离散数学（一）期末试卷（A）

2006.1

一. (15分)

证明下列结论(所有使用到的结论都必须由公理模式$Ax1, Ax2, Ax3$和推演规则MP加以证明), 其中A和B均为合式公式.

(i) $\vdash (A \to (\sim (\sim A)))$. (5分)

(ii) $\vdash (((A \to B) \to A) \to (\sim (\sim A)))$. (10分)

二. (10分)

(i) 判断下面的公式是重言式(tautology)或矛盾式(contradiction)或二者都不是. (6分)

(a) $((p_1 \wedge (\sim p_2)) \wedge (p_1 \to (\sim p_2)))$.

(b) $((p_1 \to p_2) \leftrightarrow (p_2 \to p_1))$.

(c) $(((p_1 \to p_3) \wedge (p_2 \to p_3)) \leftrightarrow ((p_1 \vee p_2) \to p_3))$.

(ii) 请给出(b)中公式的合取范式和析取范式. (4分)

三. (15分)

(i) 叙述一阶谓词逻辑的推演系统$K_{\mathcal{L}}$中可证等价(provably equivalent)的概念. (5分)

(ii)依据公理模式K_1–K_6以及规则MP和Generalisation证明: 合式公式$\sim (\exists x_i)A$和$(\forall x_i)(\sim A)$ 是可证等价的, 其中A是$\mathcal{L}$中的任意合式公式. (10分)

四. (10分)

判断下面的命题形式是否是逻辑有效的(logically valid). 如果是, 请证明. 如果不是,请给出理由.

(i) $((\forall x_1)(\forall x_2)A_1^2(x_1, x_2) \to ((\forall x_1)A_1^1(x_1) \to (\forall x_2)(\forall x_1)A_1^2(x_2, x_1)))$. (5分)

(ii)$((\forall x_1)(\exists x_2)A_1^2(x_1, x_2) \to (\exists x_1)(\forall x_2)A_1^2(x_1, x_2))$. (5分)

五. (15分)

(i) 设Σ是一合式公式集合. 分别写出Σ是相容(consistent)以及Σ是极大相容(maximally consistent)的定义. (5分)

(ii) 证明Lindenbaum 定理:任意一个相容的合式公式集Σ都可以扩张成一个极大相容集Σ'. (10分)

六.(15分)

记Wff为命题逻辑中的合式公式集合. 设$\Gamma \subseteq Wff$. 若真值赋值v使得对于每一个$A \in \Gamma$都有$v(A) = T$, 则称v为Γ的模型. 将Γ的所有模型组成的集合记做$Mod(\Gamma)$. 又, 若存在有限集$\Delta \subseteq Wff$使得对于每一个公式A有$\Gamma \models A$当且仅当$\Delta \models A$, 则称Γ是有限可公理化的.

(i)试证明: 若$\Gamma_1, \Gamma_2 \subseteq Wff$, 且$Mod(\Gamma_1) = Mod(\emptyset) - Mod(\Gamma_2)$, 则$\Gamma_1$和$\Gamma_2$都是有限可公理化的. 这里$\emptyset$表示空集. (10分)

(ii)试将(i)中的结论推广到一阶谓词逻辑(只有给出严格的证明才能得满分). (5分)