# 离散数学——第五周作业

## 计83 刘轩奇 2018011025

#### 2019.10.11

#### 2.9 证明下列推理关系:

- (1) 在大城市球赛中,如果北京队第三,那么如果上海队第二,那么天津队第四。沈阳队不是第一或北京队第三。上海队第二。从而知,如果沈阳队第一,那么天津队第四。
- (2) 如果国家不对农产品给与补贴,那么国家就要对农产品进行控制。如果对农产品进行控制,农产品就不会短缺。或者农产品短缺或者农产品过剩。事实上农产品不过剩。从而国家对农产品给与了补贴。
- 解 (1) P: 北京队第三; Q: 上海队第二; R: 天津队第四; S: 沈阳队第一。

欲证: 
$$P \to (Q \to R), \neg S \lor P, Q \Rightarrow S \to R$$

$$(a) \neg S \lor P$$
 前提  
 $(b)S \to P$  (a)置换  
 $(c)S$  附加前提  
 $(d)P$  (b)(c)分离  
 $(e)P \to (Q \to R)$  前提  
 $(f)Q \to R$  (d)(e)分离  
 $(g)Q$  前提  
 $(h)R$  (f)(g)分离  
 $(i)S \to R$  条件证明规则

(2) P: 国家对农产品给与补贴; Q: 国家对农产品进行控制; R: 农产品短缺; S:, 农产品过剩。

欲证: 
$$\neg P \rightarrow Q, Q \rightarrow \neg R, R \leftrightarrow \neg S, \neg S \Rightarrow P$$

$$(a) \neg S$$
 前提

  $(b)R \leftrightarrow \neg S$ 
 前提

  $(c)R$ 
 $(a)(b)$  分离

  $(d)Q \to \neg R$ 
 前提

  $(e)R \to \neg Q$ 
 $(d)$  置换

  $(f) \neg Q$ 
 $(c)(e)$  分离

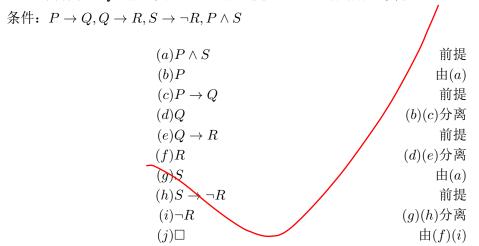
  $(g) \neg P \to Q$ 
 前提

  $(h) \neg Q \to P$ 
 $(g)$  置换

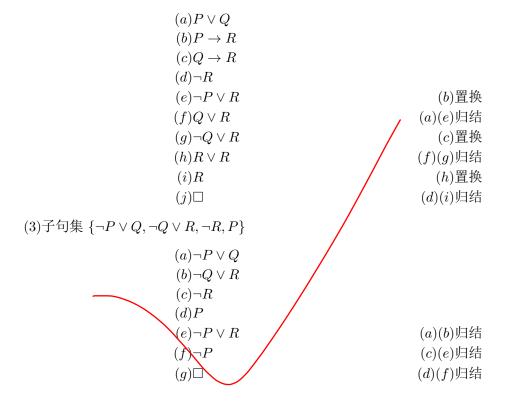
  $(i)P$ 
 $(f)(h)$  分离

**2.10** 如果合同是有效的,那么张三应受罚。如果张三受罚,他将破产。如果银行给张三贷款,他就不会破产。事实上,合同有效并且银行给张三贷款了。验证这些前提是否有矛盾。

 $\mathbf{P}$ : 合同有效; Q: 张三受罚; R: 张三破产; S: 银行给张三贷款。



- 2.12 利用归结法证明:
  - $(1) (P \lor Q) \land (P \to R) \land (Q \to R) \Rightarrow R$
  - $(3) \neg (P \land \neg Q) \land (\neg Q \lor R) \land \neg R \Rightarrow \neg P$
- 证 (1) 子句集  $\{P \lor Q, P \to R, Q \to R, \neg R\}$



**2.11** 若  $P_i \to Q_i (i=1,\cdots,n)$  为真, $P_1 \lor P_2 \lor \cdots \lor P_n$  和  $\neg (Q_i \land Q_j) (i \neq j)$  也为真。试证明必有  $Q_i \to P_i (i=1,\cdots,n)$  为真。

证

(a) 
$$\neg (Q_i \wedge Q_j)$$
 前提  
(b)  $Q_i \rightarrow \neg Q_j$  (a) 置換  
(c)  $P_i \rightarrow Q_i$  前提  
(d)  $P_i \rightarrow \neg Q_j$  (b) (c) 分离  
(e)  $\neg Q_i \rightarrow \neg P_i$  (c) 置換  
(f)  $P_i \rightarrow \neg P_j$  (d) (e) 分离  
(g)  $P_i \rightarrow (\neg P_1 \wedge \neg P_2 \cdots \wedge \neg P_{i-1} \wedge \neg P_{i+1} \cdots \wedge \neg P_n)$  由(f)  
(h)  $\neg P_i \vee (\neg P_1 \wedge \neg P_2 \cdots \wedge \neg P_{i-1} \wedge \neg P_{i+1} \cdots \wedge \neg P_n)$  (g) 置換  
(i)  $P_1 \vee P_2 \vee \cdots \vee P_n$  前提  
(j)  $P_i \vee (P_1 \vee P_2 \vee \cdots \vee P_{i-1} \vee P_{i+1} \vee \cdots \vee P_n)$  (i) 置換  
(k)  $\neg (P_1 \vee P_2 \vee \cdots \vee P_{i-1} \vee P_{i+1} \vee \cdots \vee P_n) \rightarrow P_i$  (j) 置換  
(l)  $(\neg P_1 \wedge \neg P_2 \cdots \wedge \neg P_{i-1} \wedge \neg P_{i+1} \cdots \wedge \neg P_n) \rightarrow P_i$  (k) 置換  
(m)  $Q_i \rightarrow (\neg Q_1 \wedge \neg Q_2 \cdots \wedge \neg Q_{i-1} \wedge \neg Q_{i+1} \wedge \cdots \wedge Q_n)$  由(b)  
(n)  $Q_i \rightarrow (\neg P_1 \wedge \neg P_2 \cdots \wedge \neg P_{i-1} \wedge \neg P_{i+1} \cdots \wedge \neg P_n)$  由(e) (m) 三段论  
(o)  $Q_i \rightarrow P_i$ 

### 3.1 依公理系统证明

$$(1) \vdash \neg(P \land Q) \to (\neg P \lor \neg Q)$$

$$(3) \vdash P \to (Q \lor P)$$

证 (1)

$$(a) \vdash \neg \neg P \to P$$
 定理3.2.5  

$$(b) \vdash \neg \neg (\neg P \lor \neg Q) \to (\neg P \lor \neg Q)$$
 代入  $\frac{P}{\neg P \lor \neg Q}$   

$$(c) \vdash \neg (P \land Q) \to (\neg P \lor \neg Q)$$
 定义(2)

(3)

$$(a) \vdash (Q \to R) \to ((P \to Q) \to (P \to R))$$
 定理3.2.1 
$$(b) \vdash ((P \lor Q) \to (Q \lor P)) \to ((P \to (P \lor Q) \to (P \to (Q \lor P)))$$
 代入  $\frac{Q}{(P \lor Q)}, \frac{R}{(Q \lor P)}$  公理3 
$$(c) \vdash ((P \lor Q)) \to (Q \lor P))$$
 
$$(d) \vdash ((P \to (P \lor Q) \to (P \to (Q \lor P)))$$
 
$$(b)(c) \to (P \to (P \lor Q))$$
 公理2 
$$(f) \vdash P \to (Q \lor P)$$
 
$$(d)(e) \to (Q \lor P)$$

#### 3.2 依王浩算法判断下述蕴含式是否正确

$$(1) \neg Q \land (P \rightarrow Q) \Rightarrow \neg P$$

解

$$(a) \neg Q \wedge (P \to Q) \stackrel{s}{\Rightarrow} \neg P$$
 (写成相继式)  

$$(b) \neg Q, (P \to Q) \stackrel{s}{\Rightarrow} \neg P$$
 ( $\wedge \Rightarrow$ )  

$$(c) Q, \neg Q \stackrel{s}{\Rightarrow} \neg P$$
 而且 $\neg Q \stackrel{s}{\Rightarrow} P, \neg P$  ( $\rightarrow \Rightarrow$ )  

$$(d) Q \stackrel{s}{\Rightarrow} \neg P, Q$$
 而且 $\stackrel{s}{\Rightarrow} P, \neg P, Q$  ( $\neg \Rightarrow$ )  

$$(e) P, Q \stackrel{s}{\Rightarrow} Q$$
 而且 $P \stackrel{s}{\Rightarrow} P, Q$  ( $\Rightarrow \neg$ )

上式无联结词而且 ⇒ 两端均有共同的命题变项,从而是公理,则原蕴含式正确。