9+

阻尼振动与受迫振动 实验报告

Somebody

October 11, 2020

1 实验目的

1. 观测阻尼振动，学习测量振动系统基本参数的方法。
2. 研究受迫振动的幅频特性和相频特性，观察共振现象。
3. 观测不同阻尼对受迫振动的影响。

2 实验原理

弹簧与摆轮组成一振动系统。设摆轮转动惯量为J；因转动产生的"粘滞阻尼"的力矩定义为$\gamma\frac{d\theta}{dt}$（其中γ为阻尼力矩系数）；弹簧的反抗力矩为$-k\theta$。

引入如下量：
$\omega_0 = \sqrt{k/J}$：无阻尼时自由振动的固有角频率
$\beta = \gamma/2J$：无阻尼时自由振动的固有角频率
$\zeta = \beta/\omega_0 = \frac{\gamma}{2\sqrt{kJ}}$：阻尼比

2.1 有粘滞阻尼的阻尼振动运动方程

忽略弹簧的转动惯量，有运动方程：

$$J\frac{d^2\theta}{dt^2} + \gamma\frac{d\theta}{dt} + k\theta = 0 \tag{1}$$

小阻尼条件（$\beta^2 - \omega^2 < 0$）时，（1）的解为：

$$\theta(t) = \theta_0 e^{-\beta t} cos(\sqrt{\omega^2 - \beta^2}t + \phi_i) \tag{2}$$

因此，阻尼振动的角频率、周期分别为：
$\omega_d = \sqrt{\omega_0^2 - \beta^2}, T_d = 2\pi/\sqrt{\omega_0^2 - \beta^2}$

2.2 周期外力矩作用下的受迫振动

若施加一外力周期外力矩$Mcos(\omega t)$，则（1）式右边的0需改为$Mcos(\omega t)$。然后可解得：

$$\theta(t) = \theta_0 e^{-\beta t} cos(\sqrt{\omega^2 - \beta^2}t + \phi_i) + \theta_m cos(\omega t - \phi) \tag{3}$$

此解为阻尼振动与"频率同激励源频率的简谐振动"的叠加。
前者为暂态项，当$t \to +\infty$时该项为0；于是最终的状态为后者，即"稳态解"：

$$\theta(t) = \theta_m cos(\omega t - \phi) \tag{4}$$

其中，

$$\theta_m = \frac{M/J}{\sqrt{(\omega_0^2 - \omega^2)^2 + 4\beta^2\omega^2}}, \phi = arctan\frac{2\beta\omega}{\omega_0^2 - \omega^2} \tag{5}$$

在波耳共振仪中，电机以角速度ω匀速旋转时，由几何关系可得，其给予弹簧的支座的偏转角的一阶近似式为：

$$\alpha(t) = \alpha_m cos(\omega t) \tag{6}$$

其中α_m为摇杆的摆幅。由此得到弹簧在这种情况下的总转角为$\theta - \alpha(t) = \theta - \alpha_m cos(\omega t)$。基于此仿照（1）有运动方程$J\frac{d^2\theta}{dt^2} + \gamma\frac{d\theta}{dt} + k(\theta - \alpha_m cos(\omega t)) = 0$，移项可化为周期外力矩作用下的运动方程：

$$J\frac{d^2\theta}{dt^2} + \gamma\frac{d\theta}{dt} + k\theta = \alpha_m cos(\omega t) \tag{7}$$

同样可得到解（3），只不过其中的参数有所变化。此时，稳态解$\theta(t) = \theta_m cos(\omega t - \phi)$的相位差与（5）相同，振幅变为$\theta_m = \frac{\alpha_m\omega_0^2}{\sqrt{(\omega_0^2-\omega^2)^2+4\beta^2\omega^2}}$。由其极大值条件$\frac{\partial\theta_m}{\partial\omega} = 0$可得：当外激励满足$\omega = \sqrt{\omega_0^2 - 2\beta^2}$时，系统发生共振，振幅达到最大值$\theta_m = \frac{\alpha_m\omega_0^2}{2\beta\sqrt{\omega_0^2-\omega^2}}$。

2.3 小结

综合以上理论结果有：

阻尼振动下：振幅为$\theta_m(t) = \theta_0 e^{-\beta t}$。随着时间推移，通过测定一系列振幅的值$\theta_i = \theta_0 e^{-\beta(iT_d)}$，由于线性关系$ln\theta_i = ln\theta_0 + (-\beta T_d)i$，即可借助计算机拟合直线$ln\theta_i - i$，得到斜率$b = (-\beta T_d)$。由（2）中得到的$T_d$，可知$-\beta T_d = -\frac{2\pi}{\sqrt{\zeta^{-2}-1}}$，进而求得$\zeta$。之后再结合测定的振动周期$T_d$可计算固有角频率$\omega_0 = \frac{2\pi}{T_d\sqrt{1-\zeta^2}}$。

受迫振动下：振幅

$$\theta_m = \frac{\alpha_m}{\sqrt{(1-(\frac{\omega}{\omega_0})^2)^2 + 4\zeta^2(\frac{\omega}{\omega_0})^2}} \tag{8}$$

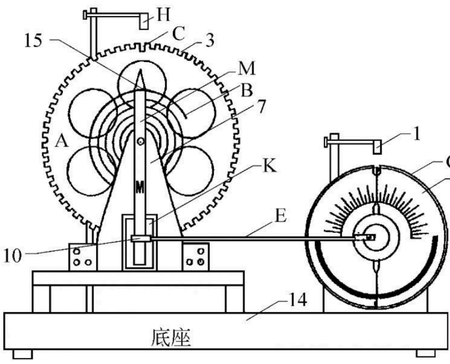
相位差

$$\phi = arctan\frac{2\zeta(\frac{\omega}{\omega_0})}{1-(\frac{\omega}{\omega_0})^2} \tag{9}$$

在共振时为$\frac{\pi}{2}$。

3 实验仪器

本实验使用如图所示的波耳共振仪。主要部件有摆轮、弹簧、阻尼线圈、电机、有机玻璃盘等。



4 实验步骤

4.1 阻尼振动

4.1.1 最小阻尼

强迫力开关置“摆轮”。拨动摆轮至$150° - 200°$使之摆动。

从大到小依次读取振幅值$\theta_i(i=1,2,\cdots,n)$。周期选择置于“10”，启动测量，停止时读取数据并立即再次测量，记录每次读到的$10\overline{T_d}$。连续测量5次$10\overline{T_d}$。

4.1.2 其它阻尼

周期选择置于“1”，仿照上小节中的其余操作，在其它2-3种阻尼状态下测量振幅、每次振动的周期，从而求$\zeta\pm\Delta_\zeta$。

4.2 受迫振动

选择2-3个不同的阻尼比（与之前的选择一致）做实验。开启电机，周期显示开关置“强迫力”，周期选择置于“1”。调节强迫激励周期旋钮以改变电机运动角频率。

每次调节完，待系统稳定（摆轮和电机的周期相同）后，读取并记录：振幅，受迫周期，相差。

测量相差是在系统稳定之后，开启闪光灯，读取并记录两次闪光灯亮时玻璃转盘上的读数。

改变电机运动角频率，重复上述操作，得到至少12个数据点，其中需要包括共振点，即相位差为$\frac{\pi}{2}$的点。

5 数据处理

5.1 阻尼振动

5.1.1 最小阻尼

Table 1: 最小阻尼下的振幅与周期

序号i	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13
$\theta_i/°$	159	158	157	155	154	153	152	151	149	148	147	146	145
$\theta_{i+25}/°$	130	129	128	127	126	124	122	122	120	119	118	117	116
$ln\theta_i/°$	5.069	5.063	5.056	5.043	5.037	5.030	5.024	5.017	5.004	4.997	4.990	4.984	4.977
$ln\theta_{i+25}/°$	4.868	4.860	4.852	4.844	4.836	4.820	4.804	4.804	4.787	4.779	4.771	4.762	4.754
序号i	14	15	16	17	18	19	20	21	22	23	24	25	
$\theta_i/°$	143	142	141	141	140	138	138	136	135	134	132	132	
$\theta_{i+25}/°$	115	114	113	112	111	110	109	108	108	106	106	104	
$ln\theta_i/°$	4.963	4.956	4.949	4.949	4.942	4.927	4.927	4.913	4.905	4.898	4.883	4.883	
$ln\theta_{i+25}/°$	4.745	4.736	4.727	4.718	4.710	4.700	4.691	4.682	4.682	4.663	4.663	4.644	

i	1-10	11-20	21-30	31-40	41-50
$10\overline{T_d}/s$	15.333	15.356	15.379	15.400	15.420

借助Excel拟合得到$ln\theta_i-i$直线的表达式$y=bx+a$，其中$b=-0.0087, a=5.0877, r^2=0.9975, r=$

0.9987，从而求得：

$$\zeta = \frac{1}{\sqrt{1+(\frac{2\pi}{b})^2}} = 1.3846 \times 10^{-3}$$

$$\Delta_b = t_p(\nu)S_b = t_p(n-2)|b|\sqrt{\frac{r^{-2}-1}{n-2}} = 1.3 \times 10^{-4}$$

$$\Delta_\zeta = |\frac{d\zeta}{db}|\Delta_b = \frac{4\pi^2}{(4\pi^2+b^2)^{\frac{3}{2}}}\Delta_b = 2.0 \times 10^{-5}$$

$$T_d = \frac{76.888s}{50} = 1.5378s$$

周期的不确定度取其 10^{-5} 倍加上其显示值末位变化“1”所对应的量值：

$$\Delta_{T_d} = \frac{T_d}{10^5} + \frac{0.001}{10} = 1.2 \times 10^{-4} \quad S$$

$$\omega_0 = \frac{2\pi}{T_d\sqrt{1-\zeta^2}} = 4.08583 rad/s$$

由$\frac{\partial ln\omega_0}{\partial T_d} = -\frac{1}{T_d}, \frac{\partial ln\omega_0}{\partial \zeta} = -\frac{\zeta}{1-\zeta^2}$，得

$$\frac{\Delta_{\omega_0}}{\omega_0} = \sqrt{(\frac{\partial ln\omega_0}{\partial T_d})^2\Delta_{T_d}^2 + (\frac{\partial ln\omega_0}{\partial \zeta})^2\Delta_\zeta^2} = \sqrt{(\frac{\Delta_{T_d}}{T_d})^2 + (\frac{\zeta\Delta_\zeta}{1-\zeta^2})^2}$$

$$\Delta_{\omega_0} = \omega_0\sqrt{(\frac{\Delta_{T_d}}{T_d})^2 + (\frac{\zeta\Delta_\zeta}{1-\zeta^2})^2} = 3.1 \times 10^{-4} \quad rad/s$$

整理最后需要的数据如下：

不能这么写

$$\underline{\zeta = 1.385 \times 10^{-3} \pm 2.0 \times 10^{-5}} \quad (1.385 \pm 0.020) \times 10^{-3}$$

$$T_d = 1.53780 \pm 1.2 \times 10^{-4}s$$

$$\omega_0 = 4.08583 \pm 3.1 \times 10^{-4}rad/s$$

同理，进行更改

5.1.2 其它阻尼

Table 2: 阻尼为“1”下的振幅与周期

序号i	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12
$\theta_i/°$	147	135	124	114	105	97	89	82	75	69	63	58
$ln\theta_i/°$	4.990	4.905	4.820	4.736	4.654	4.575	4.489	4.407	4.317	4.234	4.143	4.060
T_{d_i}	1.534	1.536	1.538	1.54	1.541	1.544	1.545	1.546	1.548	1.548	1.549	1.549

借助Excel拟合得到$ln\theta_i - i$直线的表达式$y = bx + a$，$b = -0.0843, a = 5.0757, r^2 = 0.9999, r = 0.9999$，从而求得：

$$\zeta = \frac{1}{\sqrt{1+(\frac{2\pi}{b})^2}} = 0.013416$$

$$\Delta_b = t_p(\nu)S_b = t_p(n-2)|b|\sqrt{\frac{r^{-2}-1}{n-2}} = 5.9 \times 10^{-4}$$

$$\Delta_\zeta = |\frac{d\zeta}{db}|\Delta_b = \frac{4\pi^2}{(4\pi^2+b^2)^{\frac{3}{2}}}\Delta_b = 9.5\times10^{-5}$$

$$T_d = \frac{18.518s}{12} = 1.5431s$$

周期的不确定度取其 10^{-5} 倍加上其显示值末位变化"1"所对应的量值:

$$\Delta_{T_d} = \frac{T_d}{10^5} + 0.001 = 0.0010$$

$$\omega_0 = \frac{2\pi}{T_d\sqrt{1-\zeta^2}} = 4.0720$$

由 $\frac{\partial ln\omega_0}{\partial T_d} = -\frac{1}{T_d}$, $\frac{\partial ln\omega_0}{\partial\zeta} = -\frac{\zeta}{1-\zeta^2}$，得

$$\frac{\Delta_{\omega_0}}{\omega_0} = \sqrt{(\frac{\partial ln\omega_0}{\partial T_d})^2\Delta_{T_d}^2 + (\frac{\partial ln\omega_0}{\partial\zeta})^2\Delta_\zeta^2} = \sqrt{(\frac{\Delta_{T_d}}{T_d})^2 + (\frac{\zeta\Delta_\zeta}{1-\zeta^2})^2}$$

$$\Delta_{\omega_0} = \omega_0\sqrt{(\frac{\Delta_{T_d}}{T_d})^2 + (\frac{\zeta\Delta_\zeta}{1-\zeta^2})^2} = 0.0027$$

最终:

$$\zeta = 1.3416\times10^{-2} \pm 9.5\times10^{-5}$$

Table 3: 阻尼为"2"下的振幅与周期

序号i	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12
$\theta_i/°$	163	143	126	110	97	85	74	65	57	50	44	38
$ln\theta_i/°$	5.094	4.963	4.836	4.700	4.575	4.443	4.304	4.174	4.043	3.912	3.784	3.638
T_{d_i}	1.534	1.537	1.54	1.543	1.545	1.548	1.549	1.55	1.551	1.552	1.552	1.554

借助Excel拟合得到$ln\theta_i - i$直线的表达式$y = bx + a$，$b = -0.0843, a = 5.0757, r^2 = 0.9999, r = 0.9999$，从而求得:

$$\zeta = \frac{1}{\sqrt{1+(\frac{2\pi}{b})^2}} = 0.020988$$

$$\Delta_b = t_p(\nu)S_b = t_p(n-2)|b|\sqrt{\frac{r^{-2}-1}{n-2}} = 9.3\times10^{-4}$$

$$\Delta_\zeta = |\frac{d\zeta}{db}|\Delta_b = \frac{4\pi^2}{(4\pi^2+b^2)^{\frac{3}{2}}}\Delta_b = 1.4\times10^{-4}$$

$$T_d = \frac{18.555s}{12} = 1.54625s$$

周期的不确定度取其 10^{-5} 倍加上其显示值末位变化"1"所对应的量值:

$$\Delta_{T_d} = \frac{T_d}{10^5} + 0.001 = 0.0010$$

$$\omega_0 = \frac{2\pi}{T_d\sqrt{1-\zeta^2}} = 4.0644$$

由$\frac{\partial ln\omega_0}{\partial T_d} = -\frac{1}{T_d}, \frac{\partial ln\omega_0}{\partial \zeta} = -\frac{\zeta}{1-\zeta^2}$，得

$$\frac{\Delta_{\omega_0}}{\omega_0} = \sqrt{(\frac{\partial ln\omega_0}{\partial T_d})^2\Delta_{T_d}^2 + (\frac{\partial ln\omega_0}{\partial \zeta})^2\Delta_\zeta^2} = \sqrt{(\frac{\Delta_{T_d}}{T_d})^2 + (\frac{\zeta\Delta_\zeta}{1-\zeta^2})^2}$$

$$\Delta_{\omega_0} = \omega_0\sqrt{(\frac{\Delta_{T_d}}{T_d})^2 + (\frac{\zeta\Delta_\zeta}{1-\zeta^2})^2} = 0.0027$$

最终:

$$\zeta = 2.099 \times 10^{-2} \pm 1.4 \times 10^{-4}$$

Table 4: 阻尼为“3”下的振幅与周期

序号i	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12
$\theta_i/°$	155	132	113	96	82	70	60	51	44	37	31	26
$ln\theta_i/°$	5.043	4.883	4.727	4.564	4.407	4.248	4.094	3.932	3.784	3.611	3.434	3.258
T_{d_i}	1.533	1.537	1.542	1.545	1.548	1.551	1.552	1.554	1.555	1.557	1.547	1.554

借助Excel拟合得到$ln\theta_i - i$直线的表达式$y = bx + a$，$b = -0.0843, a = 5.0757, r^2 = 0.9999, r = 0.9999$，从而求得:

$$\zeta = \frac{1}{\sqrt{1 + (\frac{2\pi}{b})^2}} = 0.025568$$

$$\Delta_b = t_p(\nu)S_b = t_p(n-2)|b|\sqrt{\frac{r^{-2}-1}{n-2}} = 2.3 \times 10^{-3}$$

$$\Delta_\zeta = |\frac{d\zeta}{db}|\Delta_b = \frac{4\pi^2}{(4\pi^2 + b^2)^{\frac{3}{2}}}\Delta_b = 3.6 \times 10^{-4}$$

$$T_d = \frac{18.575s}{12} = 1.5479s$$

周期的不确定度取其 10^{-5} 倍加上其显示值末位变化“1”所对应的量值:

$$\Delta_{T_d} = \frac{T_d}{10^5} + 0.001 = 0.0010$$

$$\omega_0 = \frac{2\pi}{T_d\sqrt{1-\zeta^2}} = 4.0605$$

由$\frac{\partial ln\omega_0}{\partial T_d} = -\frac{1}{T_d}, \frac{\partial ln\omega_0}{\partial \zeta} = -\frac{\zeta}{1-\zeta^2}$，得

$$\frac{\Delta_{\omega_0}}{\omega_0} = \sqrt{(\frac{\partial ln\omega_0}{\partial T_d})^2\Delta_{T_d}^2 + (\frac{\partial ln\omega_0}{\partial \zeta})^2\Delta_\zeta^2} = \sqrt{(\frac{\Delta_{T_d}}{T_d})^2 + (\frac{\zeta\Delta_\zeta}{1-\zeta^2})^2}$$

$$\Delta_{\omega_0} = \omega_0\sqrt{(\frac{\Delta_{T_d}}{T_d})^2 + (\frac{\zeta\Delta_\zeta}{1-\zeta^2})^2} = 0.0029$$

最终:

$$\zeta = 2.557 \times 10^{-2} \pm 3.6 \times 10^{-4}$$

5.2 受迫振动

表中计算量需要用到:

$$\phi_{theory} = arctan\frac{2\zeta(\frac{\omega}{\omega_0})}{1-(\frac{\omega}{\omega_0})^2}$$

$$\omega/\omega_0 = \frac{2\pi}{T\omega_0}$$

Table 5: 阻尼为“1”下受迫振动的数据 $\omega_0 = 4.0722rad/s$

i	振幅$\theta_m/°$	受迫周期 T/s	ϕ_1	ϕ_2	ϕ	ω/ω_0	ϕ_{thoery}	$\frac{\phi-\phi_{thoery}}{\phi_{theory}}$
1	11	1.335	176.5	166.5	171.5	1.1558	174.7220	-1.84%
2	20	1.416	172	166	169	1.0897	171.1270	-1.24%
3	35	1.470	168	165	166.5	1.0496	164.5180	1.20%
4	53	1.497	162	160	161	1.0307	156.0658	3.16%
5	76	1.511	154	153	153.5	1.0211	147.3246	4.19%
6	81	1.513	153	151	152	1.0198	145.6015	4.39%
7	86	1.514	150	149	149.5	1.0191	144.6799	3.33%
8	96	1.517	147	146	146.5	1.0171	141.6460	3.43%
9	106	1.519	143	144	143.5	1.0158	139.3723	2.96%
10	147	1.524	119.5	119	119.25	1.0124	132.6352	-10.09%
11	171	1.528	109	109	109	1.0098	125.9551	-13.46%
12	174	1.531	91.5	91	91.25	1.0078	120.0787	-24.01%
13	173	1.530	97.5	97	97.25	1.0085	122.1235	-20.37%
14	174	1.533	84	85	84.5	1.0065	115.7295	-26.98%
15	153	1.545	62	63	62.5	0.9987	84.3391	-25.89%
16	142	1.551	55	55	55	0.9948	68.7964	-20.05%
17	122	1.561	44	45	44.5	0.9884	49.0794	-9.33%
18	89	1.582	30	32	31	0.9753	28.2280	9.82%
19	65	1.604	21	22	21.5	0.9619	19.0717	12.73%
20	33	1.669	11	14	12.5	0.9245	9.6877	29.03%

此法测出$\omega_0 = 4.1040$，与之前结果4.0722相比相对偏差为0.78%。

Table 6: 阻尼为“2”下受迫振动的数据 $\omega_0 = 4.0644rad/s$

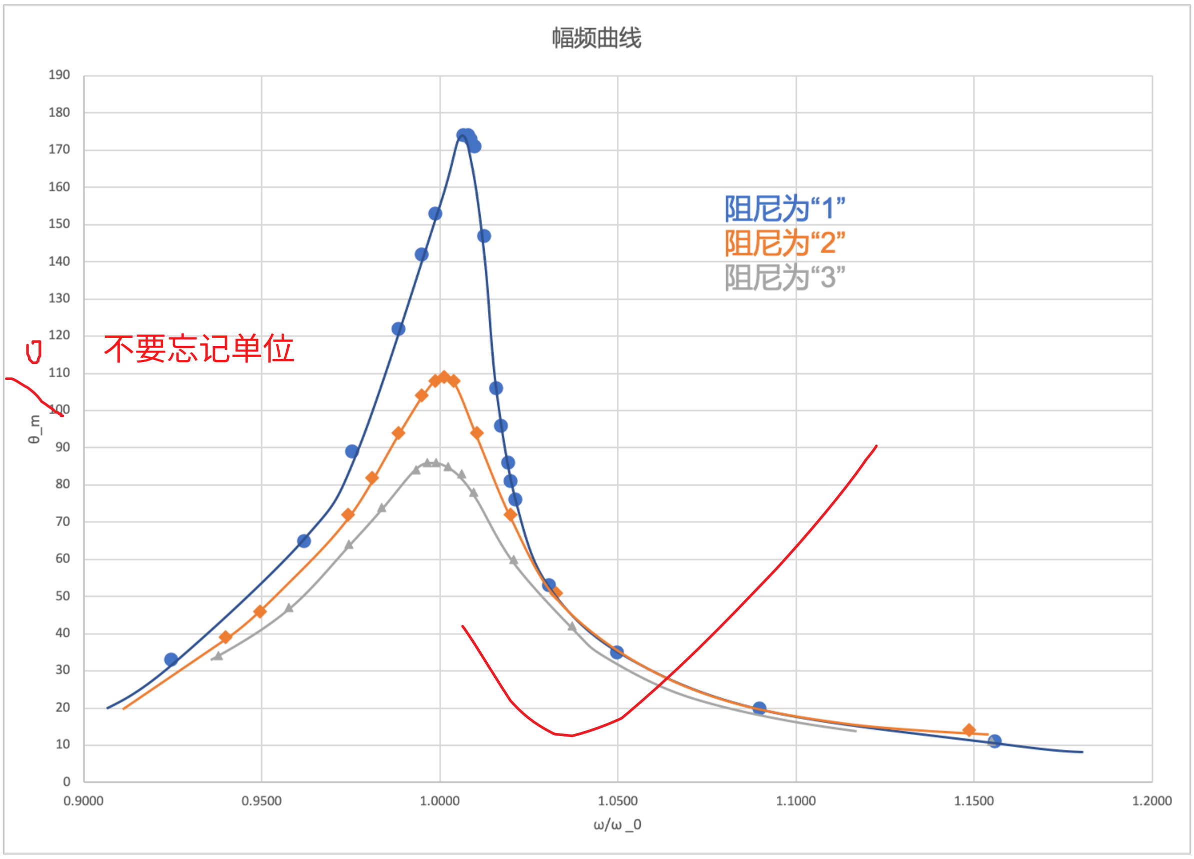
i	振幅$\theta_m/°$	受迫周期 T/s	ϕ_1	ϕ_2	ϕ	ω/ω_0	ϕ_{thoery}	$\frac{\phi-\phi_{thoery}}{\phi_{theory}}$
1	14	1.346	165	174	169.5	1.1485	171.4077	-1.11%
2	51	1.497	150	153	151.5	1.0327	146.8631	3.16%
3	72	1.516	147	148	147.5	1.0197	132.9465	10.95%
4	94	1.530	111.5	112.5	112	1.0104	116.2330	-3.64%
5	108	1.540	107	108	107.5	1.0038	100.3370	7.14%
6	109	1.544	88	89	88.5	1.0012	93.3659	-5.21%
7	108	1.548	81	82	81.5	0.9986	86.3123	-5.58%
8	104	1.554	72	73	72.5	0.9948	76.0310	-4.64%
9	94	1.564	60	62	61	0.9884	60.9979	0.00%
10	82	1.576	50	51	50.5	0.9809	47.4311	6.47%
11	72	1.587	41	43	42	0.9741	38.6598	8.64%
12	46	1.628	23	26	24.5	0.9496	22.0721	11.00%
13	39	1.645	20	23	21.5	0.9398	18.6560	15.24%

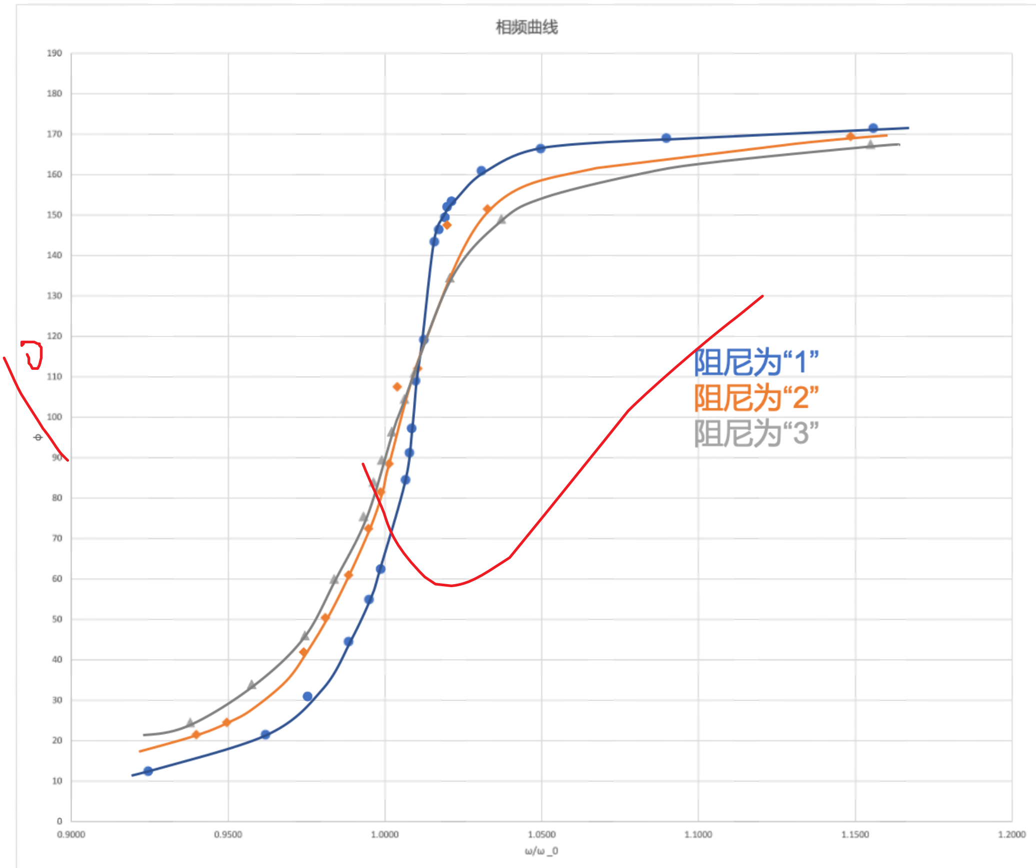
此法测出$\omega_0 = 4.0694$，与之前结果4.0644相比相对偏差为0.12%。

Table 7: 阻尼为"3"下受迫振动的数据 $\omega_0 = 4.0605 rad/s$

i	振幅$\theta_m/°$	受迫周期 T/s	ϕ_1	ϕ_2	ϕ	ω/ω_0	ϕ_{thoery}	$\frac{\phi-\phi_{thoery}}{\phi_{theory}}$
1	11	1.340	172	163	167.5	1.154770166	169.9581941	-1.4464%
2	42	1.492	148	150	149	1.03712602	144.9585094	2.7880%
3	60	1.516	134	135	134.5	1.020707139	128.7159132	4.4937%
4	78	1.533	110	112	111	1.009388143	110.074687	0.8406%
5	83	1.538	104	105	104.5	1.006106647	103.392538	1.0711%
6	85	1.544	96	97	96.5	1.002196906	94.90528411	1.6803%
7	86	1.549	89	90	89.5	0.998961925	87.67401245	2.0827%
8	86	1.553	84	84	84	0.996388939	81.94732503	2.5049%
9	84	1.558	75	76	75.5	0.993191285	75.04058269	0.6122%
10	74	1.573	59.5	60.5	60	0.983720294	57.30195943	4.7085%
11	64	1.588	45	47	46	0.974428226	44.62456664	3.0822%
12	47	1.616	33	35	34	0.957544568	30.5072881	11.4488%
13	34	1.650	23	26	24.5	0.937813347	21.70187272	12.8935%

此法测出$\omega_0 = 4.0563$，与之前结果4.0605相比相对偏差为-0.10%。
最后可绘制出三种阻尼状态下的幅频曲线与相频曲线如下图。


幅频曲线
阻尼为“1”
阻尼为“2”
阻尼为“3”
不要忘记单位
θ_m
ω/ω _0


相频曲线
阻尼为“1”
阻尼为“2”
阻尼为“3”
ω/ω _0

6 思考题

1. 如何判断受迫振动已处于稳定状态?

   由受迫振动时的运动表达式，即式（3）：$\theta(t) = \theta_0 e^{-\beta t} cos(\sqrt{\omega^2 - \beta^2}t + \phi_i) + \theta_m cos(\omega t - \phi)$，受迫振动已处于稳定状态意味着前面的暂态项趋于0，运动可仅由稳态解$\theta(t) = \theta_m cos(\omega t - \phi)$表述。比较稳态解与（3），可知稳态相比非稳态的特征为振幅、周期均是稳定的而不受t影响。因此：

   当强迫力（电机）周期与摆轮周期相等或基本一致（相差？秒以内），或振幅持续1min以上无变化时，可认为受迫振动达到稳定状态。因此在实际操作中，可以观察振幅示数是否变化，或者拨动周期显示开关，看摆轮周期与强迫力周期是否相等或很接近来判断。

2. 从幅频曲线的相对振幅比为1/2的点，也可求出β值。试用你作出的幅频特性曲线进行计算，把结果与练习2的结果相比较。

   由受迫振动下的振幅表达式（8），选取阻尼为1的幅频曲线上振幅为最大振幅1/2的两个点，在横轴上读取两个$\omega/\omega_0 = 0.976, 1.018$，乘上对应的$\omega_0 = 4.072rad/s$，可得到$\omega_1 = 3.974?, \omega_2 = 4.145$。将两个点带入（8）联立求解，将$\zeta$代换为$\beta$，得到：

$$\beta = \frac{1}{2}\sqrt{2\omega_0^2 - \omega_1^2 - \omega_2^2} = 0.215 \quad (10)$$

图像拟合误差、仪器误差、还有误差的叠加影响等等。可以多思考一下

   用5.1.2中的数据，$\beta = \omega_0\zeta = 0.0546$。

   二者相差较大。虽然在点数还不够多的幅频曲线上取点时的误差较大，但经过微调ω/ω_0的读数后前者离后者仍然保持较大差距。遗憾的是对计算进行反复检查后依然如此，还没有找到原因。

3. 实验中如何判断达到共振？共振频率是多少？

   由2.3中的结论，共振时相位差$\phi = \frac{\pi}{2}$。因此在实验中当观察到相位差为90°，即闪光灯亮时有机玻璃盘上的读数为90°时，可认为系统达到了共振。当然，在现实操作中，在共振点附近调节时系统状态变化较大，很难刚好调出相位差为90°，因此可以在共振点附近多测几个点，画出相频曲线，最后在曲线上寻找相位差为90°对应的ω/ω_0，从而求出共振频率。

   共振频率与固有频率近似相等，为$\frac{1}{T}$，T为各条件下$\phi = \frac{\pi}{2}$时的受迫周期。

   代入数据计算均约为0.65Hz。

共振的时候实际上只能说接近90度，因为根据频率公式，实际上是在小于w0处幅度最大，从而共振。只是在弱阻尼的状态下，会非常接近w0

7 实验小结与其它问题

本次实验中，关于直线（$y = bx + a$）拟合后求直线斜率的标准差（S_b）的问题（5.1.1）困扰了我。这个问题的求解本人看到了三种计算方法。

一是用逐差法中的量计算：

$$S_b = \sqrt{\frac{\Sigma(D_i - \overline{D})^2}{25 - 1}} = 0.0113$$

二是用逐差法中的量计算：

这个也是二乘法的数据的标准差计算，请问数据用的是50个吗？

$$S_b = \frac{S_y}{\sqrt{\Sigma(x_i - x)^2}} = 0.00123$$

（S_y可用Excel中的STDEVP函数求。）

三是用参考文献[1] 中的式子，也是课程讲义中给过的式子计算：

这说明用直线拟合的标准差更小，求出来的b更为精准。

$$S_b = b\sqrt{\frac{r^{-2} - 1}{n - 2}} = -0.000126$$

（标准差应该是非负数，因此这里的式子至少应该给可能是负数的斜率b加上绝对值。）

三种方法计算得到的结果均不相等，但由于本人统计学知识所限最后也没有找出原因。

你线性回归用了几个数据？25个还是50个？
25个的标准差要大于50个的。

很仔细，具体的系级需要再跟老师和助教们沟通。非常谢谢你

References

[1] 钱钟泰. 用相关系数表示线性回归系数的标准差. 计量学报, (01):71–72, 1993.

原始数据

Table 1: 最小阻尼下的振幅与周期

序号i	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13
$\theta_i/°$	159	158	157	155	154	153	152	151	149	148	147	146	145
$\theta_{i+25}/°$	130	129	128	127	126	124	122	122	120	119	118	117	116
$ln\theta_i/°$													
$ln\theta_{i+25}/°$													
序号i	14	15	16	17	18	19	20	21	22	23	24	25	
$\theta_i/°$	143	142	141	141	140	138	138	136	135	134	132	132	
$\theta_{i+25}/°$	115	114	113	112	111	110	109	108	108	106	106	104	
$ln\theta_i/°$													
$ln\theta_{i+25}/°$													

i	1-10	11-20	21-30	31-40	41-50
$10\overline{T_d}/s$	15.333	15.356	15.379	15.400	15.420

3.2.1 其它阻尼

Table 2: 阻尼为“1”下的振幅与周期

序号i	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12
$\theta_i/°$	147	135	124	114	105	97	89	82	75	69	63	58
$ln\theta_i/°$												

i	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12
T_{di}/s	1.534	1.536	1.538	1.540	1.541	1.544	1.545	1.546	1.548	1.548	1.549	1.549

阻尼为“3”下的振幅与周期

序号i	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12
T_{di}/s	1.533	1.537	1.542	1.545	1.548	1.551	1.552	1.554	1.555	1.557	1.547	1.554
$\theta_i/°$	155	132	113	96	82	70	60	51	44	37	31	26

宋飞
10.9.

Table 3: 阻尼为"2"下的振幅与周期

序号i	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12
$\theta_i/°$	163	143	126	110	97	85	74	65	57	50	44	38
$ln\theta_i/°$												

i	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12
T_{d_i}/s	1.534	1.537	1.540	1.543	1.545	1.548	1.549	1.550	1.551	1.552	1.552	1.554

Table 4: 阻尼为"1"下受迫振动的数据 ω_0 =

i	振幅$\theta_m/°$	受迫周期 T/s	相位差ϕ	ω/ω_0	ϕ_{thoery}	$\frac{\phi-\phi_{thoery}}{\phi_{theory}}$	φ_1	φ_2
1	1[illegible]	1.335					176.5	166.5
2	20	1.416					172	166
3	35	1.470					168	165
4	53	1.497					162	160
5	76	1.511					154	153
6	81	1.513					153	151
7	86	1.514					150	149
8	96	1.517					147	146
9	106	1.519					143	144
10	147	1.524					119.5	119
11	171	1.528					109	109
12	174	1.531 √					91.5	91 √
13	173	1.530					97.5	97
14	174	1.533					84	85
15	15[illegible]	1.545					62	63
16	142	1.551					55	55
17	122	1.561					44	45
18	89	1.582					30	32
19	65	1.604					21	22
20	33	1.669					11	14

4

宋飞 . 10.9.

Scanned with CamScanner

此法测出ω_0 =?，与之前结果?相比相对偏差为?。

Table 5: 阻尼为"2"下受迫振动的数据 ω_0 =?

i	振幅$\theta_m/°$	受迫周期 T/s	相位差ϕ	ω/ω_0	ϕ_{thoery}	$\frac{\phi-\phi_{thoery}}{\phi_{theory}}$	φ_1	φ_2
1	14	1.346					165	174.
2	51	1.497					150	153
3	72	1.516					147	148
4	94	1.530					111.5	112.5
5	108	1.540					107	108
6	109	1.544 ✓					88	89 ✓
7	108	1.548					81	82
8	104	1.554					72	73
9	94	1.564					60	62
10	82	1.576					50	51
11	72	1.587					41	43
12	46	1.628					23	26
13	39	1.645					20	23.
14								
15								
16								
17								
18								
19								
20								

此法测出ω_0 =?，与之前结果?相比相对偏差为?。

宋飞
10.9

5

ω_0 =?时：

Table 6 阻尼为"3"下受迫振动的数据

i	振幅$\theta_m/°$	受迫周期 T/s	相位差ϕ	ω/ω_0	ϕ_{thoery}	$\frac{\phi-\phi_{thoery}}{\phi_{thoery}}$	φ_1	φ_2
1	11	1.340					172	163
2	42	1.492					148	150
3	60	1.516					134	135
4	78	1.533					110	112
5	83	1.538					104	105
6	85	1.544					96	97
7	86	1.549					89	90
8	86	1.553					84	84
9	84	1.558					75	76
10	74	1.573					59.5	60.5
11	64	1.588					45	47
12	47	1.616					33	35
13	34	1.650					23	26
14								
15								
16								
17								
18								
19								
20								

此法测出ω_0 =?，与之前结果?相比相对偏差为?。

宋泽
109.

8