第二次习题课

数值分析

May 8, 2019

讲解内容

- week6: 第三章练习题 16, 18, 第四章练习题 1, 2, 3, 4, 5
- week7: 第四章练习题 6, 7, 8, 10，第五章练习题 1, 2, 4
- week9: 第五章练习题 6, 7, 9, 12, 13, 14, 15

第三章习题 16

- 用追赶法解三对角方程组 $Ax=b$，其中

$$A=\begin{bmatrix} 2 & -1 & 0 & 0 & 0 \\ -1 & 2 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 2 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 2 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & -1 & 2 \end{bmatrix}, b=\begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}.$$

第三章习题 16

- 对三对角矩阵进行 LU 分解得:

$$L = \begin{bmatrix} 1 & & & & \\ -\frac{1}{2} & 1 & & & \\ & -\frac{2}{3} & 1 & & \\ & & -\frac{3}{4} & 1 & \\ & & & -\frac{4}{5} & 1 \end{bmatrix}, U = \begin{bmatrix} 2 & -1 & & & \\ & \frac{3}{2} & -1 & & \\ & & \frac{4}{3} & -1 & \\ & & & \frac{5}{4} & -1 \\ & & & & \frac{6}{5} \end{bmatrix},$$

- 即有 $LUX = b$
- 由 $LY = b$ 解得 $Y = [1, \frac{1}{2}, \frac{1}{3}, \frac{1}{4}, \frac{1}{5}]^T$
- 又由 $UX = Y$ 解得 $X = [\frac{5}{6}, \frac{2}{3}, \frac{1}{2}, \frac{1}{3}, \frac{1}{6}]^T$

第三章习题 18

- 设矩阵 $A \in \mathbb{R}^{n\times n}$ 按列严格对角占优，试证明:
  1. 对矩阵 A 做部分主元高斯消去时，不需要交换行，即假设经过 $k-1$ 步消去后矩阵 A 变为 $A^{(k)} = \left(a_{ij}^{(k)}\right)_{n\times n}, (k = 1, 2, \ldots, n-1)$，则
  $$|a_{kk}^{(k)}| > a_{sk}^{(k)}, (s > k).$$
  2. 矩阵 A 非奇异。

第三章习题 18

- 证明：
  1. 证明约化后的子矩阵仍是严格列对角占优。按照归纳法，初始显然成立，为方便起见，证明第一步消去后的结果，而 k 到 $k+1$ 的归纳完全类似：

$$a'_{ij} = a_{ij} - \frac{a_{i1}}{a_{11}} a_{1j},$$

$$\text{从而 } |a'_{jj}| = |a_{jj} - \frac{a_{j1}}{a_{11}} a_{1j}| \geq |a_{jj}| - \frac{|a_{j1}|}{|a_{11}|} |a_{1j}|,$$

$$\sum_{k\geq 2, k\neq j} |a'_{kj}| = \sum_{k\geq 2, k\neq j} |a_{kj} - \frac{a_{k1}}{a_{11}} a_{1j}|$$

$$\leq \sum_{k\geq 2, k\neq j} (|a_{kj}| + \frac{|a_{k1}|}{|a_{11}|} |a_{1j}|).$$

第三章习题 18

- 所以

$$
\begin{aligned}
&|a'_{jj}| - \sum_{k\geq 2, k\neq j} |a'_{kj}| \\
\geq &|a_{jj}| - \frac{|a_{j1}|}{|a_{11}|}|a_{1j}| - \sum_{k\geq 2, k\neq j} \left(|a_{kj}| + \frac{|a_{k1}|}{|a_{11}|}|a_{1j}|\right) \\
= &|a_{jj}| - \sum_{k\geq 2, k\neq j} |a_{kj}| - |a_{1j}| \sum_{k\geq 2} \frac{|a_{k1}|}{|a_{11}|} \\
= &|a_{jj}| - \sum_{k\geq 1, k\neq j} |a_{kj}| + \frac{|a_{1j}|}{|a_{11}|}\left(|a_{11}| - \sum_{k>1} |a_{k1}|\right) \\
> &0.
\end{aligned}
$$

第三章习题 18

- 2. 由第一问可以看出各个 $|A_{kk}^{(k)}| > 0$，即 U 上三角且对角不为 0，而 L 为单位下三角，则必有 A 非奇异。

第四章习题 1

- 求证 $\lim_{k\to\infty} A_k = A$ 的充要条件是对任何向量 x 都有

$$\lim_{k\to\infty} A_k x = Ax.$$

- 证明：充分性只要选取合适的向量 x，必要性证明可以利用范数的性质。

第四章习题 1

- 充分性：取 $x_i = [0, \ldots, 0, 1, 0, \ldots, 0]^T$，其中第 i 个元素是 1，则
$$A_k x_i = [a_{1i}^k, a_{2i}^k, \ldots, a_{ni}^k]^T \to Ax_i,$$
而
$$A_k x_i = [a_{1i}, a_{2i}, \ldots, a_{ni}]^T,$$
故 $a_{ji}^{(k)} \to a_{ji}, j = 1, 2, \ldots, n.$
将 i 从 1 取到 n，就能证明 $A_k \to A$。

第四章习题 1

- 必要性：由 $\lim_{k\to\infty} A_k = A$，得 $\lim_{k\to\infty} a_{ij}^{(k)} = a_{ij}$，有
$$\|A_k - A\| \to 0.$$
$\forall x \in \mathbb{R}^n$，有
$$\|A_k x - Ax\| \le \|A_k - A\| \|x\| \to 0,$$
即
$$A_k x \to Ax.$$

第四章习题 2

- 设有方程组 $Ax = b$，其中 A 为实对称正定矩阵，试证明当 $0 < \omega < \frac{2}{\beta}(\beta \geq \rho(A))$ 时迭代法 $x^{(k+1)} = x^{(k)} + \omega(b - Ax^{(k)}), k = 0, 1, 2, \ldots$ 收敛。
- 证明：
$x^{(k+1)} = x^{(k)} + \omega(b - Ax^{(k)}), k = 0, 1, 2, \ldots = (I - \omega A)x^{(k)} + \omega b$
由 A 对称正定，所以 $\lambda(A) > 0$，且 $I - \omega A$ 也是对称的，所以

$$\lambda(I - \omega A) < 1,$$

$$\lambda(I - \omega A) > 1 - \frac{2}{\beta}\lambda(A) \geq 1 - \frac{2}{\rho(A)}\lambda(A) > -1.$$

所以谱半径 $\rho(I - \omega A) < 1$, 所以迭代法收敛。

第四章习题 3

- 方程组
$$\begin{cases} 5x_1 + 2x_2 + x_3 = -12 \\ -x_1 + 4x_2 + 2x_3 = 20 \\ 2x_1 - 3x_2 + 10x_3 = 3 \end{cases}.$$

  1. 考察 Jacobi，G-S 迭代法解此方程组的收敛性。
  2. 取初始值为 $[0,0,0]^T$，用 Jacobi 迭代法及 G-S 迭代法解此方程组，要求当 $\|x^{(k+1)} - x^{(k)}\|_\infty < 10^{-2}$ 时终止迭代。

第四章习题 3

- 解:
  1. A 矩阵严格对角占优，故 Jacobi 及 G-S 都收敛。
  2. Jacobi 迭代公式:

$$\left\{\begin{array}{l} x_1^{(k+1)} = -\frac{2}{5}x_2^{(k)} - \frac{1}{5}x_3^{(k)} - \frac{12}{5} \\ x_2^{(k+1)} = \frac{1}{4}x_1^{(k)} - \frac{1}{2}x_3^{(k)} + 5 \\ x_3^{(k+1)} = -\frac{1}{5}x_1^{(k)} + \frac{3}{10}x_2^{(k)} + \frac{3}{10} \end{array}\right. .$$

  G-S 迭代公式:

$$\left\{\begin{array}{l} x_1^{(k+1)} = -\frac{2}{5}x_2^{(k)} - \frac{1}{5}x_3^{(k)} - \frac{12}{5} \\ x_2^{(k+1)} = \frac{1}{4}x_1^{(k+1)} - \frac{1}{2}x_3^{(k)} + 5 \\ x_3^{(k+1)} = -\frac{1}{5}x_1^{(k+1)} + \frac{3}{10}x_2^{(k+1)} + \frac{3}{10} \end{array}\right. .$$

第四章习题 3

- Jacobi 迭代 11 次收敛。

$$x = [-4.00024206, 3.00312926, 1.99986178]^T.$$

- G-S 迭代 6 次收敛。

$$x = [-3.99931398, 3.00000274, 1.99986361]^T.$$

第四章习题 4

- 用 SOR 法解方程组 ($\omega = 0.9$，初始值为 $[0,0,0]^T$)

$$\begin{cases} 5x_1 + 2x_2 + x_3 = -12 \\ -x_1 + 4x_2 + 2x_3 = 20 \\ 2x_1 - 3x_2 + 10x_3 = 3 \end{cases} .$$

当 $\|x^{(k+1)} - x^{(k)}\|_\infty < 10^{-2}$ 时终止迭代。

第四章习题 4

- SOR 迭代公式：

$$\begin{cases} x_1^{(k+1)} = (1-\omega)x_1^{(k)} + \omega(-\frac{2}{5}x_2^{(k)} - \frac{1}{5}x_3^{(k)} - \frac{12}{5}) \\ x_2^{(k+1)} = (1-\omega)x_2^{(k)} + \omega(\frac{1}{4}x_1^{(k)} - \frac{1}{2}x_3^{(k)} + 5) \\ x_3^{(k+1)} = (1-\omega)x_3^{(k)} + \omega(-\frac{1}{5}x_1^{(k)} + \frac{3}{10}x_2^{(k)} + \frac{3}{10}) \end{cases}.$$

- 迭代 6 次

$$x = [-3.99956852 \ 3.00038707 \ 1.99996303]^T.$$

第四章习题 5

- 基于高斯-赛德尔迭代法可得到一种新的迭代法。在第 k 步迭代中（$k = 0, 1, \ldots$），先由高斯-赛德尔迭代公式根据 $x^{(k)}$ 算出 $\tilde{x}^{(k)}$，然后将分量的更新顺序改为从 n 到 1，类似地，再计算一遍根据 $\tilde{x}^{(k)}$ 得到 $x^{(k+1)}$。这种迭代法称为对称高斯-赛德尔（SGS）方法。试推导 SGS 方法的迭代计算公式，并证明它也属于分裂法，且当矩阵 A 对称时矩阵 M 也是对称的。

第四章习题 5

- 证明：按 G-S 迭代法的公式写出 SGS 的前半部分：

$$\tilde{x}^{(k)} = (D-L)^{-1}Ux^{(k)} + (D-L)^{-1}b.$$

交换 L 和 U，就能得到 SGS 的后半部分：

$$x^{(k+1)} = (D-U)^{-1}L\tilde{x}^{(k)} + (D-U)^{-1}b.$$

因此 SGS 的迭代公式为：

$$\begin{aligned} x^{(k+1)} &= (D-U)^{-1}L(D-L)^{-1}Ux^{(k)} + (D-U)^{-1}[L(D-L)^{-1} + I]b \\ &= (D-U)^{-1}L(D-L)^{-1}Ux^{(k)} + (D-U)^{-1}D(D-L)^{-1}b. \end{aligned}$$

第四章习题 5

- 令
$$M^{-1} = (D-U)^{-1}D(D-L)^{-1}, N = (D-L)D^{-1}L(D-L)^{-1}U,$$
可验证 $M - N = D - L - U = A$，是分裂法。考虑 A 的对称性，$L = U^T$，则
$$M = (D-L)D^{-1}(D-L^T),$$
且
$$M^T = (D-L^T)^T D^{-T}(D-L)^T = (D-L)D^{-1}(D-L^T) = M,$$
即 M 对称。

第四章习题 6

- 考虑线性代数方程组 $Ax = b$；其中

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 0 & \alpha \\ 0 & 1 & 0 \\ \alpha & 0 & 1 \end{bmatrix}.$$

1. α 为何值时，A 是正定的?
2. α 为何值时，雅可比迭代收敛?
3. α 为何值时，G-S 迭代收敛?

第四章习题 6

- 解：
  1. 矩阵正定要求顺序主子式都大于 0，$\det(A) = 1 - \alpha^2 > 0$ 从而有 $|\alpha| < 1$。
     （要求 A 是正定的，必然有 A 是 Hermite 的，所以 α 必然是实的）
  2. Jacobi 迭代法收敛充要条件为 A 正定且 $2D - A$ 正定

     $$2D - A = \begin{bmatrix} 1 & 0 & -\alpha \\ 0 & 1 & 0 \\ -\alpha & 0 & 1 \end{bmatrix}.$$

     有 $\det(2D - A) = 1 - \alpha^2 > 0$，综合 1 中条件，得 $|\alpha| < 1$。

第四章习题 6

- 3. Jacobi 迭代法的迭代矩阵为:

$$B=\begin{bmatrix} 0 & 0 & -\alpha \\ 0 & 0 & 0 \\ -\alpha & 0 & 0 \end{bmatrix}.$$

G-S 迭代法收敛只需要 $\|B\|_\infty < 1$，所以 $|\alpha| < 1$。

第四章习题 7

- 证明若矩阵 A 对称，且主对角线元素 $a_{ii} > 0$。则求解线性方程组 $Ax = b$ 时采用雅克比迭代法收敛的充分必要条件是 A 和 $2D - A$ 都正定。D 为 A 主对角线元素构成的对角阵。证明必要性。
- 证明：对 Jacobi 迭代阵 B，一方面有
  $B = D^{-\frac{1}{2}}(I - D^{-\frac{1}{2}}AD^{-\frac{1}{2}})D^{\frac{1}{2}}$，由 $\rho(B) < 1$，知
  $\rho(I - D^{-\frac{1}{2}}AD^{-\frac{1}{2}}) < 1$，所以 $\lambda(D^{-\frac{1}{2}}AD^{-\frac{1}{2}}) > 0$，又
  $D^{-\frac{1}{2}}AD^{-\frac{1}{2}}$ 对称，所以 $D^{-\frac{1}{2}}AD^{-\frac{1}{2}}$ 对称正定，所以 A 对称正定。
  另一方面，$B = D^{-\frac{1}{2}}(D^{-\frac{1}{2}}(2D - A)D^{-\frac{1}{2}} - I)D^{\frac{1}{2}}$，同理
  $D^{-\frac{1}{2}}(2D - A)D^{-\frac{1}{2}}$ 对称正定，所以 $2D - A$ 对称正定。

第四章习题 8

- 对雅可比方法引进迭代参数 $\omega > 0$，即

$$x^{(k+1)} = x^{(k)} - \omega D^{-1}(Ax^{(k)} - b),$$

或者

$$x^{(k+1)} = (I - \omega D^{-1}A)x^{(k)} + \omega D^{-1}b,$$

成为雅可比松弛法（JOR）。证明雅可比方法求解 $Ax = b$ 收敛时，如果 $0 < \omega \leq 1$，则 JOR 也收敛。

第四章习题 8

- 证明：对 Jacobi 迭代阵 $B = D^{-1}(D - A) = I - D^{-1}A$，有 $D^{-1}A = I - B$，故
  $B_J = I - \omega D^{-1}A = I - \omega(I - B) = (1-\omega)I + \omega B$。
  所以 $\lambda(B_J) = (1-\omega) + \omega\lambda(B)$，
  所以 $|\lambda(B_J)| = |(1-\omega) + \omega\lambda(B)| \leq |1-\omega| + |\omega||\lambda(B)|$，
  所以 $\rho(B_J) \leq |1-\omega| + |\omega|\rho(B)$。
  当 Jacobi 迭代收敛即 $\rho(B) < 1$，并且有 $0 < \omega \leq 1$ 时，$\rho(B_J)$ 小于 1，JOR 收敛。

第四章习题 10

- 设矩阵 A 为实对称正定阵，x^* 为方程 $Ax = b$ 的解，试证明 x^* 为 $\varphi(x) = \frac{1}{2}x^T Ax - b^T x$ 的唯一最小值点，即对 $\forall x \in \mathbb{R}^n, x \neq x^*$，$\varphi(x) > \varphi(x^*)$.
- 证明：令 $x = x^* + y$,

$$\begin{aligned}
\varphi(x^* + y) &= \frac{1}{2}(x^* + y)^T A(x^* + y) - b^T(x^* + y) \\
&= \frac{1}{2}(x^{*T}Ax^* + y^T Ax^* + x^{*T}Ay + y^T Ay) - b^T x^* - b^T y \\
&= \frac{1}{2}x^{*T}Ax^* - b^T x^* + \frac{1}{2}(y^T b + b^T y + y^T Ay) - b^T y \\
&= \varphi(x^*) + \frac{1}{2}y^T Ay
\end{aligned}$$

由于 A 对称正定，$\frac{1}{2}y^T Ay \geq 0$，所以 x^* 为唯一最小点。

第四章习题 10

- 或者：由于 A 对称正定，梯度向量只在 x^* 处等于零。

$$\nabla\varphi(x) = Ax - b = 0$$

二阶导数雅可比行列式 A 正定，极小值判定准则成立。

第五章习题 1

- 设 $A=\begin{bmatrix} A_{11} & A_{12} \\ 0 & A_{22} \end{bmatrix}$，其中 A_{11} 为 3×3 矩阵，A_{22} 为 2×2 矩阵，又设 λ_j 为 A_{11} 的特征值，$x_j=(\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3)^T$ 为对应的特征向量，λ_k 为 A_{22} 的特征值，$y_k=(\beta_1,\beta_2)^T$ 为对应的特征向量，试证明：
  1. λ_1,λ_k 为 A 的特征值。
  2. $x_j'=(\alpha_1\alpha_2,\alpha_3,0,0)^T$ 为矩阵 A 对应 λ_j 的特征向量。

第五章习题 1

- 证明：
  1. A 的特征方程：$\det(tI-A) = -\det(tI_3-A_{11})\det(tI_2-A_{22})$，
     所以 $\det(\lambda_j I-A) = \det(\lambda_j I_3-A_{11})\det(\lambda_j I_2-A_{22}) = 0$，
     $\det(\lambda_k I-A) = \det(\lambda_k I_3-A_{11})\det(\lambda_k I_2-A_{22}) = 0$。
  2. $Ax_j' = \begin{bmatrix} A_{11}x_j \\ 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \lambda_j x_j \\ 0 \end{bmatrix} = \lambda_j \begin{bmatrix} x_j \\ 0 \end{bmatrix} = \lambda_j x_j'$

第五章习题 2

- 使用圆盘定理估计矩阵 $A = \begin{bmatrix} 0.5 & -0.6 & 0.6 \\ 1 & -1.2 & -0.8 \\ 0 & -0.6 & 3 \end{bmatrix}$ 的 $\rho(A)$ 和 $\mathrm{cond}_2(A)$。
- 解：根据圆盘定理，三个特征值的取值范围：

  $D1 : |\lambda - 0.5| \leq 1.2,\ \ D2 : |\lambda + 1.2| \leq 1.8,\ \ D3 : |\lambda - 3| \leq 0.6,$

  再对 A^T 用圆盘定理，

  $D4 : |\lambda - 0.5| \leq 1,\ \ D5 : |\lambda + 1.2| \leq 1.2,\ \ D6 : |\lambda - 3| \leq 1.4,$

  综合分析得到 $\rho(A) \in [2.4, 3.6]$。

第五章习题 2

- $$A^TA=\begin{bmatrix} 1.25 & -1.5 & -0.5 \\ -1.5 & 2.16 & -1.2 \\ -0.5 & -1.2 & 10 \end{bmatrix}.$$

  特征值位于

  $D1:|\lambda-1.25|\le 2,\ \ D2:|\lambda+2.16|\le 2.7,\ \ D3:|\lambda-10|\le 1.7,$

  由于特征值均为实数，所以位于区间：
  $[-0.75,3.25],[-0.54,4.86],[8.3,11.7]$（实际不能取负值）。分析可知

  $$\text{cond}_2(A)=\sqrt{\frac{\lambda_{\max}(A_TA)}{\lambda_{\min}(A_TA)}}\ge\sqrt{\frac{8.3}{4.86}}.$$

第五章习题 4

- 用幂法计算下列矩阵的主特征值及对应的特征向量:

$$A = \begin{bmatrix} 7 & 3 & -2 \\ 3 & 4 & -1 \\ -2 & -1 & 3 \end{bmatrix}.$$

  当特征值有 3 位有效小数稳定时迭代终止。

- 取初始向量为 $u^{(0)} = [1, 0, 0]^T$，经过 8 次迭代满足精度要求，此时

$$\mu_8 = 9.6055, u_8 = [1, 0.6055, -0.3944]^T.$$

  所以矩阵 A 的主特征值为 $\lambda_1 = 9.6055$，其对应的特征向量为 $x_1 = [1, 0.6055, -0.3944]^T$。注意归一化。

第五章习题 6

- 利用反幂法求矩阵

$$A=\begin{bmatrix} 6 & 2 & 1 \\ 2 & 3 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \end{bmatrix}.$$

  的最接近于 7 的特征值及对应的特征向量。
- 解：幂法用来计算矩阵按模计算最大的特征值及其特征向量，而反幂法用来计算矩阵按模计算最小的特征值及其特征向量。本题要求最接近于 7 的特征值，所以根据矩阵特征值的性质，只需要先让原矩阵平移 7 个单位，这样就把题目转化为求平移后的矩阵按模计算的最小特征值的问题。

第五章习题 6

▶

$$A = \begin{bmatrix} 6 & 2 & 1 \\ 2 & 3 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \end{bmatrix}, B = A - 7I = \begin{bmatrix} -1 & 2 & 1 \\ 2 & -4 & 1 \\ 1 & 1 & -6 \end{bmatrix}.$$

对 B 进行部分选主元的三角分解 $PB = LU$，并利用算法

$$\begin{cases} Ly_k = Pu_{k-1} \\ Uv_k = y_k \\ \mu_k = \max(v_k) \\ u_k = \frac{v_k}{\mu_k} \end{cases}$$

可解得与 7 最接近特征值为 $\lambda = 7.2880$

第五章习题 7

- 试用 Householder 变换对矩阵 A 做 QR 分解，求出矩阵 Q 和 R。

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 2 & -1 & -1 \\ 2 & -4 & 5 \end{bmatrix}.$$

- 解：根据算法 5.3，对矩阵 A 做 QR 分解得

$$Q = \begin{bmatrix} -0.3333 & -0.6667 & -0.6667 \\ -0.6667 & -0.3333 & 0.6667 \\ -0.6667 & 0.6667 & -0.3333 \end{bmatrix},$$

$$R = \begin{bmatrix} -3 & 3 & -3 \\ 0 & -3 & 3 \\ 0 & 0 & -3 \end{bmatrix}.$$

第五章习题 9

- 利用一系列 Givens 旋转变换将矩阵

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ -1 & 1 & 0 \\ -1 & 0 & 1 \\ 0 & -1 & 1 \end{bmatrix}$$

化为上三角矩阵，将结果与例 5.11 的结果做比较。

第五章习题 9

- 解:

$$R = \begin{bmatrix} \sqrt{3} & -\frac{\sqrt{3}}{3} & -\frac{\sqrt{3}}{3} \\ 0 & \frac{2\sqrt{6}}{3} & -\frac{\sqrt{6}}{3} \\ 0 & 0 & \sqrt{2} \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}.$$

  与例 5.11 结果相差一个符号。
- 注意计算过程较繁琐。

第五章习题 12

- 利用 Householder 变换将

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 3 & 4 \\ 3 & 1 & 2 \\ 4 & 2 & 1 \end{bmatrix}$$

正交相似化为对称三对角阵。

第五章习题 12

- 解：记 $x=[3,4]^T$，则 $\sigma=\|x\|_2=5$， $u=x+\sigma e=[8,4]^T$，$\beta=\frac{1}{2}\|u\|_2^2=40$，

$$H_1=I-\beta^{-1}uu^T=\begin{bmatrix} -\frac{3}{5} & -\frac{4}{5} \\ -\frac{4}{5} & \frac{3}{5} \end{bmatrix},$$

$$H=\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & H_1 \end{bmatrix}=\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & -\frac{3}{5} & -\frac{4}{5} \\ 0 & -\frac{4}{5} & \frac{3}{5} \end{bmatrix}.$$

利用 H 对 A 做正交相似化可得

$$H^TAH=\begin{bmatrix} 1 & -5 & 0 \\ -5 & \frac{73}{25} & \frac{14}{25} \\ 0 & \frac{14}{25} & -\frac{23}{25} \end{bmatrix}.$$

第五章习题 13

- 假设构造 Householder 变换矩阵 H 将矩阵 A 正交相似变换为
$$HAH^T = \begin{bmatrix} \lambda_1 & r_1^T \\ 0 & A_1 \end{bmatrix},$$
其中 $A_1 \in \mathbb{R}^{(n-1)\times(n-1)}, r_1 \in \mathbb{R}^{(n-1)}$。设 λ_2 是 A_1 的一个特征值，$\lambda_2 \neq \lambda_1$，对应的特征向量为 y_2，试证明：
$$x_2 = H \begin{bmatrix} \alpha \\ y_2 \end{bmatrix}, \qquad 其中\ \alpha = \frac{r_1^T y_2}{\lambda_2 - \lambda_1}$$
是 A 的与 λ_2 对应的特征向量。

第五章习题 13

- 证明:

$$
\begin{aligned}
HAx_2 &= HAH\begin{bmatrix} \alpha \\ y_2 \end{bmatrix} \\
&= \begin{bmatrix} \lambda_1 & r_1^T \\ 0 & A_1 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} \alpha \\ y_2 \end{bmatrix} \\
&= \begin{bmatrix} \lambda_1\alpha + r_1^T y_2 \\ A_1 y_2 \end{bmatrix} \\
&= H\lambda_2 x_2.
\end{aligned}
$$

第五章习题 14

- 设 $n \times n$ 矩阵 A 为非亏损阵，设 $P(\lambda) = c_0 + c_1\lambda + \cdots + c_{n-1}\lambda^{n-1} + \lambda^n$ 是 A 的特征多项式，试证明：$P(A) = c_0 I + c_1 A + \cdots + c_{n-1}A^{n-1} + A^n = 0.$
- 证明：因为 A 非亏损，所以 A 可对角化，设特征值-特征向量对为 $(\lambda_1, x_1), (\lambda_2, x_2), \ldots, (\lambda_n, x_n)$，则必有 $x_1, x_2, \ldots, x_n$ 线性无关。因为有

$$\begin{aligned} P(A)x_i &= c_0 x_i + c_1 A x_i + \cdots + c_{n-1}A^{n-1}x_i + A^n x_i \\ &= c_0 x_i + c_1 \lambda_i x_i + \cdots + c_{n-1}\lambda_i^{n-1}x_i + \lambda_i^n x_i \\ &= (c_0 + c_1\lambda_i + \cdots + c_{n-1}\lambda_i^{n-1} + \lambda_i^n)x_i = 0 \end{aligned}$$

所以对任意 $x \in \mathrm{span}\{x_1, x_2, \ldots, x_n\}$，有 $P(A)x = 0$，所以 $P(A) = 0$。

第五章习题 15

- 将 $1 \sim n^2$ 的正整数填入 n 阶矩阵中，并使每行元素之和相等，每列元素之和相等，这样得到的矩阵成为 n 阶幻方矩阵。下列 3 阶幻方矩阵的主特征值是多少?

$$A = \begin{bmatrix} 8 & 1 & 6 \\ 3 & 5 & 7 \\ 4 & 9 & 2 \end{bmatrix}$$

一般的 n 阶幻方矩阵 A_n 的主特征值是多少?

第五章习题 15

- 解：

  1. 15
  2. 根据圆盘定理，主特征值不超过行和、列和 $\frac{n(n^2+1)}{2}$，而事实上，记 $e=(1,1,\ldots,1)^T$，有

  $$A_n e = \left(\ldots,\sum_j a_{ij},\ldots\right)^T = \left(\ldots,\frac{n(n^2+1)}{2},\ldots\right)^T = \frac{n(n^2+1)}{2}e,$$

  由此得到 $\frac{n(n^2+1)}{2}$ 为 A_n 的特征值，而且是主特征值。

谢谢！欢迎提问！