离散数学 I 期末考试试题 (A 卷)

一. (15 分)

设 $A = p_0 \vee (p_1 \rightarrow (p_2 \wedge p_3))$, $B = \sim (p_1 \wedge \sim p_0 \wedge (p_3 \rightarrow \sim (\sim p_2 \rightarrow p_0 \wedge \sim p_0)))$.

(1) 求 A 的合取范式 (disjunctive normal form); (5 分)

(2) 求 B 的析取范式 (conjunctive normal form); (5 分)

(3) 试问 A 与 B 是否逻辑等价 (logically equivalent)? 证明你的结论. (5 分)

二. (25 分)

证明下列结论 (所有使用到的命题都必须由公理模式 (K_1)–(K_6) 以及推演规则 MP 和 $Generalisation$ 加以独立证明), 其中 A, B, C 是任意的合式公式.

(1) $A \rightarrow B, \sim (B \rightarrow C) \rightarrow \sim A \vdash A \rightarrow C$; (5 分)

(2) $\vdash (\sim A \rightarrow A) \rightarrow A$; (10 分)

(3) $\vdash (\forall x_0)(A \rightarrow B) \rightarrow ((\exists x_0)A \rightarrow (\exists x_0)B)$. (10 分)

三. (15 分)

设映射 $\alpha : \{T, F\} \rightarrow \{0, 1\}$ 使得 $\alpha(T) = 1$ 且 $\alpha(F) = 0$. 试写出一个命题逻辑的合式公式 A 满足下述条件：对于任意的真值赋值 v, $v(A) = F$ 当且仅当

$$\max\{1-\alpha(v(p_0)), \alpha(v(p_1))\} \leq \min\{1, 1-\alpha(v(p_2))+\min(\alpha(v(p_1)), \alpha(v(p_3)))\}.$$

四. (10 分)

设 A 是一个谓词逻辑公式，它的前束范式 (prenex form) 为 $B = (Q_1 x_{i_1}) \ldots (Q_m x_{i_m})M$. 利用 Skolem 函数将 $(Q_1 x_{i_1}), \ldots, (Q_m x_{i_m})$ 中的存在量词删除得到 B 的 Skolem 范式 $C = (\forall x_{j_1}) \ldots (\forall x_{j_k})N$ (注意 N 中不含量词). 再求 N 的析取范式得到 R, 并记 $D = (\forall x_{j_1}) \ldots (\forall x_{j_k})R$. 试问 A 与 D 是否逻辑等价？证明你的结论.

五． (20 分)

叙述并证明谓词逻辑的演绎定理 (the Deduction Theorem). 注意：证明中所引用的结果都必须事先加以独立证明.

六． (15 分)

在命题逻辑中，引入如下定义：

(a) 若公式 A 中只含有 $\wedge$ 和 $\vee$ 两个连接词, 则称 A 为正公式.

(b) 对真值赋值 $v : \{p_0, p_1, \ldots\} \to \{T, F\}$, 记

$$[v] = \{p_i : v(p_i) = T, i = 0, 1, \ldots\}.$$

若真值赋值 v_1 和 v_2 满足 $[v_1] \subseteq [v_2]$, 则称 v_1 比 v_2 弱，记为 $v_1 \le v_2$.

(c) 设 Σ 是一公式集合， v 是一真值赋值．若对于任意 $A \in \Sigma$ 都有 $v(A) = T$, 则称 v 是 A 的一个模型 (model), 记为 $v \models \Sigma$.

(d) 公式集合 Σ 称为递增的，若对于任意真值赋值 v_1 和 v_2, 当 $v_1 \vdash \Sigma$ 且 $v_1 \le v_2$ 时，总有 $v_2 \models \Sigma$.

(e) 设 Σ_1, Σ_2 为两个公式集合, 若对于任意值赋值 v 均有 $v \models \Sigma_1$ 当且仅当 $v \models \Sigma_2$, 则称 Σ_1 与 Σ_2 等价.

证明：

(1) $v_1 \le v_2$ 当且仅当对于每个正公式 A, $v_1(A) = T$ 蕴涵 $v_2(A) = T$; (10 分)

(2) 协调 (consistent) 的公式集合 Σ 是递增的当且仅当存在正公式集合 Γ 与 Σ 等价． (5 分)