



清華大學

Tsinghua University

第二章：命题逻辑的 等值和推理演算

刘世霞

shixia@tsinghua.edu.cn

离散数学一（课程号 24100023-0） 教学日历

（2019-2020 学年度秋季学期适用） 上课时间： 每周五上午 9:50—12:15 地点： 六教 6A117

周次	上课日期	章节	主要教学内容（注：*表示非基本要求的内容）
1	9月13日	中秋放假	
2	9月20日	概述，第1章 1.1~1.5	绪论，离散数学与数理逻辑学科概述，研究内容与发展概况 命题概念，命题联结词与真值表，合式公式重言式，命题形式化
3	9月27日	第1章 1.6 第2章 2.1~2.4	波兰表达式，悖论简介，其它联结词，等值定理，基本等值公式 命题公式与真值表的关系，联结词的完备集，对偶式
4	9月29日 (周日)	第2章 2.5~2.10	范式概念，析取范式，合取范式，主范式 基本推理公式，推理演算与推理规则，归结推理法，应用举例
5	10月11日	第3章 3.1~3.6	命题逻辑的公理化，公理系统的结构，命题逻辑的公理系统 公理系统的完备性，王浩算法*，非标准逻辑简介*
6	10月18日	第4章 4.1~4.6	谓词逻辑的基本概念，谓词和个体词，函数和量词，合式公式 自然语句的形式化，有限域下公式的表示法 公式的普遍有效性和判定问题
7	10月25日	第5章 5.1~5.3	谓词逻辑等值和推理演算，否定型等值式，量词分配等值式 范式，前束范式，SKOLEM 标准型，存在量词前束范式*
8	11月1日	第5章 5.4~5.6	基本的推理公式及其证明方法，推理演算与推理规则 谓词逻辑的归结推理法，谓词逻辑应用举例



离散数学一（课程号 24100023-0） 教学日历

（2019-2020 学年度秋季学期适用）上课时间：每周五上午 9:50—12:15 地点：六教 6A117

9	11 月 8 日	第 9 章 9.1~9.4	集合的概念和基本表示法，集合间的关系和特殊集合 集合的运算，集合的图形表示法，集合运算性质和证明
10	11 月 15 日	第 9 章 9.5~ 9.7	幂集性质，传递集合，包含排斥原理，有限集合的基数 集合论公理系统简介，无穷公理与自然数集合
11	11 月 22 日	第 10 章 10.1 ~10.4	关系的基本概念，二元关系与特殊关系，关系矩阵和关系图 关系的逆、合成，限制和象，关系的基本性质
12	11 月 29 日	第 10 章 10.4 ~ 10.6	关系基本性质的几个结论，关系的闭包，关系的合成 闭包的性质及其构造方法，等价关系的概念
13	12 月 6 日	第 10 章 10.6 ~ 10.8	划分与等价关系，相容关系和覆盖，偏序关系与哈斯图 上确界和下确界，全序关系和链
14	12 月 13 日	第 11 章 11.1, 11.2, 11.5	函数，任意集合上的函数定义，特殊函数，满射单射与双射 选择公理*，函数的合成，函数的逆*
15	12 月 20 日	第 12 章 12.1~12.7	实数集合与集合的基数，集合的等势，有限集合与无限集合 的基数，可数集合与连续统假设
16	12 月 27 日	复习课	课程总结
17-18	12.30 - 1.12		考试（具体时间待定）



主要内容

2.1 等值定理

2.2 等值公式

2.3 命题公式与真值表的关系

2.4 联接词的完备集

2.5 对偶式

2.6 范式

2.7 推理形式

2.8 基本的推理公式

2.9 推理演算

2.10 归结推理法



复习：常用的等值公式

- 蕴涵等值式 $P \rightarrow Q = \neg P \vee Q$
- 前提合取合并 $P \rightarrow (Q \rightarrow R) = (P \wedge Q) \rightarrow R$
- 等价等值式： $P \leftrightarrow Q = (P \rightarrow Q) \wedge (Q \rightarrow P)$
- 假言易位： $P \rightarrow Q = \neg Q \rightarrow \neg P$
- 等价否定等值式： $P \leftrightarrow Q = \neg P \leftrightarrow \neg Q$
- 归谬论： $(P \rightarrow Q) \wedge (P \rightarrow \neg Q) = \neg P$

复习：常用的等值公式



- $P \leftrightarrow Q = (P \wedge Q) \vee (\neg P \wedge \neg Q)$ 从取真来描述双条件
- $P \leftrightarrow Q = (P \vee \neg Q) \wedge (\neg P \vee Q)$ 从取假来描述双条件
- $P \rightarrow (Q \rightarrow R) = Q \rightarrow (P \rightarrow R)$ 前提交换
- $(P \rightarrow R) \wedge (Q \rightarrow R) = (P \vee Q) \rightarrow R$ 前提析取合并

证明其他等值式



2.5 对偶式

8. 同一律:

$$P \vee F = P \quad P \wedge T = P$$

对偶式

将给定的命题公式 A 中出现的 \vee, \wedge, T, F 分别以 \wedge, \vee, F, T 代换, 得到公式 A^* , 则称 A^* 是公式 A 的对偶式, 或说 A 和 A^* 互为对偶式。



有关对偶式的定理

在以下定理2.5.1~定理2.5.6中, 记

$$A = A(P_1, P_2, \dots, P_n)$$

$$A^- = A(\neg P_1, \neg P_2, \dots, \neg P_n)$$



有关对偶式的定理

- 定理2.5.1

$$\neg(A^*) = (\neg A)^*, \quad \neg(A^-) = (\neg A)^-$$

- 定理2.5.2

$$(A^*)^* = A, \quad (A^-)^- = A$$

- 定理2.5.3

$$\neg A = A^{*-}$$



2.5 对偶式

证明定理2.5.3: $\neg A = A^{*-}$

用**数学归纳法**, 施归纳于A中出现的联结词个数n来证明。

基始: 设 $n = 0$, A中无联结词, 便有

$$A = P, \text{ 从而 } \neg A = \neg P$$

$$\text{但 } A^{*-} = \neg P$$

$\therefore n = 0$ 时定理成立。



2.5 对偶式

归纳： 设 $n \leq k$ 时定理成立，

往证 $n = k+1$ 时定理也成立。

$\because n = k+1 \geq 1$ ， A 中至少有一个联结词，可分为三种情形：

$$A = \neg A_1, \quad A = A_1 \wedge A_2, \quad A = A_1 \vee A_2$$

其中 A_1, A_2 中联结词个数 $\leq k$ 。



$$\neg(A^*) = (\neg A)^*, \quad \neg(A^-) = (\neg A)^-$$

2.5 对偶式

依归纳法假设, $\neg A_1 = A_1^{*-}$, $\neg A_2 = A_2^{*-}$

当 $A = \neg A_1$ 时 $\neg A = \neg(\neg A_1)$

$$= \neg(A_1^{*-}) \quad \text{归纳法假设}$$

$$= \neg((A_1^*)^-)$$

$$= (\neg(A_1^*))^- \quad \text{定理 2.5.1}$$

由定理2.5.1 (2)先取逆再取非 = 先取非再取逆

$$= (\neg A_1)^{*-}$$

由定理2.5.1 (1)先取对偶再取非 = 先取非再取对偶

$$= A^{*-} \quad \text{由条件 } A = \neg A_1$$

依归纳法假设, $\neg A_1 = A_1^{*-}$, $\neg A_2 = A_2^{*-}$



2.5 对偶式

当 $A = A_1 \wedge A_2$ 时

$$\neg A = \neg(A_1 \wedge A_2)$$

$$= \neg A_1 \vee \neg A_2 \quad \text{摩根律}$$

$$= A_1^{*-} \vee A_2^{*-} \quad \text{归纳法假设}$$

$$= (A_1^* \vee A_2^*)^- \quad \text{A}^- \text{定义}$$

$$= (A_1 \wedge A_2)^{*-} \quad \text{A}^* \text{定义}$$

$$= A^{*-} \quad \text{定理证毕}$$

类似可以证明 $A = A_1 \vee A_2$ 的情况

该定理实为摩根律的另一种形式。

它将 \neg 、 $*$ 、 $-$ 有机地联系起来。



进一步理解

- 由 $\neg A = A^{*-}$
- 即 $A = \neg(A^{*-})$
- 可帮助理解由真值表按取真的行来列写与按取假的行来列写公式的关系。



有关对偶式的定理(续)

- 定理2.5.4
若 $A = B$, 必有 $A^* = B^*$ (对偶原理)
- 定理2.5.5
若 $A \rightarrow B$ 永真, 必有 $B^* \rightarrow A^*$ 永真
- 定理2.5.6
 A 与 A^- 同永真, 同可满足;
 $\neg A$ 与 A^* 同永真, 同可满足。



2.5 对偶式

定理 2.5.4 若 $A = B$ 必有 $A^* = B^*$

证明: 因为 $A = B$ 等价于 $A \leftrightarrow B$ 永真。

从而 $\neg A \leftrightarrow \neg B$ 永真。

依定理2.5.3, $\neg A = A^{*-}$, $\neg B = B^{*-}$

于是 $A^{*-} \leftrightarrow B^{*-}$ 永真

必有 $A^* \leftrightarrow B^*$ 永真 代入规则

故 $A^* = B^*$



2.5 对偶式

- 定理2.5.5 若 $A \rightarrow B$ 永真，必有 $B^* \rightarrow A^*$ 永真
- 证

$$A \rightarrow B$$

$$= \neg B \rightarrow \neg A \quad \text{命题与逆否命题等值}$$

$$= B^* \neg \rightarrow A^* \neg \quad \text{定理2.5.3}$$

$$= B^* \rightarrow A^* \quad \text{代入规则}$$

A为重言式 \Rightarrow A^* 必为矛盾式



- 若A为重言式,则 A^* 必为矛盾式.

如果 $A = T$, 由对偶原理可知: $A^* = (T)^* = F$

- 例如,

设 $A = P \vee (\neg P \vee (Q \wedge \neg Q))$,

则 $A^* = P \wedge (\neg P \wedge (Q \vee \neg Q))$

$$A \Leftrightarrow P \vee (\neg P \vee 0) \Leftrightarrow P \vee \neg P \Leftrightarrow 1,$$

$$A^* \Leftrightarrow 0.$$



2.6 范式

2.6.1 文字与互补对

命题变项及其否定式(如 P 与 $\neg P$) 统称**文字**。
且 P 与 $\neg P$ 称为**互补对**。



2.6 范式

2.6.2 合取式

由文字的合取所组成的公式称为**合取式**。由有限个文字构成的合取式称作简单合取式。

2.6.3 析取式

由文字的析取所组成的公式称为**析取式**。由有限个文字构成的析取式称作简单析取式。

补充：析取式与合取式



- 令 A_1, A_2, \dots, A_s 表示 s 个简单析取式或 s 个简单合取式。
- 设 A_i 是含 n 个文字的简单析取式，若 A_i 中既含某个命题变项 P_j ，又含它的否定式 $\neg P_j$ ，即 $P_j \vee \neg P_j$ ，则 A_i 为重言式。
- 反之，若 A_i 为重言式，则它必同时含某个命题变项和它的否定式，否则，若将 A_i 中的不带否定符号的命题变项都取0值，带否定号的命题变项都取1值，此赋值为 A_i 的成假赋值，这与 A_i 是重言式相矛盾。
- 类似的讨论可知，若 A_i 是含 n 个命题变项的简单合取式，且 A_i 为矛盾式，则 A_i 中必同时含某个命题变项及它的否定式，反之亦然。

补充：析取式与合取式



定理

- (1) 一个简单析取式是重言式当且仅当它同时含有某个命题变项及它的否定式(一个互补对)。
- (2) 一个简单合取式是矛盾式当且仅当它同时含有某个命题变项及它的否定式(一个互补对)。



2.6 范式

2.6.4 析取范式

析取范式是形如

$$A_1 \vee A_2 \vee \dots \vee A_n$$

的公式，其中 $A_i (i = 1, \dots, n)$ 为合取式。

2.6.5 合取范式

合取范式是形如

$$A_1 \wedge A_2 \wedge \dots \wedge A_n$$

的公式，其中 $A_i (i = 1, \dots, n)$ 为析取式。



求范式举例

- 例1 求 $P \leftrightarrow Q$ 的析取范式与合取范式:

$$P \leftrightarrow Q \Leftrightarrow (P \wedge Q) \vee (\neg P \wedge \neg Q) \text{----析取范式}$$

$$P \leftrightarrow Q \Leftrightarrow (\neg P \vee Q) \wedge (P \vee \neg Q) \text{----合取范式}$$

范式不唯一，例如

$$P \leftrightarrow Q \Leftrightarrow (\neg P \vee Q) \wedge (Q \vee \neg Q) \wedge (P \vee \neg Q)$$

例2 求 $(P \rightarrow Q) \leftrightarrow R$ 的析取范式与合取范式



(1) 先求合取范式

$$(P \rightarrow Q) \leftrightarrow R$$

$$\Leftrightarrow (\neg P \vee Q) \leftrightarrow R \quad (\text{消去} \rightarrow)$$

$$\Leftrightarrow ((\neg P \vee Q) \rightarrow R) \wedge (R \rightarrow (\neg P \vee Q)) \quad (\text{消去} \leftrightarrow)$$

$$\Leftrightarrow (\neg(\neg P \vee Q) \vee R) \wedge (\neg R \vee (\neg P \vee Q)) \quad (\text{消去} \rightarrow)$$

$$\Leftrightarrow ((P \wedge \neg Q) \vee R) \wedge (\neg P \vee Q \vee \neg R) \quad (\text{否定符内移})$$

$$\Leftrightarrow (P \vee R) \wedge (\neg Q \vee R) \wedge (\neg P \vee Q \vee \neg R) \quad (\vee \text{ 对 } \wedge \text{ 的分配律})$$



例2：求析取范式

$$(P \rightarrow Q) \leftrightarrow R$$

$$\Leftrightarrow ((P \wedge \neg Q) \vee R) \wedge (\neg P \vee Q \vee \neg R) \quad (\text{消去} \leftrightarrow)$$

$$\Leftrightarrow ((P \wedge \neg Q) \wedge (\neg P \vee Q \vee \neg R)) \vee (R \wedge (\neg P \vee Q \vee \neg R))$$

$$\Leftrightarrow (\cancel{P \wedge Q \wedge P}) \vee (\cancel{P \wedge \neg Q \wedge Q}) \vee (P \wedge \neg Q \wedge \neg R) \vee$$

$$(R \wedge \neg P) \vee (R \wedge Q) \vee (\cancel{R \wedge R}) \quad (\wedge \text{对} \vee \text{的分配律})$$

$$\Leftrightarrow (P \wedge \neg Q \wedge \neg R) \vee (\neg P \wedge R) \vee (Q \wedge R) \quad (\text{补余律和同一律})$$



2.6.6 范式存在定理

任一命题公式都存在与之等值的合取范式和析取范式。但命题公式的合取范式和析取范式并不唯一。



求范式的具体步骤

- 利用等值公式中的**等值式**和**蕴涵等值式**将公式中的 \rightarrow 、 \leftrightarrow 用联结词 \neg 、 \wedge 、 \vee 来取代；

$$P \rightarrow Q = \neg P \vee Q$$

$$P \leftrightarrow Q = (P \wedge Q) \vee (\neg P \wedge \neg Q) \quad (\text{多用于求析取范式})$$

$$P \leftrightarrow Q = (P \vee \neg Q) \wedge (\neg P \vee Q) \quad (\text{多用于求合取范式})$$

- 利用**摩根律**将否定号 \neg 移到各个命题变元的前端；
- 利用**结合律**、**分配律**、**吸收律**、**等幂律**、**交换律**等将公式化成其等值的析取范式和合取范式。



由于范式一般不唯一，所以
有必要进一步研究主范式。

主范式——极小项和极大项



2.6.7 极小项

n 个命题变项 P_1, P_2, \dots, P_n 组成的合取式：

$$Q_1 \wedge Q_2 \wedge \dots \wedge Q_n$$

其中 $Q_i = P_i$ ，或 $\neg P_i$ 。即每个命题变项与它的否定式不同时出现，但二者之一必出现且仅出现一次。则称合取式 $Q_1 \wedge Q_2 \wedge \dots \wedge Q_n$ 为极小项，并以 m_i 表示。

主范式——极小项和极大项



2.6.8 极大项

n 个命题变项 P_1, P_2, \dots, P_n 组成的析取式:

$$Q_1 \vee Q_2 \vee \dots \vee Q_n$$

其中 $Q_i = P_i$, 或 $\neg P_i$ 。即每个命题变项与它的否定式不同时出现, 但二者之一必出现且仅出现一次。则称析取式 $Q_1 \vee Q_2 \vee \dots \vee Q_n$ 为极大项, 并以 M_i 表示。



主析取范式与主合取范式

主析取范式

设由 n 个命题变项构成的析取范式中所有的合取式都是极小项，则称该析取范式为主析取范式（仅由极小项构成的析取范式称为主析取范式）。



主析取范式与主合取范式

主合取范式

设由 n 个命题变项构成的合取范式中所有的析取式都是极大项，则称该合取范式为主合取范式（仅由极大项构成的合取范式称为主合取范式）。



2.6.9 主析取范式定理

任一含有 n 个命题变项的公式，都存在唯一的与之等值的且恰仅含这 n 个命题变项的主析取范式。



2.6.10 主合取范式定理

任一含有 n 个命题变项的公式，都存在唯一的与之等值的且恰仅含这 n 个命题变项的主合取范式。



主范式——极小项的性质

- (1) 任一含有 n 个命题变项的公式，所有可能的极小项的个数和该公式的解释个数相同，都是 2^n 。
- (2) 每个极小项只在一个解释下为真。
- (3) 极小项两两不等值，并且

$$m_i \wedge m_j = F \quad (i \neq j)。$$

主范式——极小项的性质 (续)



(4) 任一含有 n 个命题变项的公式, 都可由 k 个 ($k \leq 2^n$) 极小项的析取来表示。

A 是由 k 个极小项的析取来表示, 剩余 $2^n - k$ 极小项的析取是 $\neg A$

(5) 恰由 2^n 个极小项的析取构成的公式必为重言式。即
$$\bigvee_{i=0}^{2^n-1} m_i = T$$

主范式——极大项的性质



- (1) 任一含有 n 个命题变项的公式，所有可能的极大项的个数与该公式的解释个数相同，都是 2^n 。
- (2) 每个极大项只在一个解释下为假。
- (3) 极大项两两不等值，并且

$$M_i \vee M_j = \text{T} \quad (i \neq j)。$$

主范式——极大项的性质



(4) 任一含有 n 个命题变项的公式，都可由 k 个 ($k \leq 2^n$)极大项的合取来表示。

A 是由 k 个极大项的合取来表示，剩余 $2^n - k$ 极大项的合取是 $\neg A$

(5) 恰由 2^n 个极大项的合取构成的公式必为矛盾式。

即 $\bigwedge_{i=0}^{2^n-1} M_i = F$



主析取范式与主合取范式的求法

求主析取范式的方法

1. 先求析取范式
2. 再填满变项

主析取范式与主合取范式的求法



$$\begin{aligned} 1 \quad P \leftrightarrow Q &= (P \wedge Q) \vee (\neg P \wedge \neg Q) \\ &= \overset{m_3}{m_0} \vee \overset{m_0}{m_3} = \bigvee_{0,3} \end{aligned}$$



2 填满命题变项

$$P \rightarrow Q = \neg P \vee Q$$

$$\begin{aligned} \text{因为 } \neg P &= \neg P \wedge (Q \vee \neg Q) \\ &= (\neg P \wedge Q) \vee (\neg P \wedge \neg Q) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \text{因为 } Q &= Q \wedge (P \vee \neg P) \\ &= (P \wedge Q) \vee (\neg P \wedge Q) \end{aligned}$$

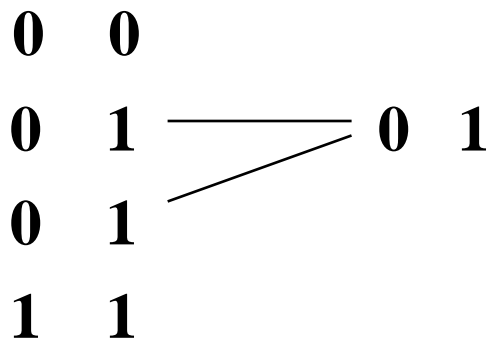
$$P \rightarrow Q = (\neg P \wedge Q) \vee (\neg P \wedge \neg Q) \vee (P \wedge Q)$$

$$\begin{aligned} &\quad m_1 \quad m_0 \quad m_3 \\ &= m_0 \vee m_1 \vee m_3 \\ &= \bigvee_{0,1,3} \end{aligned}$$

填满变项的简便方法



$$\begin{aligned} & \neg P \vee Q \\ &= m^{0x} \vee m^{x1} \\ &= m_0 \vee m_1 \vee m_3 \end{aligned}$$



极小项和极大项的关系



- $\neg m_i = M_{(2^n - 1 - i)} = M_{(i)\text{补}}$ $\neg M_i = m_{(2^n - 1 - i)} = m_{(i)\text{补}}$

公式	名称
$\neg P \wedge \neg Q$	m_0
$\neg P \wedge Q$	m_1
$P \wedge \neg Q$	m_2
$P \wedge Q$	m_3

公式	名称
$\neg P \vee \neg Q$	M_0
$\neg P \vee Q$	M_1
$P \vee \neg Q$	M_2
$P \vee Q$	M_3

主析取范式与主合取范式转换



- 主范式之间的转换

$$\text{令 } A = \bigvee m_{il} \quad \text{则 } \neg A = \bigvee m_{(\{0,1,\dots,2^n-1\}-\{i_1,i_2,\dots,i_k\})}$$

$$A = \bigwedge M_{(\{0,1,\dots,2^n-1\}-\{i_1,i_2,\dots,i_k\})^c} = \bigwedge_{(\{0,1,\dots,2^n-1\}-\{i_1,i_2,\dots,i_k\})^c}$$

$$\text{令 } A = \bigwedge M_{il} \quad \text{则 } \neg A = \bigvee m_{(\{0,1,\dots,2^n-1\}-\{i_1,i_2,\dots,i_k\})}$$

$$A = \bigvee_{(\{0,1,\dots,2^n-1\}-\{i_1,i_2,\dots,i_k\})^c} = \bigvee_{(\{0,1,\dots,2^n-1\}-\{i_1,i_2,\dots,i_k\})^c}$$

A 是由 k 个极大项的合取来表示，剩余 2^n-k 极大项的合取是 $\neg A$

$$\neg m_i = M_{(2^n-1-i)} = M_{(i)^c} \quad \neg M_i = m_{(2^n-1-i)} = m_{(i)^c}$$



主范式的求法与举例

综合举例

$(P \vee \neg Q) \rightarrow (\neg P \leftrightarrow (Q \wedge \neg R))$ 求主析与主合取范式

$$\begin{aligned}\text{原式} &= \neg(P \vee \neg Q) \vee ((\neg P \wedge (Q \wedge \neg R)) \vee (P \wedge (\neg Q \vee R))) \\ &= (\neg P \wedge Q) \vee (\neg P \wedge Q \wedge \neg R) \vee (P \wedge \neg Q) \vee (P \wedge R) \\ &= m^{01X} \vee m^{010} \vee m^{10X} \vee m^{1X1}\end{aligned}$$

$$\therefore \text{主析范式} = \bigvee_{2,3,4,5,7}$$



主范式的求法与举例

$$\text{主析范式} = \bigvee_{2,3,4,5,7}$$

$$\begin{aligned}\text{主合范式} &= \bigwedge_{(\{0,1,\dots,7\} - \{2,3,4,5,7\})^c} \\ &= \bigwedge_{(\{0,1,\dots,7\} - \{5,4,3,2,0\})} \\ &= \bigwedge_{1,6,7}\end{aligned}$$

$$(P \vee \neg Q) \rightarrow (\neg P \leftrightarrow (Q \wedge \neg R))$$



列写真值表验算

P	Q	R	<u>$P \vee \neg Q$</u>	$Q \wedge \neg R$	$\neg P \leftrightarrow (Q \wedge \neg R)$	原式
0	0	0	1	0	0	0 M_7
0	0	1	1	0	0	0 M_6
0	1	0	0	1	1	1 m_2
0	1	1	0	0	0	1 m_3
1	0	0	1	0	1	1 m_4
1	0	1	1	0	1	1 m_5
1	1	0	1	1	0	0 M_1
1	1	1	1	0	1	1 m_7



$$(P \vee \neg Q) \rightarrow (\neg P \leftrightarrow (Q \wedge \neg R))$$

列写真值表验算

P	Q	R	$P \vee \neg Q$	<u>$Q \wedge \neg R$</u>	$\neg P \leftrightarrow (Q \wedge \neg R)$	原式	
0	0	0	1	0	0	0	M_7
0	0	1	1	0	0	0	M_6
0	1	0	0	1	1	1	m_2
0	1	1	0	0	0	1	m_3
1	0	0	1	0	1	1	m_4
1	0	1	1	0	1	1	m_5
1	1	0	1	1	0	0	M_1
1	1	1	1	0	1	1	m_7



$$(P \vee \neg Q) \rightarrow (\neg P \leftrightarrow (Q \wedge \neg R))$$

列写真值表验算

P	Q	R	$P \vee \neg Q$	$Q \wedge \neg R$	<u>$\neg P \leftrightarrow (Q \wedge \neg R)$</u>	原式	
0	0	0	1	0	0	0	M_7
0	0	1	1	0	0	0	M_6
0	1	0	0	1	1	1	m_2
0	1	1	0	0	0	1	m_3
1	0	0	1	0	1	1	m_4
1	0	1	1	0	1	1	m_5
1	1	0	1	1	0	0	M_1
1	1	1	1	0	1	1	m_7



$$(P \vee \neg Q) \rightarrow (\neg P \leftrightarrow (Q \wedge \neg R))$$

列写真值表验算

P	Q	R	$P \vee \neg Q$	$Q \wedge \neg R$	$\neg P \leftrightarrow (Q \wedge \neg R)$	原式	
0	0	0	1	0	0	0	M_7
0	0	1	1	0	0	0	M_6
0	1	0	0	1	1	1	m_2
0	1	1	0	0	0	1	m_3
1	0	0	1	0	1	1	m_4
1	0	1	1	0	1	1	m_5
1	1	0	1	1	0	0	M_1
1	1	1	1	0	1	1	m_7

$$\begin{aligned}\text{主析范式} &= \bigvee_{2,3,4,5,7} \\ \text{主合范式} &= \bigwedge_{1,6,7}\end{aligned}$$



主析与主合之间的转换(简化方法)

举例

$$\begin{aligned} \mathbf{A} &= \bigvee_{0,1,4,5,7} \\ &= \bigwedge_{(\{0,1,\dots,7\}-\{0, 1, 4, 5, 7\})^c} \\ &= \bigwedge_{(\{0,1,\dots,7\}-\{7, 6, 3, 2, 0\})} \\ &= \bigwedge_{1,4,5} \end{aligned}$$



主析与主合之间的转换(简化方法)

$$\text{已知 } A = \bigwedge_{1,4,5}$$

$$= \bigvee_{(\{0,1,\dots,7\}-\{1,4,5\})^c}$$

$$= \bigvee_{(\{0,1,\dots,7\}-\{6,3,2\})}$$

$$= \bigvee_{0,1,4,5,7}$$



例：求主范式

$$P \rightarrow Q$$

$$\text{主合范式} = \neg P \vee Q \quad M_1$$

$$= \bigwedge_1$$

$$\text{主析范式} = \bigvee_{(\{0,1,2,3\} - \{1\} \text{补})}$$

$$= \bigvee_{(\{0,1,2,3\} - \{2\})}$$

$$= \bigvee_{0,1,3}$$



2.6 空公式（补充）

求 $P \vee \neg P$ 的主析取和主合取范式

主析取范式： $P \vee \neg P$

主合取范式：空公式

结论：永真式的主合取范式为空公式

矛盾式的主析取范式为空公式



主(析取)范式的用途

- 求公式的成真赋值与成假赋值
- 判断公式的类型
- 判断两个命题公式是否等值
- 解决实际问题

求公式的成真(假)赋值



- 若公式A中含有 n 个命题变项
 - 若A的主析取范式含 s 个极小项, 则A有 s 个成真赋值
 - 其余 2^n-s 个赋值都是成假赋值

$$(P \vee \neg Q) \rightarrow (\neg P \leftrightarrow (Q \wedge \neg R))$$

P	Q	R	$P \vee \neg Q$	$Q \wedge \neg R$	$\neg P \leftrightarrow (Q \wedge \neg R)$	原式	
0	0	0	1	0	0	0	M_7
0	0	1	1	0	0	0	M_6
0	1	0	0	1	1	1	m_2
0	1	1	0	0	0	1	m_3
1	0	0	1	0	1	1	m_4
1	0	1	1	0	1	1	m_5
1	1	0	1	1	0	0	M_1
1	1	1	1	0	1	1	m_7

判断公式的类型



- A 为重言式当且仅当 A 的主析取范式含全部 2^n 个极小项
- A 为矛盾式当且仅当 A 的主析取范式不含任何极小项
- A 为可满足式当且仅当 A 的主析取范式中至少含一个极小项

结论：永真式的主合取范式为空公式
矛盾式的主析取范式为空公式



判断公式的类型-例1

$$\neg(P \rightarrow Q) \wedge Q$$

$$= \neg(\neg P \vee Q) \wedge Q$$

$$= (P \wedge \neg Q) \wedge Q$$

$$= F$$

矛盾式



判断公式的类型-例2

$$\begin{aligned} & P \rightarrow (P \vee Q) \\ &= \neg P \vee (P \vee Q) \\ &= (\neg P \wedge (\neg Q \vee Q)) \vee (P \wedge (\neg Q \vee Q)) \wedge \\ &\quad (Q \wedge (\neg P \vee P)) \\ &= (\neg P \wedge \neg Q) \vee (\neg P \wedge Q) \vee (P \wedge \neg Q) \vee \\ &\quad (P \wedge Q) \vee (\neg P \wedge Q) \vee (P \wedge Q) \\ &= \bigvee_{0, 1, 2, 3} \end{aligned}$$

重言式



判断公式的类型： $(P \vee Q) \rightarrow R$

- ☐ A 矛盾式
- ☐ B 重言式
- ☒ C 可满足
- ☐ D 都不是



判断公式的类型-例3

$$(P \vee Q) \rightarrow R$$

$$= \neg (P \vee Q) \vee R$$

000

$$= (\neg P \wedge \neg Q) \vee R$$

001

001

$$= m^{00x} \vee m^{xy1}$$

011

101

$$= \bigvee_{0, 1, 3, 5, 7}$$

111

可满足



判断两个命题是否等值

- $(P \rightarrow Q) \rightarrow R$ 与 $(P \wedge Q) \rightarrow R$

$$(P \rightarrow Q) \rightarrow R = \bigvee_{1, 3, 4, 5, 7}$$

$$(P \wedge Q) \rightarrow R = \bigvee_{0, 1, 2, 3, 4, 5, 7}$$

$$(P \rightarrow Q) \rightarrow R \neq (P \wedge Q) \rightarrow R$$

解决实际问题：例1



范式在逻辑设计方面有广泛的应用.

- 例1. 某科研所要从3名科研骨干A, B, C中挑选1~2名出国进修。由于工作需要，选派是要满足以下条件.

- (1) 若A去，则C同去。
- (2) 若B去，则C不能去。
- (3) 若C不去，则A或B可以去。

解：令 P 、 Q 、 R 分别表示派A、B、或C去.

由已知条件可得公式

$$(P \rightarrow R) \wedge (Q \rightarrow \neg R) \wedge (\neg R \rightarrow (P \vee Q))$$



- $(P \rightarrow R) \wedge (Q \rightarrow \neg R) \wedge (\neg R \rightarrow (P \vee Q))$

该公式的成真赋值就是可行的选派方案

$$\begin{aligned} & (P \rightarrow R) \wedge (Q \rightarrow \neg R) \wedge (\neg R \rightarrow (P \vee Q)) \\ &= (\neg P \vee R) \wedge (\neg Q \vee \neg R) \wedge (R \vee P \vee Q) \\ &= (\neg P \wedge \neg Q \wedge R) \vee (\neg P \wedge Q \wedge \neg R) \vee \\ & \quad (P \wedge \neg Q \wedge R) \\ &= \vee_{1, 2, 5} \quad \text{因而有3种选派方案} \end{aligned}$$

(1) C去, A, B都不去

(1) B去, A, C都不去

(1) A, C同去, B不去

解决实际问题：例2



范式在逻辑设计方面有广泛的应用.

- 例2. 安排课表, 教语言课的教师希望将课程安排在第一或第三节; 教数学课的教师希望将课程安排在第二或第三节; 教原理课的教师希望将课程安排在第一或第二节. 如何安排课表, 使得三位教师都满意.

解: 令 l_1 、 l_2 、 l_3 分别表示语言课排在第一、第二、第三节.

m_1 、 m_2 、 m_3 分别表示数学课排在第一、第二、第三节.

p_1 、 p_2 、 p_3 分别表示原理课排在第一、第二、第三节.

三位教师都满意的条件是:

$(l_1 \vee l_3) \wedge (m_2 \vee m_3) \wedge (p_1 \vee p_2)$ 为真.



三位教师都满意的条件是：

$(l_1 \vee l_3) \wedge (m_2 \vee m_3) \wedge (p_1 \vee p_2)$ 为真.

将上式写成析取范式(用分配律)得：

$$((l_1 \wedge m_2) \vee (l_1 \wedge m_3) \vee (l_3 \wedge m_2) \vee (l_3 \wedge m_3)) \wedge (p_1 \vee p_2)$$

$$\Leftrightarrow \cancel{(l_1 \wedge m_2 \wedge p_1)} \vee \cancel{(l_1 \wedge m_3 \wedge p_1)} \vee$$

$$(l_3 \wedge m_2 \wedge p_1) \vee \cancel{(l_3 \wedge m_3 \wedge p_1)} \vee$$

$$\cancel{(l_1 \wedge m_2 \wedge p_2)} \vee (l_1 \wedge m_3 \wedge p_2) \vee$$

$$\cancel{(l_3 \wedge m_2 \wedge p_2)} \vee \cancel{(l_3 \wedge m_3 \wedge p_2)}$$

$$\Leftrightarrow (l_3 \wedge m_2 \wedge p_1) \vee (l_1 \wedge m_3 \wedge p_2)$$

可以取 $(l_3 \wedge m_2 \wedge p_1)$ 、 $(l_1 \wedge m_3 \wedge p_2)$ 为1，得到两种排法.



练习1：谁是说谎者

张三说李四在说谎, 李四说王五在说谎, 王五说张三、李四都在说谎, 请问三人到底谁说真话, 谁说假话?

设P: 张三说真话; Q: 李四说真话; R: 王五说真话.

由题意有

$$\begin{aligned} E &= (P \leftrightarrow \neg Q) \wedge (Q \leftrightarrow \neg R) \wedge (R \leftrightarrow (\neg P \wedge \neg Q)) \\ &= \neg P \wedge Q \wedge \neg R \end{aligned}$$

即E的成真赋值为010, 故张三说假话, 李四说真话, 王五说假话.



选作题（程序设计）

1. 任给一命题公式，由命题公式列出真值表（通过键盘输入公式并进行适当的语法检查，然后根据公式列出（显示）相应的真值表。
2. 由已知的真值表列写命题公式。
3. 任给一命题公式，计算命题公式的主析取范式和主合取范式

提交日期：2019年11月30日



2.7 推理形式

主要内容：

- 介绍推理形式的结构以及重言蕴涵的概念；
- 给出基本推理公式以及证明推理公式的几种不同方法和途径；



2.7 推理形式

2.7.1 推理形式：

将以自然语句描述的推理关系引入符号，抽象化并以条件式的形式表示出来得到推理形式，推理形式由**前提**和**结论**部分组成。

前提真，结论必真的推理形式为正确的推理形式。



2.7 推理形式

2.7.1 重言蕴含：

给定两个公式 A , B , 如果当 A 取值为真时, B 就必取值为真, 便称 **A 重言 (永真) 蕴涵 B** , 或称 B 是 A 的逻辑推论。并用符号 $A \Rightarrow B$ 表示。



2.7 推理形式

2.7.1 重言蕴含：

需注意**重言蕴含** \Rightarrow 与**普通蕴含** \rightarrow 的区别

A重言蕴含B记作， $A \Rightarrow B$

注意：“ \Rightarrow ”不是逻辑联接词

$A \Rightarrow B$ 当然也不同于 $A \rightarrow B$ ！



重言蕴含举例

例1. 如果今天是周二, 那么我来上课。

今天是周二,

所以我来上课。

设 P : 今天是周二, Q : 今天我来上课

$$(P \rightarrow Q) \wedge P \Rightarrow Q$$

前提真, 结论也为真, 是正确的推理。



重言蕴含举例

例2. 如果今天是周二，那么我来上课

今天不是周二

所以我不来上课

$$(P \rightarrow Q) \wedge \neg P \Rightarrow \neg Q$$

P	Q	$P \rightarrow Q$	$\neg P$	$\neg Q$
0	0	1	1	1
0	1	1	1	0
1	0	0	0	1
1	1	1	0	0

前提真，结论假！
不是正确的推理！



2.7.3 重言蕴含几个结果

- (1) 如果 $A \Rightarrow B$ 成立, 若 A 为重言式, 则 B 也是重言式。
- (2) 若 $A \Rightarrow B$ 且 $B \Rightarrow A$ 同时成立, 必有 $A=B$; 反之亦然。
- (3) 若 $A \Rightarrow B$ 且 $B \Rightarrow C$ 同时成立, 则有 $A \Rightarrow C$
- (4) 若 $A \Rightarrow B$ 且 $A \Rightarrow C$ 同时成立, 则 $A \Rightarrow B \wedge C$
- (5) 若 $A \Rightarrow C$ 且 $B \Rightarrow C$ 同时成立, 则 $A \vee B \Rightarrow C$



重言蕴含的充要条件

定理2.8.1

$A \Rightarrow B$ 成立的充分必要条件是 $A \rightarrow B$ 为重言式。

定理2.8.2

$A \Rightarrow B$ 成立的充分必要条件是 $A \wedge \neg B$ 为矛盾式。



定理2.8.2

$A \Rightarrow B$ 成立的充分必要条件是 $A \wedge \neg B$ 为矛盾式。

证明:

由定理2.8.1和命题公式等值式

$A \rightarrow B = \neg A \vee B = \neg (A \wedge \neg B)$, 因此,

“ $A \rightarrow B$ 是重言式”即等价于“ $A \wedge \neg B$ 是矛盾式”

注意: $A \Rightarrow B$ 中 A 自身不能必假!

若 A 永假, 则 $A \rightarrow B$ 肯定永真, 虽然 $A \Rightarrow B$ 也成立, 但已失去意义!

2.8 基本的推理公式



证明 $A \Rightarrow B$ 的几种方法:

1. 证 $A \rightarrow B$ 是重言式
2. 证 $A \wedge \neg B$ 为矛盾式
3. 真值表法
4. 证 $\neg B \Rightarrow \neg A$ 即反证法
5. 解释法
6.



基本推理公式

1. $P \wedge Q \Rightarrow P$, 但 $P \vee Q \not\Rightarrow P$

2. $\neg(P \rightarrow Q) \Rightarrow P$ 1式的直接推论 $P \wedge \neg Q \Rightarrow P$

3. $\neg(P \rightarrow Q) \Rightarrow \neg Q$ 1式的直接推论 $P \wedge \neg Q \Rightarrow \neg Q$

4. $P \Rightarrow P \vee Q$

5. $\neg P \Rightarrow P \rightarrow Q$ 2式的逆否, 4式的推论。

6. $Q \Rightarrow P \rightarrow Q$ 3式的逆否, 4式的推论。

7. $\neg P \wedge (P \vee Q) \Rightarrow Q$ 非 P, 而 $P \vee Q$ 又成立, 只有 Q 成立

8. $P \wedge (P \rightarrow Q) \Rightarrow Q$ *假言推理, 分离规则, 7式的变形

9. $\neg Q \wedge (P \rightarrow Q) \Rightarrow \neg P$ 7式的变形

$\frac{P}{Q}$	$\frac{Q}{\neg P}$
---------------	--------------------



基本推理公式

10. $(P \rightarrow Q) \wedge (Q \rightarrow R) \Rightarrow P \rightarrow R$ *三段论

11. $(P \leftrightarrow Q) \wedge (Q \leftrightarrow R) \Rightarrow P \leftrightarrow R$ 类似10式

12. $(P \rightarrow R) \wedge (Q \rightarrow R) \wedge (P \vee Q) \Rightarrow R$ 10式的推论

13. $(P \rightarrow Q) \wedge (R \rightarrow S) \wedge (P \vee R) \Rightarrow Q \vee S$ 10式的推论

14. $(P \rightarrow Q) \wedge (R \rightarrow S) \wedge (\neg Q \vee \neg S) \Rightarrow \neg P \vee \neg R$ 9式的推论

15. $(Q \rightarrow R) \Rightarrow ((P \vee Q) \rightarrow (P \vee R))$
 $P=F$ 时左=右,
 $P=T$ 时右=T

16. $(Q \rightarrow R) \Rightarrow ((P \rightarrow Q) \rightarrow (P \rightarrow R))$
 $P=T$ 时左=右,
 $P=F$ 时右=T

证明: $(P \rightarrow R) \wedge (Q \rightarrow R) \wedge (P \vee Q) \Rightarrow R$

$(P \rightarrow R) \wedge (Q \rightarrow R) \wedge (P \vee Q)$ 前提析取合并

$= ((P \vee Q) \rightarrow R) \wedge (P \vee Q)$ 分离规则

$\Rightarrow R$

证明: $(P \rightarrow Q) \wedge (R \rightarrow S) \wedge (P \vee R) \Rightarrow Q \vee S$



$$(P \rightarrow Q) \wedge (R \rightarrow S) \wedge (P \vee R)$$

$$\Rightarrow (P \rightarrow Q) \wedge (R \rightarrow S) \wedge (\neg P \rightarrow R)$$

$$\Rightarrow (P \rightarrow Q) \wedge (\neg P \rightarrow S)$$

$$\Rightarrow (\neg Q \rightarrow \neg P) \wedge (\neg P \rightarrow S)$$

$$\Rightarrow \neg Q \rightarrow S$$

$$\Rightarrow Q \vee S$$



证明: $(P \rightarrow Q) \wedge (R \rightarrow S) \wedge (\neg Q \vee \neg S) \Rightarrow \neg P \vee \neg R$

$$(P \rightarrow Q) \wedge (R \rightarrow S) \wedge (\neg Q \vee \neg S)$$

$$\Rightarrow (P \rightarrow Q) \wedge (R \rightarrow S) \wedge (S \rightarrow \neg Q)$$

$$\Rightarrow (P \rightarrow Q) \wedge (R \rightarrow \neg Q)$$

$$\Rightarrow (\neg Q \rightarrow \neg P) \wedge (R \rightarrow \neg Q)$$

$$\Rightarrow R \rightarrow \neg P$$

$$\Rightarrow \neg P \vee \neg R$$



2.9 推理演算

- 出发点:

直观地看出由前提 A 到结论 B 的推演过程, 且便于在谓词逻辑中使用。

- 方法

- (1) 引入几条推理规则

- (2) 利用基本推理公式

从前提 A_1, A_2, \dots, A_n 出发, 配合使用推理规则和基本推理公式, 逐步推演出结论 B 。



2.9 推理演算

主要的推理规则：

- (1) 前提引入规则；推理过程中可随时引入前提
- (2) 结论引入规则；中间结论可作为后续推理的前提
- (3) 代入规则；仅限于重言式中的命题变项

2.9 推理演算



主要的推理规则：

- (1) 前提引入规则；推理过程中可随时引入前提
- (2) 结论引入规则；中间结论可作为后续推理的前提
- (3) 代入规则；仅限于重言式中的命题变项
- (4) 置换规则；利用等值公式对部分公式进行置换
- (5) 分离规则；由 A 及 $A \rightarrow B$ 成立，可将 B 分离出来
- (6) 条件证明规则。 $A_1 \wedge A_2 \Rightarrow B$ 与 $A_1 \Rightarrow A_2 \rightarrow B$ 等价

$$P \rightarrow (Q \rightarrow R) = (P \wedge Q) \rightarrow R$$



例1 证明 $P \rightarrow R$ 是 $P \rightarrow Q$, $Q \rightarrow R$ 的逻辑推论。

证明：

1. $P \rightarrow Q$ 前提引入
2. P 附加前提引入（条件证明规则）
3. Q 1、2分离
4. $Q \rightarrow R$ 前提引入
5. R 3、4分离

注：此题可直接使用推理公式10（三段论），
以简化证明步骤。

$$(P \rightarrow Q) \wedge (Q \rightarrow R) \Rightarrow P \rightarrow R$$



教材 例3: 证明 $(P \vee Q) \wedge (P \rightarrow R) \wedge (Q \rightarrow S) \Rightarrow S \vee R$

证明：

1. $P \vee Q$ 前提引入
2. $\neg P \rightarrow Q$ 1 置换
3. $Q \rightarrow S$ 前提引入
4. $\neg P \rightarrow S$ 2、3 三段论
5. $\neg S \rightarrow P$ 4 置换
6. $P \rightarrow R$ 前提引入
7. $\neg S \rightarrow R$ 5、6 三段论
8. $S \vee R$ 7 置换

由该例可见，将 $P \vee Q$ 置换成 $\neg P \rightarrow Q$ 更便于推理



推理演算举例

教材 P34 例5: 证明

$$\begin{aligned} & (\neg(P \rightarrow Q) \rightarrow \neg(R \vee S)) \wedge ((Q \rightarrow P) \vee \neg R) \wedge R \\ & \Rightarrow (P \leftrightarrow Q) \end{aligned}$$



推理演算举例：

$$(\neg(P \rightarrow Q) \rightarrow \neg(R \vee S)) \wedge ((Q \rightarrow P) \vee \neg R) \wedge R \Rightarrow (P \leftrightarrow Q)$$

1. $(Q \rightarrow P) \vee \neg R$

前提引入

2. $R \rightarrow (Q \rightarrow P)$

1置换

3. R

前提引入

4. $Q \rightarrow P$

2、3分离

5. $\neg(P \rightarrow Q) \rightarrow \neg(R \vee S)$

前提引入

6. $(R \vee S) \rightarrow (P \rightarrow Q)$

5置换

7. $R \vee S$

3 + 基本公式4

8. $P \rightarrow Q$

6、7分离

9. $P \leftrightarrow Q$

4、8

(注：教材中的证明用了15个步骤，
这里用一种更为简洁的方法)

推理演算举例：条件证明规则



例题6: $P \rightarrow (Q \rightarrow S), \neg R \vee P, Q \Rightarrow R \rightarrow S$

证明 (1) R

附加前提引入

(2) $\neg R \vee P$

前提引入

(3) P

(1)(2)分离规则

(4) $P \rightarrow (Q \rightarrow S)$

前提引入

(5) $Q \rightarrow S$

(3)(4)分离规则

(6) Q

前提引入

(7) S

(5)(6)分离规则

(8) $R \rightarrow S$

条件证明规则



2.10 归结法

- 出发点:

基于推理规则的方法，规则与公式较多，技巧较高。
能否仅建立一条推理规则，便于机器证明与程序实现。

- 理论依据：定理2.8.2

$A \Rightarrow B$ 成立当且仅当 $A \wedge \neg B$ 是矛盾式。



2.10 归结法

- 归结法步骤：

1. 从 $A \wedge \neg B$ 出发（欲证 $A \Rightarrow B$ ，等价于证 $A \wedge \neg B$ 是矛盾式）

2. 建立子句集 S ，将 $A \wedge \neg B$ 化成合取范式：

$$C_1 \wedge C_2 \wedge \dots \wedge C_n$$

其中 C_i 为析取式。由诸 C_i 构成子句集

$$S = \{ C_1, C_2, \dots, C_n \}$$

3. 对 S 中的子句作归结（消互补对），归结结果（归结式）仍放入 S 中。重复此步。

4. 直至归结出矛盾式（ \square ）。



2.10 归结法

- 归结法推理规则

设 子句1 $C1 = L \vee C1'$

子句2 $C2 = \neg L \vee C2'$
(其中L和 $\neg L$ 为互补对)

$$C1 = \neg L \rightarrow C1'$$

$$C2 = \neg C2' \rightarrow \neg L \quad \text{因而}$$

$$\text{新子句 } R(C1, C2) = C1' \vee C2'$$



2.10 归结法

- 归结法推理规则 (续)

$C1 \wedge C2 \Rightarrow R(C1, C2)$ 需证明。

$$C1 = L \vee C1'$$

$$C2 = \neg L \vee C2'$$

证明:

$C1 \wedge C2 \rightarrow C1' \vee C2'$ 为永真式 (定理2.8.1)

设在任一解释下, $C1$ 和 $C2$ 均为真

若 $L = T$, 则 $\neg L = F$, 从而必有 $C2' = T$ ($\because C2$ 为真)

若 $L = F$, 则 $\neg L = T$, 从而必有 $C1' = T$ (因为 $C1$ 为真)

综合上述均有 $C1' \vee C2'$ 为真

因此, $C1 \wedge C2 \Rightarrow R(C1, C2)$



2.10 归结法 证明举例

例1: 证明 $(P \rightarrow Q) \wedge P \Rightarrow Q$

证明: 1. 先将 $(P \rightarrow Q) \wedge P \wedge \neg Q$ 化成合取范式

$$(\neg P \vee Q) \wedge P \wedge \neg Q$$

2. 建立子句集 $S = \{\neg P \vee Q, P, \neg Q\}$

$$S = \{\neg P \vee Q, P, \neg Q\}$$



2.10 归结法 证明举例

归结过程:

$$(1) \neg P \vee Q$$

$$(2) P$$

$$(3) \neg Q$$

$$(4) Q \quad (1) (2) \text{归结}$$

$$(5) \square \quad (3) (4) \text{归结}$$

归结出空子句 \square (矛盾式) 证明结束。



例2

例2: 用归结法证明 $((P \rightarrow Q) \wedge (Q \rightarrow R)) \Rightarrow (P \rightarrow R)$

证明:

先将 $(P \rightarrow Q) \wedge (Q \rightarrow R) \wedge \neg(P \rightarrow R)$ 化成合取范式

$$(\neg P \vee Q) \wedge (\neg Q \vee R) \wedge P \wedge \neg R$$

建立子句集 $S = \{ \neg P \vee Q, \neg Q \vee R, P, \neg R \}$

$$S = \{ \neg P \vee Q, \neg Q \vee R, P, \neg R \}$$



归结过程:

$$(1) \neg P \vee Q$$

$$(2) \neg Q \vee R$$

$$(3) P$$

$$(4) \neg R$$

$$(5) \neg P \vee R \quad (1) (2) \text{归结}$$

$$(6) R \quad (3) (5) \text{归结}$$

$$(7) \square \quad (4) (6) \text{归结}$$

归结出空子句 \square (矛盾式) 证明结束。

例3 $(P \rightarrow (Q \rightarrow R)) \wedge (Q \rightarrow (R \rightarrow A)) \Rightarrow P \rightarrow (Q \rightarrow A)$



证明：先将

$(P \rightarrow (Q \rightarrow R)) \wedge (Q \rightarrow (R \rightarrow A)) \wedge \neg(P \rightarrow (Q \rightarrow A))$ 化为合取范式。

$$\begin{aligned} & (P \rightarrow (Q \rightarrow R)) \wedge (Q \rightarrow (R \rightarrow A)) \wedge \neg(P \rightarrow (Q \rightarrow A)) \\ & = (\neg P \vee \neg Q \vee R) \wedge (\neg Q \vee \neg R \vee A) \wedge P \wedge Q \wedge \neg A. \end{aligned}$$

建立子句集

$$S = \{\neg P \vee \neg Q \vee R, \neg Q \vee \neg R \vee A, P, Q, \neg A\}$$

$$S = \{\neg P \vee \neg Q \vee R, \neg Q \vee \neg R \vee A, P, Q, \neg A\}$$



• 归结过程

$$(1) \quad \neg P \vee \neg Q \vee R$$

$$(2) \quad \neg Q \vee \neg R \vee A$$

$$(3) \quad P$$

$$(4) \quad Q$$

$$(5) \quad \neg A$$

$$(6) \quad \neg Q \vee R \quad (1) \quad (3) \text{ 归结}$$

$$(7) \quad \neg R \vee A \quad (2) \quad (4) \text{ 归结}$$

$$(8) \quad R \quad (4) \quad (6) \text{ 归结}$$

$$(9) \quad \neg R \quad (5) \quad (7) \text{ 归结}$$

$$(10) \quad \square \quad (8) \quad (9) \text{ 归结}$$



2.10 归结法 证明举例

补充：推理规则应用题，构造下面推理的证明：

例1：如果小张守第一垒并且小李向B队投球，
则A队将获胜。

或者A队未取胜，或者A队成为联赛第一名。

A队没有成为联赛第一名。小张守第一垒。

因此，小李没向B队投球。

如果小张守第一垒并且小李向B队投球，则A队将获胜。
或者A队未取胜，或者A队成为联赛第一名。
A队没有成为联赛第一名。小张守第一垒。

解：先将简单命题符号化。

P：小张守第一垒；

Q：小李向B队投球；

R：A队取胜；

S：A队成为联赛第一名。

前提： $(P \wedge Q) \rightarrow R$, $\neg R \vee S$, $\neg S$, P

结论： $\neg Q$

前提: $(P \wedge Q) \rightarrow R$ $(\neg(P \wedge Q) \vee R)$, $\neg R \vee S$, $\neg S$, P
结论: $\neg Q$



证明:

- | | |
|-------------------------------|-----------|
| (1) Q | 结论的否定引入 |
| (2) $\neg R \vee S$ | 前提引入 |
| (3) $\neg S$ | 前提引入 |
| (4) $\neg R$ | (2) (3)归结 |
| (5) $\neg(P \wedge Q) \vee R$ | 前提引入 |
| (6) $\neg(P \wedge Q)$ | (4) (5)归结 |
| (7) $\neg P \vee \neg Q$ | (6)置换 |
| (8) P | 前提引入 |
| (9) $\neg Q$ | (7)(8)归结 |
| (10) $Q \wedge \neg Q$ | (1)(9)合取 |

例2



- 如果我学习，那么我数学不会不及格。如果我不热衷于玩游戏，那么我将学习。但是我数学不及格。因此，我热衷于玩游戏。
- 解：设 P：我学习。
Q：我数学及格。
R：我热衷于玩游戏。
- 于是符号化为：

$$P \rightarrow Q, \neg R \rightarrow P, \neg Q \Rightarrow R$$

$$P \rightarrow Q, \neg R \rightarrow P, \neg Q \Rightarrow R$$



(1) $P \rightarrow Q$

(2) $\neg R \rightarrow P$

(3) $\neg R \rightarrow Q$

(4) $\neg Q \rightarrow R$

(5) $\neg Q$

(6) R

(1)(2)三段论

置换

前提引入

(4)(5)分离

例3： 请根据下面事实， 找出凶手：



1. 清洁工或者秘书谋害了经理。
2. 如果清洁工谋害了经理，则谋害不会发生在午夜前。
3. 如果秘书的证词是正确的，则谋害发生在午夜前。
4. 如果秘书的证词不正确，则午夜时屋里灯光未灭。
5. 如果清洁工富裕，则他不会谋害经理。
6. 经理有钱且清洁工不富裕。
7. 午夜时屋里灯灭了。



令 A:清洁工谋害了经理。 B:秘书谋害了经理。
C:谋害发生在午夜前。 D:秘书的证词是正确的。
E:午夜时屋里灯光灭了。 H:清洁工富裕。
G:经理有钱.

命题符号为:

$A \vee B, A \rightarrow \neg C, D \rightarrow C, \neg D \rightarrow \neg E, H \rightarrow \neg A, G \wedge \neg H, E$
 $\Rightarrow ?$



$A \vee B, A \rightarrow \neg C, B \rightarrow C, D \rightarrow C, \neg D \rightarrow \neg E, H \rightarrow \neg A, G \wedge \neg H, E$
 $\Rightarrow ?$

解: (1) E

前提引入

(2) $\neg D \rightarrow \neg E$

前提引入

(3) D

(2) 逆否之后和(1) 分离

(4) $D \rightarrow C$

结果是秘书谋害了经理

(5) C

(3)(4)分离

(6) $A \rightarrow \neg C$

前提引入

(7) $\neg A$

(6) 逆否之后和(5) 分离

(8) $A \vee B (\neg A \rightarrow B)$

前提引入

(9) B

(7)(8)分离

例4：判断下列推理是否正确。



若一个数是实数，则它是复数；若一个数是虚数，则它也是复数；一个数既不是实数，又不是虚数，所以它不是复数。

P：一个数是实数

R：一个数是虚数

Q：一个数是复数

则原题可符号化为：

$$P \rightarrow Q, R \rightarrow Q, \neg P \wedge \neg R \Rightarrow \neg Q$$

$$P \rightarrow Q, R \rightarrow Q, \neg P \wedge \neg R \Rightarrow \neg Q$$



证明：令

$$S = (P \rightarrow Q) \wedge (R \rightarrow Q) \wedge (\neg P \wedge \neg R) \rightarrow \neg Q$$

则

$$S = \neg((\neg P \vee Q) \wedge (\neg R \vee Q) \wedge (\neg P \wedge \neg R)) \vee \neg Q$$

$$= (P \wedge \neg Q) \vee (R \wedge \neg Q) \vee P \vee R \vee \neg Q$$

$$= P \vee R \vee \neg Q$$

当Q取T，P、R取F时，S为F 即S不是重言式

所以，推理不成立。

少了一个条件：一个复数不是实数就是虚数



第二章小结:主要内容

2.1 等值定理

2.2 等值公式

2.3 命题公式与真值表的关系

2.4 联接词的完备集

2.5 对偶式

2.6 范式

2.7 推理形式

2.8 基本的推理公式

2.9 推理演算

2.10 归结推理法

补充: 应用举例

第二章小结



- 等值定理
 - 若在任一解释下，公式 A 和 B 的真值都相同，则称 A 和 B 是等值的
- 等值公式
 - 置换规则
 - 基本的等值公式
 - 常用等值公式
 - 等值演算及其应用
- 命题公式与真值表的关系
 - 从取T的行来写
 - 从取F的行来写

第二章小结



- 联结词的完备集
 - 可以证明, $\{\neg, \vee\}$, $\{\neg, \wedge\}$, $\{\neg, \rightarrow\}$, $\{\uparrow\}$, $\{\downarrow\}$ 都是联结词功能完全组;
 - 而 $\{\neg, \leftrightarrow\}$, $\{\neg\}$, $\{\wedge\}$, $\{\vee\}$, $\{\wedge, \vee\}$ 都不是联结词功能完全组;
 - 使用联结词集 $\{\neg, \wedge, \vee\}$.

第二章小结



- 对偶式
 - 定义： A 中出现的 \vee, \wedge, T, F 分别以 \wedge, \vee, F, T 代换
 - 6个定理
- 范式
 - 析取范式，合取范式
 - 极小项，主析取范式，极大项，主合取范式
 - 主范式的4个用途

第二章小结



- 推理形式
 - 自然语句描述的推理关系 – 引入符号，抽象化并以条件式表示出来
 - 重言蕴涵
 - 重言蕴涵的5个结果
- 基本推理公式
 - 16个?
 - $P \wedge Q \Rightarrow P$ $P \Rightarrow P \vee Q$
 - $P \wedge (P \rightarrow Q) \Rightarrow Q$ (假言推理)
 - $(P \rightarrow Q) \wedge (Q \rightarrow R) \Rightarrow P \rightarrow R$ (三段论)

第二章小结



- 基本推理公式
 - 2个定理

$A \Rightarrow B$ 成立的充分必要条件是 $A \rightarrow B$ 为重言式。

$A \Rightarrow B$ 成立的充分必要条件是 $A \wedge \neg B$ 为矛盾式。

推理演算



- 主要的推理规则

- (1) 前提引入规则； *推理过程中可随时引入前提*
- (2) 结论引入规则； *中间结论可作为后续推理的前提*
- (3) 代入规则； *仅限于重言式中的命题变项*
- (4) 置换规则； *利用等值公式对部分公式进行置换*
- (5) 分离规则； *由 A 及 $A \rightarrow B$ 成立, 可将 B 分离出来*
- (6) 条件证明规则。 *$A_1 \wedge A_2 \Rightarrow B$ 与 $A_1 \Rightarrow A_2 \rightarrow B$ 等价*



归纳法

- 归结法步骤

1. 从 $A \wedge \neg B$ 出发（欲证 $A \Rightarrow B$ ，等价于证 $A \wedge \neg B$ 是矛盾式）
2. 建立子句集 S ，将 $A \wedge \neg B$ 化成合取范式：
$$C_1 \wedge C_2 \wedge \dots \wedge C_n$$
其中 C_i 为析取式。由诸 C_i 构成子句集
$$S = \{ C_1, C_2, \dots, C_n \}$$
3. 对 S 中的子句作归结（消互补对），归结结果（归结式）仍放入 S 中。重复此步。
4. 直至归结出矛盾式（ \square ）。

第二章小结与教学要求



1. 掌握和理解命题公式等值的概念，掌握命题公式等值的判别方法；
 - 列真值表
 - 公式的等价变换
 - 主范式
2. 熟悉基本的等值公式，能在理解的基础上熟记并能在等值演算中灵活使用；
3. 理解命题公式与真值表的关系，能够由给定的真值表写出相应的命题公式；



第二章小结与教学要求

4. 了解联结词完备集的概念，掌握判别联结词完备集的方法；
5. 理解范式的概念和范式定理，能够将命题公式熟练地化成相应的主析取范式 and 主合取范式；
6. 理解推理形式的基本结构，掌握重言蕴涵的概念和主要结果；



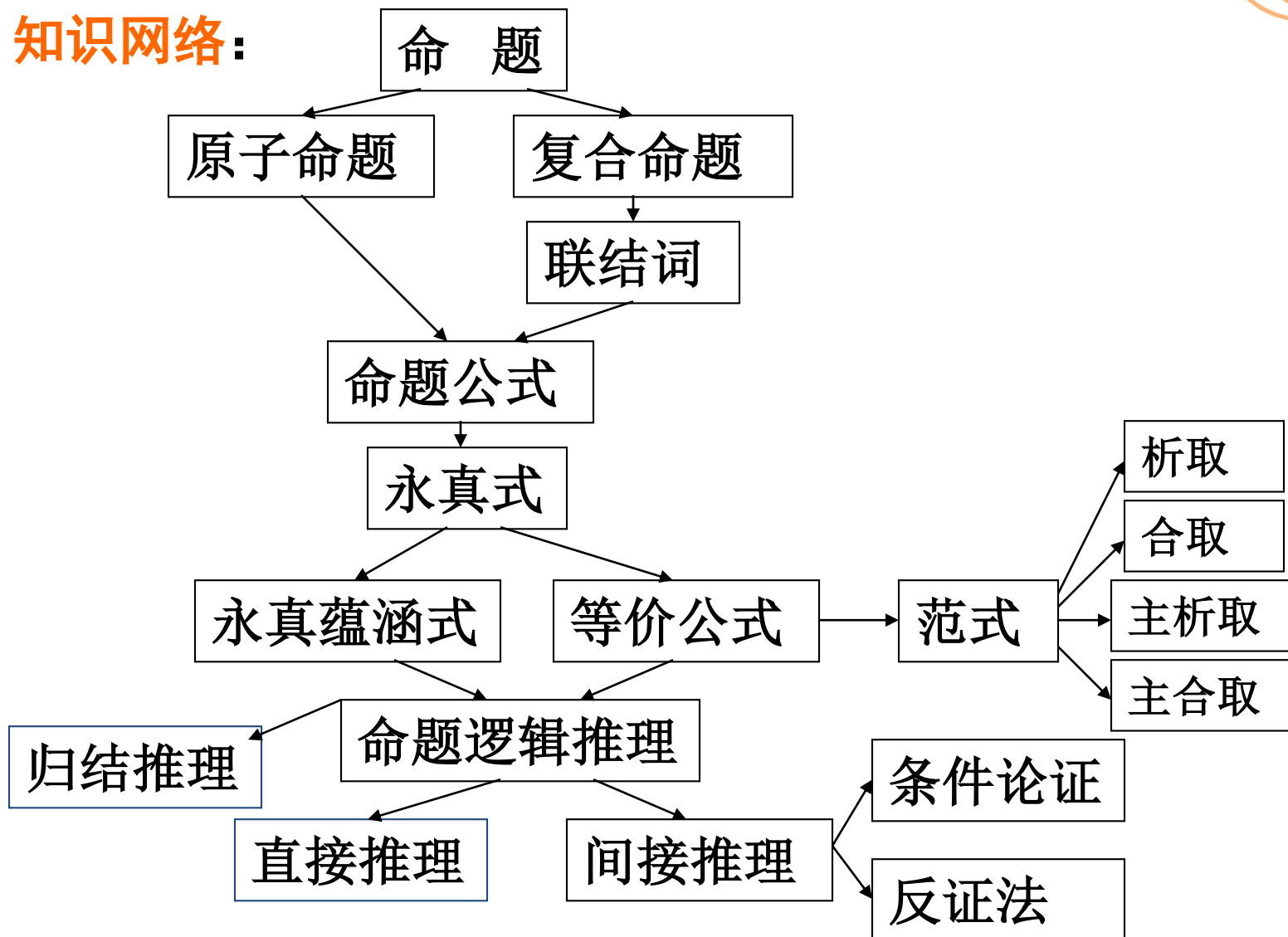
第二章小结与教学要求

7. 熟悉基本的推理公式，掌握推理公式的不同证明方法；
 - $A \rightarrow B$ 是重言式、 $A \wedge \neg B$ 为矛盾式、真值表法、 $\neg B \Rightarrow \neg A$ 即反证法、解释法
8. 理解基本的推理规则，掌握使用推理规则进行推理演算的方法；
9. 理解归结推理规则，掌握用归结推理法证明的方法。

第一章和第二章 小结



知识网络:





刘世霞

shixia@tsinghua.edu.cn