北京大学高等数学D期末考试

2022-2023第一学期

本试卷共7道大题，满分100分

一、 求极限（每题5 分，总共20分）

(1) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{(1-\cos x)\ln(1+x^2)}{\sin^2 x(\arctan x)^2}$　　(2) $\lim\limits_{h\to 0}\displaystyle\int_0^{\pi}\dfrac{\sin(x+h)-\sin x}{h}\,\mathrm{d}x$

(3) $\lim\limits_{(x,y)\to(0,0)}\dfrac{\sqrt{1+x^2+y^2}-1}{|x|+|y|}$　　(4) $\lim\limits_{(x,y)\to(0,0)}(x^2+y^2)^{x^2y^2}$

二、 求积分（每题5 分，总共20分）

(1) $\displaystyle\int\frac{x\mathrm{e}^x}{\sqrt{1+\mathrm{e}^x}}\,\mathrm{d}x$　　(2) $\displaystyle\int\frac{x^4}{(1-x^2)^3}\,\mathrm{d}x$

(3) $\displaystyle\int_{-1}^{1}\left(\frac{\sin^{2023}x}{1+x^2}+\sqrt{1-x^2}\right)\mathrm{d}x$　　(4) $\displaystyle\int_2^{+\infty}\frac{1}{x^2(1-x)}\mathrm{d}x$

三、 求导数（每题10 分，总共20分）

1. 设方程$2x^2+y^2+z^2-4xz=0$确定了z关于x和y的隐函数$z=f(x,y)$.求$\dfrac{\partial^2 z}{\partial x^2}$

2. 已知直角坐标与极坐标之间满足关系$\begin{cases} x=r\cos\theta \\ y=r\sin\theta \end{cases}$，且$z=f(x,y)$是$x$和$y$的函数. 求$z$关于$r$和$\theta$的一阶偏导数和二阶偏导数.

四、 （10 分）求以空间曲面$z=f(x,y)=|xy|$为顶，以区域$D=\{(x,y)|x^2+y^2\le a^2\}$为底的曲顶柱体的体积以及函数$z=f(x,y)$在区域$D$内的平均值.

五、 (10分)已知长方体的表面积为A，问长（L）宽（W）高（H）分别为多少时体积最大?

六、 （10 分）已知二元函数$z=f(x,y)=\begin{cases}\dfrac{x^2y^2}{(x^2+y^2)^{\frac{3}{2}}}, & x^2+y^2\neq 0\\ 0, & x^2+y^2=0\end{cases}$
请利用多元函数微分学的知识讨论函数$z=f(x,y)$在$(0,0)$处的连续性和可微性.

七、 （10 分）设f在$[-a,a]$上可积，并为偶函数(即$f(x)=f(-x)$). 证明:

$$\int_{-a}^{a}f(x)\,dx=2\int_0^a f(x)\,dx.$$