微积分 A2 期中练习 2020 年 4 月 18 日

系名________________ 班级______________ 姓名______________ 学号____________

1. （**20** 分）设 $D=\{(x,y)\,|\,x+y\neq 0\}$，$f(x,y)=\dfrac{x-y}{x+y}$，问：

$\lim\limits_{x\to 0}\lim\limits_{y\to 0} f(x,y)$，$\lim\limits_{y\to 0}\lim\limits_{x\to 0} f(x,y)$ 和 $\lim\limits_{\substack{(x,y)\to(0,0)\\(x,y)\in D}} f(x,y)$ 是否存在，若存在，求值；若不存在，证明你的结论。

2. （**20** 分）设 $f(x,y)$ 二阶连续可微，证明：

$$\lim_{h\to 0^+}\frac{f(2h,\mathrm{e}^{-\frac{1}{2h}})-2f(h,\mathrm{e}^{-\frac{1}{h}})+f(0,0)}{h^2}=\frac{\partial^2 f}{\partial x^2}(0,0)\text{。}$$

3. （**20** 分）设 $f(x,y)>0$，且在全平面二阶连续可微，请给出 $f(x,y)$ 可以表示成关于 x 的一元函数与关于 y 的一元函数的乘积的充分必要条件，并证明你的结论。

4. （**20** 分）设函数 $u(t)$ 二阶连续可微，且二元函数 $z=u(\sqrt{x^2+y^2})$ 满足：

$$\frac{\partial^2 z}{\partial x^2}+\frac{\partial^2 z}{\partial y^2}=x^2+y^2\quad(x^2+y^2>0)$$

求证：$u(t)$ 满足常微分方程 $u''(t)+\dfrac{1}{t}u'(t)=t^2$。

5. （**20** 分）设 $t>0$，$I(t)=\displaystyle\int_0^{+\infty}\mathrm{e}^{-\left(x^2+\frac{t^2}{x^2}\right)}\mathrm{d}x$。

（**I**） 求 $I'(t)$ （可以用广义积分表示 $I'(t)$）；

（**II**） 求 $I(t)$ 满足的常微分方程。