

1. (20 分) 设函数 $f(x, y) = \begin{cases} \frac{x^3 + y^3}{x^2 + y^2}, & (x, y) \neq (0, 0) \\ 0, & (x, y) = (0, 0) \end{cases}$ 。回答以下问题, 并说明理由。

(I) 函数 $f(x, y)$ 在点 $(0, 0)$ 处是否连续?

(II) 函数 $f(x, y)$ 在点 $(0, 0)$ 处的两个一阶偏导数是否存在, 若存在, 求这两个偏导数。

(III) 函数 $f(x, y)$ 在点 $(0, 0)$ 处是否可微? 可微时, 求出它的微分。

2. (20 分) 设函数 $z = z(x, y)$ 为由方程 $x^3 + y^3 + z^3 = x + y + z$ 确定的二阶可微函数,

求 $\frac{\partial^2 z}{\partial x \partial y}$ 。

3. (20 分) 在椭球曲面 $x^2 + y^2 + \frac{z^2}{4} = 1$ 上寻找一点, 位于第一卦限 (即

$x > 0, y > 0, z > 0$), 使得该点处的切平面与三个坐标轴的交点到原点距离的平方和最小。

4. (20 分) 设函数 $f(x, y)$ 在全平面上连续可微的, 且满足两个条件 (1) 两个一阶偏导数处处相等, 即 $f_x(x, y) = f_y(x, y)$, $\forall (x, y) \in R^2$; (2) $f(x, 0) > 0$, $\forall x \in R$ 。

证明: 对于 $\forall (x, y) \in R^2$, $f(x, y) > 0$ 。

5. (20 分) 计算积分 $\int_0^{+\infty} \frac{\arctan bx - \arctan ax}{x} dx$, 其中 $b > a > 0$ 。