北京大学高等数学期末试题

2021-2022 学年第一学期

考试科目：高等数学D(一)　　　　考试时间：2021年12 月 30日

姓　名:____________________　　学　号: ____________________

本试题共 7 道大题，满分 100 分

1. 求不定积分（20分）.

(1). $\int (\ln x)^2 dx$,　　　　(2). $\int x\sqrt{x^2-1}dx$,

(3). $\int \frac{x+1}{\sqrt{2x-x^2}}dx$,　　　　(4). $\int \frac{x}{(\cos x)^2}dx$.

2. 求积分（20分）.

(1). $\int_{-1}^{1} \frac{1}{\sqrt{x^2+1}}dx$,　　　　(2). $\int_0^{\pi} e^x \sin x dx$,

(3). $\int_1^2 \frac{\sqrt{x-1}}{x}dx$,　　　　(4). $\int_1^{+\infty} \frac{dx}{(x+\sqrt{x^2-1})^3}$.

3. 求导数（20分）

(1) 设 $y = \int_{x^2}^{x^3} \frac{\ln(1+t^2)}{2+\sin t}dt$, 求 $\frac{dy}{dx}$;

(2) 设函数 $z = f(x,y)$ 由方程 $x^2z^3 + xyz + x + 2y - 5 = 0$ 所确定, 求 $\frac{\partial z}{\partial x}, \frac{\partial z}{\partial y}$ 在点 $(1,1,1)$ 处的值.

4. 求函数 $f(x,y) = x^2 + xy + y^2 - 6x + 2$ 在闭矩形区域：$0 \le x \le 1, 0 \le y \le 1$ 上的最大值与最小值.(10分)

5. 计算二重积分 $\int\int_D |x+y|dxdy,\ D: |x| \le 1, |y| \le 1$. (10分)

6. 设 $f(x,y) = \begin{cases} xy\cos(\frac{1}{\sqrt{x^2+y^2}}), & x^2+y^2 \neq 0 \\ 0, & x^2+y^2 = 0 \end{cases}$. 问 $f_x(x,y)$ 与 $f_y(x,y)$ 在 $(0,0)$ 是否连续？ $f(x,y)$ 在 $(0,0)$ 是否可微？说明理由.(10分)

7. 设函数 $f(x)$ 在 $[a,b]$ 上可积. 证明：函数 $\Phi(x) = \int_a^x f(t)dt$ 在 $[a,b]$ 上连续. (10分)

北京大学高等数学期末试题参考答案

2021-2022 学年第一学期

考试科目：高等数学D(一)　　考试时间：2021年12 月 30日

姓　名:______________________　　学　号: ______________________

本试题共 7 道大题，满分 100 分

1. 求不定积分（20分）.

(1). $\int (\ln x)^2 dx$

解：原式$= x(\ln x)^2 - 2\int \ln x dx = x(\ln x)^2 - 2x\ln x + 2x + C.$

(2). $\int x\sqrt{x^2-1}dx$

解：原式$= \frac{1}{2}x\sqrt{x^2-1}d(x^2-1) = \frac{1}{3}(x^2-1)^{\frac{3}{2}} + C.$

(3). $\int \frac{x+1}{\sqrt{2x-x^2}}dx$

解：原式$= -\frac{1}{2}\int \frac{d(1-(x-1)^2)}{\sqrt{1-(x-1)^2}}dx + \int \frac{2}{\sqrt{1-(x-1)^2}}dx$

$= -\sqrt{2x-x^2} + 2\arcsin(x-1) + C.$

(4). $\int \frac{x}{(\cos x)^2}dx.$

解：原式$= x\tan x - \int \tan x dx = x\tan x + \ln|\cos x| + C.$

2. 求积分（20分）.

(1). $\int_{-1}^{1} \frac{1}{\sqrt{x^2+1}}dx$

解：原式$= 2\ln(x+\sqrt{1+x^2})|_0^1 = 2\ln(1+\sqrt{2}).$

(2). $\int_0^{\pi} e^x \sin x dx$

解：$I = \int_0^{\pi} e^x \sin x dx = -e^x\cos x|_0^{\pi} - I.$

原式$= \frac{1}{2}(1+e^{\pi}).$

(3). $\int_1^2 \frac{\sqrt{x-1}}{x}dx$

解：令 $\sqrt{x-1}=t$, 则 $x=1+t^2$, $dx=2tdt$.

原式$=\int_0^1 \frac{2t^2}{1+t^2}dt=2(1-\frac{\pi}{4})$.

(4). $\int_1^{+\infty} \frac{dx}{(x+\sqrt{x^2-1})^3}$.

解：令 $x=\sec t$.

原式$=\int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{\sin t\cos t}{(1+\sin t)^3}dt=\frac{1}{8}$.

3. 求导数（20分）

(1) 设 $y=\int_{x^2}^{x^3} \frac{\ln(1+t^2)}{2+\sin t}dt$, 求 $\frac{dy}{dx}$

解：$y'=3x^2\frac{\ln(1+x^6)}{2+\sin x^3}-2x\frac{\ln(1+x^4)}{2+\sin x^2}$.

(2) 设函数 $z=f(x,y)$ 由方程 $x^2z^3+xyz+x+2y-5=0$ 所确定, 求 $\frac{\partial z}{\partial x},\frac{\partial z}{\partial y}$ 在点 $(1,1,1)$ 处的值.

解：令$F(x,y,z)=x^2z^3+xyz+x+2y-5$, 则

$$\frac{\partial z}{\partial x}=-\frac{F_x}{F_z}=-\frac{2xz^3+yz+1}{3x^2z^2+xy}$$

以及

$$\frac{\partial z}{\partial y}=-\frac{F_y}{F_z}=-\frac{xz+2}{3x^2z^2+xy}.$$

因此，$\frac{\partial z}{\partial x}(1,1,1)=-1,\frac{\partial z}{\partial y}(1,1,1)=-\frac{3}{4}$.

4. 求函数 $f(x,y)=x^2+xy+y^2-6x+2$ 在闭矩形区域：$0\le x\le 1, 0\le y\le 1$ 上的最大值与最小值.(10分)

解：由$f_x(x,y)=2x+y-6=0, f_y(x,y)=x+2y=0$ 得, $y=-2, x=4$.

显然点$(4,-2)$ 不在区域$0\le x\le 1, 0\le y\le 1$ 里，因此，最值只能在矩形$0\le x\le 1, 0\le y\le 1$ 边界上取到。

设$g_1(x)=f(x,0)=x^2-6x+2$. 因为，$g_1'(x)=2x-6<0, 0\le x\le 1$,

所以，$g_1(x)$ 在$0\le x\le 1$ 上最大值是$g_1(0)=2$与最小值$g_1(1)=-3$.

设$g_2(x)=f(x,1)=x^2-5x+3$. 因为，$g_2'(x)=2x-5<0, 0\le x\le 1$,

所以，$g_2(x)$ 在$0\le x\le 1$ 上最大值是$g_2(0)=3$与最小值$g_2(1)=-2$.

设$h_1(y)=f(0,y)=y^2+2.$，显然，$h_1(y)$ 在$0\le y\le 1$ 上最大值是$h_1(1)=3$与最小值$g_1(0)=2$.

设$h_2(y)=f(1,y)=y^2+y-3$. 因为，$h_2'(y)=2y+1>0, 0\le y\le 1$,

所以，$h_2(y)$ 在$0 \le y \le 1$ 上最大值是$h_2(1) = -1$与最小值$g_1(0) = -3$.

因此, f 在闭区域：$0 \le x \le 1, 0 \le y \le 1$ 上的最大值是3与最小值-3.

5. 计算二重积分 $\displaystyle\int\int_D |x+y|dxdy$, $D: |x| \le 1, |y| \le 1$. (10分)

解：原式$=\displaystyle\int_{-1}^{1} dy \int_{-y}^{1} (x+y)dx - \int_{-1}^{1} dy \int_{-1}^{-y} (x+y)dx = \frac{8}{3}$.

6. 设 $f(x,y) = \begin{cases} xy\cos(\frac{1}{\sqrt{x^2+y^2}}), & x^2+y^2 \neq 0 \\ 0, & x^2+y^2 = 0 \end{cases}$. 问 $f_x(x,y)$ 与 $f_y(x,y)$ 在 $(0,0)$ 是否连续？ $f(x,y)$ 在 $(0,0)$ 是否可微？说明理由.(10分)

解: $f_x(x,y) = y\cos(\frac{1}{\sqrt{x^2+y^2}}) + \frac{x^2y}{(x^2+y^2)^{\frac{3}{2}}}\sin(\frac{1}{\sqrt{x^2+y^2}}), x^2+y^2 \neq 0$, 以及

$f_y(x,y) = x\cos(\frac{1}{\sqrt{x^2+y^2}}) + \frac{xy^2}{(x^2+y^2)^{\frac{3}{2}}}\sin(\frac{1}{\sqrt{x^2+y^2}}), x^2+y^2 \neq 0$.

显然，$f_x(0,0) = 0$, $f_y(0,0) = 0$. 而,

$\lim_{(x,y)\to(0,0)} f_x(x,y)$ 和 $\lim_{(x,y)\to(0,0)} f_y(x,y)$ 都不存在.

故，$f_x(x,y)$ 与 $f_y(x,y)$ 在 $(0,0)$ 都不连续。

又因为，

$$\lim_{(\Delta x,\Delta y)\to(0,0)} \frac{\Delta x\Delta y\cos(\frac{1}{\sqrt{(\Delta x)^2+(\Delta y)^2}}) - f(0,0) - f_x(0,0)\Delta x - f_y(0,0)\Delta y}{\sqrt{(\Delta x)^2+(\Delta y)^2}} = 0,$$

所以, $f(x,y)$ 在 $(0,0)$ 可微.

7. 设函数 $f(x)$ 在 $[a,b]$ 上可积. 证明：函数 $\Phi(x) = \int_a^x f(t)dt$ 在 $[a,b]$ 上连续. (10分)

证明：因为 $f(x)$ 在 $[a,b]$ 上可积，所以,

存在$M > 0$, 使得 $|f(x)| \le M$, $x \in [a,b]$.

设$x_0, x_0 + \Delta x \in [a,b]$, 则

$|\Phi(x_0+\Delta x) - \Phi(x_0)| = |\int_{x_0}^{x_0+\Delta x} f(t)dt| \le M|\Delta x|$.

故, $\lim_{\Delta x\to 0} \Phi(x_0+\Delta x) = \Phi(x_0)$.

证毕.