Bayesian规则下的Go/Nogo概率

Chao Cheng

2023 年 5 月 22 日

事件时间$T_e \sim Exp(\lambda_1)$, $f(t;\lambda_1) = \lambda_1 \exp(-\lambda_1 t)$，删失时间$T_c \sim Exp(\lambda_2)$, $f(t;\lambda_2) = \lambda_2 \exp(-\lambda_2 t)$. 则观察到的数据的联合密度/质量

$$f(t,\delta) = \begin{cases} \lambda_1 \exp(-(\lambda_1+\lambda_2)t) & \delta = 1 \\ \lambda_2 \exp(-(\lambda_1+\lambda_2)t) & \delta = 0 \end{cases}$$

其中$\delta = 1$表示观察到事件，$\delta = 0$表示观察到删失。那么观察到事件的概率：

$$P(\delta = 1) = \int_0^\infty f(t, \delta = 1)\,\mathrm{d}t = \frac{\lambda_1}{\lambda_1+\lambda_2}.$$

那么观察时间的条件分布

$$P(T \le t|\delta) = \frac{P(T \le t, \delta)}{P(\delta)} = \begin{cases} \dfrac{P(T \le t, \delta = 1)}{P(\delta = 1)} \sim Exp(\lambda_1+\lambda_2) & \text{if } \delta = 1 \\ \dfrac{P(T \le t, \delta = 0)}{P(\delta = 0)} \sim Exp(\lambda_1+\lambda_2) & \text{if } \delta = 0 \end{cases}$$

可见该条件分布与δ取值无关，因此T与δ独立。（一般这样的结论是不会成立的，这里依赖于两者都是指数分布）。

由此可得

$$\sum_{i=1}^n T_i \sim Gamma(n, \lambda_1+\lambda_2)$$

$$\sum_{i=1}^n \delta_i \sim Binomial(n, \frac{\lambda_1}{\lambda_1+\lambda_2})$$

且$\sum\limits_{i=1}^n T_i$和$\sum\limits_{i=1}^n \delta_i$独立。

在Bayesian角度下，风险的后验分布服从$Gamma\left(\text{prior_shape} + \sum\limits_{i=1}^n \delta_i, \text{prior_rate} + \sum\limits_{i=1}^n T_i\right)$对于给出某一个Go/Nogo的规则，例如$P(\lambda < \text{eff_cut}) \ge \text{go_prob}$后，我们可以将其转化为在所有可能的观察到的事件数的情况下，需要的总观察时间的要求，因此某一个潜在

的风险λ_1给出Go信号的概率为

$$
\begin{aligned}
& P\left(\text{Declare Go}\right) \\
= & \sum_{evt_{num}=0}^{n} P\left(\text{Declare Go}, \sum_{i=0}^{n} \delta_i = evt_{num}\right) \\
= & \sum_{evt_{num}=0}^{n} P\left(\text{Declare Go} \middle| \sum_{i=0}^{n} \delta_i = evt_{num}\right) P\left(\sum_{i=0}^{n} \delta_i = evt_{num}\right) \\
= & \sum_{evt_{num}=0}^{n} P\left(\sum_{i=1}^{n} T_i \geq t_{\text{eff cut for } evt_{num}} \middle| \sum_{i=0}^{n} \delta_i = evt_{num}\right) P\left(\sum_{i=0}^{n} \delta_i = evt_{num}\right) \\
= & \sum_{evt_{num}=0}^{n} P\left(\sum_{i=1}^{n} T_i \geq t_{\text{eff cut for } evt_{num}}\right) P\left(\sum_{i=0}^{n} \delta_i = evt_{num}\right).
\end{aligned}
$$

同理我们可以算出某个λ_1给出Nogo信号的概率为

$$
P\left(\text{Declare Nogo}\right) = \sum_{evt_{num}=0}^{n} P\left(\sum_{i=1}^{n} T_i \leq t_{\text{fut cut for } evt_{num}}\right) P\left(\sum_{i=0}^{n} \delta_i = evt_{num}\right).
$$