离散数学 (A) 2018年机经

by 相逢有时 @学习部

考试时间：2019年01月11日

总体情况

题量和16年差不多，难度比16年和样卷都要大得多。不仅考察了细枝末节的各类知识点（比如良序集、求闭包的顺序等，考点几乎没有死角），而且要求灵活运用所学知识，有较高思维难度，题目的综合性和交叉性很大。

考完基本上是跪了，所调查范围内的同学没有一位表示做完了题目，最后两题没做是常态，普遍表示整体难度都很大。（笔者也是在心态爆炸中艰难地写完本片机经的orz）

某大佬的做题感言：

> 五教气候温暖宜人，试卷印刷清晰，考试氛围良好，明年还会继续体验。

选择题

- 有一个关于命题的定义的，有点坑。答案似乎是选“含命题变项”的一项
- 有一个关于集合对称差的，简单
- 有一个关于存在、任意两次的使用的，简单
- 关于关系的题目，较难：设xRy表示x是y的父亲，xSy表示x是y的母亲。问以下哪种关系表示x是y的妻子？
  1. R o S^-1
  2. S o R^-1
  3. R^-1 o S
  4. S^-1 o S
- 关于集合运算的题目，选择错误的一项，较难。
- 关于连续统假设和集合基数的问题，中等。
- ……

判断题

- 集合 A∈B 等价于 P(A) ∈ P(B)
- 良序集不一定是全序集（虽然良序集好像不在考纲里，但他还是考了orzorz）
- ……

填空题

- 波兰表达式：!P ∨ (Q ^ !R) ∨ !!Q（大概是）
- 基数运算题，简单。（如 ∩{23, 43})
- 给一个10元素的集合，给一种划分{{1,2,3,4}, {5,6,7}, {8,9}, {10}}，问等价关系中有序对的个数。(30)
- 关系的计数，较难。问，对于元素个数为n的集合A，A上的以下关系分别有多少种？（用n表示）
  - 自反关系
  - 反自反关系
  - 对称关系
  - 反对称关系
  - 非自反且非反自反关系
  - 自反并且对称的关系

大题

题量大，笔者写满了整个答卷orz。难度阶梯明显

- 有一个关于容斥原理，简单：给了三个集合A、B、C中A和B的元素个数，给了全集元素个数，给了ABC任意两个的交的元素个数，给了A交B交C的元素个数，叫你求C的元素个数。
- 有一个主合取、主析取范式的题目，较简单：命题很长，直接化简十分麻烦（含双箭头和很多单箭头），但是整个式子只含P、Q两个命题，所以可以直接打表（枚举4次就完了，很简单）或者写成极小式再析取。
- 有一个命题形式化的题目，第一个难度较大：
  - 过平面上的不共线的三点，有且仅有一个圆。（注意三点不共线、有且仅有、三点共圆的形式化）
  - 数列A（下标从0到n-1）是升序列。
- 证明：(A-B)对称差(A-C) = ∅ 等价于 A∩B = A∩C
- 证明：左边是一个前束范式，右边是一个范式。简单。
- 哈斯图，难度较大。

  定义集合 $A=\{2,2^2,...,2^{12}\}$ 偏序关系
  $R=\{<x,y>|x\in\mathbb{N}_+\wedge y\in\mathbb{N}_+\wedge(\exists p)(p\in\mathbb{N}_+\wedge y=x^p)\}$

  1. 求 $R_1=(A\times A)\cap R$ 的哈斯图（建议表示成2的指数形式，这样容易发现指数之间是简单的整除关系）
  2. 求 R_1 最小元、最大元、极小元、极大元。
  3. 在 $\mathbb{N}_+$ 上求 $<A,R_1>$ 的上下界、上下确界。（用最小公倍数和最大公约数来求解）
  4. 求所有最长链、最长反链（这个有点多，要仔细数）

- 函数构造题，综合性、难度较大。（4分）

  设 $\mathbb{N}\to\mathbb{Z}$ 的函数 $f(t)=at^2+c$，其中a、c都是可以调节的自然数。试构造 $\mathbb{N}\to\mathbb{Z}$ 的**不依赖于a、c的取值**的函数$g(t)$，使得对于**任意**的 $a,c\in\mathbb{N}$，始终存在 $t_0\in\mathbb{N}$，使得 $f(t_0)=g(t_0)$

例如，当c = 0时，可以构造 $g(t) = t^3$，这样对于任意的a，可以取$t_0 = a$，$f(t_0) = g(t_0) = a^3$

1. 设 $c \in \{0, 1\}$，构造 g(t)
2. 设 c 可以是任何自然数，构造 g(t)

（思路大概是要构造 $\mathbb{N} \to \mathbb{Z}^2$ 的双射，by耀神）

- 用罗素公理系统证明 $p \leftrightarrow p$ 是重言式。卷尾给了3条定义、4条公理、7条定理。较难。（5分）