离散数学(1)
Discrete Mathematics

第十二章 实数集合与集合的基数

刘世霞
shixia@tsinghua.edu.cn

第十二章 实数集合与集合的基数

- 12.1 实数集合
  - 1. 整数集合Z
  - 2. 有理数集合Q
  - 3. 实数集合R
- 12.2 集合的等势
- 12.3 有限集合与无限集合
- 12.4 集合的基数
- 12.5 基数的算术运算
- 12.6 基数的比较
- 12.7 可数集合与连续统假设

$$A \cup B = \{x \mid x \in A \vee x \in B\}$$

$$-A = E - A = \{x \mid x \notin A\}$$

$$A \cap B = \{x \mid x \in A \wedge x \in B\}$$

$$A - B = \{x \mid x \in A \wedge x \notin B\}$$

$$A \oplus B = (A - B) \cup (B - A) = \{x \mid x \in A \,\overline{\vee}\, x \in B\}$$

元素x $\in$ 集合A

$$A = B \Leftrightarrow (\forall x)(x \in A \leftrightarrow x \in B)$$

$$A = B \Leftrightarrow (A \subseteq B \wedge B \subseteq A)$$

$$A \neq B \Leftrightarrow (\exists x)\neg(x \in A \leftrightarrow x \in B)$$

$$A \subseteq \mathrm{B} \Leftrightarrow (\forall x)(x \in A \rightarrow x \in B)$$

$$A \subset B \Leftrightarrow (A \subseteq B \wedge A \neq B)$$

$$\emptyset = \{x \mid x \neq x\}$$

$$E = \quad x \mid x = x$$

对任意的集合A，$\emptyset \subseteq A$

A和B不相交 $\Leftrightarrow \neg(\exists x)(x \in A \wedge x \in B)$

$$\cup A = \{x \mid (\exists z)(z \in A \wedge x \in z)\}$$

$$\cup\emptyset = \emptyset$$

$$\cap A = \{x \mid (\forall z)(z \in A \rightarrow x \in z)\}$$

$\cap\emptyset$无意义

$$P(A) = \{x \mid x \subseteq A\}$$

集合A　　　　集合B

$$A \subset B \Leftrightarrow (A \subseteq B \wedge A \neq B)$$

$|A|<|B|?$

无限集合比大小?

$A = R,\ \ B = R+ =\{x|x \in R \wedge x>0\}$

令f: $R \rightarrow R+$, $f(x)= e^x$。

实数集合与集合的基数

- 基数-----集合中元素的个数.
- 本章主要借助于函数讨论集合的所谓“大小”问题。
- 无限集合
  - 整数集
  - 实数集
  - 有理数集
  - ……

【课前思考】

- 无限集合的基数应该如何定义？
- 一个无限集合的子集是否与原集合的基数相同？
- 实数集的基数是否与自然数集的基数相同？
- 怎样判断两个无限集合的基数是否相等？
- 什么是连续统假设？

#【课前思考】

- 无限集合，所含的元素有无穷多个，
- 基数如何定义？
- 怎样比较两个无限集合的大小？
- $|N| =?$ $|Q| =?$
- $|R| =?$ $|R^+| =?$
- $|P(N)| =?$

伽利略(1564-1642)

- 《两种新科学》
  - 是自然数多呢?还是完全平方数多呢？
  - 直观上看，自然数多。
  - 但从另一个角度看，有一个自然数，便有一个完全平方数：
- 最后伽利略据此得出结论说：
  - 比较无穷量是不可能的
  - 所有无穷量都一样！

1	2	3	4	…	n	…
1	4	9	16	…	n^2	…

一一对应

部分 = 全体（Galileo悖论）

- 1638年著名天文学家Galileo提出下列问题：
- $N = \{0, 1, 2, 3, \ldots, n, \ldots\}$
- $N^2 = \{0, 1, 4, 9, \ldots, n^2, \ldots\}$
- 哪个集合元素更多？
- 一方面，$N^2 \subseteq N$，因为2, 3, 5等均不在N^2中；
- 另一方面，对于N中的每个元素, 在N^2中都能找到一个元素与之对应。
- 当时它不仅困惑了Galileo，也使许多数学家束手无策。

部分 = 全体（Galileo悖论）

- 1874-1894年间，Cantor圆满地解决了Galileo悖论。
- 基本思想：“一一对应”

$A = \{a, b, c, d\}$

$\updownarrow \updownarrow \updownarrow \updownarrow \quad f: A \rightarrow n \quad n = \{0,1,2, \dots n-1\}$

$0, 1, 2, 3$

- 结论：N与N^2之间存在着一一对应（双射）

$|N| = |N^2|$ 　　<u>等势</u>

自然数集合

- **每个自然数可表示为：**

$$0=\Phi$$

$$1=0^{+}=0\cup\{0\}=\{0\}=\{\Phi\}$$

$$2=1^{+}=1\cup\{1\}=\{0,1\}=\{\Phi,\{\Phi\}\}$$

$$3=2^{+}=2\cup\{2\}=\{0,1,2\}=\{\Phi,\{\Phi\},\{\Phi,\{\Phi\}\}\}$$

$$\cdots$$

$$n+1=n^{+}=n\cup\{n\}=\{0,1,\cdots,n\}.$$

12.1　实数集合

定义12.1.1　（整数）

- 对自然数集合N，令

$$Z_+ = N - \{0\}$$

$$Z_- = \{\langle 0, n\rangle \mid n \in Z_+\}$$

$$Z = Z_+ \cup \{0\} \cup Z_-$$

- 则称Z_+的元素为正整数，Z_-的元素为负整数，Z的元素为整数。

12.1　实数集合

定义12.1.2

- 一个整数的相反数分别是

  $-n = < 0, n >$ 当 $n \in Z_+$，

  $-0 = 0$，

  $-< 0, n > = n$ 当 $n \in Z_+$。

12.1　实数集合

定义12.1.3

- 在集合Z上定义小于等于关系$\leq_Z$为，对任意的，$x, y \in Z$，$x \leq_Z y$当且仅当

$$(x \in N \wedge y \in N \wedge x \leq_N y) \vee (x \in Z_- \wedge y \in N)$$
$$\vee (x \in Z_- \wedge y \in Z_- \wedge -y \leq_N -x).$$

- 在集合Z上定义小于关系 $<_Z$为，对任意的$x, y \in Z$，$x <_Z y$ 当且仅当 $(x \leq_z y) \wedge (x \neq y)$

$$Z_+ = N - \{0\}$$
$$Z_- = \{\langle 0, n \rangle \mid n \in Z_+\}$$
$$Z = Z_+ \cup \{0\} \cup Z_-$$

定义12.1.4 （等价关系≅）

对整数集合Z，令

$$Q_1 = Z \times (Z - \{0\}) = \{< a, b > | a \in Z \wedge b \in Z \wedge b \neq 0\}$$

并称Q_1是Z上的因式的集合。

- 对$< a, b > \in Q_1$，可以a/b用代替$< a, b >$。
- 在Q_1上定义关系≅为对任意的 $a/b \in Q_1$，$c/d \in Q_1$，$a/b \cong c/d$ 当且仅当 $a \cdot d = b \cdot c$，其中 $a \cdot d$是在Z上定义的乘法，$=$是Z上的相等关系。

12.1 实数集合

定理12.1.1

- Q_1上的关系$\cong$是等价关系。

1. 自反的
2. 对称的
3. 传递的

12.1　实数集合

定义12.1.5　（有理数集合）

- $Q = Q_1 /\cong$,
- 即Q是集合Q_1对等价关系$\cong$的商集，
- 则称Q的元素为有理数，
- 一般用a/b表示Q中的元素$[<a,b>_{\cong}]$ ，
- 并习惯上取 a、b 是互素的整数，且 $b > 0$ 。

12.1　实数集合

定义12.1.6

- 在Q上定义等于关系$\leq_Q$为，
- 对任意的a/b，$c/d \in Q$，
- $a/b \leq_Q c/d$当且仅当 $a \cdot d \leq_Z b \cdot c$。
- $1/2 \leq_Q 3/4$

绕不过去的坎 $\sqrt{2}$

- 无理数
  - 无理数不能用有穷个有理数来表示。
  - 无理数存在
  - 柯西提出极限的概念，

$\sqrt{2}$可以看作有理数序列：1.4，1.41，1.414…….的极限

- 逻辑上的循环，需要先知道$\sqrt{2}$，才能确定这个有理序列是否收敛于$\sqrt{2}$；但是在定义无理数之前，我们并不知道$\sqrt{2}$是什么？

绕不过去的坎

- Karl Weierstrass （1815—1897）
  - 利用单调有界的有理数数列来定义无理数，从而在严格的逻辑基础上建立了实数理论.
  - $\sqrt{2}$ 即{1.4，1.41，1.414……}为“完成了的整体”
  - 序列1.4，1.41，1.414……的极限看作集合。
  - $\sqrt{2}$即{1.4，1.41，1.414……}
- 实无穷：把无限的整体本身作为一个现成的单位, 是已经构造完成了的东西, 换言之, 即是把无限对象看成为可以自我完成的过程或无穷整体.

12.1　实数集合

定义12.1.7　（基本函数）

- 如果$f: N \to Q$满足条件，

(1) $(\exists x)(x \in Q \wedge (\forall n)(n \in N \to |f(n)| < x))$　　有界的

(2) $(\exists n)(n \in N \wedge (\forall m)(\forall i)((m \in N \wedge i \in N \wedge n \leq m \wedge n \leq i \wedge m \leq i) \to (f(m) \leq f(i))))$ 单调非递减的

- 则f称是一个基本函数，或有界非递减函数。

12.1　实数集合

- 当f是一个基本函数时，则函数值

$$f(0), f(1), f(2), \cdots, f(n), \cdots$$

称为一个基本序列，它有时写为

$$r_0,\ r_1,\ r_2,\ \cdots,\ r_n,\ \cdots$$

- 在以下定义与定理中，B表示所有基本函数的集合。$BF(f)$表示f是一个基本函数。

12.1 实数集合

定理12.1.2

- 当$f: N \to Q$取常数值时，f是基本函数。

即对任意的$r \in Q$，

$$r, r, r \ldots$$

是一个基本序列。

定理12.1.3

- 存在不是常值函数的基本函数。

f(n)= 1−1/(n+1)

12.1　实数集合

定义12.1.8

- 对基本函数的集合 B，定义 B 上的关系为 $\cong$，对任意的f，$g \in B$，

  $f \cong g$当且仅当

$$(\forall \varepsilon)((\varepsilon \in Q \wedge \varepsilon > 0) \to (\exists n)(n \in N \wedge (\forall m)$$
$$((m \in N \wedge n \le m) \to \left| f(m) - g(m) \right| < \varepsilon)))$$

- 直观上说，$f \cong g$等价于f和g的序列的极限相同。

12.1　实数集合

定理12.1.4

- B上的关系$\cong$是等价关系.

定理12.1.5

- 设$f: N \to Q$和$g: N \to Q$都是常值函数，且$f \cong g$，则$f = g$。

12.1 实数集合

定义12.1.9 （实数集）

- 令$R = B/\cong$，即R是集合B对等价关系$\cong$的商集，则称R的元素为实数，称R为实数集合。

x的等价类中有一个常数函数f(n)=r,则x为一个有理数，否则x是无理数

对比

- 对基本函数的集合B，定义B上的关系为$\cong$，$R = B/\cong$，即R是集合B对等价关系$\cong$的商集，则称R的元素为实数，称R为实数集合。
- 对整数集合Z，令
  $Q_1 = Z \times (Z - \{0\}) = \{< a,b > | a \in Z \wedge b \in Z \wedge b \neq 0\}$
- 并称Q_1是Z上的因式的集合。$Q = Q_1 /\cong$，即Q是集合Q_1对等价关系$\cong$的商集，则称Q的元素为有理数。

12.1 实数集合

定义12.1.10

- 在 B 上定义小于关系 $<_B$ 为，对任意的 f，$g \in B$

  $f <_B g$ 当且仅当

$$(\exists \varepsilon)((\varepsilon \in Q \wedge 0 < \varepsilon) \wedge (\exists n)(n \in N \wedge (\forall m)$$

$$((m \in N \wedge n \leq m) \to g(m) - f(m) > \varepsilon))))$$

12.1 实数集合

定义12.1.11

- 在R上定义小于等于关系 $\leq_R$和 小于关系$<_R$为，对任意的$f,g\in B$，即对 $[f]_{\cong}\in R$和$[g]_{\cong}\in R$，

  $[f]_{\cong}\leq_R [g]_{\cong}$当且仅当$f \leq_B g$，

  $[f]_{\cong}<_R [g]_{\cong}$当且仅当$f <_B g$。

【课前思考】

- 无限集合的基数应该如何定义？
- 一个无限集合的子集是否与原集合的基数相同？
- 实数集的基数是否与自然数集的基数相同？
- 怎样判断两个无限集合的基数是否相等？
- 什么是连续统假设？

12.2 集合的等势

定义12.2.1 （集合的等势）

- 对集合A和B，如果存在从A到B的双射函数，就称A和B等势，记作$A \approx B$;
- 如果不存在从A到B的双射函数，就称A和B不等势，记作 $\neg A \approx B$
- 注意，$A \approx B$时不一定有$A = B$，
- 反之一定成立（$A = B$ 则必有 $A \approx B$ ）。

12.2 集合的等势

- 例1：$N \approx Z$。因为存在双射函数

$$f: N \to Z, f(n) = \begin{cases} -\dfrac{1+n}{2} & \text{当n是奇数} \\ \dfrac{n}{2} & \text{当n是偶数} \end{cases}$$

12.2 集合的等势

- 例2：$R \approx R^+$，其中R^+是正实数集合。因为存在双射函数
- $f: R \to R^+$，$f(x) = e^x$
- 所以$R \approx R^+$。

例：N≈Q.

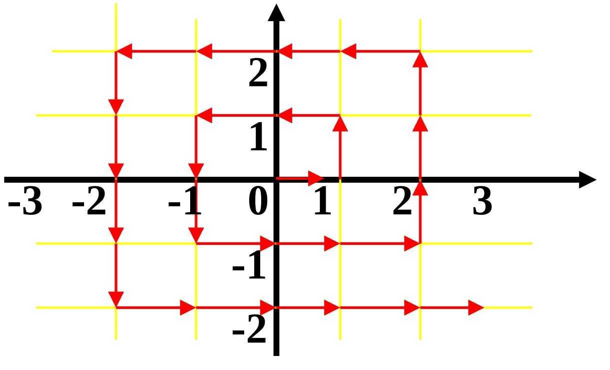
因为每个有理数都可以写成一个分数形式如下：

…	-3/1	-2/1	-1/1	0/1	1/1	2/1	3/1	…
…	-3/2	-2/2	-1/2	0/2	1/2	2/2	3/2	…
…	-3/3	-2/3	-1/3	0/3	1/3	2/3	3/3	…
…	-3/4	-2/4	-1/4	0/4	1/4	2/4	3/4	…
	⋮	⋮	⋮	⋮	⋮	⋮	⋮	

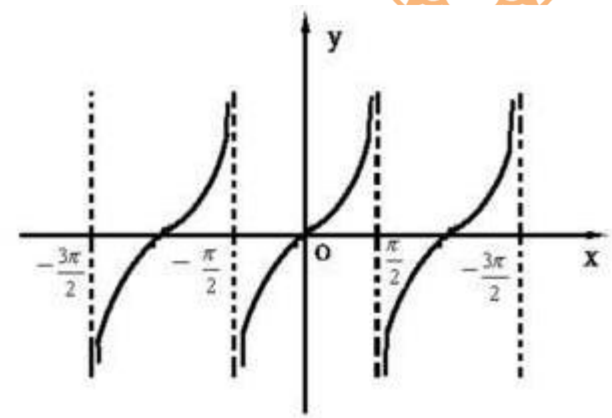
可以从0/1开始按照箭头指定次序排列Q中元素

所以N≈Q 。

另外　Z×Z≈N　　如右图所示。



12.2 集合的等势



- 例6：$(0,1) \approx R$。
- 构造双射函数 $f: (0,1) \to R$
- 已知 $\tan(x)$：$(-\frac{\pi}{2},\frac{\pi}{2}) \to R$
- 设 $f(x) = \tan(ax+b)$,
- 由 $f(0) = \tan(b)$，$b = -\frac{\pi}{2}$
- 由 $f(1) = tan(a+b)$，$a = \pi$
- 代入 $f(x) = \tan\frac{\pi(2x-1)}{2}$

12.2 集合的等势

- 例7： $[0,1] \approx (0,1)$，构造双射函数
- $f: [0,1] \to (0,1)$,

$$f(x)=\begin{cases} \dfrac{1}{4} & \text{当}x=0 \\ \dfrac{1}{2} & \text{当}x=1 \\ \dfrac{x}{4} & \text{当}x=2^{-n}, n=1,2,3,\ldots \\ x & \text{当}x\text{取其它值} \end{cases}$$

- 当 $x = 2^{-n}$ 时，多乘一个¼

12.2 集合的等势

定理12.2.1

- 对任意的集合A，有

$$P(A) \approx A_2$$

$$P(A) \approx A_2$$

- 证明*： 这里$2 = \{0,1\}$，所以A_2是所有函数 $f: A \to \{0,1\}$组成的集合。

A的特征函数χ_A定义为：

$$\chi_A : E \to \{0,1\}, \chi_A(a) = \begin{cases} 1 & a \in A \\ 0 & a \notin A \end{cases}$$

- 构造函数 $H: P(A) \to A_2$
- 对于任意 $B \in P(A)$，$H(B) = \chi_B(x): A \to \{0,1\}$。
- 其中$\chi_B(x)$是以A为全集时B的特征函数。
- 1. 证H是单射的；
- 设B_1，$B_2 \in P(A)$ 且$B_1 \neq B_2$，则
  $H(B_1) = \chi_{B_1} \neq \chi_{B_2} = H(B_2)$，所以，$H$是单射的。
- 2. 证H是满射的；
- 对任意的$g \in A_2$，$g: A \to \{0,1\}$，存在集合
  $B = \{x \mid x \in A \wedge g(x) = 1\}$，则 $B \subseteq A$，即存在
  $B \in P(A)$，且$H(B) = g(x)$。所以，H是满射的。

12.2 集合的等势

定理12.2.2

- 对任意的集合A、B和C，

  （1） $A \approx A$，

  （2） 若$A \approx B$，则 $B \approx A$，

  （3） 若$A \approx B$且 $B \approx C$ ，则 $A \approx C$。

- 该定理表明，等势具有自反性，对称性和传递性。

Multiple Choice(multiple) Points: 1

Setting

下面哪些集合是等势的

A $N \approx N \times N$

B $N \times N \approx Z$

C $R+ \approx (0,1)$

D $Z \approx R$

Submit

12.2 集合的等势

- 由定理可知

$$N \approx N \times N \approx Z \approx Q$$

- 且

$$R \approx R^{+} \approx (0,1) \approx [0,1]。$$

12.2 集合的等势

- 若由简单直觉来观察，有理数的排列与整数的排列迥然不同。
- Q中元素的排列似乎远比N稠密，但其个数却竟然与N中的元素一样多，确实出乎人们的预料。
- 实际上，一个有理数可以看作是两个整数组成的数对。

12.2 集合的等势

- 当Cantor把这一结果通知Dedekind (比Cantor年长14岁，曾经是高斯的学生，抽象代数学的先驱，最早支持Cantor的集合论) 时，Dedekind 在回信中写道：
- “我看到了，但我简直不敢相信！”
- 这便是Cantor的又一个伟大的发现，也正是由于这一发现，使他进一步猜想：

$$|N| ?= |R| \quad or \quad N ?\approx R$$

12.2 集合的等势

定理12.2.3　康托定理(1890)

(1) $\neg N \approx R$,

(2) 对任意的集合A，　$\neg A \approx P(A)$。

对角线方法（1891年）

- **Cantor's Diagonal Method**
- 假设你把实数区间（0，1）里的所有数按照某种顺序排列起来
- $a_1 = 0.\underline{0}147574628\cdots$
  $a_2 = 0.3\underline{7}21111111\cdots$
  $a_3 = 0.23\underline{2}3232323\cdots$
  $a_4 = 0.000\underline{4}838211\cdots$
  $a_5 = 0.0516\underline{0}00000\cdots$
  ………

小数点后第一位不等于 a_1 的第一位，
小数点后第二位不等于 a_2 的第二位，
……
总之小数点后第 i 位不等于 a_i 的第 i 位。
这个数属于实数区间 (0, 1)，但它显然不在你的列表里，因为它和你列表里的每一个数都有至少一位是不同的。
我们就证明了实数区间是不可数的。

- 证明:
- （1） 只要证明 $\neg N \approx [0,1]$ 即可。
- 为此只要证明对任何函数 $f: N \to [0,1]$, 都存在 $x \in [0,1]$, 使$x \notin ran(f)$, 即任何函数$f: N \to [0,1]$都不是双射的。
- 反证：假设存在一个双射函数 $f: N \to [0,1]$ 则[0,1]中的元素必与N中的元素一一对应，那么[0,1]中的元素必可排列成如下的形式：

$$ranf = [0,1] = \{x_1, x_2, \cdots, x_i, \cdots\}$$

- 设每个x_i的小数形式是

$$0.a_{i1}a_{i2}\cdots a_{ij}\cdots, \text{且} a_{ij} \in \{0,1,\cdots 9\}$$

- 对任意一个$f: N \to [0,1]$, 顺序列出f 值

$$f(0) = x_1 = 0.a_{11}a_{12}a_{13}a_{14}\ldots$$
$$f(1) = x_2 = 0.a_{21}a_{22}a_{23}a_{24}\ldots$$
$$f(2) = x_3 = 0.a_{31}a_{32}a_{33}a_{34}\ldots$$
$$f(3) = x_4 = 0.a_{41}a_{42}a_{43}a_{44}\ldots$$
$$\ldots$$
$$f(n-1) = x_n = 0.a_{n1}a_{n2}a_{n3}a_{n4}\ldots$$
$$\ldots$$

- 依假设

任一[0,1]中的实数均应出现在上表中的某一行

- 关键：如何找出一个[0,1]区间的小数，并证明该小数不在上表中出现。
- Cantor 提出按对角线构造一个新的小数x^*

$x^* = 0.a_{11}^* a_{22}^* a_{33}^* \cdots a_{ii}^* \cdots$

使得 $a_{ii}^* \neq a_{ii} \quad (i = 1, 2, \cdots, n, \cdots)$

显然 $x^* \in [0, 1]$, 然而 x^*又不在上表中。

$\because x^*$与上表中的任一x_i至少总有一位数字相异。

于是$x^* \notin ran(f)$，即f不可能是满射，故不存在双射函数 $f: N \to [0,1]$。

对任意的集合A，$\neg A \approx P(A)$

（2）对任意的函数 $g: A \to P(A)$，构造集合

$B = \{ x | x \in A \wedge x \notin g(x) \}$。

- 显然, $B \subseteq A$, $B \in P(A)$。对任意的 $x \in A$, 有$x \in B \Leftrightarrow x \notin g(x)$, 则$B \neq g(x)$。
- 所以$B \notin ran(g)$, 但$B \in P(A)$,
- 所以g不是满射的。当然也不是双射的。
- 不存在双射函数$g: A \to P(A)$。

- 例：

$$A = \{1,2,3\}$$
$$P(A) = \{\Phi,\{1\},\{2\},\{3\},\{1,2\},\{1,3\},\{2,3\},A\}$$

- 设$B = \{1,2\}$,　显然, $B \subseteq A, B \in P(A)$

　$g(x) = \{3\}$　满足$B = \{x | x \in A \wedge x \notin g(x)\}$

　$B \neq g(x)$，　$B \notin ran(g)$,　$g：A \to P(A)$,

- 总之，不管给出的函数g为何种情形，均可按此法构造集合B，B是$P(A)$中的元素，但不在g的值域中。
- 所以g不是满射的。

Cantor定理及其理论意义

- Cantor首次对无穷集合从定性与定量两方面进行了深入的研究
- Cantor定理揭示：
- *N*与*R*是有本质区别的；
- 必须了解无穷集合基数的本质区别；
- 著名的证明方法 — *Cantor Diagonal Method*

 已成为数学与计算机科学中证明“否定性结论”的强有力工具

12.3 有限集合与无限集合

定义12.3.1 （有限集合与无限集合）

- 集合A是有限集合，当且仅当存在$n \in N$，使$n \approx A$；
- 集合A是无限集合当且仅当A不是有限集合，即不存在$n \in N$使$n \approx A$。

12.3 有限集合与无限集合

- 定理12.3.1 不存在与自己的真子集等势的自然数。
- 推论12.3.1 不存在与自己的真子集等势的有限集合。
- 推论12.3.2 任何与自己的真子集等势的集合均为无限集合。N 和R都是无限集合。
- 推论12.3.3 任何有限集合只与唯一的自然数等势。

12.4　集合的基数

定义12.4.1

- 对任意的集合A和B，它们的基数分别用$card(A)$和$card(B)$表示，

  并且 $card(A) = card(B) \Leftrightarrow A \approx B$。

  （有时把 $card(A)$ 记作 $|A|$或 $\#(A)$。）

- 对有限集合A和$n \in N$，若$A \approx n$，

  则$card(A) = n$。

基数理解

- 集合的基数是刻画一个集合大小（或度量）的精确数学概念
- 可以理解为一个集合中元素“个数”的抽象，是有穷集合元素个数的推广

12.4　集合的基数

12-4-1　（自然数集合N的基数）

- N的基数不是自然数，因为N不与任何自然数等势。
- 通常用Cantor的记法，把 $card(N)$ 记作 $\aleph_0$，读作“阿列夫零”。
- 因此，$card(Z)=card(Q)=card(N\times N)=\aleph_0$

12.4　集合的基数

12-4-2 （实数集合R的基数）

- R的基数不是自然数，也不是$\aleph_0$（因为$\neg R \approx N$）。
- 通常把card(R)记作 $\aleph_1$，读作“阿列夫壹”。
- 因此，$card([0,1]) = card((0,1)) = card(R^+) = \aleph_1$

例: $A=\{a, b, c\}$, $B=\{\{a\}, \{b\}, \{c\}\}$.

$N_{偶}=\{n \mid n\in N \wedge n为偶数\}$,

$N_{奇}=\{n \mid n\in N \wedge n为奇数\}$

$\mathrm{card}(A)=\mathrm{card}(B)=3$

$\mathrm{card}(N_{偶})=\mathrm{card}(N_{奇})=\aleph_0$

$\mathrm{card}(\ [0, 1]\ )=\mathrm{card}(\ (0, 1)\ )=\aleph_1$

12.5　基数的算术运算

定义12.5.1

- 对任意的基数 k 和 l,

(1) 若存在集合K 和 L, $K \cap L = \emptyset$, $card(K) = k$, $card(L) = l$, 则 $k + l = card(K \cup L)$

(2) 若存在集合 K和L, $card(K) = k$, $card(L) = l$, 则 $k \cdot l = card(K \times L)$

(3) 若存在集合 K和L, $card(K) = k$, $card(L) = l$, 则 $k^l = card(L_K)$, 其中L_K是从L到K的函数的集合。

例：证明: $2+4=6$, $2\times 3=6$, $3^2=9$, $0^0=1$.

证: (1) 取$A=\{0, 1\}$, $B=\{2, 3, 4, 5\}$, 则$A\cap B=\Phi$, 且

$card(A)=2$, $card(B)=4$,

$A\cup B=\{0, 1, 2, 3, 4, 5\}\approx 6$

$\therefore\ 2+4=card(A\cup B)=6$.

(2) 取$A=\{0, 1\}$, $B=\{0, 1, 2\}$, 则$card(A)=2$,

$card(B)=3$, $A\times B\approx 6$, $\therefore\ 2\times 3=card(A\times B)=6$.

(3) 取$A=\{1, 2\}$, $B=\{a, b, c\}$, 则$card(A)=2$, $card(B)=3$,

$A_B\approx 9$ $\therefore\ 3^2=card(A_B)=9$.

(4) 取$A=\Phi$, $B=\Phi$, 则$card(A)=card(B)=0$

$0^0=card(\Phi_\Phi)=card(\{\Phi\})=1$.

- 例 5. 对任意集合A, 有

$$\mathrm{card}(P(A))=2^{\mathrm{card}(A)}$$

证明: 由定义

$$2^{\mathrm{card}(A)}=\mathrm{card}(A_2),\text{ 其中}$$

$$A_2=\{f \mid f: A\to\{0, 1\}\}$$

$\because$ $P(A)\approx A_2$,

$\therefore$ $\mathrm{card}\,(A_2)=\mathrm{card}(P(A))$

即$\mathrm{card}(P(A))=\mathrm{card}(A_2)=2^{\mathrm{card}A}$

推论: (1) $\mathrm{card}\,(P(N))=2^{\aleph_0}$

(2) $\mathrm{card}\,(P(R))=2^{\aleph_1}$

12.5 基数的算术运算

定理12.5.1 对任意的基数k、l和m，

(1) $k+l=l+k$

$k\cdot l=l\cdot k$

(2) $k+(l+m)=(k+l)+m$

$k\cdot(l\cdot m)=(k\cdot l)\cdot m$

(3) $k\cdot(l+m)=k\cdot l+k\cdot m$

(4) $k^{(l+m)}=k^{l}\cdot k^{m}$

(5) $(k\cdot l)^{m}=k^{m}\cdot l^{m}$

(6) $(k^{l})^{m}=k^{(l\cdot m)}$

通过构造函数来证明

12.6　基数的比较

定义12.6.1

- 对集合K和L，$card(K) = k$，$card(L) = l$，如果存在从K到L的单射函数，则称集合L优势于K，记作$K \leq L$，且称基数k不大于基数l，记作$k \leq l$。

12.6　基数的比较

定义12.6.2

- 对基数k和l,
- 如果$k \le l$且$k \neq l$,
- 则称k小于l，记作$k < l$。

12.6 基数的比较

定理12.6.1

- 对任意的基数k、l和m

（1）$k \le k$

（2）若$k \le l$且$l \le m$，则 $k \le m$，

（3）若$k \le l$且$l \le k$，则 $k = l$ （施罗德-伯恩斯坦定理），

（4）$k \le l$或 $l \le k$

12.6 基数的比较

例5:

- $R \approx N_2$, 即$R \approx P(N)$。

f: N→{0,1}   G: N_2 →[0,1]

G(f) = 0.10011…

- $R \approx N_2$

  证明: 只需证$R \le N_2$, 且$N_2 \le R$

  (1) 先证$R \le N_2$. 为此只需证$(0, 1) \le N_2$.

  构造函数$H: (0, 1) \to N_2$,

  对$\forall z \in (0, 1)$, 有$H(z) \in N_2 = \{f \mid f: N \to \{0, 1\}\}$

  其中z表示二进制无限小数

  $$H(z): N \to \{0, 1\}$$

  $\forall n \in N$, 取$H(z)(n)$为z的小数点后的第n位数

  显然, $z_1 \ne z_2$时, $H(z_1) \ne H(z_2)$

$\therefore$ H为单射, $\therefore (0, 1) \le N_2$.

(2) 证$N_2 \le R$. 只需证$N_2 \le [0, 1]$,

设$G: N_2 \to [0,1]$

$$\forall f \in N_2 = \{f \mid f: N \to \{0, 1\}\}$$

则f的函数值确定一个[0, 1]区间上的实数, 例如 f(0), f(1), f(2), f(3), …依次为1, 0, 1, 1, 1, 0, 0, 0, … 时, 取十进制数

y=0.10111000…, 则$y \in [0, 1]$

即G(f)=0.101110…

显然G是单射. $\therefore N_2 \le [0, 1]$

- 推论: $\aleph_1 = \mathrm{card}\ R = \mathrm{card}\ N_2 = 2^{\aleph_0}$.

12.6　基数的比较

定理12.6.2

- 对任意的基数k、l和m，如果$k \leq l$，

（1）$k + m \leq l + m$

（2）$k \cdot m \leq l \cdot m$

（3）$k^m \leq l^m$ ，

（4）若$k \neq 0$或 $\mathrm{m} \neq 0$则$\mathrm{m}^k \leq m^l$

12.6 基数的比较

定理12.6.3 对基数k和l，如果$k \le l$、 $k \neq 0$，l是无限基数，则

$$k + l = k \cdot l = l = \max(k, l)$$

定理12.6.4

(1) 对任意的无限集合K，$N \le K$。

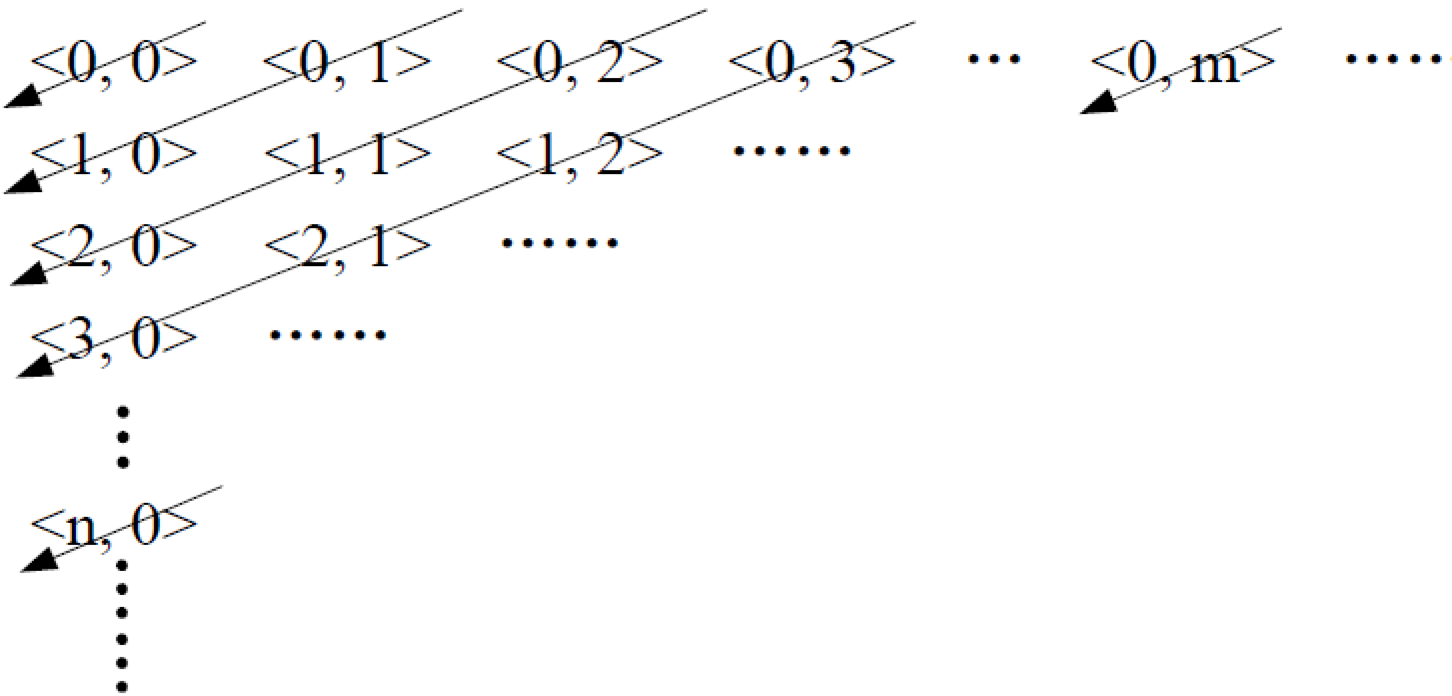
(2) 对任意的无限基数k，$\aleph_0 \le k$。

$\aleph_0$是最小的无限基数

例 5’.任给无限基数κ，都有κ·κ = κ

- 选择公理.pdf pages 12-13
- |N×N|=|N|
- |R×R|=|R|

$|N \times N|=|N|$



$(0,1]\approx(0,1)$

- 构造双射函数 $f:(0,1]\rightarrow(0,1)$

$$
f(x)=\begin{cases}
\dfrac{1}{2} & \text{当}x=1 \\
\dfrac{x}{2} & \text{当}x=2^{-n}, n=1,2,3,\ldots \\
x & \text{当}x\text{取其它值}
\end{cases}
$$

$|R \times R| = |R|$

$|R \times R| = |(0, 1] \times (0, 1]| = |(0, 1]| = |R|$

将 $x \in (0, 1]$表示为十进小数，注意有些x 的表示不唯一，如0.35 也可以表示为$0.34\dot{9}$。我们取后一种表达式，这种表达式的特征是不会在某一位后全是0，所以这种表达式称为x 的十进无限小数表达式，它是唯一的。特别地，1 的十进无限小数表达式是$0.\dot{9}$。这样，任给$x \in (0, 1]$，都有$x = 0.a0a1a2\cdots\cdots$。

$$|(0, 1]\times(0, 1]| = |(0, 1]|$$

任给$\langle x, y\rangle\in(0, 1]\times(0, 1]$，将$x, y$ 分别表示为

x = 0.a0a1a2……和 = 0.b0b1b2……,

取z = 0. a0b0a1b1a2b2……,

构造$(0, 1]\times(0, 1]$到$(0, 1]$的映射

g：$(0, 1]\times(0, 1]\to(0, 1]$　$g(x, y) = z$

则 g 是单射，所以

$|(0, 1]\times(0, 1]|\le|(0, 1]|$。

又 f：$(0, 1]\to(0, 1]\times(0, 1]$　$f(x) = \langle x, 1\rangle$是单射，所以$|(0, 1]|\le|(0, 1]\times(0, 1]|$。

12.6　基数的比较

例6:

$$2^{\aleph_0} \le \aleph_0 * 2^{\aleph_0} \le 2^{\aleph_0} * 2^{\aleph_0} = 2^{\aleph_0}$$

所以， $\aleph_0 * 2^{\aleph_0} = 2^{\aleph_0}$

12.6 基数的比较

例7：对任意的无限基数k, $k^k = 2^k$。

证明

$$k^k \le (2^k)^k = 2^{k\cdot k} = 2^k \le k^k$$

所以，$k^k = 2^k$

$k < 2^k \Rightarrow k \leq 2^k$

根据定理 12.6.2

$\Rightarrow k^k \leq (2^k)^k$

$(2^k)^k = 2^{k \cdot k} = 2^k \leq (k)^k$

因此 $k^k = 2^k$

$k < 2^k \Rightarrow k^k \leq (2^k)^k$

反证法. 假设 $k^k < (2^k)^k$

$k^k < (2^k)^k = 2^{k \cdot k} = 2^k < k^k$

矛盾.

12.7　可数集合与连续统假设

定义12.7.1 （可数集合）

- 对集合K，如果$card(K) \leq \aleph_0$ ，
- 则称K是可数集合。

12.7　可数集合与连续统假设

定理12.7.1 （可数集的性质）

（1） 可数集的任何子集是可数集。

（2） 两个可数集的并集和笛卡儿积是可数集。

（3） 若K是无限集合，则$P(K)$是不可数的。

（4） 可数个可数集的并集是可数集

（该结论可表述为：若A是可数集，A的元素都是可数集，则$\cup A$是可数集）。

12.7　可数集合与连续统假设

- 已知的基数按从小到大的次序排列有

$$0,\quad 1,\quad \cdots,\quad n,\quad \cdots,\quad \aleph_0,\quad \aleph_1,\quad 2^{\aleph_1},\quad \cdots$$

$$0,\quad 1,\quad \cdots,\quad n,\quad \cdots,\quad \aleph_0,\quad \aleph_1,\quad \aleph_2,\quad \cdots,\quad \aleph_i,\quad \aleph_{i+1}\quad \cdots$$

其中$\aleph_{i+1} = 2^{\aleph_i}$

12.7　可数集合与连续统假设

12-7-1 （连续统假设 Continuum Hypothesis

1878年，由Cantor提出，简称CH假设）

- “连续统假设”就是断言不存在基数k，使

$$\aleph_0 < k < 2^{\aleph_0} (\aleph_1)$$

- 这个假设至今未经证明。
- 有人已证明：根据现有的（ZF)公理系统，既不能证明它是对的，也不能证明它是错的。

关于连续统假设的讨论

- 哥德尔和科恩已经证明，连续统假设和ZF公理系统既是独立的也是相容的。
- 也就是说，ZF公理加上连续统假设或者加上连续统假设的否命题，都不会导出任何矛盾。
- 这是一个确定无疑的结果，建立在严格的证明之上。

关于连续统假设的讨论

- 但上述结果并没有对连续统假设本身的真伪作出判断。
- 不过从80年代后期开始，有人通过构造连续统假设的等价命题，试图说明连续统假设是不合理的。如果这样的观点得到认可，则有理由认为ZF公理体系应该得到进一步加强。
- 但由于这些等价命题都不是“直观正确”或者“直观不正确”的，所以关于这个问题还存在争论。

康托乐园

本章主要内容小结

- 集合的等势
- 康托定理
- 自然数集与实数集的基数
- 典型的无穷集合的基数运算
- 连续统假设与主要结论

谢谢

shixia@tsinghua.edu.cn