设 $A>0$，已知 $\rho(A)$ 是唯一长度 $=\rho(A)$ 的特征值，满足 $Av=\rho(A)v$，$v>0$，且几何重数 $=1$，证明：$\rho(A)$ 代数重数 $=1$

证明：令 $B=\frac{1}{\rho(A)}A$，

则 $Bv=v$ $\quad\quad \rho(B)=1$

$v>0$

设 $P^{-1}BP=J=\begin{pmatrix} J_1 & & & \\ & J_2 & & \\ & & \ddots & \\ & & & J_s \end{pmatrix}$

只有1个Jordan块对应特征值 $\rho(B)=1$，因为它的几何重数 $=1$

不妨设 $$J_1=\begin{pmatrix}1&1&&&\\&1&\ddots&&\\&&\ddots&\ddots&\\&&&1&1\\&&&&1\end{pmatrix}_{r_1\times r_1}.$$

若 $r_1>1$，则

$$J_1^k=\begin{pmatrix}1&k&\cdots&\cdots\\&1&\ddots&\vdots\\&&\ddots&k\\&&&1\end{pmatrix}$$

当 $k\to+\infty$

J_1^k（从而 J^k）的某些项趋于 $+\infty$，因为 $\forall k>0$，

$B^k v=v$ 且 $B^k>0$，$v>0$

令 $B^k=(b_{ij}^{(k)})$　$v=\begin{pmatrix}x_1\\\vdots\\x_n\end{pmatrix}$　$x_i>0$，$i=1,\cdots,n$

则 $b_{i1}^{(k)}x_1+\cdots+b_{ij}^{(k)}x_j+\cdots+b_{in}^{(k)}x_n$

$=x_i$

因此 $b_{ij}^{(k)} \leq \frac{x_i}{x_j}$

即当 $k \to +\infty$，$b_{ij}^{(k)}$ 是有界的

因此 $P^{-1}B^{k}P$ 的元素均有界，

这与 J^k 的某些元素趋于 $+\infty$ 矛盾！

因此 $r_1 = 1$ 即 $\rho(B)=1$ 的代数重数 $=1 \Rightarrow \rho(A)$ 的代数重数 $=1$.