

离散数学——第十四周作业

计83 刘轩奇 2018011025

2019.12.15

11.1 下列关系中哪个是函数？

- (1) $\{\langle x, y \rangle | x \in \mathbb{N} \wedge y \in \mathbb{N} \wedge x + y < 10\}$
- (2) $\{\langle x, y \rangle | x \in \mathbb{R} \wedge y \in \mathbb{R} \wedge x = y^2\}$
- (3) $\{\langle x, y \rangle | x \in \mathbb{R} \wedge y \in \mathbb{R} \wedge y = x^2\}$

答 (1) 不是。 $\langle 1, 2 \rangle, \langle 1, 1 \rangle \in R$
(2) 不是。 $\langle 1, -1 \rangle, \langle 1, 1 \rangle \in R$
(3) 是。

11.2 下列集合是函数吗？如果是，写其定义域和值域。

- (1) $\{\langle 1, \langle 2, 3 \rangle \rangle, \langle 2, \langle 3, 2 \rangle \rangle, \langle 3, \langle 4, 1 \rangle \rangle\}$
- (2) $\{\langle 1, \langle 2, 3 \rangle \rangle, \langle 2, \langle 3, 4 \rangle \rangle, \langle 1, \langle 3, 4 \rangle \rangle\}$
- (3) $\{\langle 1, \langle 2, 3 \rangle \rangle, \langle 2, \langle 2, 3 \rangle \rangle, \langle 3, \langle 2, 3 \rangle \rangle\}$

答 (1) 是。 $\text{dom}(f) = \{1, 2, 3\}, \text{ran}(f) = \{\langle 2, 3 \rangle, \langle 3, 2 \rangle, \langle 4, 1 \rangle\}$
(2) 不是。
(3) 是。 $\text{dom}(f) = \{1, 2, 3\}, \text{ran}(f) = \{\langle 2, 3 \rangle\}$

11.3 设 $f, g \in A_B$ ，且 $f \cap g \neq \emptyset$ ， $f \cap g$ 和 $f \cup g$ 是函数吗？如果是，证明之；不是则举反例。

答 (1) $f \cap g$ 不是 A 到 B 的函数，例如

$$f = \{\langle 1, 1 \rangle, \langle 2, 2 \rangle, \langle 3, 3 \rangle\}, g = \{\langle 1, 1 \rangle, \langle 2, 3 \rangle, \langle 3, 2 \rangle\}$$

$f \cap g = \{\langle 1, 1 \rangle\}$ 不是 $\{1, 2, 3\}$ 到 $\{1, 2, 3\}$ 的函数，仅是部分函数。

(2) $f \cup g$ 不是 A 到 B 的函数，同上例， $f \cup g = \{\langle 1, 1 \rangle, \langle 2, 2 \rangle, \langle 2, 3 \rangle, \langle 3, 2 \rangle, \langle 3, 3 \rangle\}$ 不是函数。

11.4 设 $f \cap g \neq \emptyset$,

$$f(x) = \begin{cases} 1, & \text{当 } x \text{ 是奇数} \\ \frac{x}{2}, & \text{当 } x \text{ 是偶数} \end{cases}$$

求 $f(0), f[\{0\}], f[\{0, 2, 4, 6, \dots\}], f[\{1, 3, 5, \dots\}], f^{-1}[\{2\}], f^{-1}[\{3, 4\}]$.

解

$$\begin{aligned}
 f(0) &= 0 \\
 f[\{0\}] &= \{0\} \\
 f[\{0, 2, 4, 6, \dots\}] &= \{0, 1, 2, 3, \dots\} \\
 f[\{1, 3, 5, \dots\}] &= \{1\} \\
 f^{-1}[\{2\}] &= \{4\} \\
 f^{-1}[\{3, 4\}] &= \{6, 8\}
 \end{aligned}$$

11.6 下列函数是否满射的, 单射的, 双射的?

(1) $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}, f(x) = x^2 - 2x - 15$

(2) $f: \mathbb{N} - \{0\} \rightarrow \mathbb{R}, f(x) = \log_2 x$

(3) $f: \mathbb{N} \rightarrow \mathbb{N}, f(x) = \begin{cases} 1, x \text{ 是奇数} \\ 2, x \text{ 是偶数} \end{cases}$

(4) $f: \mathbb{N} \rightarrow \mathbb{N}, f(x) = x \bmod 3$

答 (1) 不是满射也不是单射的, 更不是双射的。

(2) 不是满射的但是单射的, 不是双射的。

(3) 是满射的但不是单射的, 不是双射的。

(4) 是满射的但不是单射的, 不是双射的。

11.7 设 R 是 A 上的等价关系, $g: A \rightarrow A/R$ 是自然映射, 什么条件下 g 是双射的?解 g 是双射的 $\iff R$ 是恒同映射 I_A

充分性 g 是双射的 $\implies g$ 是单射的 $\implies (\forall x)(\forall y)(x \in A \wedge y \in A \wedge x \neq y \implies g(x) \neq g(y))$, 而 g 是自然映射, 则 $(\forall x)(\forall y)(x \in A \wedge y \in A \wedge x \neq y \implies g(x) = [x]_R \neq [y]_R = g(y))$, 则 $g(x) = \{x\}$ 。即 R 是恒同映射。

必要性 $\forall x, y$, 若 $x \in A, y \in A$ 且 $x \neq y$, 则 $g(x) = \{x\} \neq \{y\} = g(y)$, 则 g 是单射的。 $\forall B \in A/R, \exists x \in B$, 则 $g(x) = B$, 从而 $g(x)$ 是满射的。从而 g 是双射的。

11.9 对有限集合 A 和 B , $|A| = m, |B| = n$, 求在下列情况下 m 和 n 应满足的条件。(1) 存在从 A 到 B 的单射函数。(2) 存在从 A 到 B 的满射函数。(3) 存在从 A 到 B 的双射函数。答 (1) $n \geq m$, (2) $m \geq n$, (3) $m = n$

11.10 对下列集合 A 和 B ，构造从 A 到 B 的双射函数。

(1) $A = \{1, 2, 3\}, B = \{a, b, c\}$

(2) $A = (0, 1) \subseteq \mathbb{R}, B = (1, 3) \subseteq \mathbb{R}$

(3) $A = P(X), B = X_Y, X = \{a, b, c\}, v-Y = \{0, 1\}$

答 (1) $f : A \rightarrow B, f(1) = a, f(2) = b, f(3) = c$

(2) $f : A \rightarrow B, f(x) = 1 + 2x$

(3) $f : A \rightarrow B, f = \chi_X$ ，其中 χ_X 是集合 X 的特征函数。