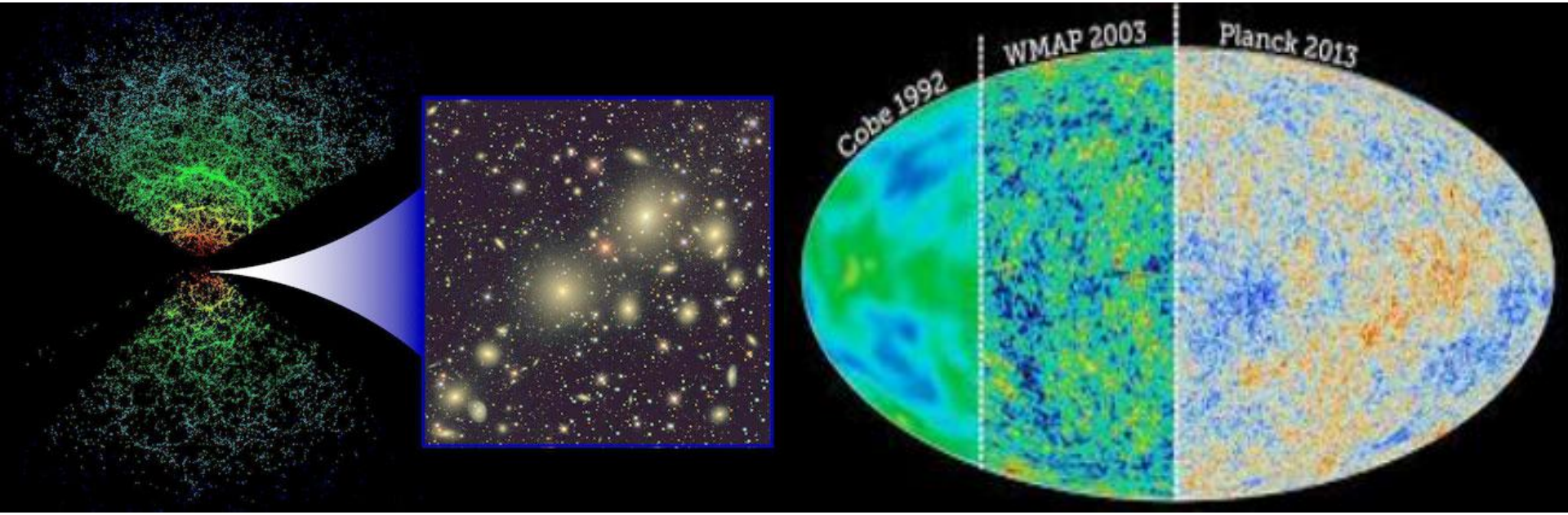
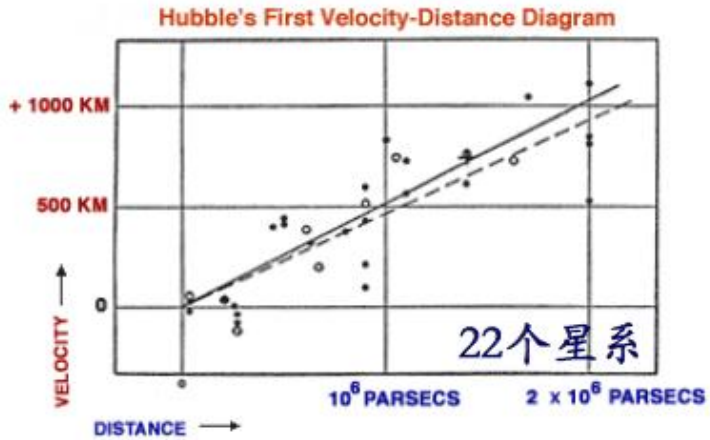


1.4 宇宙中的星系

1.4.1 哈勃–勒梅特定律

1929年， Hubble & Humason：

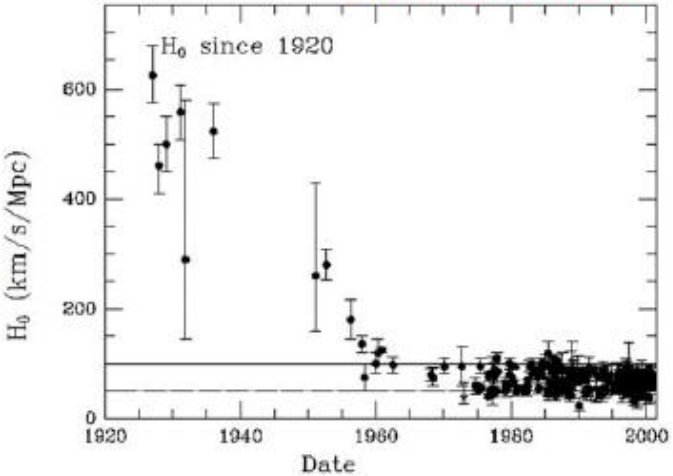
- 测量了不同星系的距离和红移
- 谱线红移，求得星系退行速度
- 哈勃定律：星系的退行速度（v）与星系距离（d）成正比。



$$v = H_0 \times d \quad \text{or} \quad d = \frac{v}{H_0}$$

velocity in km/s　Hubble constant　distance in Mpc

H_0：哈勃常数



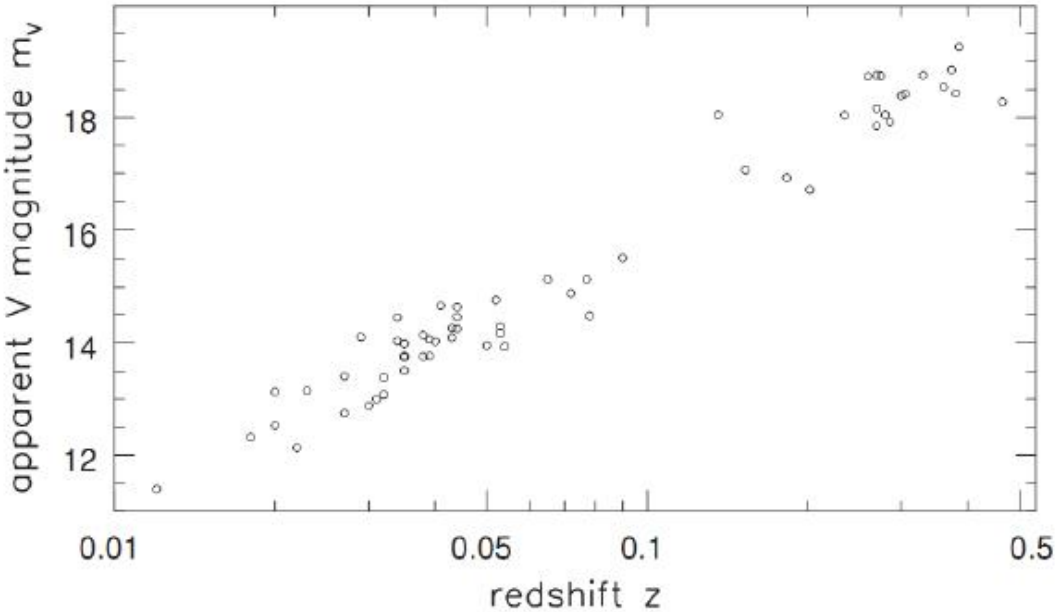
1929：哈勃给出的值 H_0=500 km/s/Mpc

2001：HST Key Project H_0=72±8 km/s/Mpc

2003：WMAP H_0=72 km/s/Mpc

2013：Planck H_0=67.80±0.77 km/s/Mpc

哈勃–勒梅特定律



富星系团中最亮星系有大致相同的光度（绝对星等）.

Fig. 1.17. Apparent magnitude in the V band for the brightest galaxies in rich galaxy clusters. The magnitude increases proportionally to the logarithm of the redshift z, as we expect if the galaxy's distance is proportional to its recession speed cz – data from J. E. Gunn and J. B. Oke 1975 *ApJ* **195**, 255.

富星系团中最亮星系的视星等与星系红移z的关系：绝对星等M相近，距离越远，视星等m越大：星系的距离正比于退行速度cz

距离测量–哈勃定律应用

We often use Hubble's law to estimate the distances of galaxies from their measured velocities. It is common to indicate the uncertainty in the Hubble constant explicitly, by writing h for the value of H_0 in units of $100\,\mathrm{km\,s^{-1}\,Mpc^{-1}}$. Then Equation 1.26 implies

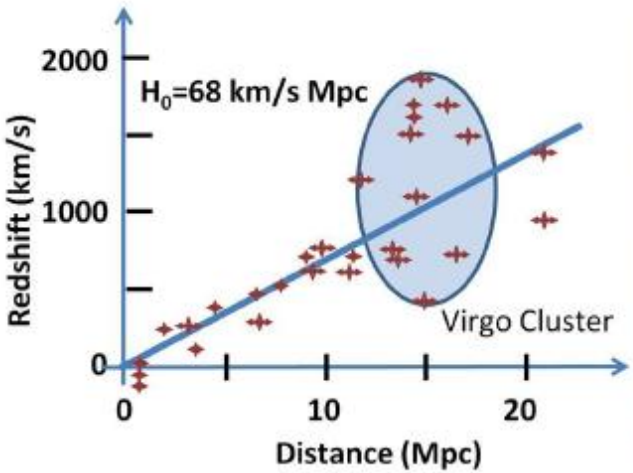
$$d = h^{-1}\left[V_r\,(\mathrm{km\,s^{-1}})/100\right]\ \mathrm{Mpc}. \tag{1.27}$$

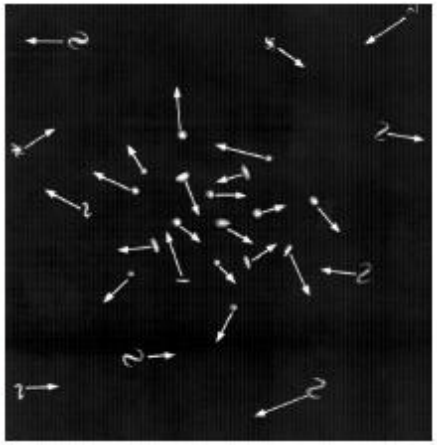
When the distance of a galaxy is found from its radial velocity V_r, the derived luminosity $L \propto h^{-2}$. This is why the parameter $L_\star$ of Equation 1.24 has a value proportional to h^{-2}; similarly, the density $n_\star \propto h^3$.

$$\Phi(L)\Delta L = n_\star \left(\frac{L}{L_\star}\right)^\alpha \exp\left(-\frac{L}{L_\star}\right)\frac{\Delta L}{L_\star}; \tag{1.24}$$

$h = H_0/100\mathrm{km/s/Mpc}$ H_0 =72 km/s/Mpc, 则 h=0.72

本动速度





- 本动速度：指的是一个物体相对于静止参考座标的真实速度.
- 在富团内，星系轨道运动产生的本动速度高达1500 km/s. 如不考虑本动速度，Eq.1.27求得星系的距离，比实际更近或更远.

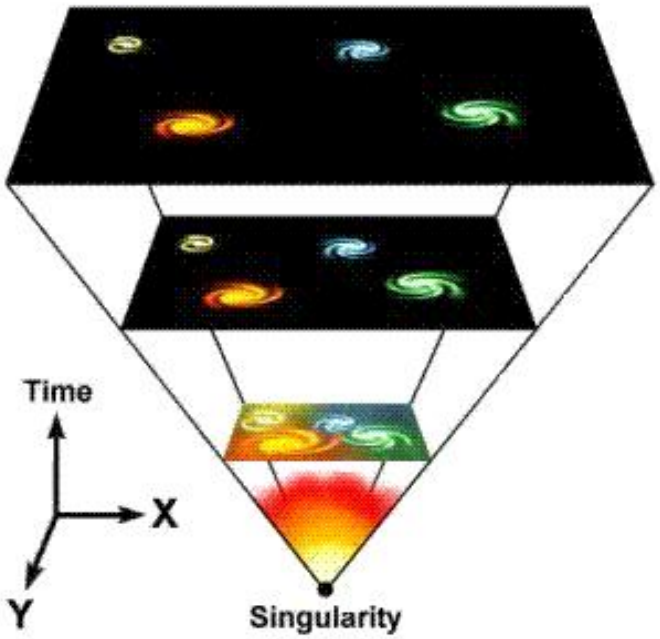
galaxy's measured radial velocity V_r has two components: the cosmic expansion, and a *peculiar velocity* V_{pec}. Equation 1.26 should be modified to read

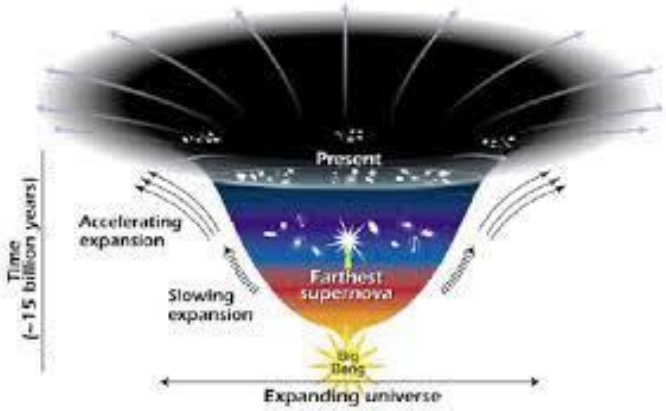
星系的视向速度 V_r 有两个分量：
宇宙膨胀 (H_0d) 和本动速度 V_{pec}

$$V_r = H_0 d + V_{pec}. \qquad (1.29)$$

膨胀宇宙

- 哈勃的发现，废除了永远静止的宇宙观：宇宙在不断的膨胀
- 如果目前所有的星系都在彼此远去，那么在有限的时间以前，这些天体必然聚集在一个极小的空间里
- 哈勃的发现，是大爆炸宇宙学理论最重要的观测基础





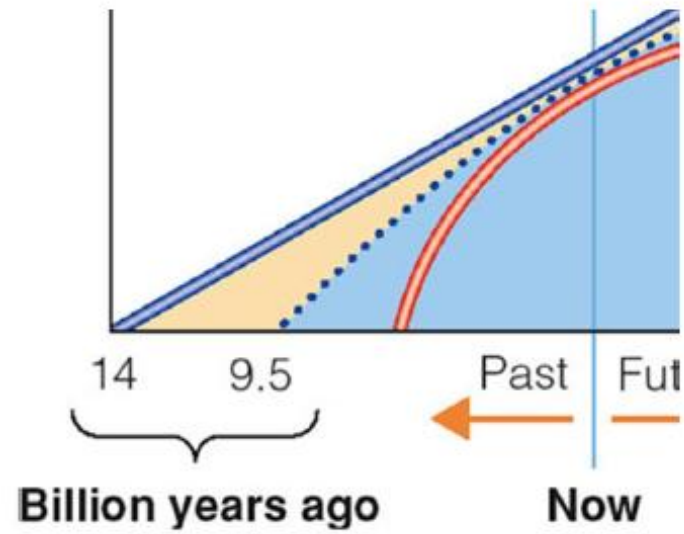
- 回溯时间：从宇宙现在时刻t_0倒退到宇宙较早时刻t所经历的时间$t_0 - t$

大爆炸宇宙学模型

- 1946年，伽莫夫提出大爆炸宇宙学猜想：宇宙起源于约100-150亿年前的一次猛烈巨大爆炸；早期是一个高温、高密演化阶段
- 1948年4月1日物理评论，R. Alpher(学生)、H. Bethe(朋友，汉斯·贝特)和G. Gamov：宇宙中绝大部分氦元素是由宇宙早期核反应产生($\alpha\beta\gamma$理论，轻元素丰度)
- 1948年，R. Alpher和R Herman（罗伯特·赫尔曼）更严格的分析：早期宇宙应该充满辐射，这一辐射遗迹至今还可以作为宇宙微波背景而被探测，温度T~ 5K (微波背景辐射)
- 1964年，罗伯特·迪克和詹姆斯·皮布尔斯的文章，再次预言宇宙微波背景的存在，温度T~3K（1965年，阿诺·彭齐亚斯和罗伯特·威尔逊观测发现）
- 稳恒态宇宙学创始人霍伊尔把这一理论戏称为“大爆炸”

哈勃时间——宇宙的年龄

- 如果星系的平均退行速度总是保持不变，它们在之前的t_H时刻一定是在一起(倒推)
- 宇宙的年龄取决于哈勃常数大小（H）及哈勃常数随时间的变化（t）
- 宇宙年龄：已知两个星系的退行速度v和这两个星系之间的距离d → 宇宙年龄 t = d/v
- $t = d/v = 1/H_0 = 1/70(km/s/Mpc) = 14 \times 10^9$ yrs = 14 Gyr.



If the average speeds of the galaxies had always remained constant, they would have been on top of each other at a time t_H before the present, where

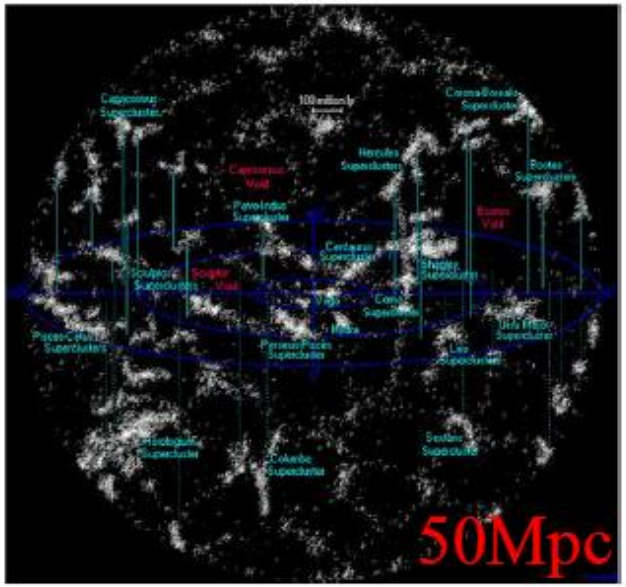
$$t_H = \frac{1}{H_0} = 9.78h^{-1}\,\text{Gyr} = 15\,\text{Gyr} \times \frac{67\,\text{km s}^{-1}\,\text{Mpc}^{-1}}{H_0}. \qquad (1.28)$$

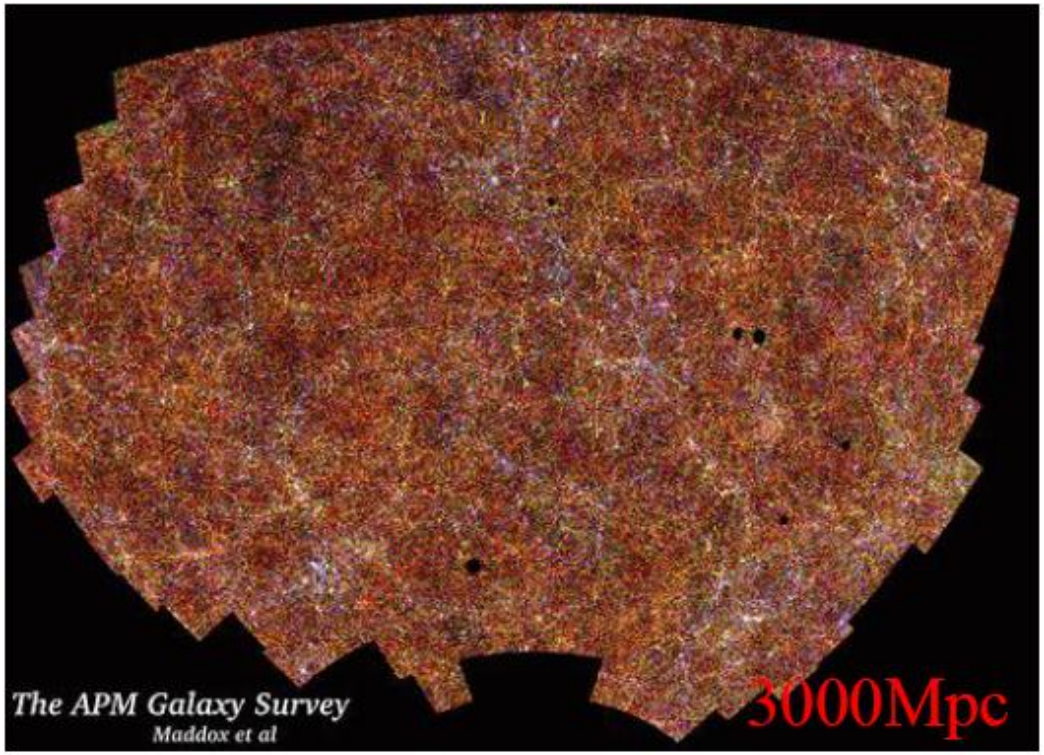
This is called the *Hubble time*; we can use it as a rough estimate of the age of the Universe, the time since the Big Bang.

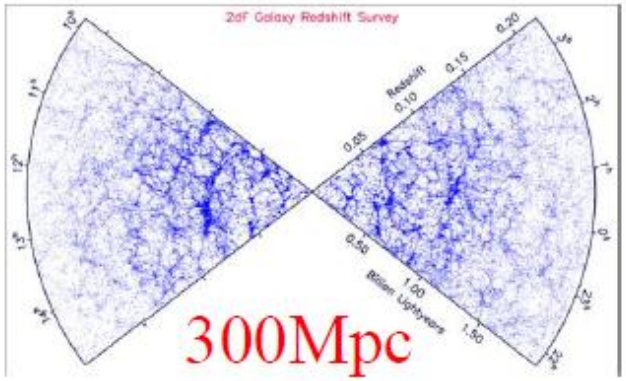
t_H：可以用它作为宇宙年龄，即自大爆炸以来时间，的粗略估计

没有考虑加速膨胀

宇宙大尺度结构







宇宙学原理：宇宙在大尺度上是均匀的和各向同性的。

1.4.2 密度和年龄

爱因斯坦场方程：引力场是一个弯曲的时空
宇宙学原理：在大尺度上是均匀和各向同性 → 宇宙学模型

1922年，俄国数学家A. Friedman求得引力场方程的均匀的和各向同性的通解：

$$H^2 = \left(\frac{\dot{R}}{R}\right)^2 = \frac{8\pi G}{3}\rho + \frac{\Lambda}{3} - \frac{k}{R^2}$$

宇宙的膨胀实际上由三项来共同驱动：物质项（M）、宇宙学常数项（暗能量、Λ）和曲率项（k）

定义宇宙密度参数：$\Omega_M = \rho/\rho_c$；$\Omega_\Lambda = \Lambda/(3H^2\rho_c)$；$\Omega_k = -k/(R^2 H^2)$

Friedman方程可以表示为：$1 = \Omega_M + \Omega_\Lambda + \Omega_k = \Omega_0 + \Omega_k$

定义宇宙临界密度（物质与能量平衡）：

$$\rho_c = 3H_0^2/(8\pi G) \approx 1.9 \times 10^{-29}\ h^2\ g/cm^3$$

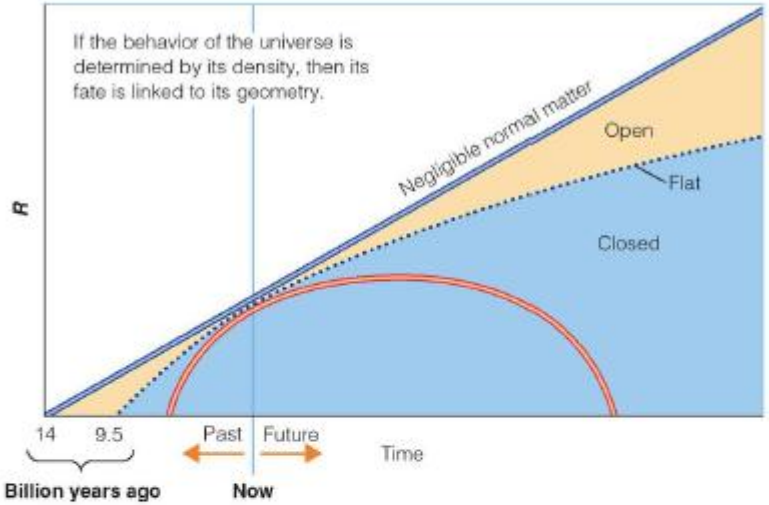
宇宙的未来

若不考虑暗能量(即$\Omega_\Lambda = 0$)：$1 = \Omega_M + \Omega_k$

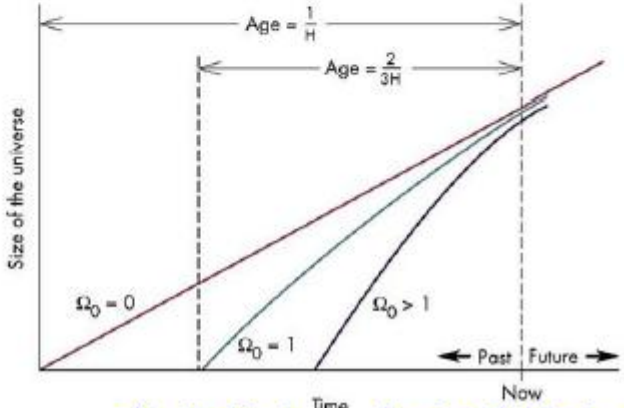
$\Omega_M > 1 \rightarrow \Omega_k < 0 \rightarrow k > 0$：正曲率空间，束缚宇宙，膨胀后收缩 →热死亡

$\Omega_M < 1 \rightarrow \Omega_k > 0 \rightarrow k < 0$：负曲率空间，开放的宇宙，无限膨胀 →冷死亡

$\Omega_M = 1 \rightarrow \Omega_k = 0 \rightarrow k = 0$：平直空间，宇宙无限膨胀 (临界$\rho = \rho_c$) →冷死亡



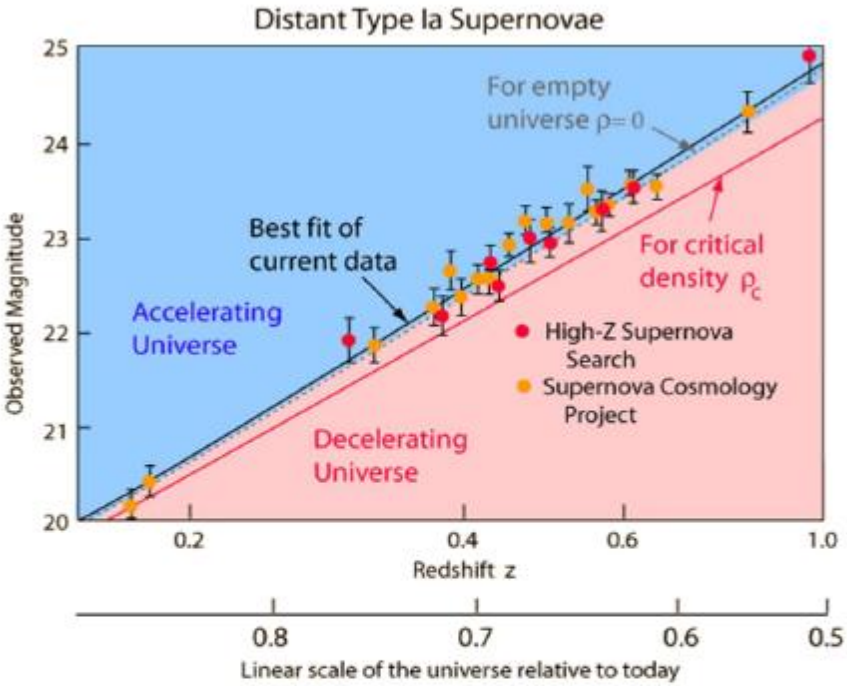
- 如果 $H_0 \approx 71$ km/s/Mpc
  - $\Omega_0 = 0$, v不随时间变化，$t = 1/H_0 \approx 14$ Gyr
  - $\Omega_0 = 1$, $t = 2/(3H_0) \approx 9$ Gyr
  - $\Omega_0 > 1$, $t < 9$ Gyr
- 宇宙加速膨胀发现之前，宇宙学面临严重危机：球状星团的年龄大于宇宙年龄

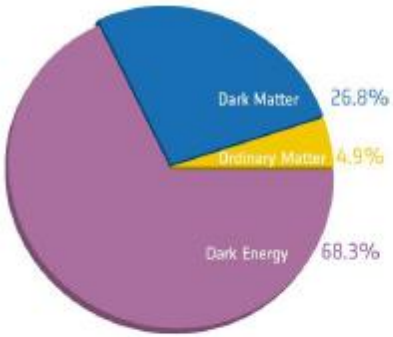


密度较小，宇宙则较老

暗能量

1998年，高红移SN项目，利用SN做为标准烛光，确定宇宙学常数不等于零

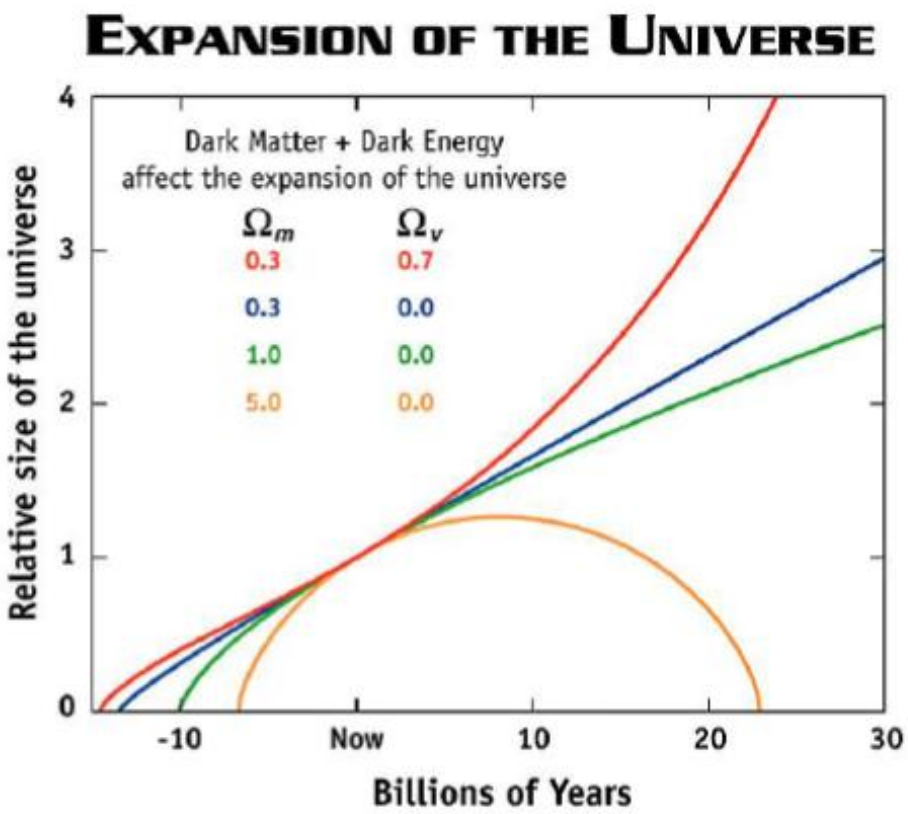


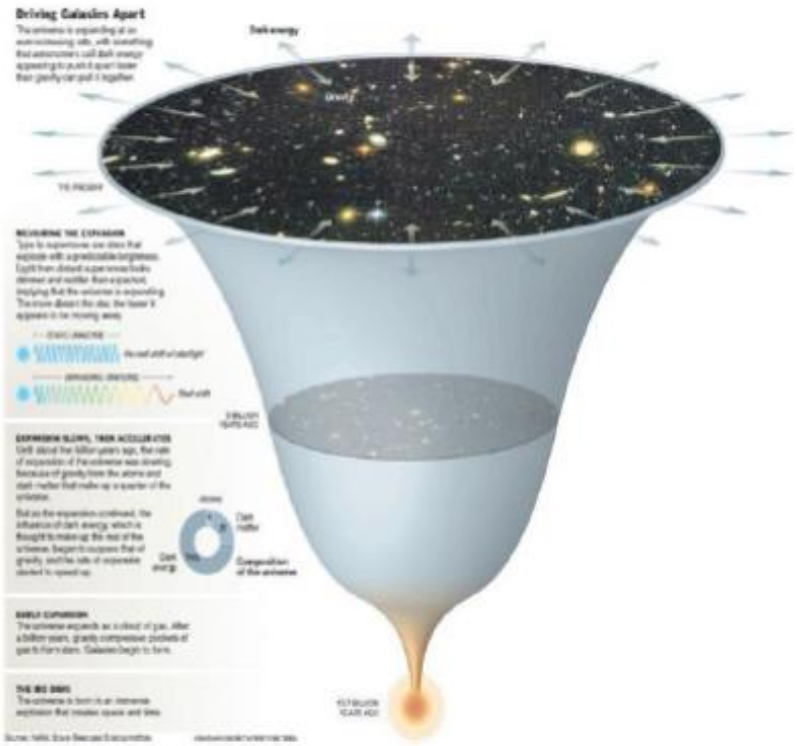


爱因斯坦为了构造静态宇宙学解，在其引力场方程中加入了一个常数项：宇宙学常数。

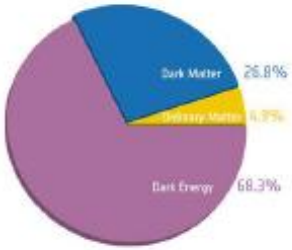
- Ia型超新星具有相同的绝对星等，视星等的亮/暗可表示其距离
- 两个小组都发现，观测的超新星比$\rho=\rho_c$的平直宇宙预计值更暗
- 视星等更暗→距离更遥远→宇宙在加速膨胀→宇宙中存在很大比例的具有负压物质：暗能量

加速膨胀的宇宙



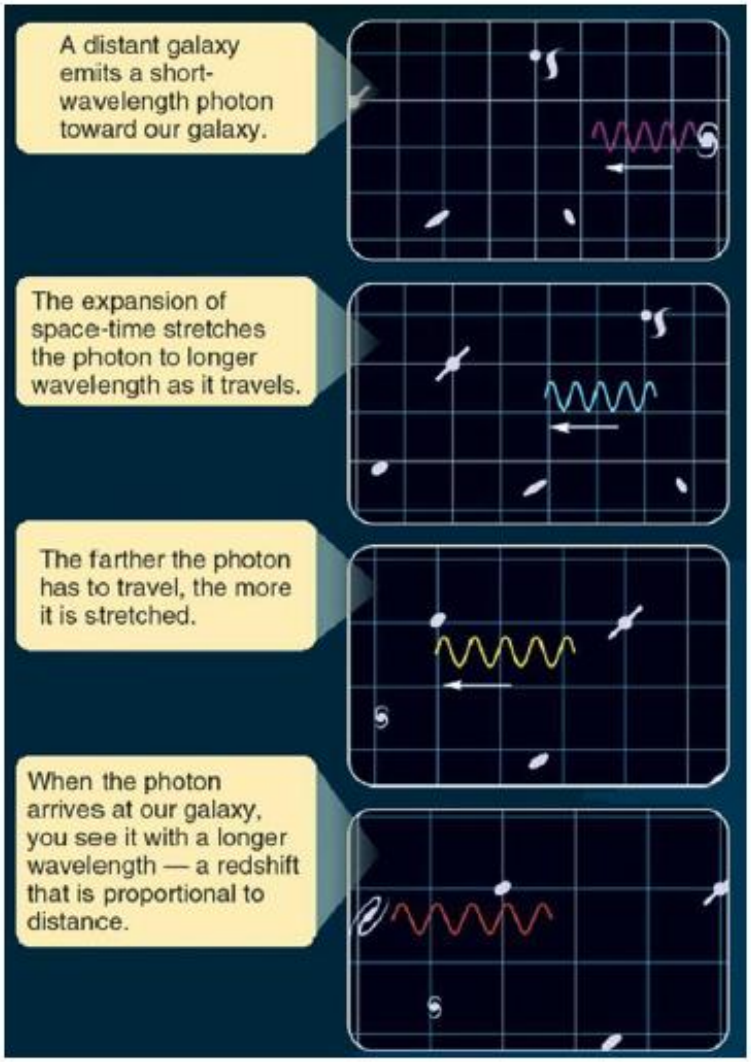


- 观测到的宇宙微波背景辐射涨落表明宇宙的位形是平直的
- $\Omega_k = 0.00$；$\Omega_M = 0.32$；$\Omega_\Lambda = 0.68$：宇宙现在正在加速膨胀
- 宇宙的年龄：t = 137亿年 = 13.7 Gyr



1.4.3 宇宙中的星系

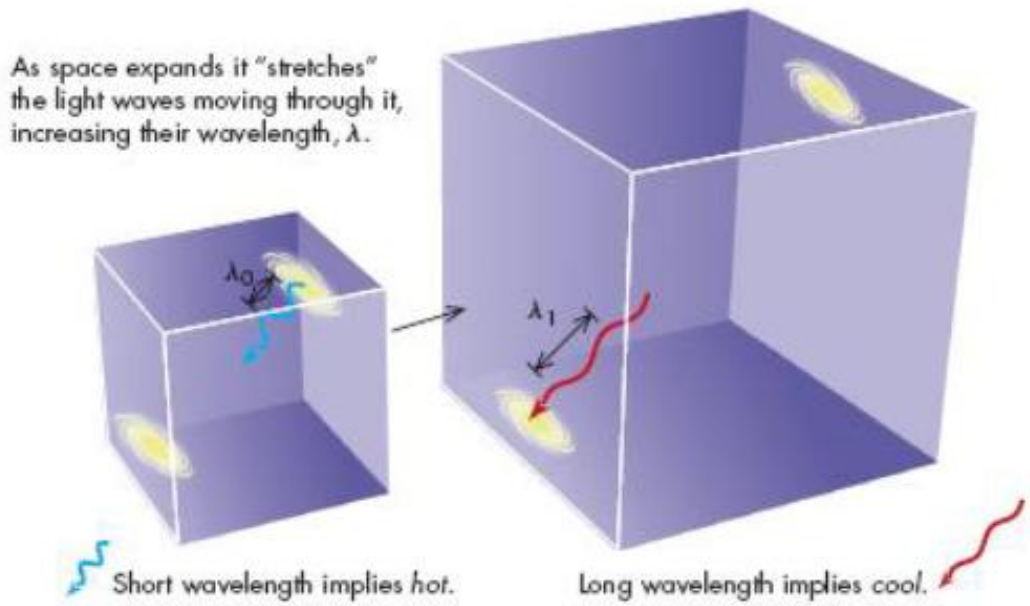
- 星系是研究宇宙的重要探针
  - 年老的恒星是宇宙化学演化的化石
  - 高红移星系反应了宇宙早期的特征
- 宇宙的历史约束了星系特性
  - 约束星系年龄：不可能比宇宙更老
  - 宇宙膨胀影响我们对星系特征观测
- 宇宙学红移
  - 一个遥远星系向我们发出一个短波光子
  - 光子传播过程中，时空膨胀，光子波长被拉长：传播越远，波长被拉的越长
  - 光子到达观测者，变为波长较长的光子
  - 由于宇宙空间的膨胀，使天体发出的光波被拉长，谱线因此“变红”：宇宙学红移



宇宙学红移

- 标长R(t): 宇宙尺度如何随时间改变的量，只依赖于H_0和现在的密度$\rho(t_0)$

$$V_r = \dot{d} = \frac{\dot{\mathcal{R}}(t)}{\mathcal{R}(t)} d \equiv H(t) d.$$



宇宙学红移：膨胀时空中光子的波长被拉长

$$1 + z = \frac{\lambda_{\rm obs}}{\lambda_{\rm e}} = \frac{\mathcal{R}(t_0)}{\mathcal{R}(t_{\rm e})}.$$

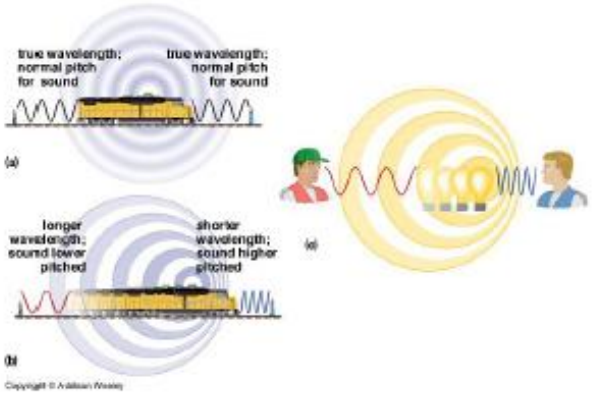
光波长正比于R(t)膨胀，频率按因子1+z减小

遥远星系中的所有时间过程看起来将按此因子拉长

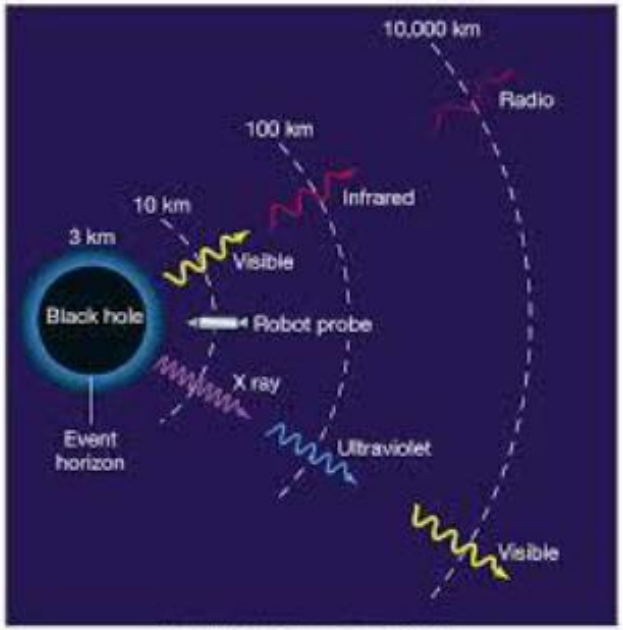
观测遥远宇宙时看到事件将以慢节奏发生

红移

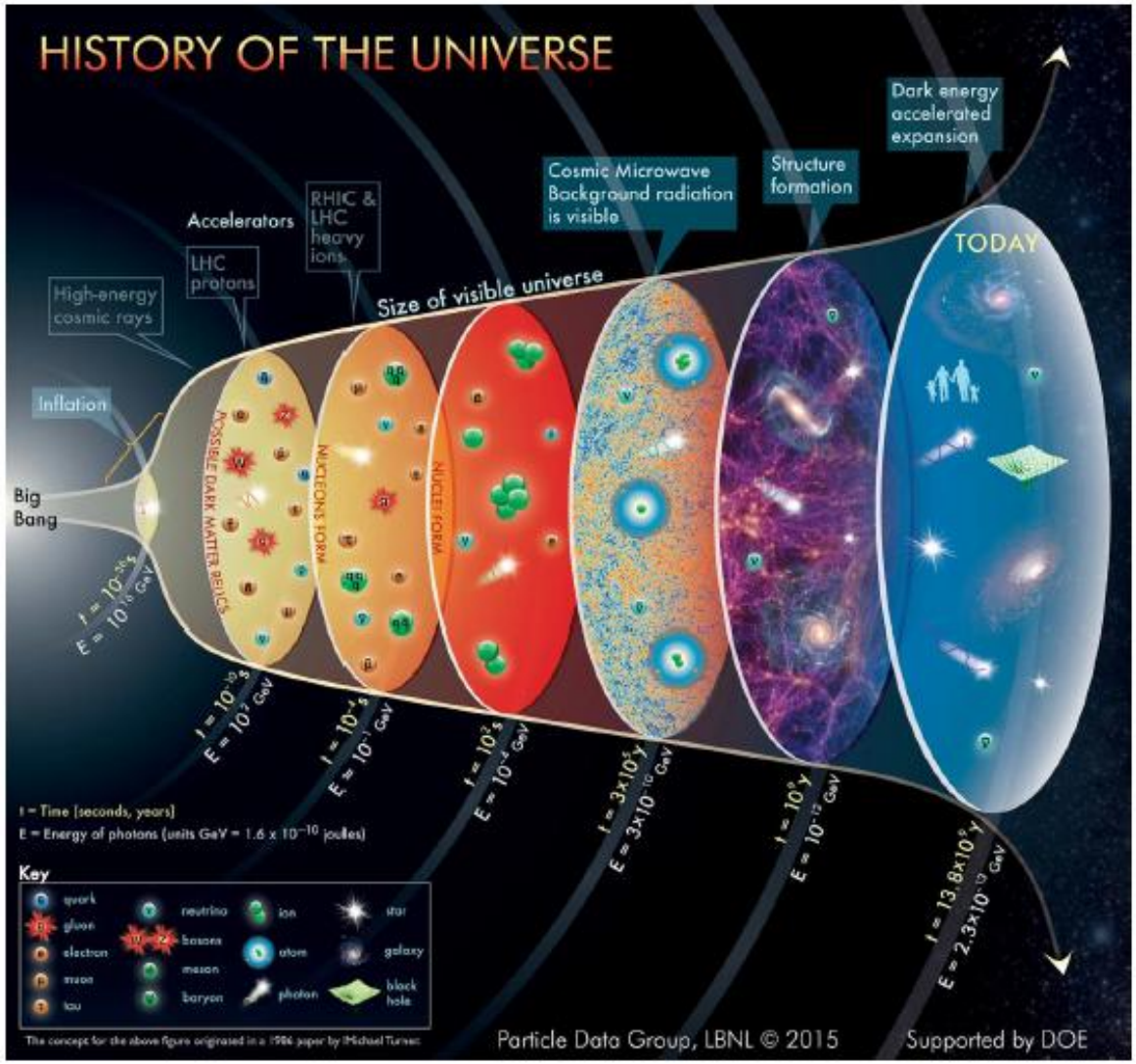
- 多普勒红移：由于辐射源在固定空间中远离所造成
- 引力红移：由于光子摆脱引力场向外辐射所造成的
- 宇宙学红移：由于宇宙空间自身的膨胀所造成的



- 引力红移只有在中子星或者黑洞强引力场周围较大
- 宇宙学红移在100Mpc尺度上非常明显
- 近邻星系，星系在星系团中运动（本动）所造成的多普勒红移和宇宙学红移的量级差不多

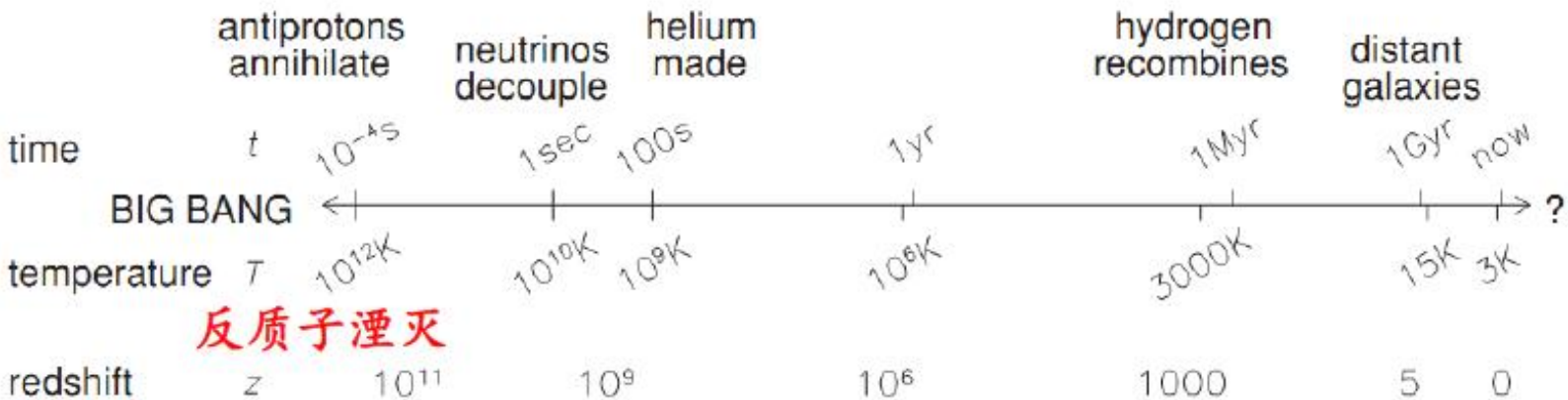


1.5 前星系时代–物质创生

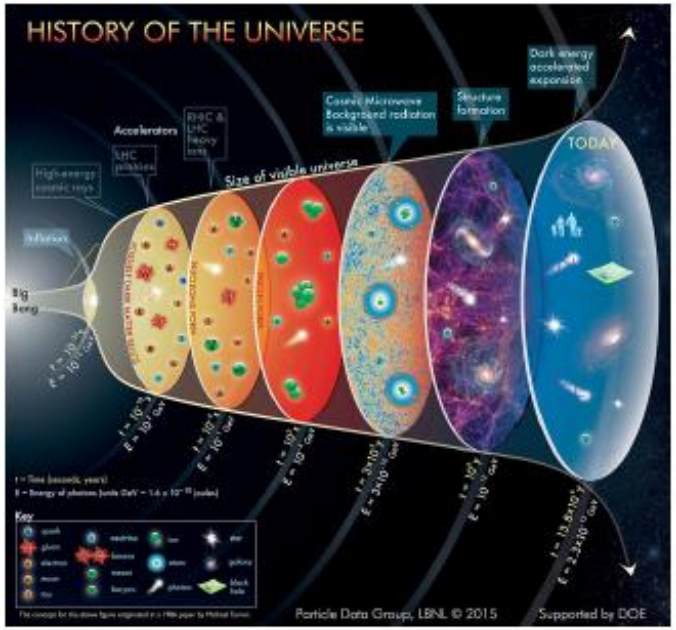


- 大爆炸，宇宙诞生
- 普朗克时期：$t=10^{-43}$s，$T=10^{32}$K，时空形成
- 宇宙暴涨
- 大统一时期：四种力统一
- 强子时期：$T>10^{12}$K
- 中微子退耦：中微子不再与重子物质相互作用
- 轻子时期：光子、电子
- 物质辐射分离：原子形成
- 光子退耦：宇宙变透明，形成宇宙微波背景辐射
- 恒星、星系形成：10亿年

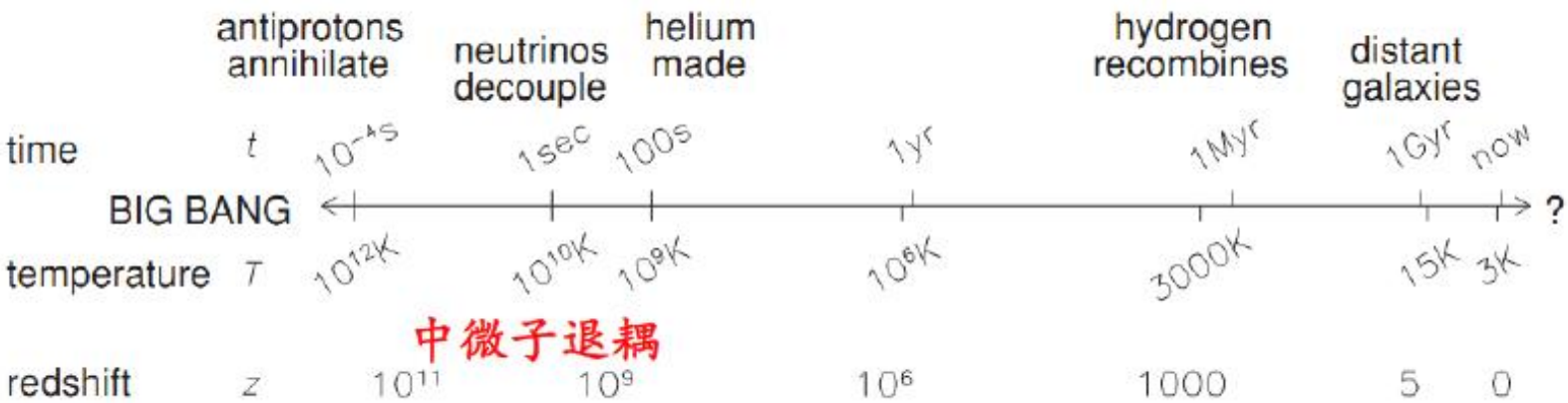
1.5.1 炽热的早期宇宙



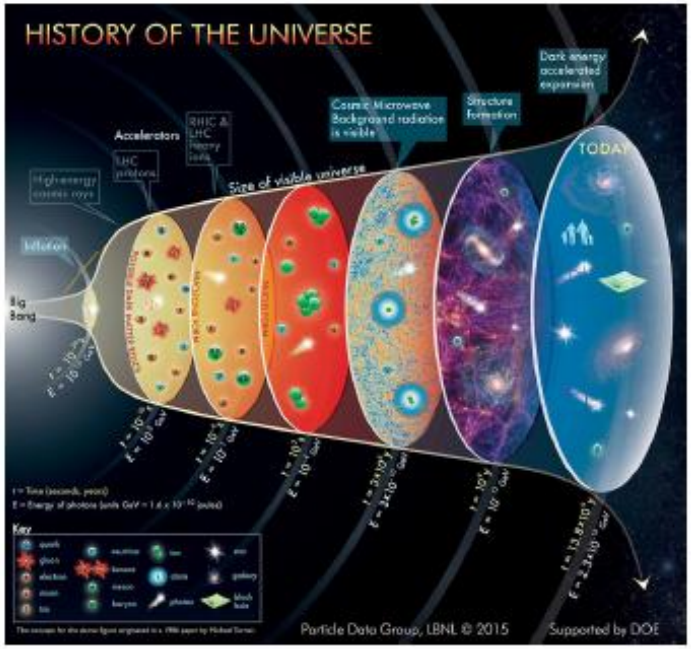
- 宇宙膨胀倒推：早期宇宙必然是致密和高温的，宇宙中存在大量高能粒子
- $T \sim 10^{32}$K（普朗克时期）：时空创生
- $T > 10^{12}$K（强子时期）：充满了可以把任何原子核粉碎为其组成粒子的高能光子
- 宇宙组成是高度相对论性的基本粒子和及其反粒子；光子和粒子数目大致相等
- $T \sim 10^{12}$K：温度下降，发生重子（质子、中子）和反重子湮灭反应，留下大量轻子



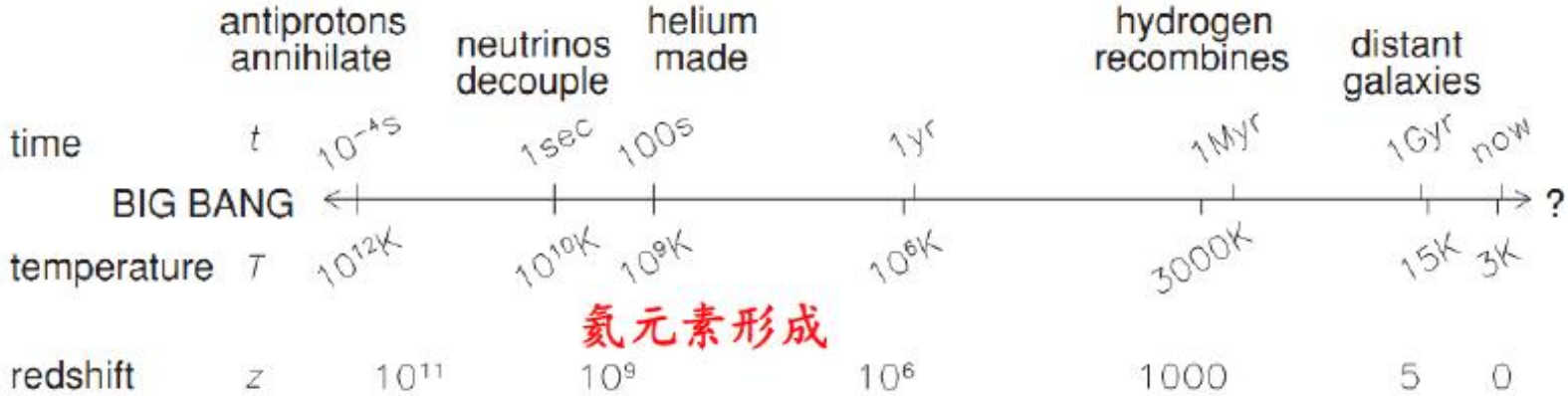
1.5.1 炽热的早期宇宙



- T ~ 10^{12}K时：轻子包括光子、正负μ介子、正负电子(e)、中微子(ν)、以及极少的核子
- T = 10^{12}K-5x10^{9}K时：正负μ介子湮灭消失；中微子开始与其他粒子退耦，成为自由粒子
- 宇宙中的中微子、辐射、正负电子和残存的核子其时处于热平衡（轻子时期）
- T = 5x10^{9}K - 10^{4}K：正、负电子对开始迅速大量湮灭，宇宙中余下的主要成分为光子、中微子和反中微子（辐射时期）

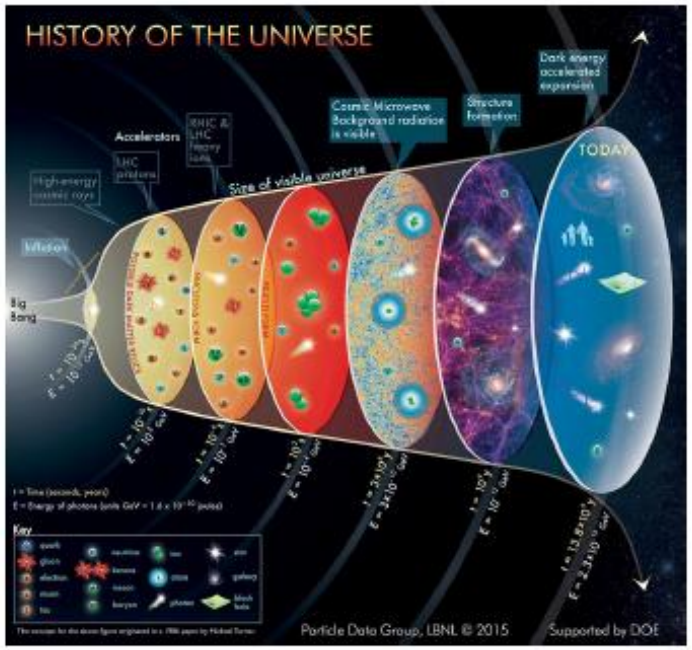


1.5.2 制造元素

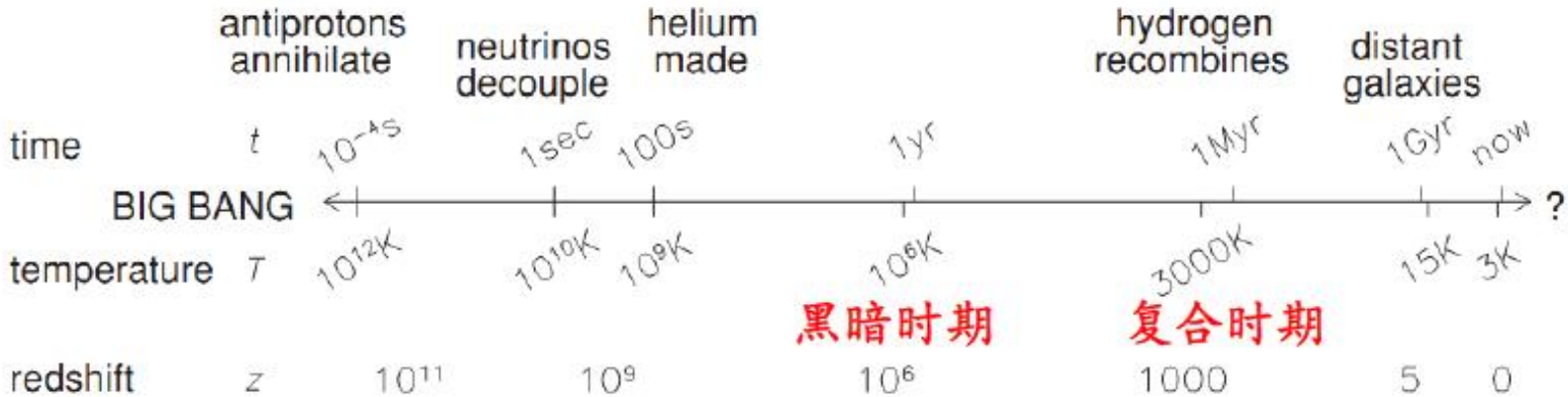


氦元素形成

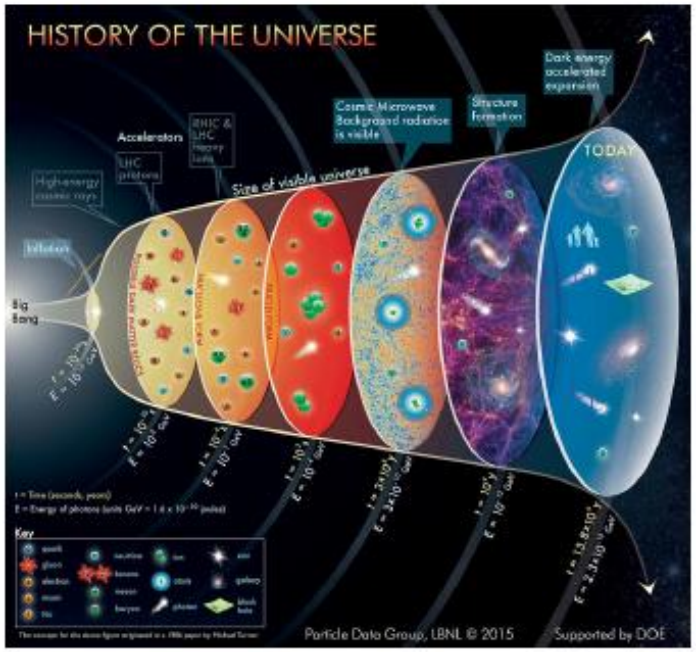
- T ~ 10^9K：中子很快与质子一起聚变形成较重的核，完成宇宙轻元素合成（早期核合成时期）
- 中子的平均寿命为τ_n=886±1s。经过τ_n之后，中子数将减小一个因子1/e
- 大约25%（以质量计）的物质变成氦，还有少量的氘、锂和其他氢原子核
- 多余的质子将变为氢原子核，约占总质量的75%



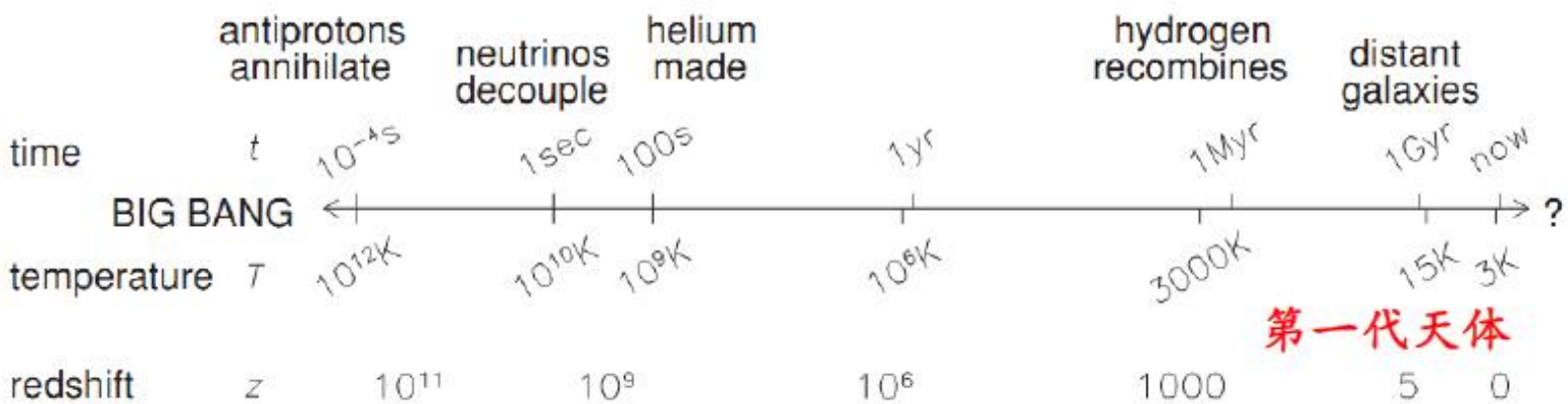
1.5.3 复合时期-光和物质脱耦



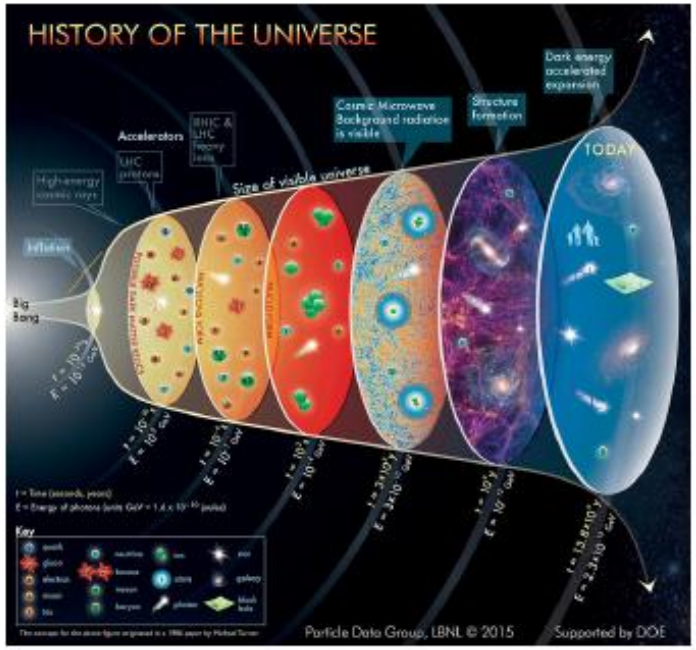
- T > 3000K：高温使得氢和氦处于电离状态，大量的自由电子导致光子自由程短。辐射与自由电子之间强烈耦合，光传不出来（黑暗时期）
- T ~ 3000K：光子能量不能电离氢，绝大部分氢核与自由电子复合形成中性氢原子
- 物质与辐射退耦，光子可自由运动，宇宙变得中性而透明（复合时期）
- 复合时期的历史遗迹：宇宙微波背景辐射



1.5.3 复合时期--星系形成



- 只要物质和辐射之间有耦合，物质分布中的微小扰动都会被光子的扩散所牵制，发生粘滞性衰减
- 物质和辐射解耦，物质变为独立后，质量稍有超出的区域，其范围就会由于对周围的引力作用而增长
- 向外的光子压强不再能阻止物质塌缩，星系和星系团开始形成：第一代天体



1.5.3 复合时期--CMB

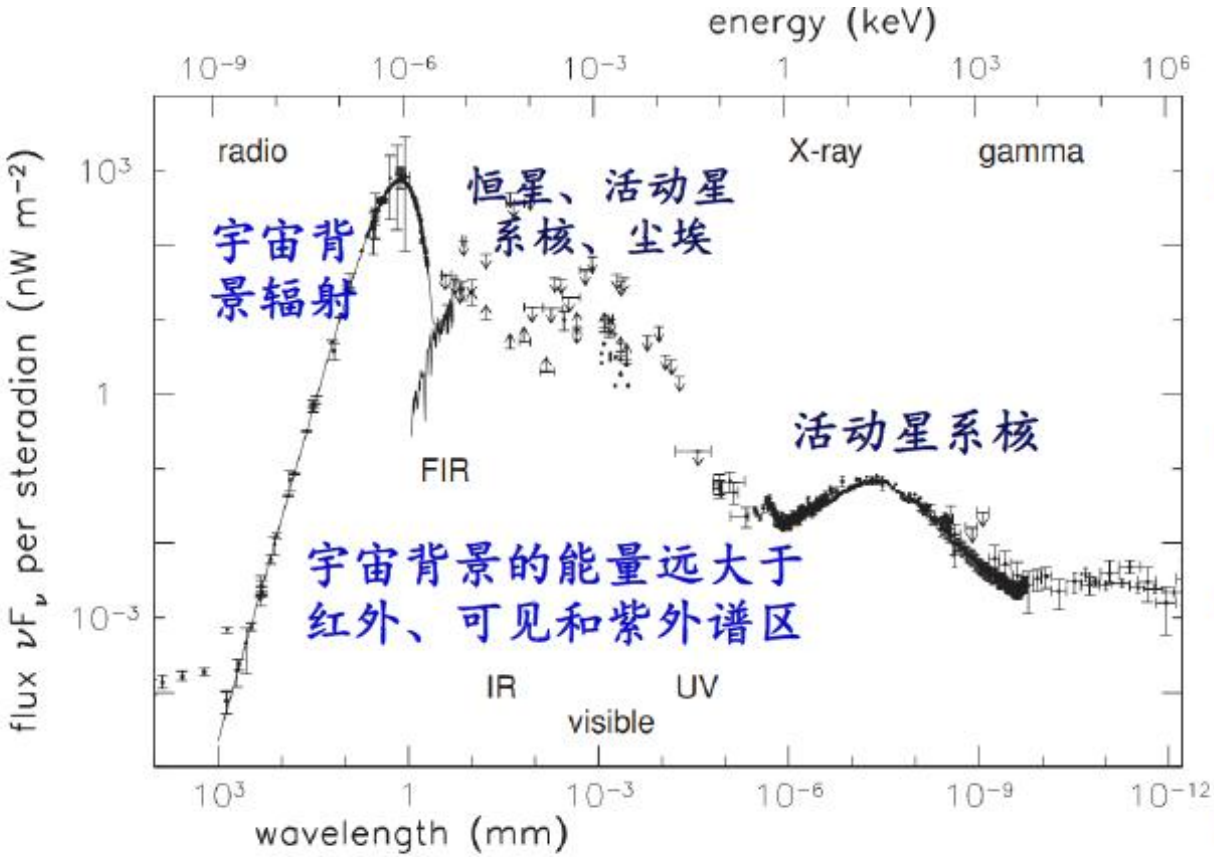
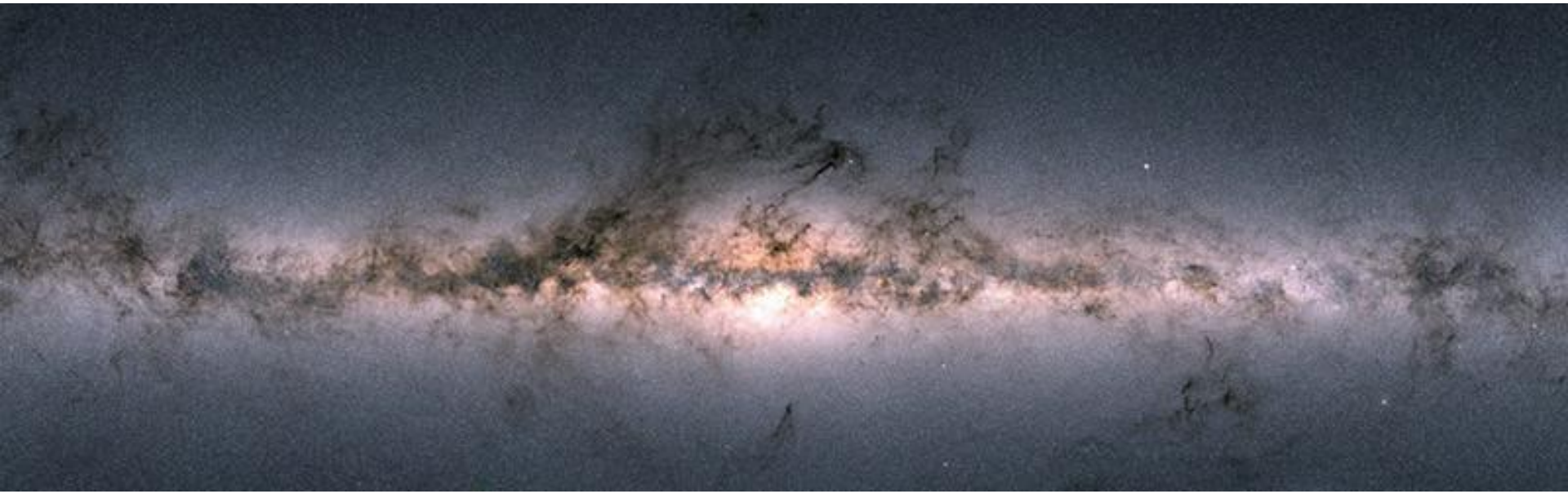


Fig. 1.19. Extragalactic background radiation: the vertical *logarithmic* scale shows energy density per decade in frequency or wavelength. Arrows show upper and lower limits. The curve peaking at $\lambda \sim 1$ mm is the cosmic microwave background; the far-infrared background is the light of stars and active galactic nuclei, re-radiated by dust – T. Ressell and D. Scott.

河外背景辐射

- 从亚毫米波到 E ≤ 0.1keV 的紫外区：恒星、活动星系核、尘埃辐射
- X 射线和γ射线的高能尾：活动星系核
- 射电-mm：能量远大于红外、可见和紫外谱区。
- 要想把这样巨大的能量解释为来自大爆炸以外的任何其他源，会是非常困难的事：CMB

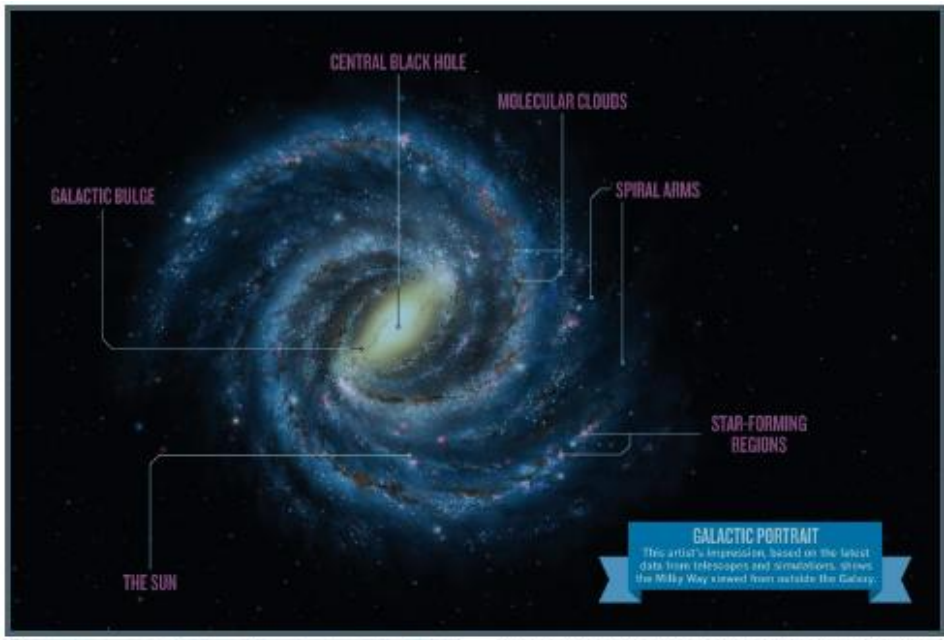


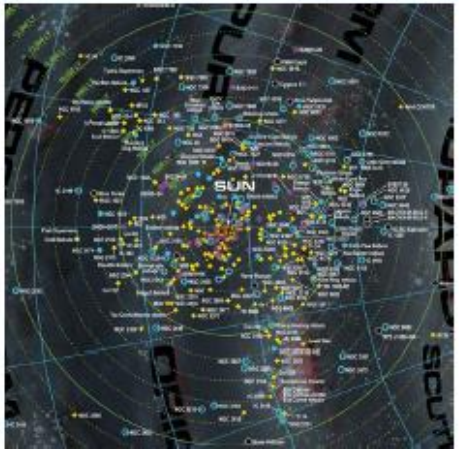
第二章 银河系

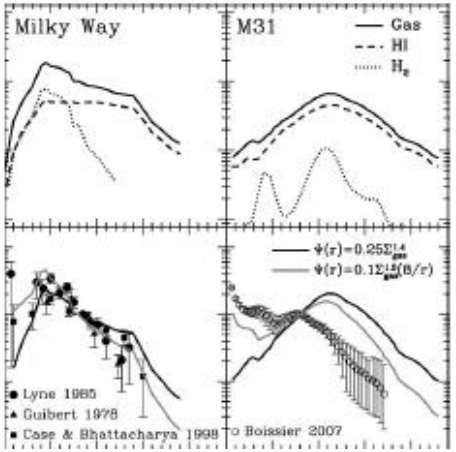
主要内容

银河系是典型盘星系(Sb)，可以被仔细观测

研究其恒星分布、运动和气体特性的盘星系







2.1 太阳的邻域

2.2 银河系恒星

2.3 银河系自转

2.4 星际气体等

2.1 The Solar Neighborhood

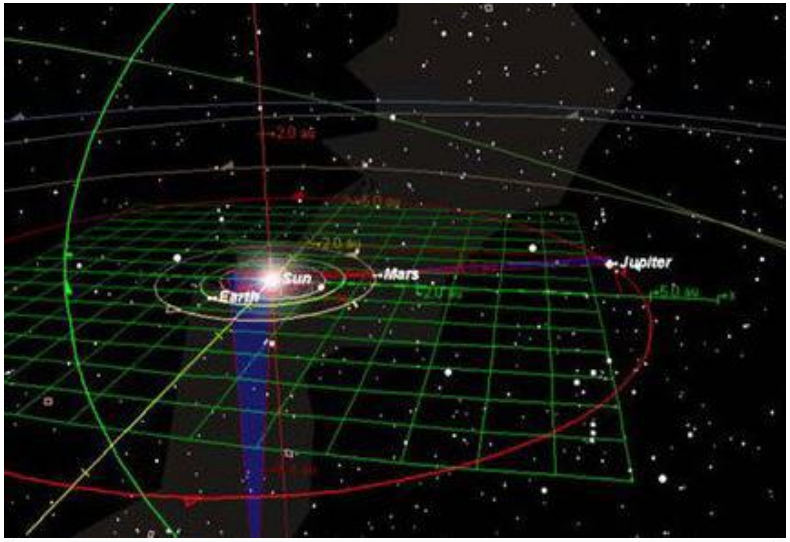
希望了解:

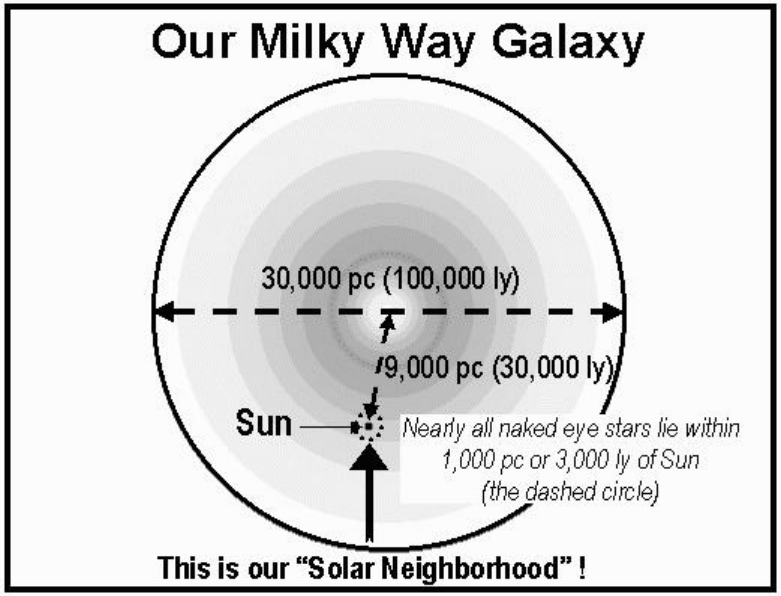
- 恒星数目多少、种类有哪些
- 年轻、主序、年老恒星比例

解决之道

- 坐标—描述恒星分布和运动
- 距离—测量恒星离我们远近

- 视星等+ 距离（观测）
  → 绝对星等　HRD
  → 恒星特性和演化





2.1.1 三角视差测距

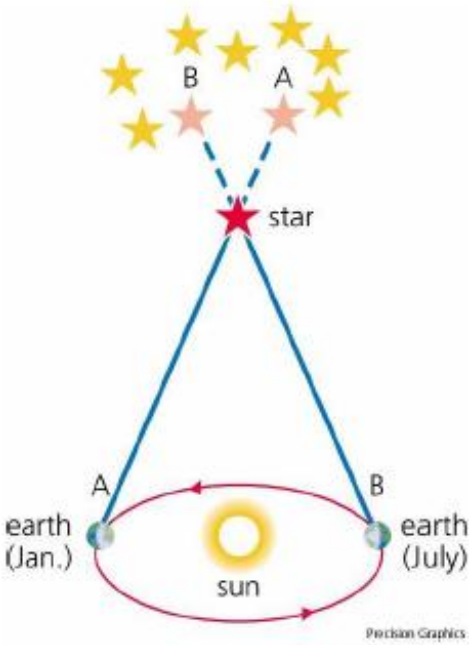
- **三角视差法：利用不同观测位置（apparent position）测量同一物体的视差，测定物体（天体）距离的方法**

(Figure 2.1). The angle p is the *parallax*; it is always small, so, for a star at distance d, we have

1AU：日地平均距离

$$\frac{1\ \text{AU}}{d} = \tan p \approx p\ (\text{in radians}). \qquad (2.1)$$

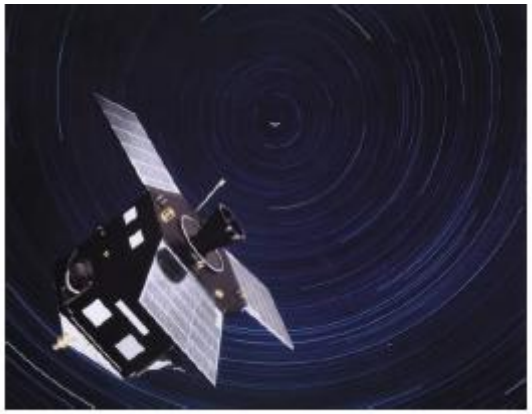
One astronomical unit (1 AU) is the Earth's mean distance from the Sun, about 150 million kilometers or 8.3 light-minutes. The *parsec* (pc) is defined as the distance d at which a star has a parallax of $1''$, one *second of arc*: $1'' = 1/60 \times 1/60$ of $1°$. One radian is roughly $206\,265''$, so a parsec is 206 265 AU or about 3.26 light-years. The stars are so distant that none has a parallax even as large as $1''$.



- **距离越远的恒星，要获得可分辨的视差，需要更长的基线**
- **视差小于0.01'' 将很难区分:利用三角视差法，在地球上观测 d > 100pc 的恒星困难（空间可更远、卫星）**
- **三角视差测量恒星距离：只适合测量太阳周围的恒星**

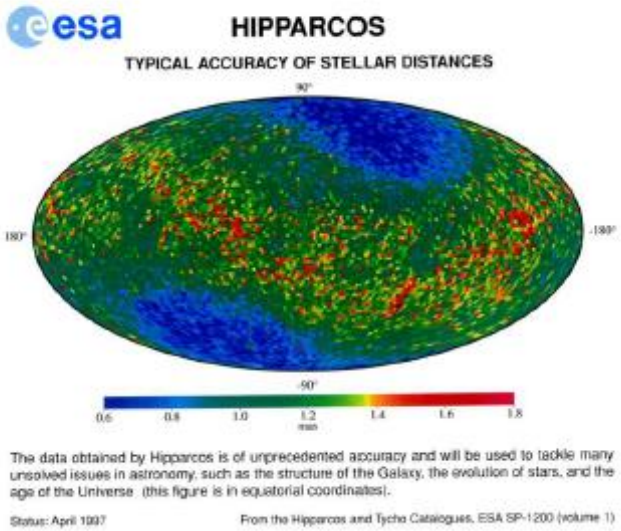
依巴谷卫星（Hipparcos satellite）

- 克服地球大气视宁度影响：发射空间卫星
- 依巴谷高精视差测量卫星；High Precision Parallax Collecting Satellite
- 欧洲空间局发射的一颗天体测量卫星，口径29cm；用以测量恒星视差和恒星自行



工作时间：19890808 - 19930815

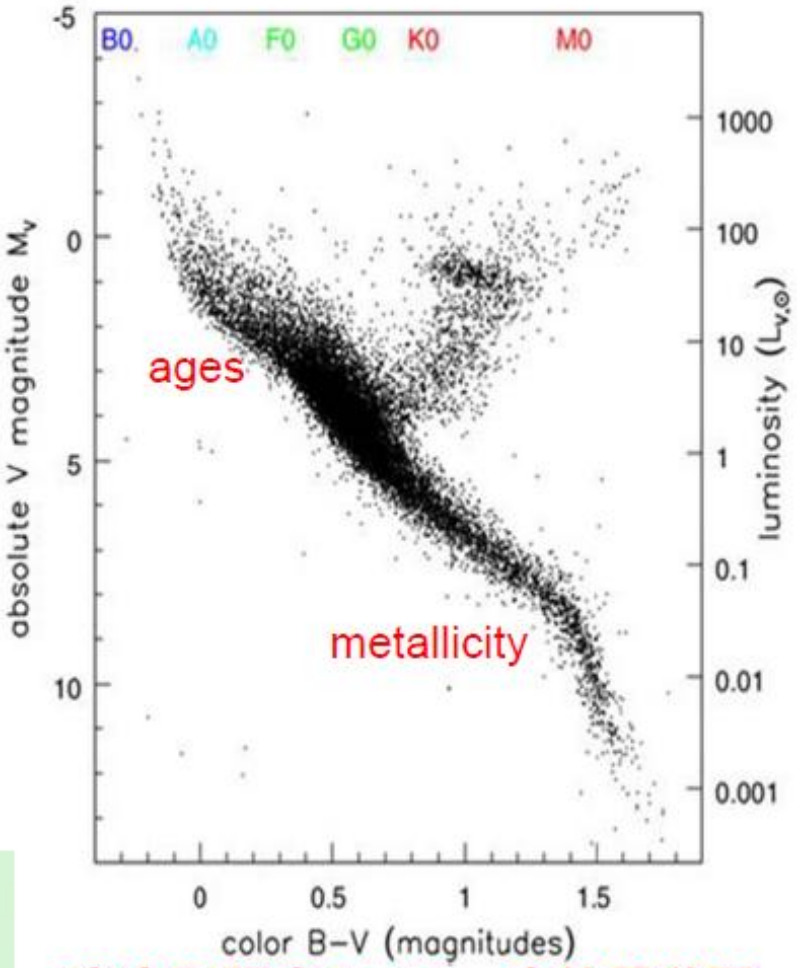
- 第谷实验（B、V光度观测）：
  - 获得了1,058,332个恒星的位置、自行、视差、宽波段光度
  - 利用颜色，获得了恒星的光谱分类和有效温度
- 依巴谷实验（亮星精确测量）：
  - 118,218恒星（视星等 < 9mag）的位置，自行和视差
  - 视差 0.7 - 0.9 milliarcsec (mas)，精度比第谷实验高20倍



太阳附近恒星HRD

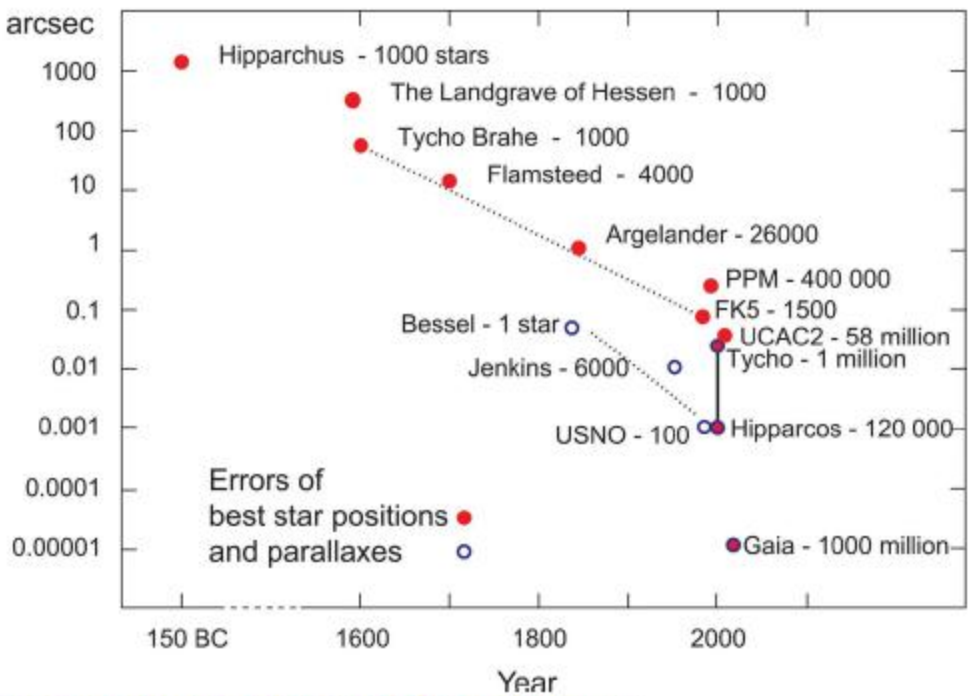
- 对于距离在~数百pc以内的恒星，依巴谷卫星数据库测量了它们的距离、颜色和视星等
- 利用宽波段颜色，可以分类恒星光谱型（OBAFGKM）
- 利用恒星视差测量可测得恒星距离，结合观测的视星等，得到恒星的绝对星等（m, d → M）
- 颜色和绝对星等，恒星在HRD上的分布：与理论HRD进行比较，研究太阳附近恒星特征和分布

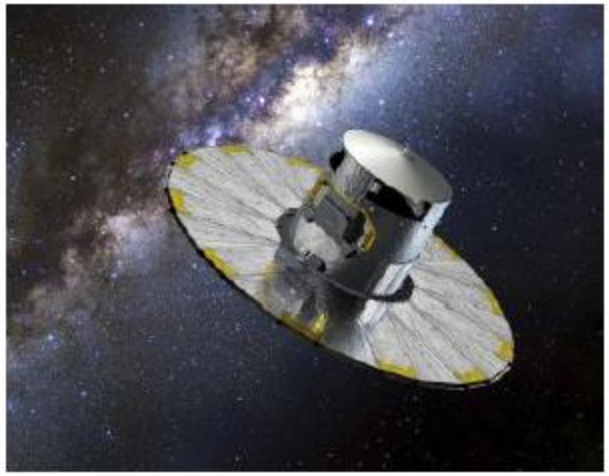
主星序宽：对于比太阳亮的恒星，主要是因为它们的年龄不同；对于较暗的星，金属丰度变化导致主序带比较宽



离太阳距离d<100pc内依巴谷卫星测量的恒星在HRD分布

Gaia （19 Dec. 2013 –Dec. 2022）



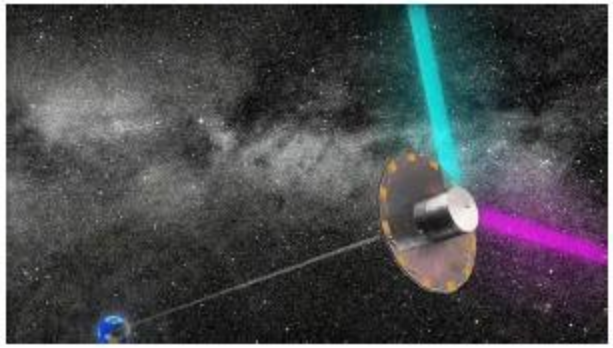


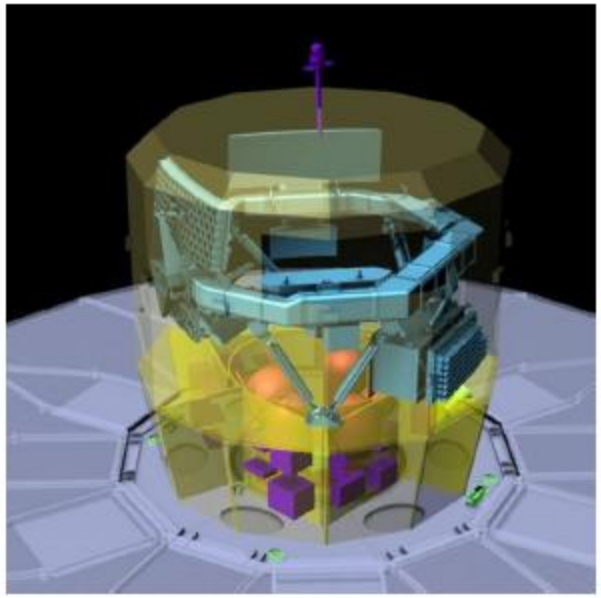
Evolution of astrometric accuracy

Optical payload
- Two telescopes
- Entrance pupil 1.45 x 0.5 m²
- Focal length 35 m
- Field of View 1.58 x 0.69 deg

Blue:330–680 nm

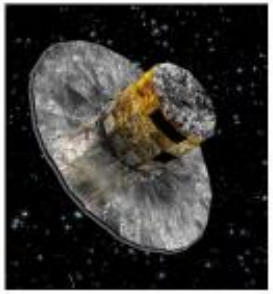
Red :640–1000 nm





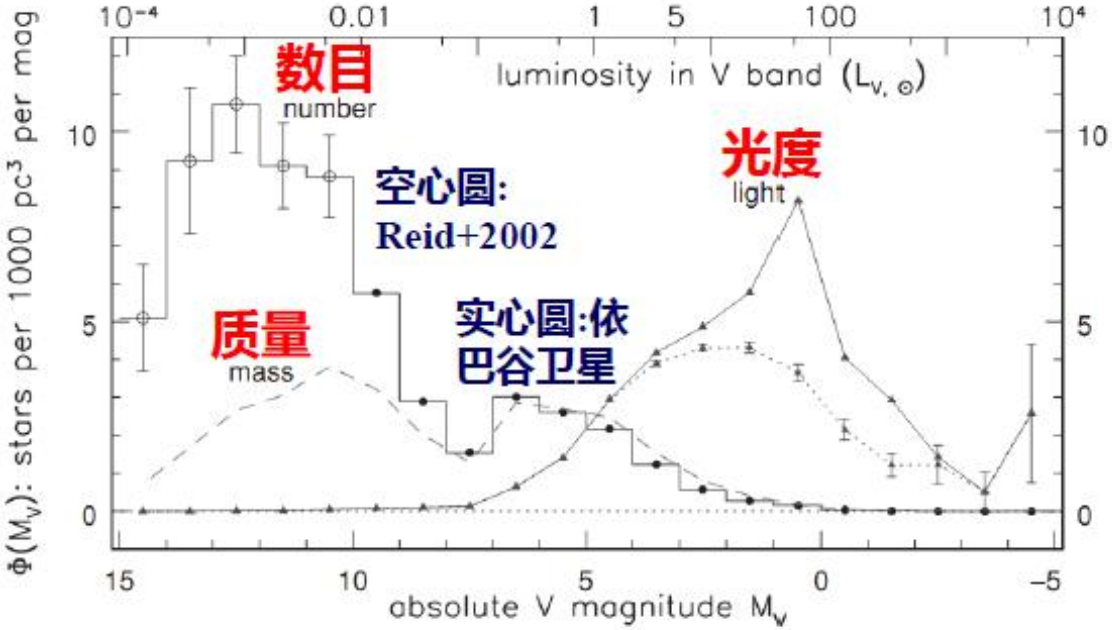
From Hipparcosto Gaia

	Hipparcos	GAIA
Magnitude limit	12	20 mag
Completeness	7.3 – 9.0	~20 mag
Bright limit	~0	~3-7 mag
Number of objects	120 000	26 million to V = 15 250 million to V = 18 1000 million to V = 20
Effective distance limit	1 kpc	1 Mpc
Quasars	None	$\sim 5 \times 10^5$
Galaxies	None	10^6 - 10^7
Accuracy	~1 milliarcsec	7 μarcsec at V = 10 12-25 μarcsec at V = 15 200-300 μarcsec at V = 20
Broad band	2-colour (B and V)	5-colour to V = 20
Medium band	None	11-colour to V = 20
Radial velocity	None	1-10 km/s to V = 16-17
Observing programme	Pre-selected	Complete and unbiased



http://www.cosmos.esa.int/web/gaia/dr1 (14 September 2016)

2.1.2 光度函数和质量函数



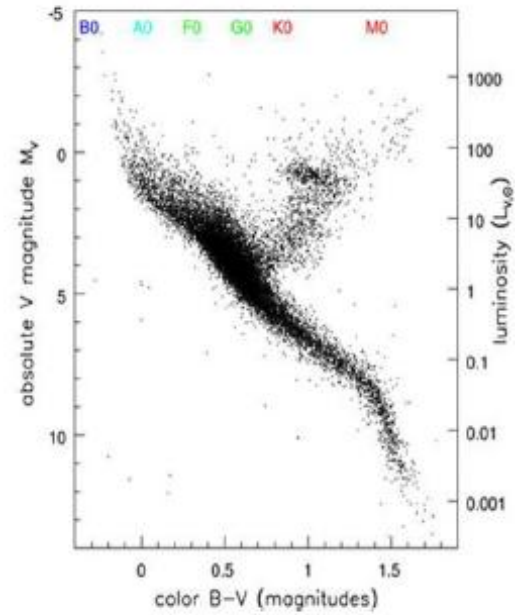


Fig. 2.3. The histogram shows the luminosity function $\Phi(M_V)$ for nearby stars: solid dots from stars of Figure 2.2, open circles from Reid *et al.* 2002 *AJ* **124**, 2721. Lines with triangles show $L_V\Phi(M_V)$, light from stars in each magnitude bin; the dotted curve is for main-sequence stars alone, the solid curve for the total. The dashed curve gives $\mathcal{M}\Phi_{MS}(M_V)$, the mass in main-sequence stars. Units are $L_\odot$ or $\mathcal{M}_\odot$ per 10 pc cube; vertical bars show uncertainty, based on numbers of stars in each bin.

依巴谷卫星观测数据中，大多数恒星都亮于$M_V \approx 8$；但较暗的恒星事实上更多！

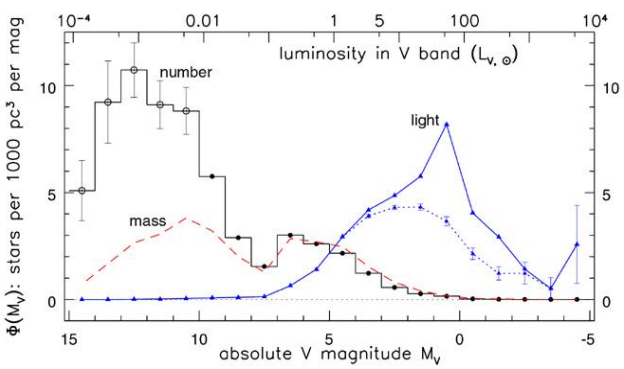
单位体积中的恒星数目随绝对星等的分布情况：光度（所有恒星/实线+三角形；主序星/点线+三角形）、质量（dashed）、数目（直方图）

光度函数

- 光度函数：描述某一类天体在内禀光度上的分布形式，常表示为每立方秒差距中某种光度的恒星（星系）数目多少

$$\Phi(x) = \frac{\text{number of stars with } M_V - 1/2 < x < M_V + 1/2}{\text{volume } \mathcal{V}_{\max}(M_V) \text{ over which these could be seen}}. \qquad (2.3)$$

- $\Phi(M_V)\Delta M_V$表示绝对星等介于M_V和$M_V + \Delta M_V$间的恒星数密度.
- 测量光度函数的困难
  - 亮端：亮天体数目很少，且恒星的空间分布不均匀
  - 暗端：受星等极限影响，暗星观测不到或很难发现
  - 双星、星协因靠得非常近难以区分，影响光度函数

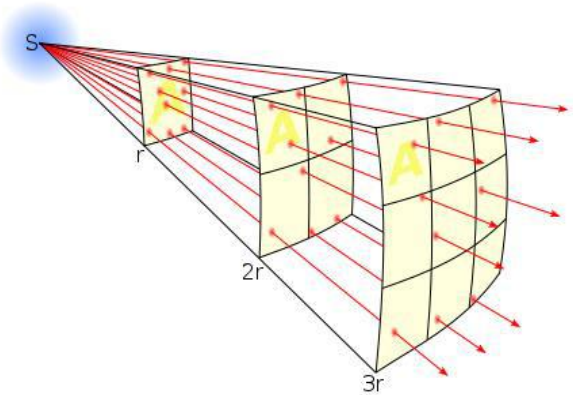


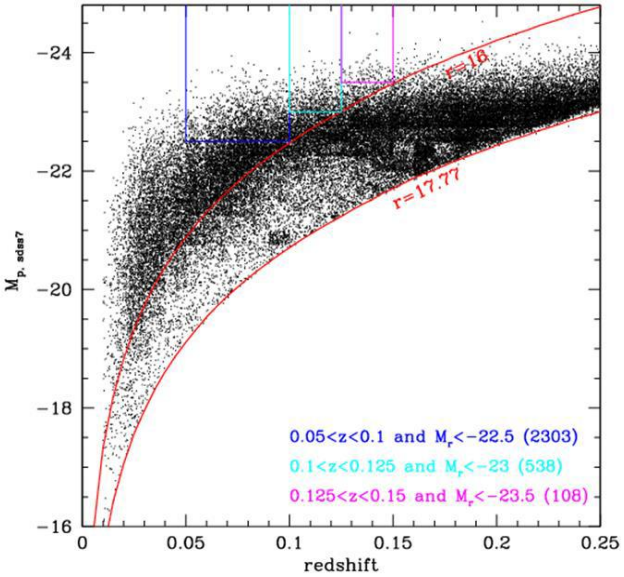
直方图显示了近似的光度函数(LF)
依巴谷星表包括了几乎所有$M_V \leqslant 8$的恒星，以及少数更暗的恒星
暗星远多于亮星：存在星等极限

马姆奎斯特偏差和V_{max}改正

Malmquist bias 马姆奎斯特偏差

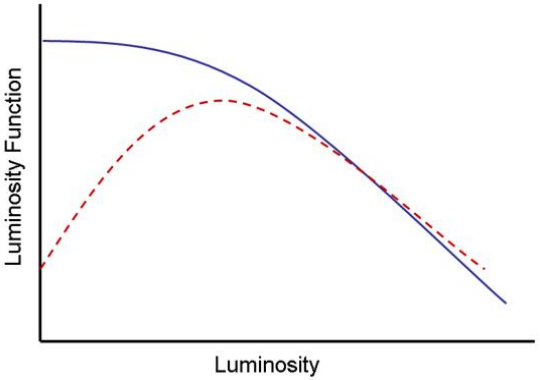
- 天文观测（恒星、星系）中，都存在一个**流量限**--极限星等（m_{lim}）：**裸眼极限星等**?
- 流量限巡天：距离越远处的暗天体，被观测到的概率就越低
- 因而在较远距离上，**低光度**天体的数量，将会被**过低估计**





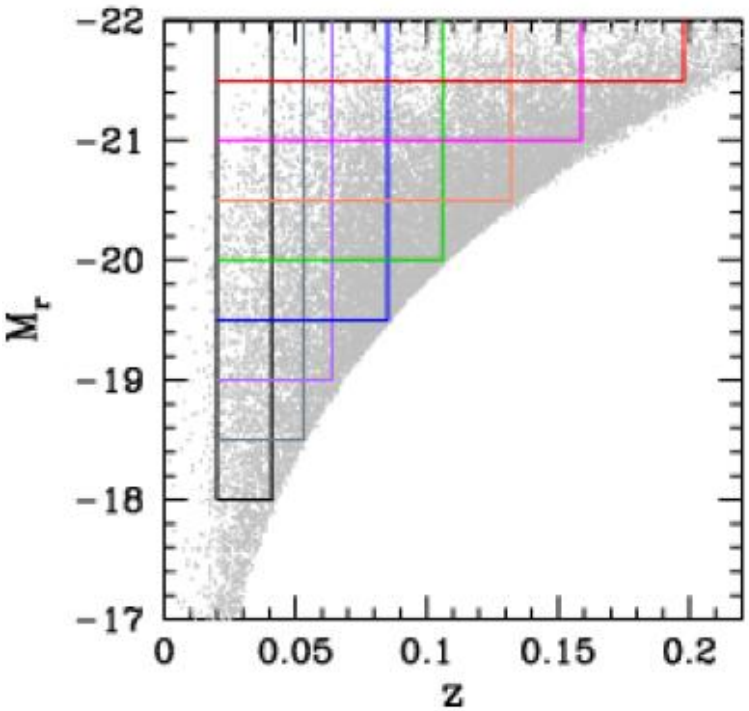
The **Malmquist bias**refers to an effect in observational astronomy which leads to the preferential detection of intrinsically **bright** objects.

瑞典天文学家G. Malmquist于1922年最早提出



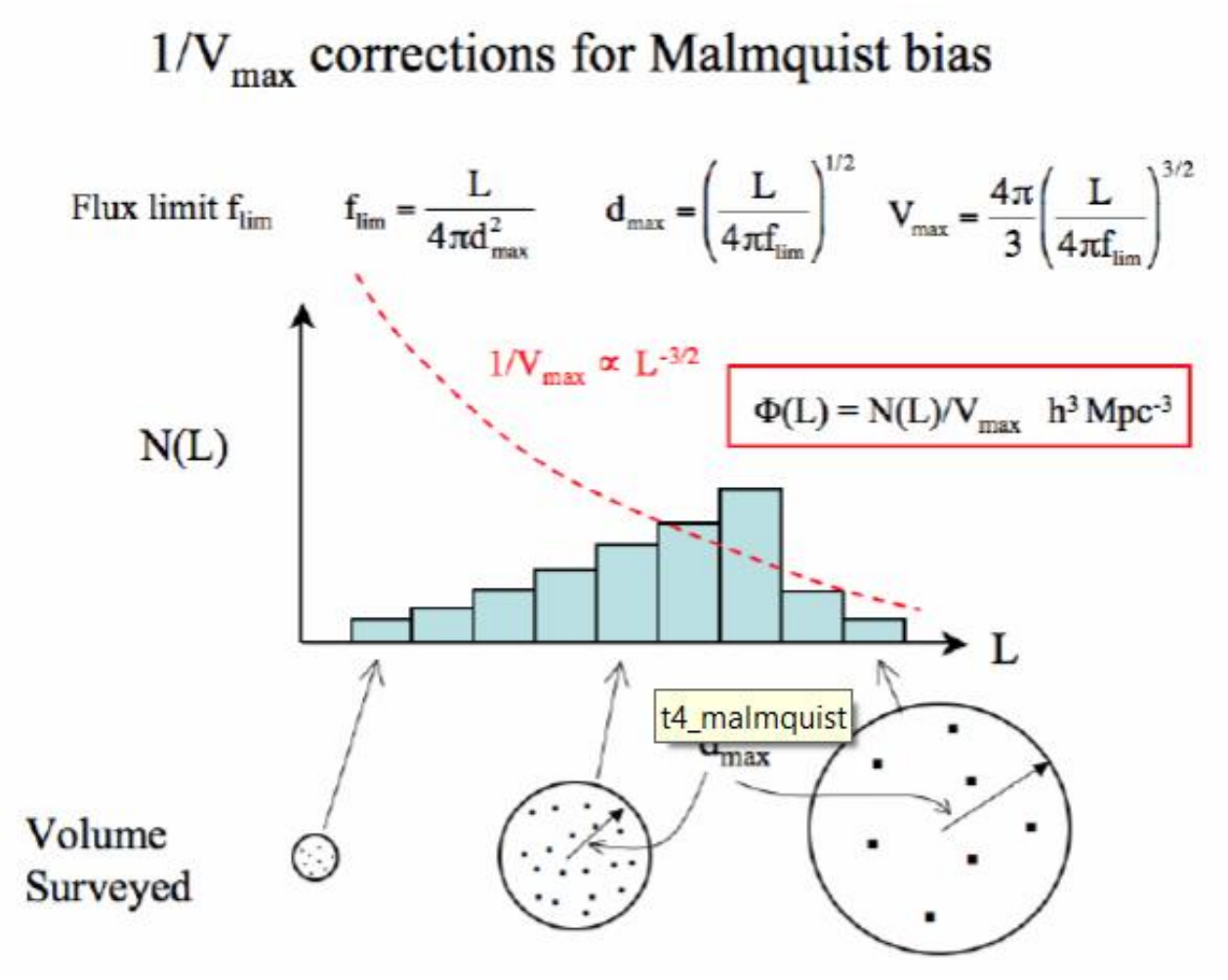
改正马姆奎斯特偏差→ Volume Weighting

- 在一个流量限（极限星等）样本里，样本中的所有天体的流量必须亮于流量限：$f > f_{min}$ or $m < m_{lim}$
- 对于绝对星等不同的天体，极限视星等相同时[距离模数$(m-M)_0 = 5\log 10(d/10pc)$]，可见范围不同：暗天体只能在较小范围被观测
- 每个恒星（星系）对光度函数的贡献可以乘以一个权重因子：$1/V_{max}$
- V_{max}表示在某一极限星等时，某一光度的恒星可以被观测的最大体积（最远距离）



The maximum volume can be approximated as a sphere with radius found from the distance modulus, using the object’s 绝对星等 and the limiting apparent magnitude.

$1/V_{max}$



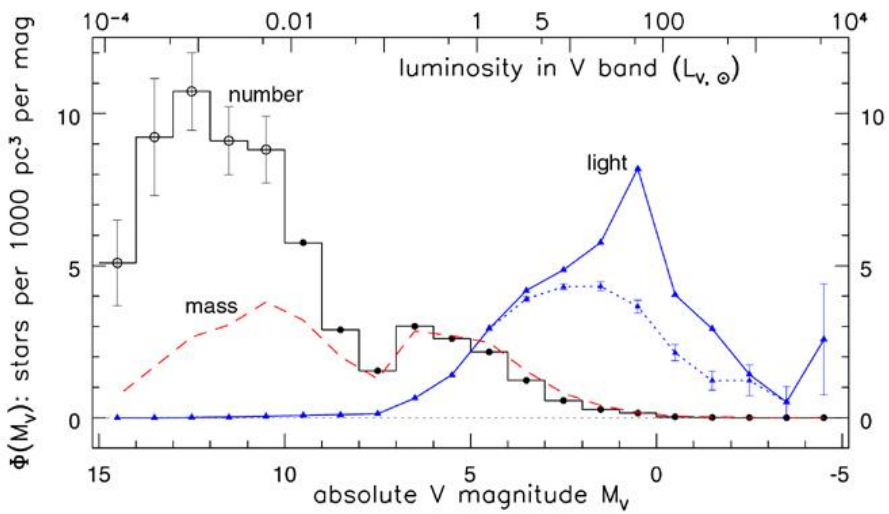
- 画出样本天体的光度分布图N(L)
- 每个光度bin对应不同的巡天体积：低光度天体$V_{max}(L)$小，高光度天体$V_{max}(L)$大
- 将每个光度bin的N(L)除以$V_{max}(L)$，每个光度bin对应相同的有效体积

Felten (1977)

恒星对光度、质量的贡献

- 几乎所有的光都来自较亮恒星
- 稀少亮星对星系光度的贡献，远多于比太阳(M_V = 4.83)暗的恒星对光度的贡献
- 星系总光度强烈依赖于它最近有没有形成大质量的、短寿命的恒星：SFH（恒星形成历史）

- 发出大多数光的亮恒星对质量却没有什么贡献
  - 红巨星质光比(M/L)比主序星还小，对质量贡献极微
  - 太阳邻域，几乎全部的质量都在K和M等晚型矮星中

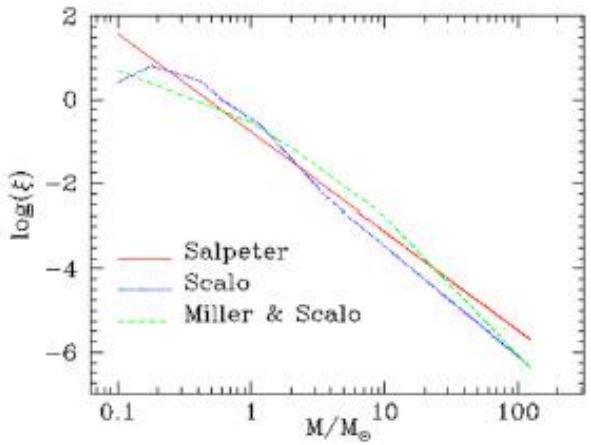


带三角的实线显示来自每星等间隔恒星的光度$L_V\Phi(M_V)$：点线表示主序星，实线代表全部恒星

长划线表示质量$M\Phi_{MS}(M_V)$；即主序星的质量分布

初始质量函数(Initial Mass Function)

- 初始质量函数：单位体积内新形成恒星的相对数目在质量上的分布，$\xi(M)$
- $\xi(M)\Delta M$是恒星诞生时，质量在M和M + ΔM之间的恒星数目
- Salpeter's IMF： $\xi(M) = \xi_0 M^{-2.35}$

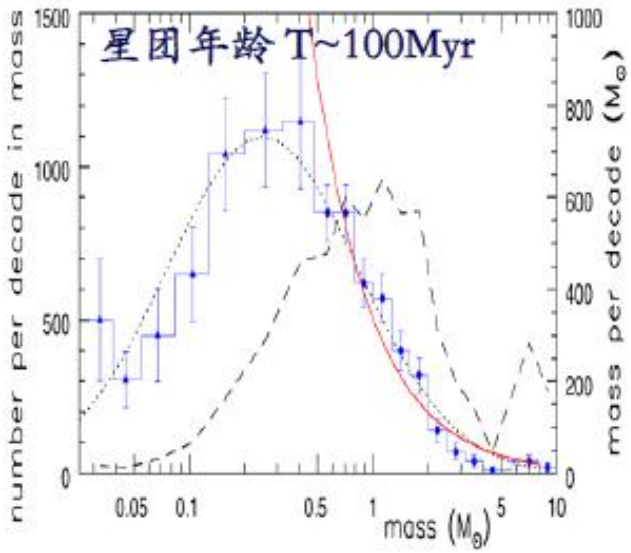


观测和理论表明：星云破碎后，形成的小质量恒星数目远大于大质量恒星的数目.

直方图：昴星团中不同质量恒星的数目分布

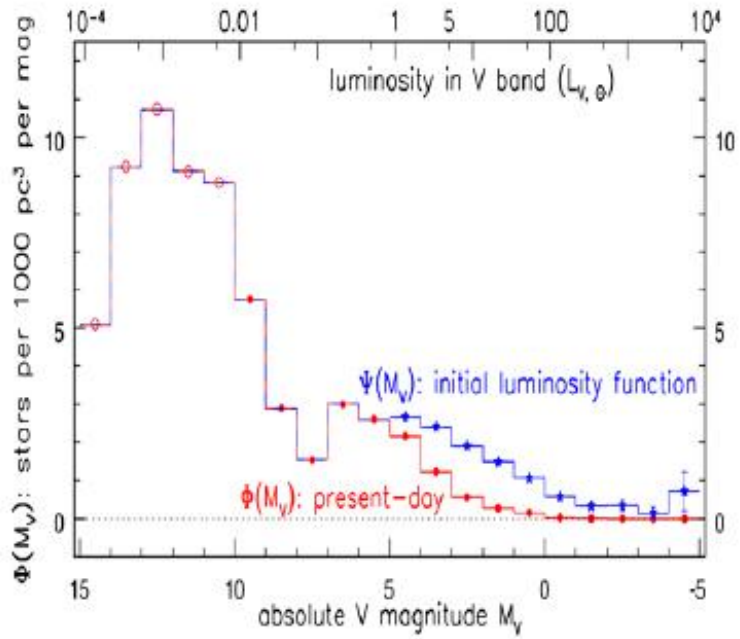
实线(红色)：表示Salpeter初始质量函数；点线表示对数正态函数.

长划线表示恒星质量分布：~ 0.25 $M_\odot$的恒星数目最多，(1 - 2)$M_\odot$的恒星贡献了星团质量的大部分



初始质量函数(Initial Mass Function)

- 现在的光度函数（观测+改正）-- 初始光度如何分布？
- 恒星演化模型（回溯）：每种光度的恒星在诞生时刻有多少
- 获得恒星初始光度函数$\Phi(M_V)$



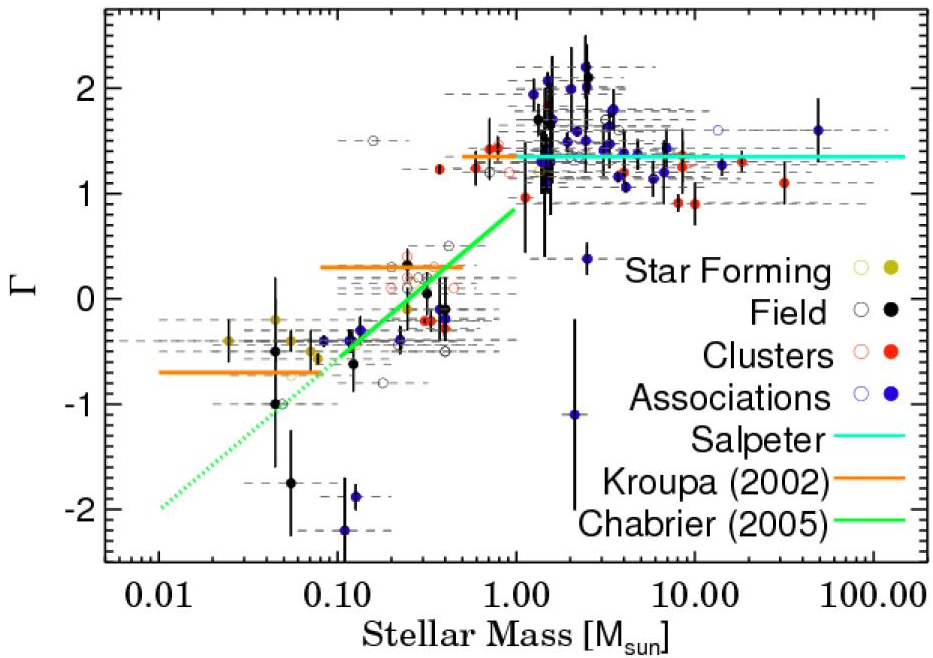
计算初始光度函数：只要假设盘在其整个历史中一直在以均匀的速率形成恒星，即 SFR = const.

We can calculate the initial luminosity function if we assume that the disk has been forming stars at a uniform rate throughout its history. If $\Phi_{MS}(M_V)$ is the present-day luminosity function for main-sequence stars alone, and a star remains on the main sequence with absolute magnitude M_V for a time $\tau_{MS}(M_V)$, then

$\Phi_{MS}(M_V)$是主序星现在的光度函数，光度M_V的恒星主序寿命为$\tau_{MS}(M_V)$，则有：

$$\begin{aligned}\Psi(M_V) &= \Phi_{MS}(M_V) && \text{for } \tau_{MS}(M_V) \geq \tau_{gal},\\ &= \Phi_{MS}(M_V) \times \frac{\tau_{gal}}{\tau_{MS}(M_V)} && \text{when } \tau_{MS}(M_V) < \tau_{gal}. \qquad (2.4)\end{aligned}$$

A Universal Stellar Initial Mass Function?



a power law of Salpeter index (Γ = 1.35) above a few solar masses,

and a log normal or shallower power law (Γ~ 0–0.25) for lower mass stars.

The shape and universality of the substellar IMF is still under investigation.