10
2

离散数学——第十三周作业

计83 刘轩奇 2018011025

2019.12.06

10.28 对有限集合A，在A上给出最多个等价类和最少个等价类的关系各是什么？

答 给出最多个等价类的关系是恒等关系I_A，有$|A|$个等价类。给出最少个等价类的关系是全关系E_A，仅1个等价类。

10.29 设R是A上传递和自反的关系，T是A上的关系，$aTb \iff aRb \land bRa$。证明T是等价关系。

证

$$
\begin{aligned}
R\text{是自反的} &\iff (\forall x)(x \in A \longrightarrow \langle x,x\rangle \in R) \\
&\iff (\forall x)(x \in A \longrightarrow \langle x,x\rangle \in R \land \langle x,x\rangle \in R) \\
&\iff (\forall x)(\langle x,x\rangle \in T) \\
&\iff T\text{是自反的}
\end{aligned}
$$

R是对称的，则对任意$\langle x,y\rangle$

$$
\begin{aligned}
\langle x,y\rangle \in T &\iff \langle x,y\rangle \in R \land \langle y,x\rangle \in R \\
&\iff \langle y,x\rangle \in R \land \langle x,y\rangle \in R \\
&\iff \langle y,x\rangle \in T
\end{aligned}
$$

从而T是对称的。

R是传递的，则对任意$\langle x,y\rangle,\langle y,z\rangle$

$$
\begin{aligned}
\langle x,y\rangle \in T \land \langle y,z\rangle \in T &\iff \langle x,y\rangle \in R \land \langle y,x\rangle \in R \land \langle y,z\rangle \in R \land \langle z,y\rangle \in R \\
&\implies \langle x,z\rangle \in R \land \langle z,x\rangle \in R \\
&\iff \langle x,z\rangle \in T
\end{aligned}
$$

从而T是传递的。

综上，T是等价关系。

10.30 对$A=\{a,b,c,d\}$，R是A上的等价关系，且

$$R = \{\langle a,a\rangle,\langle a,b\rangle,\langle b,a\rangle,\langle b,b\rangle,\langle c,c\rangle,\langle c,d\rangle,\langle d,c\rangle,\langle d,d\rangle\}$$

画R的关系图，求A中各元素的等价类。

解　关系图如图10-30所示，等价类

$$[a]_R = [b]_R = \{a, b\}$$

$$[c]_R = [d]_R = \{c, d\}$$

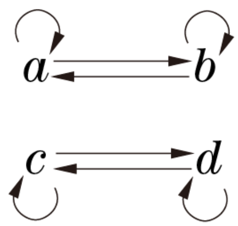


图 10-30

10.31　设$\mathbb{Z}_+ = \{x | x \in \mathbb{Z} \land x > 0\}$，判定下列集合$\pi$是否构成$\mathbb{Z}_+$的划分。

(1) $S_1 = \{x | x \in \mathbb{Z}_+ \land x\text{是素数}\}, S_2 = \mathbb{Z}_+ - S_1, \pi = \{S_1, S_2\}$

(2) $\pi = \{\{x\} | x \in \mathbb{Z}_+\}$

答　(1) 是，π划分将$\mathbb{Z}_+$划分为素数与非素数。

(2) 是，π划分即是恒等关系导出的划分。

10.32　对非空集合A，$P(A) - \{\varnothing\}$是否构成A的划分？

答　若$|A| = 1$，则$P(A) - \{\varnothing\} = \{A\}$是$A$的划分，等同于全关系导出的划分。

若$|A| > 1$，则$P(A) - \{\varnothing\}$不是A的划分，因为$P(A) - \{\varnothing\}$的元素A和$\{a\}$（其中a为A的任意元素）交集不为空。

10.33　有4个元素的集合上，不同的等价关系的数目是多少？

答　不同等价关系的数目等同于不同划分的数目，而不同的划分有(1)恒等关系导出的划分；(2)二一一型划分；(3)二二型划分；(4)三一型划分；(5)全关系导出的划分，共15种，如下所示。则不同等价关系的数目亦为15。

(1)$\{\{a\}, \{b\}, \{c\}, \{d\}\}$

(2)$\{\{a, b\}, \{c\}, \{d\}\}, \{\{a, c\}, \{b\}, \{d\}\}, \{\{a, d\}, \{b\}, \{c\}\},$
$\{\{b, c\}, \{a\}, \{d\}\}, \{\{b, d\}, \{a\}, \{c\}\}, \{\{c, d\}, \{a\}, \{b\}\}$

(3)$\{\{a, b\}, \{c, d\}\}, \{\{a, c\}, \{b, d\}\}, \{\{a, d\}, \{b, c\}\}$

(4)$\{\{a, b, c\}, \{d\}\}, \{\{a, b, d\}, \{c\}\}, \{\{a, c, d\}, \{b\}\}, \{\{b, c, d\}, \{a\}\}$

(5)$\{\{a, b, c, d\}\}$

10.34　设R, S是A上的关系，且

$$S = \{\langle a, b \rangle | (\exists c)(aRc \land cRb)\}$$

证明若R是等价关系，则S是等价关系。

证 R是等价关系，则R自反、对称且传递。

$$\begin{aligned} a \in A &\Longrightarrow \langle a,a\rangle \in R \\ &\Longleftrightarrow \langle a,a\rangle \in R \land \langle a,a\rangle \in R \\ &\Longleftrightarrow \langle a,a\rangle \in S \end{aligned}$$

则S自反。

$$\begin{aligned} \langle a,b\rangle \in S &\Longleftrightarrow (\exists c)(aRc \land cRb) \\ &\Longrightarrow (\exists c)(cRa \land bRc) \\ &\Longleftrightarrow \langle b,a\rangle \in S \end{aligned}$$

则S对称。

$$\begin{aligned} \langle a,b\rangle \in S \land \langle b,c\rangle \in S &\Longleftrightarrow (\exists d)(aRd \land dRb) \land (\exists e)(bRe \land eRc) \\ &\Longleftrightarrow (\exists d)(\exists e)(aRd \land dRb \land bRe \land eRc) \\ &\Longrightarrow (\exists d)(\exists e)(aRd \land dRe \land eRc) \\ &\Longrightarrow (\exists d)(aRd \land dRc) \\ &\Longleftrightarrow \langle a,c\rangle \in S \end{aligned}$$

则S传递。

综上，S是等价关系。

10.35 设$\mathbb{Z}_+$是正整数集合，$A = \mathbb{Z}_+ \times \mathbb{Z}_+$，$A$上的关系

$$R = \{\langle\langle x,y\rangle,\langle u,v\rangle\rangle | xv = yu\}$$

证明R是等价关系。

证

$$\langle x,y\rangle \in A \Longleftrightarrow xy = xy \Longleftrightarrow \langle\langle x,y\rangle,\langle x,y\rangle\rangle \in R$$

则R自反。

$$\begin{aligned} \langle\langle x,y\rangle,\langle u,v\rangle\rangle \in R &\Longleftrightarrow xy = uv \\ &\Longleftrightarrow \langle\langle u,v\rangle,\langle x,y\rangle\rangle \in R \end{aligned}$$

则R对称。

$$\begin{aligned} \langle\langle x,y\rangle,\langle u,v\rangle\rangle \in R \land \langle\langle u,v\rangle,\langle z,w\rangle\rangle \in R &\Longleftrightarrow xy = uv \land uv = zw \\ &\Longrightarrow xy = zw \\ &\Longrightarrow \langle\langle x,y\rangle,\langle z,w\rangle\rangle \in R \end{aligned}$$

则R传递。

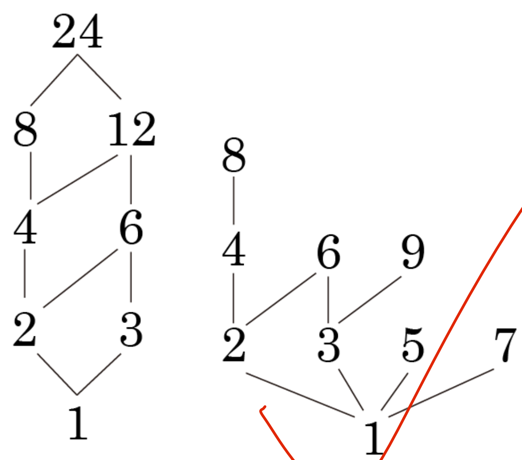
综上，R是等价关系。

10.39 对下列集合上的整除关系，画出Hasse图。

(1) {1,2,3,4,6,8,12,24}

(2) {1,2,3,4,5,6,7,8,9}

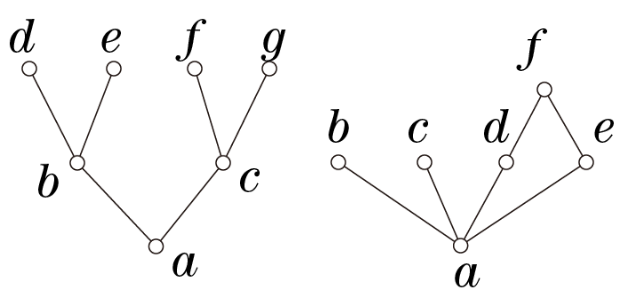
答 如图10-39所示。



(1) (2)

图 10-39

10.40 写出下列Hasse图（图10-40）的集合和集合上的偏序关系。



(a) (b)

图 10-40

答 (1)

$$A = \{a, b, c, d, e, f, g\}$$

$$
\begin{aligned}
R =\{&\langle a,a\rangle,\langle a,b\rangle,\langle a,c\rangle,\langle a,d\rangle,\langle a,e\rangle,\langle a,f\rangle,\langle a,g\rangle,\\
&\langle b,b\rangle,\langle b,d\rangle,\langle b,e\rangle,\langle c,c\rangle,\langle c,f\rangle,\langle c,g\rangle,\\
&\langle d,d\rangle,\langle e,e\rangle,\langle f,f\rangle,\langle g,g\rangle\}
\end{aligned}
$$

(2)

$$A = \{a,b,c,d,e,f\}$$

$$
\begin{aligned}
R =\{&\langle a,a\rangle,\langle a,b\rangle,\langle a,c\rangle,\langle a,d\rangle,\langle a,e\rangle,\langle a,f\rangle,\\
&\langle b,b\rangle,\langle c,c\rangle,\langle d,d\rangle,\langle d,f\rangle,\langle e,e\rangle,\langle e,f\rangle,\langle f,f\rangle\}
\end{aligned}
$$

10.41 画出下列偏序集$\langle A,R\rangle$的Hasse图，并写出A的极大元、极小元、最大元、最小元。

(1)

$$A = \{a,b,c,d,e\}, R = \{\langle a,d\rangle,\langle a,c\rangle,\langle a,b\rangle,\langle a,e\rangle,\langle b,e\rangle,\langle c,e\rangle,\langle d,e\rangle\}\cup I_A$$

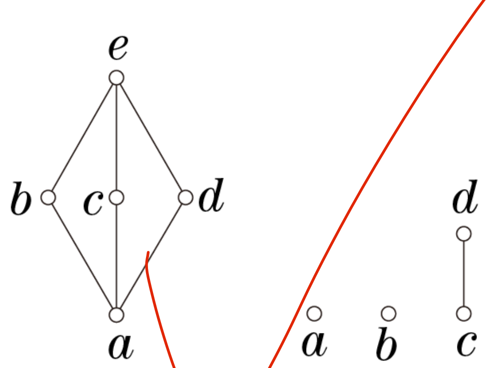
(2)

$$A = \{a,b,c,d\}, R = \{\langle c,d\rangle\}\cup I_A$$

答 Hasse图如图10-41所示。

(1) 极大元：e；极小元：a；最大元：e；最小元：a。

(2) 极大元：a,b,d；极小元：a,b,c；无最大、最小元。



(1) (2)

图 10-41

10.42 设$\mathbb{Z}_+ = \{x|x\in\mathbb{Z}\wedge x\rangle 0\}$，$D$是$\mathbb{Z}_+$上的整除关系，$T = \{1,2,\cdots,10\}\subseteq\mathbb{Z}_+$。在偏序集$\langle\mathbb{Z}_+,D\rangle$中，求$T$的上界、下界、上确界、下确界。

解 T的下界、下确界均为1；T的上界k是T中所有数字的倍数，则$k = n\mathrm{LCM}\{1,2,3,4,5,6,7,8,9,10\} = 2520n(n\in\mathbb{Z}_+)$，其中LCM表示最小公倍数，$T$的上确界即2520。

10.43 设R是A上的偏序关系，$B\subseteq A$，证明$R\cap(B\times B)$是B上的偏序关系。

证 记$B \times B = E_B$是B上的全关系。

$$r(R \cap (B \times B)) \restriction_B = r(R) \restriction_B = R \cap (B \times B)$$

则$R \cap (B \times B)$自反。

$a \neq b$时，

$$\begin{aligned} \langle a, b \rangle \in R \cap (B \times B) &\Longleftrightarrow \langle a, b \rangle \in R \wedge \langle a, b \rangle \in E_B \\ &\Longrightarrow \langle b, a \rangle \notin R \\ &\Longrightarrow \langle b, a \rangle \notin R \cap (B \times B) \end{aligned}$$

则$R \cap (B \times B)$反对称。

$$\begin{aligned} \langle a, b \rangle, \langle b, c \rangle \in R \cap (B \times B) &\Longrightarrow \langle a, b \rangle \in R \wedge \langle b, c \rangle \in R \\ &\Longrightarrow \langle a, c \rangle \in R \\ &\Longrightarrow \langle a, c \rangle \in R \cap (B \times B) \end{aligned}$$

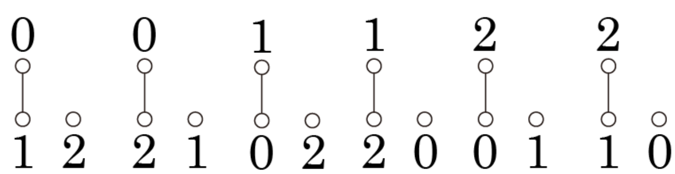
则$R \cap (B \times B)$传递。

综上，$R \cap (B \times B)$是B上的偏序关系。

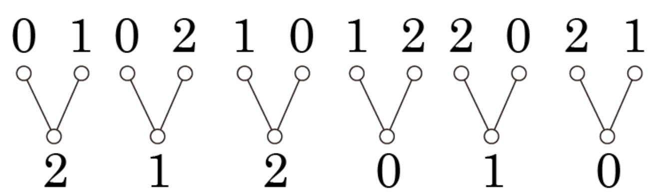
10.45 给出$A = \{0, 1, 2\}$上所有的偏序关系的Hasse图。

解 如图10-45所示，共19种关系。

(a) 空关系的Hasse图



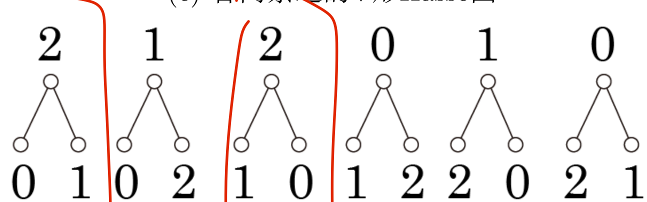
(b) 含一条边的Hasse图



多3个

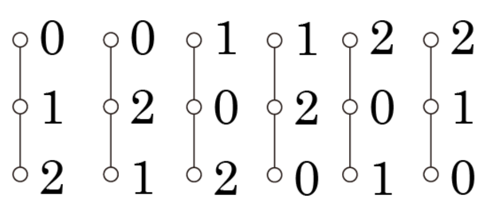
(c) 含两条边的V形Hasse图

画重了



多3个

(d) 含两条边的Λ形Hasse图



(e) 单链形Hasse图

图 10-45