序**为：

$( ) , \neg , \wedge , \vee , \rightarrow , \leftrightarrow ,$

同一优先级的联结词，先出现者先运算。



# 析取联结词 “ $\vee$ ” 与 异或 “ $\bar{\vee}$ ” 的真值表

(注:  $\bar{\vee}$  为  $\vee$  上面加一横, 见教材P10, 不可兼或)

$p$	$q$	$p \vee q$
0	0	0
0	1	1
1	0	1
1	1	1

$p$	$q$	$p \bar{\vee} q$
0	0	0
0	1	1
1	0	1
1	1	0



# 内容回顾：合式公式(命题公式)的定义

定义1.6 合式公式 ( wff ) (well formed formulas)

- (1) 单个命题变项是合式公式，并称为原子命题公式。
- (2) 若 $A$ 是合式公式，则  $(\neg A)$  也是合式公式。
- (3) 若 $A, B$ 是合式公式，则  $(A \wedge B)$  ,  $(A \vee B)$  ,  $(A \rightarrow B)$  ,  $(A \leftrightarrow B)$  也是合式公式。
- (4) 只有有限次地应用 (1)  $\sim$  (3) 形成的符号串才是合式公式。

合式公式也称为命题公式或命题形式，简称公式。



# 内容回顾：命题公式的赋值或解释



## 定义1.7 赋值或解释

设 $p_1, p_2, \dots, p_n$ 是出现在公式 $A$ 中的全部的命题变项，给 $p_1, p_2, \dots, p_n$ 各指定一个真值，称为对 $A$ 的一个赋值或解释。

若一组值使 $A$ 的真值为1，则称这组值为 $A$ 的成真赋值；

若使 $A$ 的真值为0，则称这组值为 $A$ 的成假赋值。

# 内容回顾：真值表及其构造方法



- 真值表：将命题公式 $A$ 在所有赋值下的取值情况列成表，称作 $A$ 的真值表。
- 步骤
  - 找出全体命题变项 $p_1, p_2, \dots, p_n$ ，列出 $2^n$ 个赋值。规定赋值从 $00\dots 0$ 开始，然后按二进制加法，直到 $11\dots 1$ 为止。
  - 按照运算的优先次序写出各子公式。
  - 对应各个赋值计算出各子公式的真值，直到最后计算出公式的真值。



# 内容回顾： $p \wedge (p \rightarrow q) \rightarrow q$ 的真值表

$p$	$q$	$p \rightarrow q$	$p \wedge (p \rightarrow q)$	$p \wedge (p \rightarrow q) \rightarrow q$
0	0	1	0	1
0	1	1	0	1
1	0	0	0	1
1	1	1	1	1

# 内容回顾：命题公式的分类



设 $A$ 为任一命题公式，

1. 若 $A$ 在它的各种赋值下取值均为真，则称 $A$ 是**重言式**或**永真式**。
2. 若 $A$ 在它的各种赋值下取值均为假，则称 $A$ 是**矛盾式**或**永假式**。
3. 若 $A$ 不是矛盾式，则称 $A$ 是**可满足式**

# 内容回顾：重言式与代入规则



## 代入规则

一个**重言式**，对其中所有相同的命题变项都用一合式公式代换，其结果仍为一重言式。这一规则称为代入规则。

换句话说， $A$ 是一个公式，对 $A$ 使用代入规则得到公式 $B$ ，若 $A$ 是重言式，则 $B$ 也是重言式。



# 内容回顾：代入规则的具体要求为

- 公式中被代换的只能是命题变项（原子命题），而不能是复合命题。
- 对公式中某命题变项施以代入，必须对该公式中出现的所有同一命题变项施以相同的代换。

# 实例



例2： 判断  $((R \vee S) \wedge ((R \vee S) \rightarrow (P \vee Q))) \rightarrow (P \vee Q)$  为重言式.

不难验证  $(A \wedge (A \rightarrow B)) \rightarrow B$  是重言式。作代入：

$$\frac{A}{(R \vee S)}, \frac{B}{(P \vee Q)}$$

便知  $((R \vee S) \wedge ((R \vee S) \rightarrow (P \vee Q))) \rightarrow (P \vee Q)$  是重言式。

# 内容回顾：命题形式化



所谓命题形式化（符号化），就是用命题公式的符号串来表示给定的命题。

- 命题符号化的方法

1. 明确给定命题的含义。
2. 对复合命题，找联结词，分解出各个原子命题。
3. 设原子命题符号，并用逻辑联结词联结原子命题符号，构成给定命题的符号表达式。

**化繁为简，各个击破**



例6：若天不下雨，我就上街；否则在家。



设  $P$ ：天下雨。 $Q$ ：我上街。 $R$ ：我在家。

该命题可写成： $(\neg P \rightarrow Q) \wedge (P \rightarrow R)$ 。

**注意：**中间的联结词一定是“ $\wedge$ ”，而不是“ $\vee$ ”，也不是“ $\nabla$ ”。

因为原命题表示：“**天不下雨时我做什么，天下雨我又做什么**”的**两种作法**，其中有一种作法是假的，则我说的是假话，所以中间的联结词一定是“ $\wedge$ ”。

问题：若天不下雨，我就上街；否则在家



P Q R	$\neg P$	$\neg P \rightarrow Q$	$P \rightarrow R$	$(\neg P \rightarrow Q) \wedge (P \rightarrow R)$
0 0 0	1	0	1	0
0 0 1	1	0	1	0
0 1 0	1	1	1	1
0 1 1	1	1	1	1
1 0 0	0	0	1	0
1 0 1	0	1	1	1
1 1 0	0	1	0	0
1 1 1	0	1	1	1



例6：若天不下雨，我就上街；否则在家

P：天下雨。Q：我上街。R：我在家。

该命题可写成：  $(\neg P \rightarrow Q) \wedge (P \rightarrow R) \wedge \neg(Q \wedge R)$

还可以形式化为：  $(\neg P \wedge Q \wedge \neg R) \vee (P \wedge \neg Q \wedge R)$

问题：若天不下雨，我就上街；否则在家



P Q R	P	$\neg P \rightarrow Q$	$P \rightarrow R$	$(\neg P \rightarrow Q) \wedge (P \rightarrow R)$ $\wedge \neg(Q \wedge R)$
0 0 0	1	0	1	0
0 0 1	1	0	1	0
0 1 0	1	1	1	1
0 1 1	1	1	1	0
1 0 0	0	0	1	0
1 0 1	0	1	1	1
1 1 0	0	1	0	0
1 1 1	0	1	1	0



清華大學

Tsinghua University

# 悖论简介

刘世霞

shixia@tsinghua.edu.cn

# 我正在说假话



- 真 $\rightarrow$ 假
- 假 $\rightarrow$ 真
- 既不能为真，也不能为假

悖论

# 悖论 (Paradox)



- 悖论是自相矛盾的陈述 (statement)。即如果承认这个陈述成立，就可推出它的否定陈述成立；反之，如果承认这个陈述的否定陈述成立，又可推出这个陈述成立

A paradox is a statement or group of statements that leads to a contradiction or a situation which defies intuition

# 悖论 (Paradox)



逻辑学名词。一陈述 $B$ ，如果承认 $B$ ，可推得 $\neg B$ 成立。

反之，如果承认 $\neg B$ ，又可推得  $B$  成立，称陈述 $B$ 为一**悖论**。

——《辞海》，P869



# 悖论 (Paradox)



一个论证能够导出与一般判断相反的结果，而要推翻它又很难给出正当的根据时，这种论证称为悖论。特别是，如果一个命题及其否定均可用逻辑上等价的推理加以证明，而对其推导又无法明确指出错误时，这种矛盾称为谬论 (Antinomy)。但在实用中并未将悖论与谬论严加区别，而把它们当作同义语。

——《数学百科全书》，P6

# 三个著名悖论



- 1900年前后, 在数学的集合论中出现了三个著名悖论: 罗素悖论、康托尔悖论、布拉利—福尔蒂悖论。这些悖论特别是罗素悖论, 在当时的数学界与逻辑界内引起了极大震动。触发了数学的第三次危机
  - 罗素悖论: 所有集合组成的集合
  - 康托尔悖论: 没有最大的基数
  - 布拉利—福尔蒂悖论: 最大序数悖论



1902年罗素发现了集合论中的一个悖论，在数学界引起了震惊。

(内容见教材P131，留待后面章节介绍)

# 罗素悖论



- 例如比较有名的理发师(罗素)悖论：某乡村有一位理发师，一天他宣布：只给不自己刮胡子的人刮胡子。这里就产生了问题：
- 理发师给不给自己刮胡子？如果他给自己刮胡子，他就是自己刮胡子的人，按照他的原则，他不能给自己刮胡子；如果他不给自己刮胡子，他就是不自己刮胡子的人，按照他的原则，他就应该给自己刮胡子。这就产生了矛盾。



# 书中习题的解释

考察如下两句话：

1. “这句话是错的。”
2. “本页上这一行的这句话是假话。”

问题：这句话究竟是真话还是假话！

# 书中习题的解释



若承认这句话的内容是对的，即承认这句话的断言为真，则可推出这句话是假话；

反之，若承认这句话的内容是不对的，即承认这句话的断言为假，则可推出这句话是真话。

这种语句称为“自指谓”语句。它的结论是对自身而言的。往往会产生自相矛盾的结论。

# 悖论举例1



## Liar Paradox (说谎悖论, 谎言悖论)

Consider a man who asserts "*I am lying.*"

Is he lying or is he speaking the truth?



# 悖论举例1

如果承认他在说谎，这表明：“我在说谎”是谎话，  
→他在讲真话（即没有说谎）。

如果承认他讲真话，这表明：“我在说谎”是真话，  
→他确实在说谎（即没有讲真话）。

可见，断言 “*I am lying*” is a paradox。  
无法判断其真假。



## 悖论举例2



古代有一个小国，百姓犯罪后，若被处以极刑有两种方式：

1. 若说真话，则上天堂（处以绞刑）
2. 若说假话，则下地狱（将被活埋）

一个逻辑学家犯罪后，在被处以极刑前稍加思索后说了一句话，令执行官左右为难，只得将他赦免。

问题：逻辑学家说的这句话的内容是什么？

1. 若说真话，则上天堂（处以绞刑）
2. 若说假话，则下地狱（将被活埋）

## 悖论举例2

逻辑学家说：“我将下地狱”（或“我将被活埋”）。

若承认为真话，则应处以绞刑；

但若施以绞刑，则“我将被活埋”应为假话。

若承认为假话，则应将其活埋；

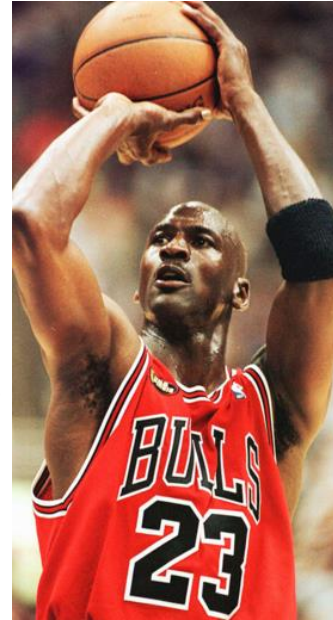
但若将其活埋，“我将被活埋”将变成真话。



# 更多举例



- 自相矛盾
- 先有鸡，还是先有蛋？
- 两小儿辩日
- 纸牌悖论（乔丹真值悖论）
- 上帝和石头



Michael  
Philip Jordan  
Jourdain



Michael  
Jordan



# 重要结论

数理逻辑中将类似上述悖论形式的陈述句排除在命题之外。

## 1.6 波兰表达式



括号的使用，联结词的中辍、前辍、后辍形式的选择，都直接影响到同一公式描述和计算的复杂程度。

若用计算机来识别、计算、处理逻辑公式，不同的表示方法会带来不同的效率。

## 1.6.1 计算机识别括号的过程



合式公式的定义中使用的是联结词的**中缀**表示，又引入括号以便区分运算次序，这些都是人们常用的方法。

计算机识别处理这种中缀表示的公式，需反复自左向右，自右向左的扫描。

如考察下面公式真值的计算过程

$$(P \vee (Q \wedge R)) \vee (S \wedge T)$$

$$(P \vee (Q \wedge R)) \vee (S \wedge T)$$

## 1.6.1 计算机识别括号的过程



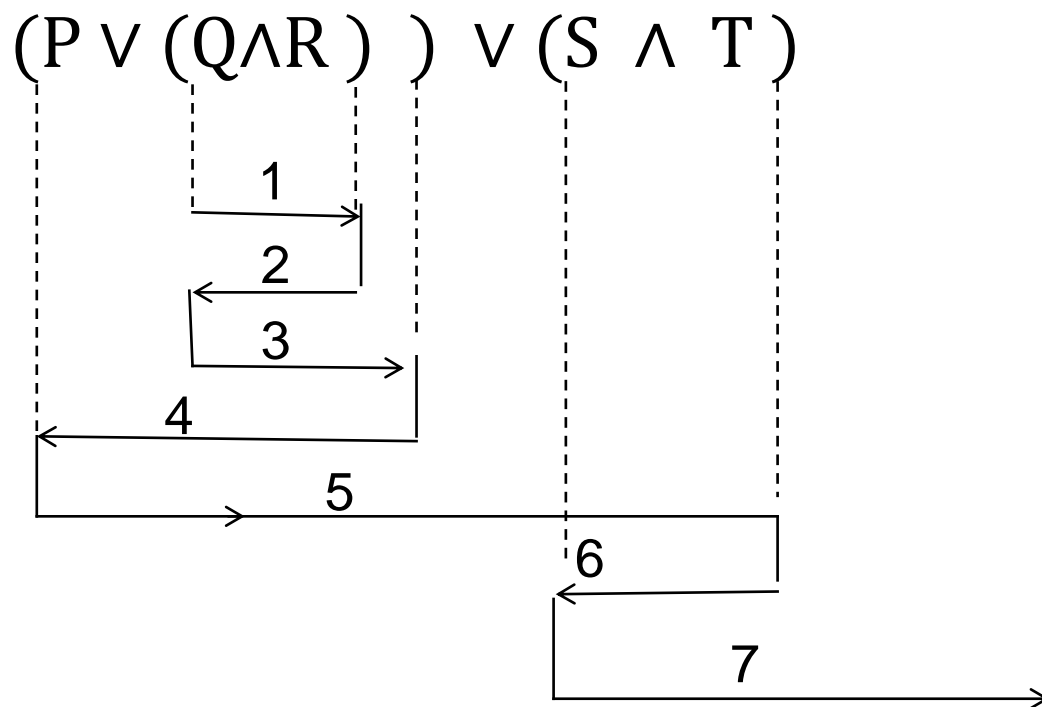
开始从左向右扫描，至发现第一个右半括号为止，便返回至最近的左半括号，得部分公式 $(Q \wedge R)$ 方可计算真值。

随后又向右扫描，至发现第二个右半括号，便返回至第二个左半括号，于是得部分公式 $(P \vee (Q \wedge R))$ 并计算真值，重复这个过程直至计算结束。

## 1.6.1 计算机识别括号的过程



如图1.6.1所示的扫描过程 $1 \rightarrow 2 \rightarrow 3 \rightarrow \dots \rightarrow 6 \rightarrow 7$ 。





## 1.6.1 计算机识别括号的过程



公式中的运算符是否非要括号才能定义呢？

若一个式子中同时使用**两种或两种以上**运算符放置方式时，无论对运算符的优先级怎样进行规定，括号都不能完全避免。

例如：对数运算符  $\log$  是前置运算符；

阶乘运算符  $!$  是后置运算符；

## 1.6.1 计算机识别括号的过程



解决方案： 可以采用下面的方法

将中置、后置全部换成前置

或将中置、前置全部换成后置

这样，便可不使用任何括号。



## 1.6.2 波兰式

一般而言，使用联结词构成公式有三种方式，

中置式如  $P \vee Q$  (中缀式)

前置式如  $\vee PQ$  (前缀式)

后置式如  $PQ \vee$  (后缀式)

前置式用于逻辑学是由波兰的数理逻辑学家 J. Lukasiewicz 提出的，故称之为波兰表达式。

## 1.6.2 波兰式



- 如将公式 $P \vee ((Q \wedge R) \wedge S)$ 的这种中置表示化成波兰式，可由内层括号逐步向外层脱开(或由外层向内逐层脱开) 的办法。

如图1.6.2



## 1.6.2 波兰式

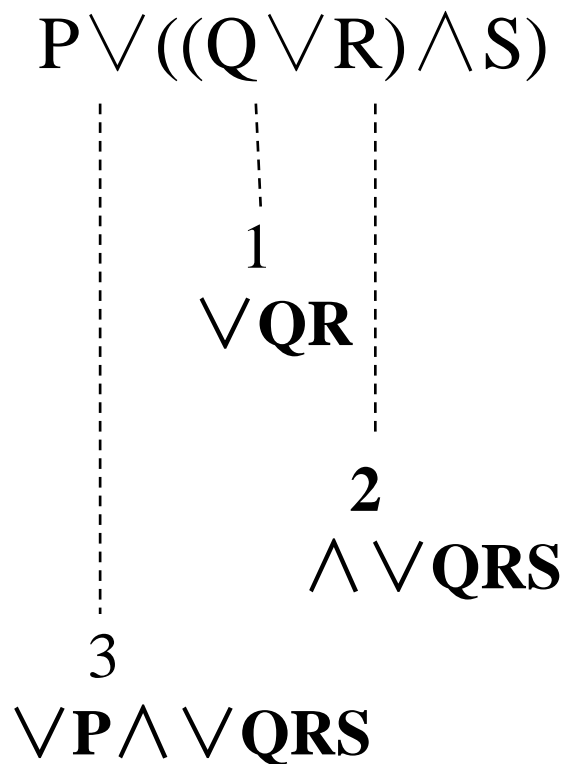


图1.6.2

## 1.6.2 波兰式



- 以波兰式表达的公式，当计算机识别处理时，可自右向左扫描一次完成，避免了重复扫描。
- 同样后置表示（逆波兰式）也有类似的优点。而且自左向右一次扫描（看起来更合理）可识别处理一个公式，非常方便，常为计算机的程序系统所采用。
- 只不过这种表示的公式，人们阅读起来不大习惯。

## 1.6.2 中置变前置 $P \vee ((Q \vee R) \wedge S)$



由里向外:

$$P \vee ((Q \vee R) \wedge S)$$

$$P \vee (\vee QR \wedge S)$$

$$P \vee \wedge \vee QRS$$

$$\vee P \wedge \vee QRS$$

由外向里:

$$P \vee ((Q \vee R) \wedge S)$$

$$\vee P ((Q \vee R) \wedge S)$$

$$\vee P \wedge (Q \vee R) S$$

$$\vee P \wedge \vee QRS$$



## 1.6.2 波兰式

举例：中置变后置  $P \vee ((Q \vee R) \wedge S)$

$$P \vee ((Q \vee R) \wedge S)$$

$$P ((Q \vee R) \wedge S) \vee$$

$$P (Q \vee R) S \wedge \vee$$

$$P QR \vee S \wedge \vee$$





是否还有其他转换方式？

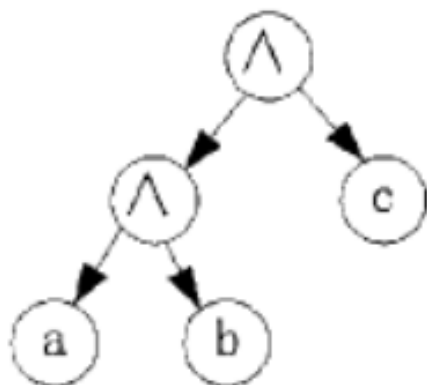


- 可以借助二叉树的前序与后序遍历，简化表达式中缀表示与前缀表示以及后缀表示间的转化。
- 根据表达式首先建立二叉树
- 然后借助二叉树的前序（后序）遍历得到表达式的前缀（后缀）表示

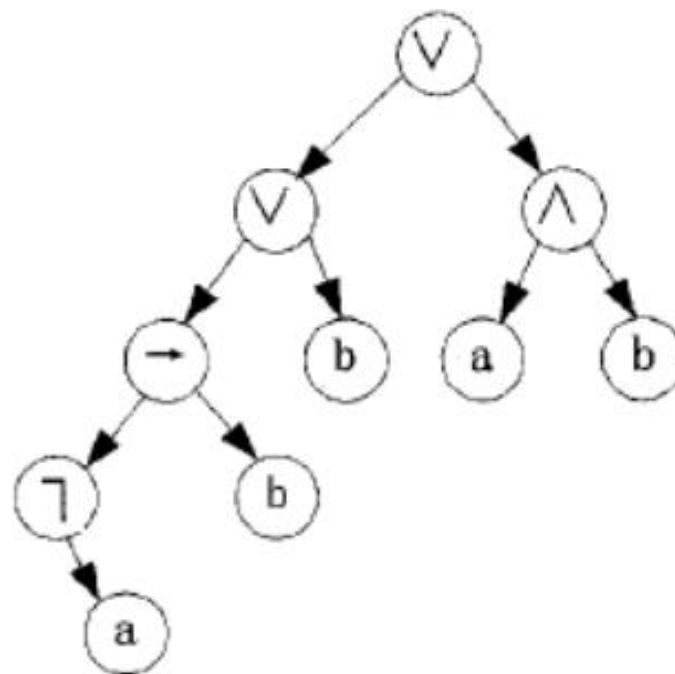
# 二叉树表示法



$$B = a \wedge b \wedge c$$



$$D = (\neg \rightarrow b) \vee b \vee (a \wedge c)$$





# 第一章小结

## 命题逻辑 (Logic)

- 研究命题的推理演算
- 命题逻辑的应用
  - 数学上定理的推导
  - 在计算机科学上，验证程序的正确性

## 主要内容

- 命题的基本概念
- 命题联结词
- 命题合式公式、重言式
- 自然语句的形式化

# 第一章小结（续）



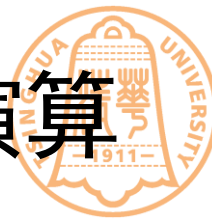
- 本章主要介绍了命题逻辑的基本概念，它是后面两章的基础；
- 介绍了命题、命题变项、简单命题和复合命题；
- 介绍了命题联结词及其真值表
  - 否定联结词  $\neg$
  - 合取联结词  $\wedge$
  - 析取联结词  $\vee$
  - 蕴涵联结词  $\rightarrow$
  - 双蕴涵联结词  $\leftrightarrow$

# 第一章小结（续）



- 介绍了合式公式及其递归定义；
- 介绍了重言式、矛盾式和可满足式；在此基础上，介绍了代入规则以及如何利用代入规则证明重言式；
- 介绍了如何形成自然语句的合式公式（命题的形式化）以及较为复杂的自然语句形式化；
- 介绍了计算机识别合式公式（括号）的过程，在此基础上，介绍了波兰表达式及其在计算机识别处理过程的优势。

# 第二章：命题逻辑的等值和推理演算



2.1 等值定理

2.2 等值公式

2.3 命题公式与真值表的关系

2.4 联接词的完备集

2.5 对偶式

2.6 范式

2.7 推理形式

2.8 基本的推理公式

2.9 推理演算

2.10 归结推理法

# 前言



- **推理形式**和**推理演算**是数理逻辑研究的基本内容
- **推理形式**是由前提和结论经蕴涵词联结而成的
- **推理过程**是从**前提**出发，根据所规定的**规则**来推导出**结论**的过程
- **重言式**是重要的逻辑规律，正确的推理形式、等值式都是重言式





## 2.1 等值定理

等值:

给定两个命题公式  $A$  和  $B$ , 设  $P_1, P_2, \dots, P_n$  为出现于  $A$  和  $B$  中的所有命题变项, 则公式  $A$  和  $B$  共有  $2^n$  个解释。

若在任一解释下, 公式  $A$  和  $B$  的真值都相同, 则称  $A$  和  $B$  是等值的、或称等价记作

$$A=B \text{ 或 } A \Leftrightarrow B。$$



# 判断公式是否等值

- $P \rightarrow (Q \rightarrow R)$  与  $(P \wedge Q) \rightarrow R$
- $(P \rightarrow Q) \rightarrow R$  与  $(P \wedge Q) \rightarrow R$

# $P \rightarrow (Q \rightarrow R)$ 与 $(P \wedge Q) \rightarrow R$ $(P \rightarrow Q) \rightarrow R$ 与 $(P \wedge Q) \rightarrow R$



$P$	$Q$	$R$	$Q \rightarrow R$	$P \wedge Q$	$P \rightarrow Q$	$P \rightarrow (Q \rightarrow R)$	$(P \wedge Q) \rightarrow R$	$(P \rightarrow Q) \rightarrow R$
0	0	0	1					
0	0	1	1					
0	1	0	0					
0	1	1	1					
1	0	0	1					
1	0	1	1					
1	1	0	0					
1	1	1	1					

# $P \rightarrow (Q \rightarrow R)$ 与 $(P \wedge Q) \rightarrow R$ $(P \rightarrow Q) \rightarrow R$ 与 $(P \wedge Q) \rightarrow R$



$P$	$Q$	$R$	$Q \rightarrow R$	$P \wedge Q$	$P \rightarrow Q$	$P \rightarrow (Q \rightarrow R)$	$(P \wedge Q) \rightarrow R$	$(P \rightarrow Q) \rightarrow R$
0	0	0	1			1		
0	0	1	1			1		
0	1	0	0			1		
0	1	1	1			1		
1	0	0	1			1		
1	0	1	1			1		
1	1	0	0			0		
1	1	1	1			1		

# $P \rightarrow (Q \rightarrow R)$ 与 $(P \wedge Q) \rightarrow R$ $(P \rightarrow Q) \rightarrow R$ 与 $(P \wedge Q) \rightarrow R$



$P$	$Q$	$R$	$Q \rightarrow R$	$P \wedge Q$	$P \rightarrow Q$	$P \rightarrow (Q \rightarrow R)$	$(P \wedge Q) \rightarrow R$	$(P \rightarrow Q) \rightarrow R$
0	0	0	1	0		1		
0	0	1	1	0		1		
0	1	0	0	0		1		
0	1	1	1	0		1		
1	0	0	1	0		1		
1	0	1	1	0		1		
1	1	0	0	1		0		
1	1	1	1	1		1		

# $P \rightarrow (Q \rightarrow R)$ 与 $(P \wedge Q) \rightarrow R$ $(P \rightarrow Q) \rightarrow R$ 与 $(P \wedge Q) \rightarrow R$



$P$	$Q$	$R$	$Q \rightarrow R$	$P \wedge Q$	$P \rightarrow Q$	$P \rightarrow (Q \rightarrow R)$	$(P \wedge Q) \rightarrow R$	$(P \rightarrow Q) \rightarrow R$
0	0	0	1	0		1	1	
0	0	1	1	0		1	1	
0	1	0	0	0		1	1	
0	1	1						
1	0	0	1	0		1	1	
1	0	1	1	0		1	1	
1	1	0	0	1		0	0	
1	1	1	1	1		1	1	

$$P \rightarrow (Q \rightarrow R) = (P \wedge Q) \rightarrow R$$

# $P \rightarrow (Q \rightarrow R)$ 与 $(P \wedge Q) \rightarrow R$ $(P \rightarrow Q) \rightarrow R$ 与 $(P \wedge Q) \rightarrow R$



$P$	$Q$	$R$	$Q \rightarrow R$	$P \wedge Q$	$P \rightarrow Q$	$P \rightarrow (Q \rightarrow R)$	$(P \wedge Q) \rightarrow R$	$(P \rightarrow Q) \rightarrow R$
0	0	0	1	0	1	1	1	
0	0	1	1	0	1	1	1	
0	1	0	0	0	1	1	1	
0	1	1	1	0	1	1	1	
1	0	0	1	0	0	1	1	
1	0	1	1	0	0	1	1	
1	1	0	0	1	1	0	0	
1	1	1	1	1	1	1	1	

# $P \rightarrow (Q \rightarrow R)$ 与 $(P \wedge Q) \rightarrow R$ $(P \rightarrow Q) \rightarrow R$ 与 $(P \wedge Q) \rightarrow R$



$P$	$Q$	$R$	$Q \rightarrow R$	$P \wedge Q$	$P \rightarrow Q$	$P \rightarrow (Q \rightarrow R)$	$(P \wedge Q) \rightarrow R$	$(P \rightarrow Q) \rightarrow R$
0	0	0	1	0	1	1	1	0
0	0	1	1	0	1	1	1	1
0	1	0	0	0	1	1	1	0
0	1	1	1	0	1	1	1	1
1	0	0	1	0	0	1	1	1
1	0	1	1	0	0	1	1	1
1	1	0	0	1	1	0	0	0
1	1	1	1	1	1	1	1	1

$$(P \rightarrow Q) \rightarrow R \neq (P \wedge Q) \rightarrow R$$



## 2.1 等值定理



- 定理2.1.1

设 $A$ ,  $B$ 为两个命题公式,  $A = B$ 的充分必要条件是 $A \leftrightarrow B$ 为一个重言式。



# 等值定理的证明

## 1. 必要性: $\leftarrow$

若  $A \leftrightarrow B$  是重言式, 则在任一解释下,  $A \leftrightarrow B$  的真值均为真。

由  $A \leftrightarrow B$  的定义, 仅当  $A$ 、 $B$  真假值相同时, 才有  $A \leftrightarrow B = T$ 。

所以在任一解释下,  $A$ 、 $B$  都有相同的真值, 从而有  $A = B$ 。

# 等值定理的证明



## 2. 充分性: $\rightarrow$

若有  $A = B$ , 则在任一解释下,  $A$  和  $B$  都有相同的真值, 依  $A \leftrightarrow B$  的定义,  $A \leftrightarrow B$  的取值一定为真, 故推出  $A \leftrightarrow B$  是重言式。

证毕



# 等值定理

等值定理的实用性之一：

若证明两个公式等值，只要证明由这两个公式构成的双条件式是重言式。

等值关系满足等价关系的三个性质：

**自反性**      $A = A.$

**对称性**     若  $A = B$ ，则  $B = A.$

**等价关系**

**传递性**     若  $A = B$ ， $B = C$ ，则  $A = C$

# 逆命题、否命题与逆否命题

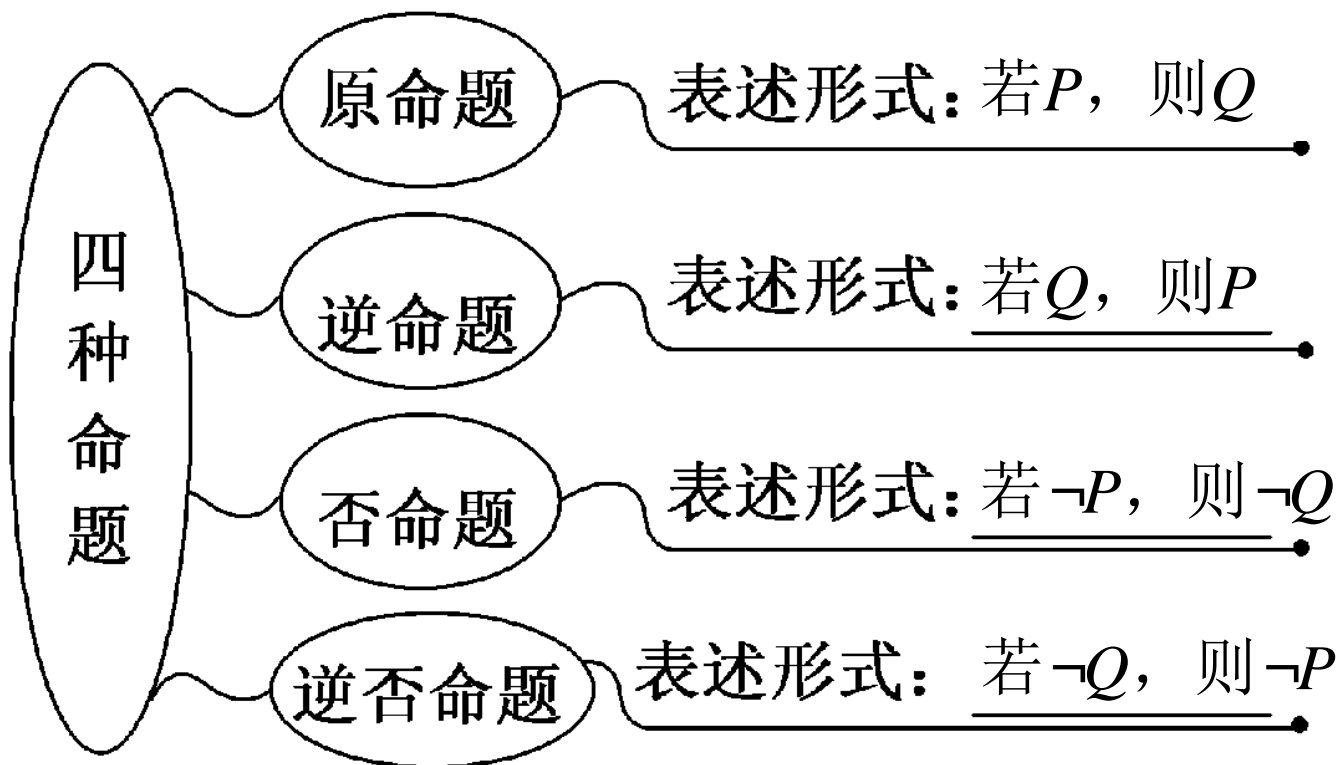


逆命题： 若将 $P \rightarrow Q$ 视为原命题，则称 $Q \rightarrow P$ 为它的逆命题。

否命题： 若将 $P \rightarrow Q$ 视为原命题，则称 $\neg P \rightarrow \neg Q$ 为它的否命题。

逆否命题： 若将 $P \rightarrow Q$ 视为原命题，则称 $\neg Q \rightarrow \neg P$ 为它的逆否命题。

# 四种命题



# 逆命题、否命题与逆否命题



## 两个重要结论

1. 一个命题（原命题）与它的逆否命题等值

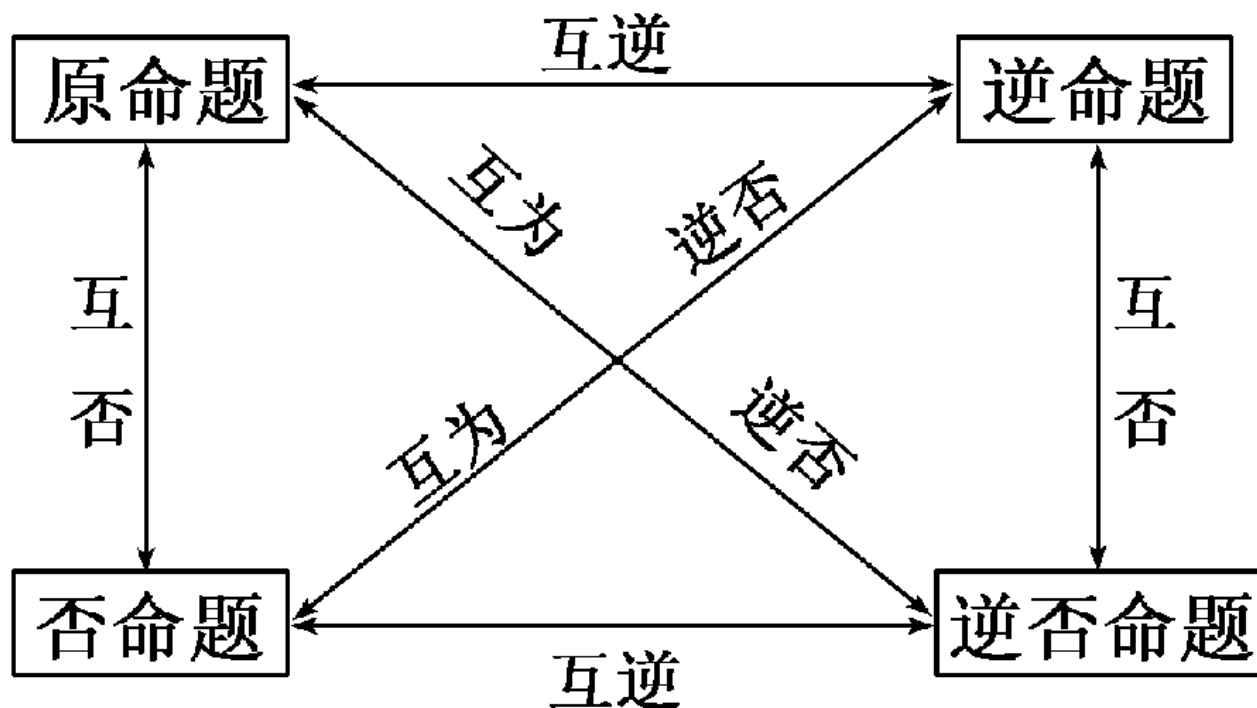
$$\text{即 } P \rightarrow Q = \neg Q \rightarrow \neg P$$

2. 一个命题的逆命题与它的否命题等值

$$\text{即 } Q \rightarrow P = \neg P \rightarrow \neg Q$$

**举例** 证明 若 $a^2$ 是偶数，则 $a$ 是偶数。利用结论1。

# 四种命题间的逆否关系







## 2.2 等值公式

### 2.2.1 子公式

若 $X$ 是合式公式 $A$ 的一部分，且 $X$ 本身也是一个合式公式，则称 $X$ 为公式 $A$ 的子公式。



## 2.2 等值公式

### 2.2.2 置换规则

设 $X$ 为公式 $A$ 的子公式，用与 $X$ 等值的公式 $Y$ 将 $A$ 中的 $X$ 施以代换，称为置换，该规则称为置换规则。

置换后公式 $A$ 化为公式 $B$ ，置换规则的性质保证公式 $A$ 与公式 $B$ 等值，即 $A=B$ 。

且当 $A$ 是重言式时，置换后的公式 $B$ 也是重言式。

## 2.2 等值公式



定理2.2.1:

设  $\Phi(A)$  是含命题公式  $A$  的命题公式,  $\Phi(B)$  是用命题公式  $B$  替换了  $\Phi(A)$  中的  $A$  之后得到的命题公式

如果  $A = B$ , 则  $\Phi(A) = \Phi(B)$ 。



## 2.2.1 基本的等值公式(命题定律)

### 1. 双重否定律

$$\neg\neg P = P$$

### 2. 结合律

$$(P \vee Q) \vee R = P \vee (Q \vee R)$$

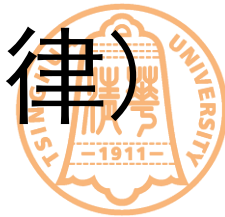
$$(P \wedge Q) \wedge R = P \wedge (Q \wedge R)$$

$$(P \leftrightarrow Q) \leftrightarrow R = P \leftrightarrow (Q \leftrightarrow R)$$

$$(P \rightarrow Q) \rightarrow R \neq P \rightarrow (Q \rightarrow R)$$

“ $\rightarrow$ ” 不满足结合律

## 2.2.1 基本的等值公式(命题定律)



### 3. 交换律

$$P \vee Q = Q \vee P$$

$$P \wedge Q = Q \wedge P$$

$$P \leftrightarrow Q = Q \leftrightarrow P$$

$$P \rightarrow Q \neq Q \rightarrow P$$

“ $\rightarrow$ ” 不满足交换律

## 2.2.1 基本的等值公式(命题定律)



### 4. 分配律

$$P \vee (Q \wedge R) = (P \vee Q) \wedge (P \vee R)$$

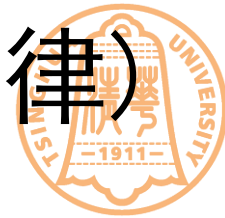
$$P \wedge (Q \vee R) = (P \wedge Q) \vee (P \wedge R)$$

$$P \rightarrow (Q \rightarrow R) = (P \rightarrow Q) \rightarrow (P \rightarrow R)$$

$$P \leftrightarrow (Q \leftrightarrow R) \neq (P \leftrightarrow Q) \leftrightarrow (P \leftrightarrow R)$$

“ $\leftrightarrow$ ” 不满足分配律

## 2.2.1 基本的等值公式(命题定律)



### 5. 等幂律 (恒等律)

$$P \vee P = P$$

$$P \wedge P = P$$

$$P \rightarrow P = T$$

$$P \leftrightarrow P = T$$

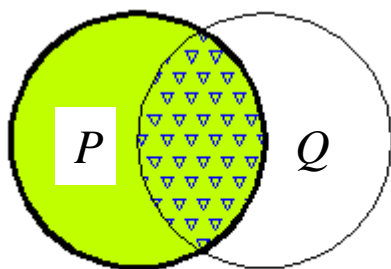
## 2.2.1 基本的等值公式(命题定律)



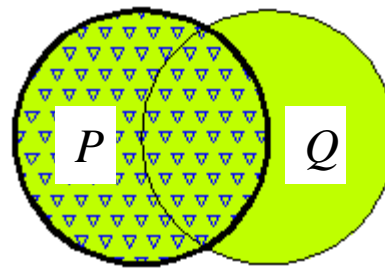
### 6. 吸收律

$$P \vee (P \wedge Q) = P$$

$$P \wedge (P \vee Q) = P$$



$$P \vee (P \wedge Q)$$



$$P \wedge (P \vee Q)$$



## 2.2.1 基本的等值公式(命题定律)



7. 摩根 (De Morgan) 律:

$$\neg(P \vee Q) = \neg P \wedge \neg Q$$

$$\neg(P \wedge Q) = \neg P \vee \neg Q$$

对蕴含词、双条件词作否定有

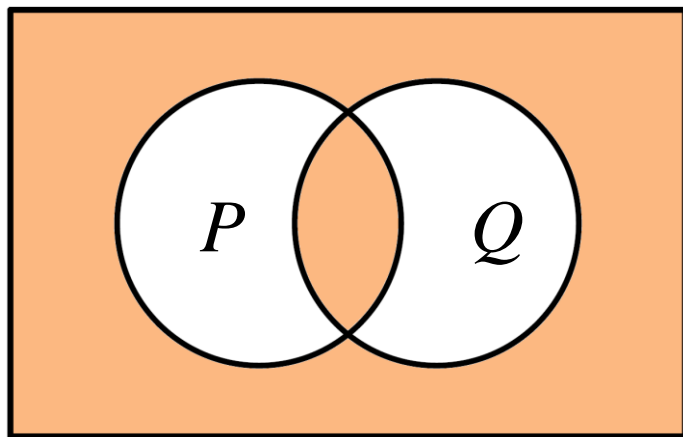
$$\neg(P \rightarrow Q) = P \wedge \neg Q$$

$$\begin{aligned}\neg(P \leftrightarrow Q) &= \neg P \leftrightarrow Q = P \leftrightarrow \neg Q \\ &= (\neg P \wedge Q) \vee (P \wedge \neg Q) \quad (\text{借助图形})\end{aligned}$$

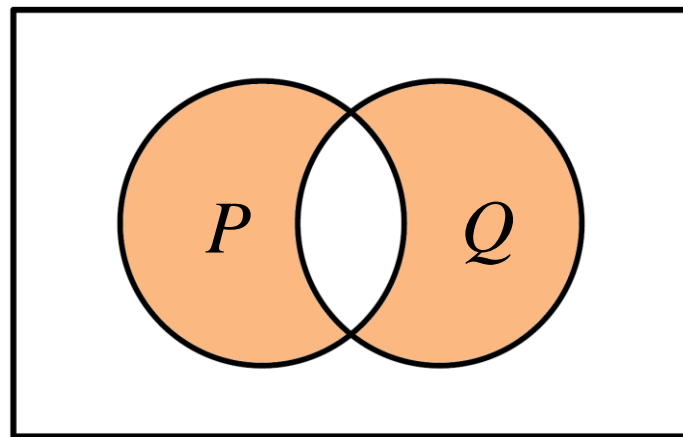
# $P \leftrightarrow Q$ 和 $\neg(P \leftrightarrow Q)$ 的文氏图



- $P \leftrightarrow Q = (\neg P \vee Q) \wedge (P \vee \neg Q)$
- $\neg(P \leftrightarrow Q) = (\neg P \wedge Q) \vee (P \wedge \neg Q)$



$P \leftrightarrow Q$



$\neg(P \leftrightarrow Q)$

## 2.2.1 基本的等值公式(命题定律)



8. 同一律:

$$P \vee F = P \quad P \wedge T = P$$

$$T \rightarrow P = P \quad T \leftrightarrow P = P$$

还有

$$P \rightarrow F = \neg P \quad F \leftrightarrow P = \neg P$$

## 2.2.1 基本的等值公式(命题定律)



9. 零律:

$$P \vee T = T$$

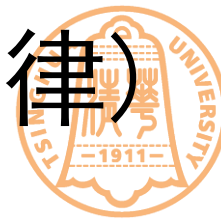
$$P \wedge F = F$$

还有

$$P \rightarrow T = T$$

$$F \rightarrow P = T$$

## 2.2.1 基本的等值公式(命题定律)



10. 补余律:

$$P \vee \neg P = T \quad P \wedge \neg P = F$$

还有

$$P \rightarrow \neg P = \neg P$$

$$\neg P \rightarrow P = P$$

$$P \leftrightarrow \neg P = F$$



# 常用的等值公式

- 蕴涵等值式  $P \rightarrow Q = \neg P \vee Q$
- 前提合取合并  $P \rightarrow (Q \rightarrow R) = (P \wedge Q) \rightarrow R$
- 等价等值式:  $P \leftrightarrow Q = (P \rightarrow Q) \wedge (Q \rightarrow P)$
- 假言易位:  $P \rightarrow Q = \neg Q \rightarrow \neg P$
- 等价否定等值式:  $P \leftrightarrow Q = \neg P \leftrightarrow \neg Q$
- 归谬论:  $(P \rightarrow Q) \wedge (P \rightarrow \neg Q) = \neg P$

# 常用的等值公式



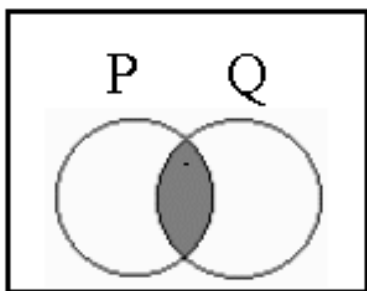
- $P \leftrightarrow Q = (P \wedge Q) \vee (\neg P \wedge \neg Q)$  从取真来描述双条件
- $P \leftrightarrow Q = (P \vee \neg Q) \wedge (\neg P \vee Q)$  从取假来描述双条件
- $P \rightarrow (Q \rightarrow R) = Q \rightarrow (P \rightarrow R)$  前提交换
- $(P \rightarrow R) \wedge (Q \rightarrow R) = (P \vee Q) \rightarrow R$  前提析取合并

## 证明其他等值式

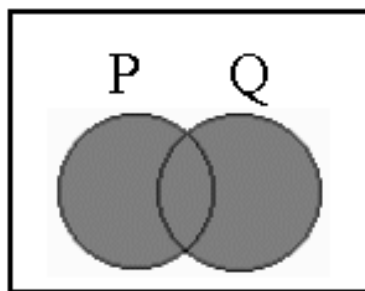
# 文氏图(Venn Diagram)



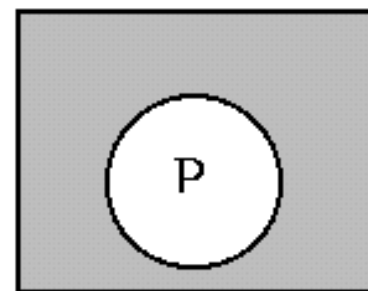
- 将P、Q理解为某总体论域上的子集合，并规定：
  - $P \cap Q$ 为两集合的公共部分(交集)
  - $P \cup Q$ 为两集合的全部(并集)
  - $\neg P$ 为总体论域(如矩形域)中P的余集



$P \cap Q$



$P \cup Q$



$\neg P$



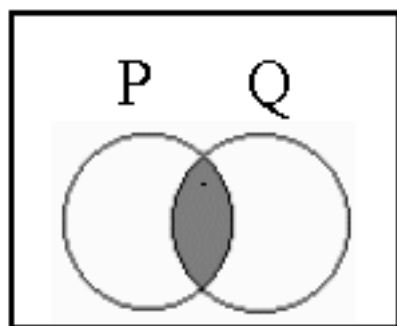
# 文氏图



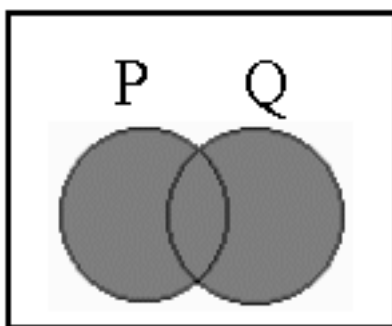
从Venn 图，因 $P \wedge Q$ 较 $P$ 来得“小”， $P \vee Q$ 较 $P$ 来得“大”，从而有

$$P \vee (P \wedge Q) = P$$

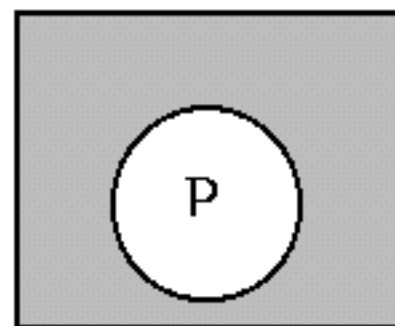
$$P \wedge (P \vee Q) = P$$



$P \wedge Q$



$P \vee Q$



$\neg P$

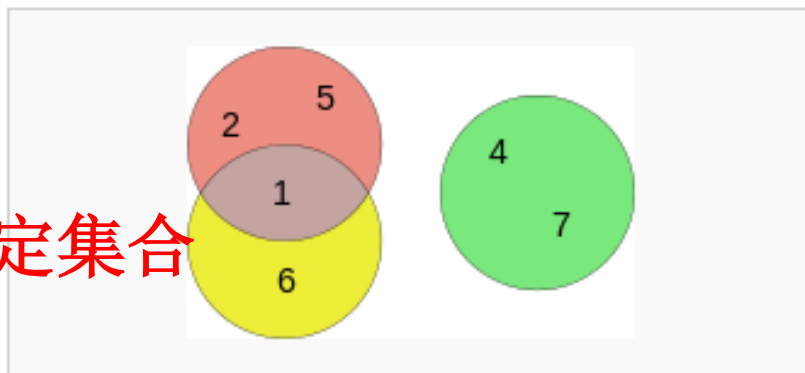
# 欧拉图(Euler Diagram)



- $A = \{1, 2, 5\}$
- $B = \{1, 6\}$
- $C = \{4, 7\}$

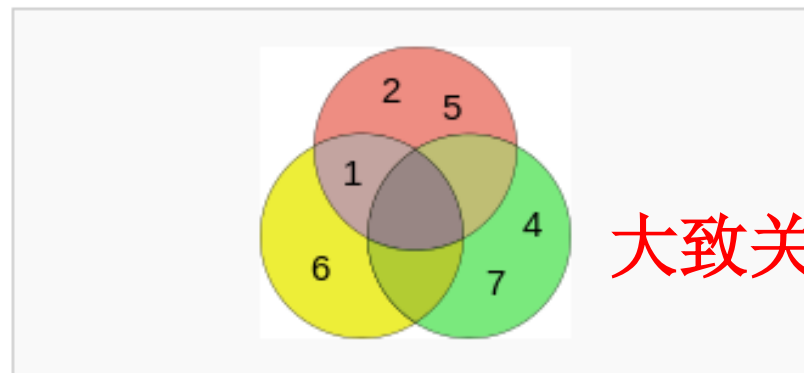
The Venn and the Euler diagram of those sets are:

特定集合



Euler diagram

大致关系



Venn diagram

[https://en.wikipedia.org/wiki/Venn\\_diagram](https://en.wikipedia.org/wiki/Venn_diagram)

[https://en.wikipedia.org/wiki/Euler\\_diagram](https://en.wikipedia.org/wiki/Euler_diagram)

<https://zh.wikipedia.org/wiki/%E6%96%87%E6%B0%8F%E5%9B%BE>

## 2.2.4 等值演算



- 定义
    - 由已知等值式推演出另外一些等值式的过程称为等值演算。
  - 方法
    - 方法1：列真值表。
    - 方法2：公式的等价变换。
- 置换定律： $A$ 是一个命题公式， $X$ 是 $A$ 中子公式，如果 $X = Y$ ，用 $Y$ 代替 $A$ 中的 $X$ 得到公式 $B$ ，则 $A = B$ 。

# 公式等值演算的用途



- 判别命题公式的类型
  - 重言式
  - 矛盾式
  - 可满足式
- 验证两个公式等值
- 解决实际问题

# 用途1：判别命题公式的类型



- 例1 判别 $\neg(P \wedge Q) \rightarrow (\neg P \vee (\neg P \vee Q))$ 公式类型.

解 原式

$$\neg \neg(P \wedge Q) \vee ((\neg P \vee \neg P) \vee Q) \quad (\text{蕴涵等值式, 结合律})$$

$$= (P \wedge Q) \vee (\neg P \vee Q) \quad (\text{双重否定律, 幂等律})$$

$$= (P \wedge Q) \vee (Q \vee \neg P) \quad (\text{交换律})$$

$$= ((P \wedge Q) \vee Q) \vee \neg P \quad (\text{结合律})$$

$$= Q \vee \neg P \quad (\text{吸收律})$$

可满足式



判别 $\neg(P \rightarrow (P \vee Q)) \wedge R$ 公式类型

- ☐ A 可满足式
- ☒ B 矛盾式
- ☐ C 永真式
- ☐ D 都不是

# 用途1：判别命题公式的类型



- 例2 判别 $\neg(P \rightarrow (P \vee Q)) \wedge R$ 公式类型.

解 原式

$$= \neg(\neg P \vee P \vee Q) \wedge R \quad (\text{蕴涵等值式})$$

$$= (P \wedge \neg P \wedge \neg Q) \wedge R \quad (\text{摩根律})$$

$$= F \wedge R \quad (\text{补余律, 零律})$$

$$= F \quad (\text{零律})$$

矛盾式

## 用途2： 验证两个公式等值



例3： 证明 $P \rightarrow (Q \rightarrow R) = (P \wedge Q) \rightarrow R$

• 证明：

$$P \rightarrow (Q \rightarrow R) = P \rightarrow (\neg Q \vee R) \quad (\text{置换})$$

$$= \neg P \vee (\neg Q \vee R) \quad (\text{置换})$$

$$= (\neg P \vee \neg Q) \vee R \quad (\text{结合律})$$

$$= \neg(P \wedge Q) \vee R \quad (\text{摩根律})$$

$$= (P \wedge Q) \rightarrow R \quad (\text{置换})$$



例4：证明 $(P \rightarrow R) \wedge (Q \rightarrow R) = (P \vee Q) \rightarrow R$



$$(P \rightarrow R) \wedge (Q \rightarrow R) =$$

$$(\neg P \vee R) \wedge (\neg Q \vee R)$$

蕴含等值式

$$(\neg P \wedge \neg Q) \vee R$$

分配律

$$\neg(P \vee Q) \vee R$$

摩根律

$$(P \vee Q) \rightarrow R$$

蕴含等值式



例5:  $(P \wedge (Q \vee R)) \vee (P \wedge \neg Q \wedge \neg R) \equiv P$

证明:

$$(P \wedge (Q \vee R)) \vee (P \wedge \neg Q \wedge \neg R)$$

$$= P \wedge ((Q \vee R) \vee (\neg Q \wedge \neg R))$$

$$= P \wedge ((Q \vee R) \vee \neg(Q \vee R))$$

$$= P \wedge T$$

$$= P$$

分配律

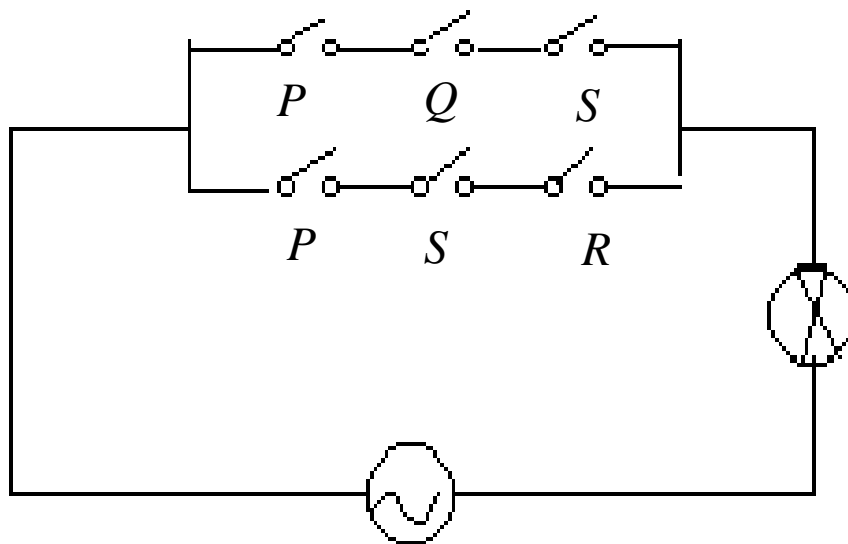
摩根律

同一律

## 用途3： 解决实际问题



- 例6： 试用较少的开关设计一个与下图有相同功能的电路。



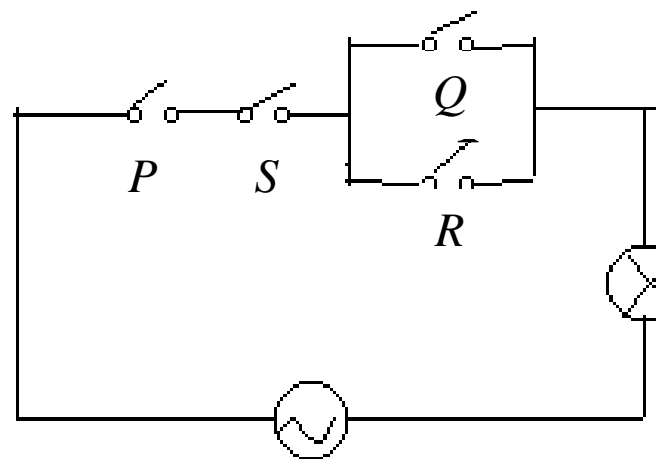
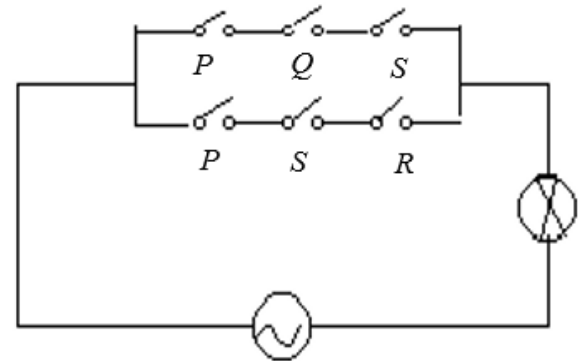
解：可将该图所示之开关  
电路用下述命题公式表示：

$$(P \wedge Q \wedge S) \vee (P \wedge R \wedge S)$$

利用基本等值公式，将上述公式转化为：

$$\begin{aligned} & \underline{(P \wedge Q \wedge S)} \vee \underline{(P \wedge R \wedge S)} \\ &= ((P \wedge S) \wedge Q) \vee ((P \wedge S) \wedge R) \\ &= (P \wedge S) \wedge (Q \vee R) \end{aligned}$$

所以其开关设计图可简化为



## 用途3： 解决实际问题



例7： 在某次研讨会的中间休息时间，3名与会者根据王教授的口音对他是哪个省市的人判断如下：

甲：王教授不是苏州人，是上海人。

乙：王教授不是上海人，是苏州人。

丙：王教授既不是上海人，也不是杭州人。

听完这3人的判断后，王教授笑着说，你们3人中**有一人说得全对，有一人说对了一半，另一人说得全不对**。

试用逻辑演算分析王教授到底是哪里人。

甲：王教授不是苏州人，是上海人。

乙：王教授不是上海人，是苏州人。

丙：王教授既不是上海人，也不是杭州人



## 解 设命题

$P$ ：王教授是苏州人.

$Q$ ：王教授是上海人.

$R$ ：王教授是杭州人.

$P, Q, R$ 中必有一个真命题，两个假命题.

甲的判断为  $\neg P \wedge Q$

乙的判断为  $P \wedge \neg Q$

丙的判断为  $\neg Q \wedge \neg R$

甲：王教授不是苏州人，是上海人。

乙：王教授不是上海人，是苏州人。

丙：王教授既不是上海人，也不是杭州人

甲的判断为  $\neg P \wedge Q$

乙的判断为  $P \wedge \neg Q$

丙的判断为  $\neg Q \wedge \neg R$



甲的判断全对为

$$B_1 = \neg P \wedge Q$$

甲的判断对一半为

$$B_2 = (\neg P \wedge \neg Q) \vee (P \wedge Q)$$

甲的判断全错为

$$B_3 = P \wedge \neg Q$$

乙的判断全对为

$$C_1 = P \wedge \neg Q$$

乙的判断对一半为

$$C_2 = (\neg P \wedge \neg Q) \vee (P \wedge Q)$$

乙的判断全错为

$$C_3 = \neg P \wedge Q$$

丙的判断全对为

$$D_1 = \neg Q \wedge \neg R$$

丙的判断对一半为

$$D_2 = (\neg Q \wedge R) \vee (Q \wedge \neg R)$$

丙的判断全错为

$$D_3 = Q \wedge R$$

一人说得全对，有一人说对了一半，另一人说得全不对

$(B\ C\ D)_1$ :说得全对;  $(B\ C\ D)_2$ : 说对一半;

$(B\ C\ D)_3$ :说得全不对



由王教授所说：下面的命题为真命题

$$\begin{aligned} E = & (B_1 \wedge C_2 \wedge D_3) \vee (B_1 \wedge C_3 \wedge D_2) \vee \\ & (B_2 \wedge C_1 \wedge D_3) \vee (B_2 \wedge C_3 \wedge D_1) \vee \\ & (B_3 \wedge C_1 \wedge D_2) \vee (B_3 \wedge C_2 \wedge D_1) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \text{又 } B_1 \wedge C_2 \wedge D_3 &= (\neg P \wedge Q) \wedge ((\neg P \wedge \neg Q) \vee (P \wedge Q)) \wedge (Q \wedge R) \\ &= (\neg P \wedge Q) \wedge ((\neg P \wedge \neg Q \wedge Q \wedge R) \vee (P \wedge Q \wedge Q \wedge R)) \\ &= (\neg P \wedge Q) \wedge (P \wedge Q \wedge Q \wedge R) \\ &= F \end{aligned}$$



$$B_1 \wedge C_3 \wedge D_2 = \neg P \wedge Q \wedge \neg R$$

$$B_2 \wedge C_1 \wedge D_3 = F$$

$$B_2 \wedge C_3 \wedge D_1 = F$$

$$B_3 \wedge C_1 \wedge D_2 = P \wedge \neg Q \wedge R$$

$$B_3 \wedge C_2 \wedge D_1 = F$$

$P$ : 王教授是苏州人.

$Q$ : 王教授是上海人.

$R$ : 王教授是杭州人.

故

$$E = (\neg P \wedge Q \wedge \neg R) \vee (P \wedge \neg Q \wedge R)$$

因为王教授不能既是上海人，又是杭州人，所以 $P, R$ 必有一个假命题，即 $P \wedge R \Leftrightarrow 0$ . 于是

$E = \neg P \wedge Q \wedge \neg R$  为真命题，即

王教授是上海人，甲说得全对，丙说对了一半，而乙全说错了。



## 例8：推导比赛名次

- 例8 A, B, C, D 4人做百米竞赛，观众甲、乙、丙预报比赛的名次为：

甲：C第一，B第二；

乙：C第二，D第三；

丙：A第二，D第四

比赛结束后发现甲、乙、丙每人报告的情况都是各对一半，试问实际名次如何（无并列者）？

甲：C第一，B第二  
乙：C第二，D第三  
丙：A第二，D第四

解：  $A_i, B_i, C_i, D_i$  表示A,B,C,D第*i*名,  $i=1,2,3,4$

$$\textcircled{1} (C_1 \wedge \neg B_2) \vee (\neg C_1 \wedge B_2) = T$$

$$\textcircled{2} (C_2 \wedge \neg D_3) \vee (\neg C_2 \wedge D_3) = T$$

$$\textcircled{3} (A_2 \wedge \neg D_4) \vee (\neg A_2 \wedge D_4) = T$$

$\textcircled{1} \wedge \textcircled{2} = T$  由于C不能既第一又第二，B和C不能都第二，所以

$$\textcircled{4} (C_1 \wedge \neg B_2 \wedge \neg C_2 \wedge D_3) \vee (\neg C_1 \wedge B_2 \wedge \neg C_2 \wedge D_3) = T$$

$\textcircled{3} \wedge \textcircled{4} = T$  由于A，B不能同时第二，D不能第三又第四，所以  $A_2 \wedge \neg D_4 \wedge C_1 \wedge \neg B_2 \wedge \neg C_2 \wedge D_3 = T$

所以C第一，A第二，D第三，B第四.

## 2.3 命题公式与真值表的关系



- 对任一依赖于命题变元 $P_1, P_2, \dots, P_n$ 的命题公式 $A$ 来说, 可根据 $P_1, P_2, \dots, P_n$ 的真值, 给出 $A$ 的真值, 从而建立起由 $P_1, P_2, \dots, P_n$ 到 $A$ 的真值表。
- 反之, 若给定了由 $P_1, P_2, \dots, P_n$ 到 $A$ 的真值表, 可以用下述方法写出命题公式 $A$ 对 $P_1, P_2, \dots, P_n$ 的逻辑表达式:

## 2.3 命题公式与真值表的关系



例1：从取1的行来列写

$$A = (\neg P \wedge \neg Q) \vee (\neg P \wedge Q) \vee (P \wedge Q)$$

$$B = (\neg P \wedge \neg Q) \vee (\neg P \wedge Q)$$

$P$	$Q$	$A$	$B$
F	F	T	T
F	T	T	T
T	F	F	F
T	T	T	F

## 2.3 命题公式与真值表的关系



### 1. 从取1的行来列写

考查命题公式  $A$  的真值表中取1的行，若取1的行数共有  $m$  行，则命题公式  $A$  可以表示成如下形式：

$$A = Q_1 \vee Q_2 \vee \cdots \vee Q_m$$

其中  $Q_i = (R_1 \wedge R_2 \wedge \cdots \wedge R_n)$ ,

$$R_i = P_i \text{ 或 } \neg P_i \ (i = 1, 2, \dots, n)$$

若该行的  $P_i = 1$ ，则  $R_i = P_i$ ；否则  $R_i = \neg P_i$

## 例2：从取0的行来列写

$P$	$Q$	$A$	$B$
F	F	T	T
F	T	T	T
T	F	F	F
T	T	T	F

$$A = (\neg P \vee Q)$$

$$B = (\neg P \vee Q) \wedge (\neg P \vee \neg Q)$$

## 2.3 命题公式与真值表的关系



### 2. 从取0的行来列写

考查真值表中取0的行，若取0的行数共有 $k$ 行，则命题公式  $A$  可以表示成如下形式：

$$A = Q_1 \wedge Q_2 \wedge \cdots \wedge Q_k$$

其中  $Q_i = (R_1 \vee R_2 \vee \cdots \vee R_n)$  ,

$$R_i = P_i \text{ 或 } R_i = \neg P_i \quad (i=1, 2, \dots, n)$$

若该行的  $P_i = 1$ ，则  $R_i = \neg P_i$

若该行的  $P_i = 0$ ，则  $R_i = P_i$ .





# 进一步理解

- 从取1的行来列写

$$A = ( \bigwedge )_1 \vee ( \bigwedge )_2 \vee \dots \vee ( \bigwedge )_m$$

- 故从取0的行来列写

$$\neg A = ( \bigwedge )_1 \vee ( \bigwedge )_2 \vee \dots \vee ( \bigwedge )_l \text{ 从而}$$

$$A = ( \bigvee )_1 \wedge ( \bigvee )_2 \wedge \dots \wedge ( \bigvee )_l$$

其中 $( \bigvee )_l$ 中每一项也相应取反，因此

若该行的  $P_i = 1$ , 则  $R_i = \neg P_i$

若该行的  $P_i = 0$ , 则  $R_i = P_i$ .

# 两个重要的命题联结词



## 与非联接词

与非联接词是二元命题联结词。两个命题 $P$ 和 $Q$ 用与非联接词“ $\uparrow$ ”联结起来，构成一个新的复合命题，记作 $P\uparrow Q$ 。读作 $P$ 和 $Q$ 的“与非”。当且仅当 $P$ 和 $Q$ 的真值都是1时， $P\uparrow Q$ 的真值为0，否则 $P\uparrow Q$ 的真值为1。

$$P\uparrow Q = \neg(P \wedge Q) \quad (\text{真值表})$$

$P$	$Q$	$P\uparrow Q$
0	0	1
0	1	1
1	0	1
1	1	0

# 两个重要的命题联结词



## 或非联接词

或非联接词是二元命题联结词。两个命题 $P$ 和 $Q$ 用或非联接词“ $\downarrow$ ”联结起来，构成一个新的复合命题，记作 $P\downarrow Q$ 。读作 $P$ 和 $Q$ 的“或非”。当且仅当 $P$ 和 $Q$ 的真值都是0时， $P\downarrow Q$ 的真值为1，否则 $P\downarrow Q$ 的真值为 $F$ 。

$$P\downarrow Q = \neg(P \vee Q) \quad (\text{真值表})$$

$P$	$Q$	$P\downarrow Q$
0	0	1
0	1	0
1	0	0
1	1	0



# 异或联结词

- 不可兼或。  $P \nabla Q = (\neg P \wedge Q) \vee (P \wedge \neg Q)$ 
  - 当且仅当  $P$  和  $Q$  的值不一样的时候，的真值为1；
  - 当  $P$  和  $Q$  的值相同，异或结果为0。

$P$	$Q$	$P \nabla Q$
0	0	0
0	1	1
1	0	1
1	1	0



## 2.4 联接词的完备集

### 2.4.1 真值函项

对所有的合式公式加以分类，将等值的公式视为同一类，从中选一个作代表称之为真值函项。每一个真值函项就有一个联结词与之对应。

**举例：**  $N=2$ 时的所有真值函项

# N = 2时的所有真值函项



$P$	$Q$	$g_0$	$g_1$	$g_2$	$g_3$	$g_4$	$g_5$	$g_6$	$g_7$	$g_8$	$g_9$	$g_{10}$	$g_{11}$	$g_{12}$	$g_{13}$	$g_{14}$	$g_{15}$
0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	1	1	1	1	1	1	1	1
0	1	0	0	0	0	1	1	1	1	0	0	0	0	1	1	1	1
1	0	0	0	1	1	0	0	1	1	0	0	1	1	0	0	1	1
1	1	0	1	0	1	0	1	0	1	0	1	0	1	0	1	0	1
		$F$	$\wedge$		$P$		$Q$	$\bar{v}$	$v$	$\downarrow$	$\leftrightarrow$	$\neg Q$		$\neg P$	$\rightarrow$	$\uparrow$	$T$

**注意** 真值函项方向的设定。



$$\begin{array}{lll} g_0 = F & g_1 = P \wedge Q & g_6 = P \bar{\vee} Q \\ g_7 = P \vee Q & g_8 = P \downarrow Q & g_9 = P \leftrightarrow Q \\ g_{13} = P \rightarrow Q & g_{14} = P \uparrow Q & g_{15} = T \\ g_3 = P & g_5 = Q & \\ g_{10} = \neg Q & g_{12} = \neg P & \end{array}$$

尚余

$$\begin{array}{ll} g_2 = P \wedge \neg Q & g_4 = \neg P \wedge Q \\ g_{11} = P \vee \neg Q = Q \rightarrow P & \end{array}$$



对于二值逻辑,  
 $n$ 个命题变元 $P_1, P_2, \dots, P_n$ 可定义

$2^{2^n}$ 个  $n$ 元联接词

若推广到多值逻辑结果如何

$$m^{m^n} ?$$





## 2.4 联接词的完备集

### 2.4.2 联接词的完备集

$C$ 是一个联结词的集合，如果任何 $n$ 元( $n \geq 1$ )真值函项都可以由仅含 $C$ 中的联结词构成的公式表示，则称 $C$ 是完备的联结词集合，或说 $C$ 是联结词的完备集。

# 联结词的完备集



## 定理2.4.1

$\{\neg, \vee, \wedge\}$  是完备的联结词集合。

- 从前面介绍的由真值表列写命题公式的过程可知，任一公式都可由 $\neg, \vee, \wedge$ 表示，从而 $\{\neg, \vee, \wedge\}$ 是完备的。
- 一般情形下，该定理的证明应用数学归纳法，施归纳于联结词的个数来论证。



定理2.4.1  $\{\neg, \vee, \wedge\}$ 是完备的联结词集合

另一证法，因为任何 $n$  ( $n \geq 1$ ) 元真值函数都与唯一的一个主析取范式（后面介绍）等值，而在主析取范式中仅含联结词 $\neg, \vee, \wedge$ ，所以 $S = \{\neg, \vee, \wedge\}$ 是联结词的完备集。



以下哪些联结词集是完备集

☒ A  $S_1 = \{\neg, \wedge\}$

☒ B  $S_2 = \{\neg, \vee\}$

☒ C  $S_3 = \{\uparrow\}$

☐ D  $S_4 = \{\wedge, \vee\}$



# 联结词的完备集

推论： 以下联结词集都是完备集：

$$(1) \quad S_1 = \{\neg, \wedge\}$$

$$(2) \quad S_2 = \{\neg, \vee\}$$

$$(3) \quad S_3 = \{\neg, \rightarrow\}$$

$$(4) \quad S_4 = \{\uparrow\}$$

$$(5) \quad S_5 = \{\downarrow\}$$

# 证明 $\{\uparrow\}$ , $\{\downarrow\}$ 都是联结词完备集



- 已知 $\{\neg, \vee, \wedge\}$ 是完备集，证明其中每个联结词都可以由 $\uparrow$ 来表示

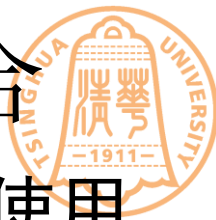
$$\neg P = \neg(P \wedge P) = P \uparrow P$$

$$P \wedge Q = \neg \neg (P \wedge Q) = \neg (P \uparrow Q) = (P \uparrow Q) \uparrow (P \uparrow Q)$$

$$P \vee Q = \neg(\neg P \wedge \neg Q) = \neg P \uparrow \neg Q = (P \uparrow P) \uparrow (Q \uparrow Q)$$

证毕

# 一些重要的全功能联结词集合



- $\{\neg, \wedge\}$ ,  $\{\neg, \vee\}$  可以构成全功能联结词集合。使用上述全功能联结词集合表达的命题公式类的系统常称为Boole代数系统。
- $\{\neg, \rightarrow\}$  也可构成全功能联结词集合。该全功能联结词集合在研究逻辑系统的演绎与推理，以及在程序系统的研究中经常遇到。
- $\{\uparrow\}$ ,  $\{\downarrow\}$  是全功能联结词集合。在大规模集成电路中有广泛的应用。

# 小结



- 等值定理
  - 若在任一解释下，公式 $A$ 和 $B$ 的真值都相同，则称 $A$ 和 $B$ 是等值的
- 等值公式
  - 置换规则
  - 基本的等值公式
  - 常用等值公式
  - 等值演算及其应用
- 命题公式与真值表的关系
  - 从取T的行来写
  - 从取F的行来写



# 小结



- 联结词的完备集
  - 可以证明,  $\{\neg, \vee\}$ ,  $\{\neg, \wedge\}$ ,  $\{\neg, \rightarrow\}$ ,  $\{\uparrow\}$ ,  $\{\downarrow\}$  都是联结词功能完全组;
  - 而  $\{\neg, \leftrightarrow\}$ ,  $\{\neg\}$ ,  $\{\wedge\}$ ,  $\{\vee\}$ ,  $\{\wedge, \vee\}$  都不是联结词功能完全组;
  - 使用联结词集  $\{\neg, \wedge, \vee\}$ .



谢谢

shixia@tsinghua.edu.cn