2025 秋高等数学 D 第一次习题课讲义

数学科学学院　冯宣瑞　2401110009

2025 年 9 月 16 日

1　准备内容

1.1　助教信息

冯宣瑞　数学科学学院 2024 级博士生
学号: 2401110009
手机/微信: 13632208341
研究方向: 基础数学-偏微分方程
助教经历: 2024 秋高等数学 D (公共数学课十佳助教), 北大问学高数衔接课第一部分
邮箱 (可以邮件询问/答疑): pkufengxuanrui@stu.pku.edu.cn
个人主页 (可以找到课程资料): fengxuanrui.github.io

1.2　课程信息

正课时间: 1-16 周每周, 周二 1-2 节, 周四 3-4 节.
正课地点: 周二理教 208, 周四理教 207.
习题课时间: 1-16 周双周, 周二 10-11 节.
习题课地点: 理教 409.
评分标准: 作业 30 分 + 期中考试 30 分 + 期末考试 40 分.
期中考试时间: 2025 年 10 月 30 日周四 3-4 节 (暂定).
期中考试地点: 待定.
期末考试时间: 2026 年 1 月 1 日周四上午 8:30-10:30(暂定).
期末考试地点: 待定.

1.3　关于答疑

线下答疑: 双周周二习题课课后, 理教 409.
线上答疑: 微信/邮件.
注意事项:

- 线上答疑的消息或者邮件我可能不一定能及时回复, 但一般来说 24 小时内我一定会回答. 在必要的情况下我会使用语音回复, 这样也更容易讲清楚思路, 我会尽量使用合适的语速. 如果问题较多, 也可以习题课后或者另约时间找我线下答疑.

- 答疑的内容可以包括不清楚的课程信息, 不懂的知识点, 不会做的题目等. 如果涉及到具体的题目请提供出处. 请尽量不要让我逐行检查某一个计算或证明是否正确或者哪里出错, 如果必要的话, 请至少保证书写的工整. 请不要询问过于宏大或者抽象的问题, 比如 “如何学好高数”.

1.4 关于习题课

内容: 评讲作业 + 重点难点知识回顾 + 补充习题 + 课后答疑. 基础为重, 不会进行超纲的拓展.

不计考勤, 允许不影响他人的迟到早退, 不占分数. 如果有事无法上课或者想听其他助教的习题课, 可以自行决定, 这一规则对我们三个习题课班都适用. 课上有任何问题可以随时举手提问.

1.5 关于作业

评分标准: 每次作业满分 100 分, 错 0-2 题不扣分, 错 3-4 题 95 分, 依此类推, 最后加起来折合成 30 分计入课程总评. 如果某次作业的题目过难, 会进行适当调整, 总体来说作业打分主要看大家的完成态度, 不会在这一项分数上为难大家. 请大家认真准备好两次考试.

提交方式: 正课提交纸质版作业, 习题课或正课发回. 作业提交时请注意与其他习题课班的同学的作业分开摆放 (我们也会到场组织秩序), 一般来说我会在习题课发回作业, 正课收作业时也会带上, 请大家及时取回.

作业规范: 每次作业请标注清楚姓名学号和作业次数. 无需抄题, 但是需要标注清楚题目的序号, 请尽量按照老师布置的顺序写解答, 不会做的题目可以空出来或者写部分解答, 也可以标注上自己的疑点. 请保持基本的书写工整和版面清晰. 最好使用 A4 大小左右的纸张书写, 本子可能不方便携带, 而且无法顺利进行收发衔接, 而纸张过大或者过小也可能不方便携带和保存.

1.6 说在前面的话

2 函数的定义与基本性质回顾

2.1 如何认识函数的概念

中学时期我们已经接触过许多常见的函数, 比如指数函数 $f(x) = a^x$, 对数函数 $f(x) = \log_a x$, 幂函数 $f(x) = x^\alpha$, 三角函数 $f(x) = \sin x, f(x) = \cos x, f(x) = \tan x$ 等等. 这些函数都有着简单具体的形式, 同时也是最重要的几种函数, 在中学的学习中我们针对这些具体的函数发展了许多技巧, 大部分同学结束高考不久, 想必还比较熟悉.

但是, 无论在科学研究还是在生产生活中, 函数所代表的变量之间的相互关系是多种多样的, 我们不可能生活在一个只包括上述几种函数的世界当中. 所以在高等数学中, 我们需要对抽象的未知函数进行系统的研究, 甚至从研究某一具体的函数转变成研究具有某一抽象特征的函数 (周期性, 凹凸性, 单调性, 连续性等等).

在研究这些性质之前, 我们首先要弄清楚什么是函数. 大家此前往往将函数与它的图象等同起来, 说到 $\sin x$ 就会想到正弦波的样子, 说到 x^2 则会想到一条向上开口的抛物线. 这样的几何直观当然有利于理解这些特殊函数的性质, 但对于抽象函数, 图象并不能给予我们足够的信息, 部分信息也不能反映在图象上 (下面会提到存在一个画不出图象的函数), 更不用说对于多元函数, 我们是无法想象高维空间中的图象的. 所以我们需要建立起一个新的认知: **函数就是一个映射, 一个作用机制, 一台吃进去 x 变出来 $f(x)$ 的机器** (函数的原文 function 本来就是作用的意思).

2.2 周期函数

定义 1. *周期, 周期函数, 最小周期.*

问题 1. *指出下列函数中哪些是周期函数, 哪些不是; 若是周期函数, 指出其周期.*

(1) $y = \sin ax\,(a > 0)$. *(2)* $y = 4$. *(3)* $y = \sin 2x + \sin \pi x$. *(4)* $y = \sin x + \cos x$.

注 1. *在未加说明的情况下, 应当指出其全部周期.*

以上的函数仍然是我们熟悉的几种具体函数作四则运算可以得到的, 并没有跳出中学数学处理问题的框架, 大家只需熟悉周期的定义即可. 但我们前面已经提到, 函数的本质是一个作用机制, 所以所谓周期函数, 不只是说它的图象呈现周期性变化, 更重要的是其定义 $f(x+T) = f(x), \forall x \in \mathbb{R}$, 也就是说, f 把距离为 T 的两个 x 打到同一个 y 上.

思考 1. *指出以下定义的 Dirichlet 函数的全部周期.*

$$D(x) = \begin{cases} 1 & x \in \mathbb{Q} \\ 0 & x \notin \mathbb{Q} \end{cases}.$$

注 2. *面对无法画出图象观察, 且并不熟悉的函数时, 要研究它的周期 (乃至任何性质), 都必须回到基本的定义. 大家要习惯这种跳出几何直观, 回归基本定义的思考方式.*

有时即使是熟悉的函数之间的复合, 我们也没有办法通过简单的观察得到它们的性质, 最后还是要落在回归定义这一步.

思考 2. *证明* $f(x) = \cos x^2$ *不是周期函数.*

注 3. *对于周期性这种非常强的性质, 如果要证明某个函数不满足这一性质, 通常都是使用反证法, 然后利用周期性推导矛盾.*

2.3 反函数

反函数是一个相对抽象的概念. 中学时期大家可能熟悉的定义是图象沿着 $y = x$ 直线作对称. 但对于一般的函数, 我们怎么样思考它的反函数的机制, 或者如何利用映射的观点来思考什么是反函数.

前面我们提到, 一个函数 f 就是一台机器, 喂给它一个自变量 x, 它就会根据自己的作用机制变出来一个函数值 $y = f(x)$. 那么它的反函数 f^{-1} 就可以看成是一台反向的机器, 它负责把这个 $y = f(x)$ 吃进去, 变出来原来这个 x. 当然这里有一个要求就是, 原来的机器 f 是单射, 也就是不会把两个不同的 x_1 和 x_2 都变成同一个 y, 不然的话这个反向的机器就会故障, 因为它不知道要变出来 x_1 和 x_2 中的哪一个了.

如何求 $y = f(x)$ 的反函数: 到底是先互换 x 和 y 的位置, 还是先解方程, 要做哪步不要做哪步. 这些问题或许曾经困扰过大家, 但是一旦我们想清楚了下面这些事情, 就会轻松很多: 函数就是一个作用机制, 而 x 和 y 其实只是代表 f 这台机器的原料和产物的两个符号, 它们之间并没有天然的函数关系, 反函数的身份就是以 f 的产物为原料, 以 f 的原料为产物的一台反向机器. 所以互换 x 和 y 的位置, 就相当于改用 x 表示 f 的产物, 也就是 f^{-1} 的原料 (自变量), 用 y 表示 f 的原料, 也就是 f^{-1} 的产物 (因变量). 解方程也就是确定反向机器的具体形状. 这两步的先后顺序可以互换.

问题 2. *已知* $f(x) = x + 1$, *求* $f^{-1}\left(\dfrac{1}{x}\right)$.

错误解答. 由于 $f(x)=x+1$, 所以 $f\left(\frac{1}{x}\right)=\frac{1}{x}+1$. 令 $y=\frac{1}{x}+1$, 则 $x=\frac{1}{y-1}$. 所以

$$f^{-1}\left(\frac{1}{x}\right)=\frac{1}{x-1}.$$

□

正确解答. 令 $y=x+1$, 则 $x=y-1$, 即 $f^{-1}(x)=x-1$. 代入 $\frac{1}{x}$ 得

$$f^{-1}\left(\frac{1}{x}\right)=\frac{1}{x}-1.$$

□

注 4. 错误解答中求出来的实际上是 $h(x)=f\left(\frac{1}{x}\right)$ 这个函数的反函数, 而题中所求则是 $f(x)$ 的反函数代入 $\frac{1}{x}$ 这个自变量得到的函数.

思考 3. 如何确定反函数的定义域.

2025 秋高等数学 D 习题课讲义

数学科学学院 冯宣瑞 2401110009

2025 年 9 月 30 日

1 第二次作业选讲

1.1 求极限: 习题一第 19 题

在之前的课程中, 我们学习了数列极限的 “$\epsilon - N$ 语言” 定义, 以及函数极限的 “$\epsilon - \delta$ 语言” 定义, 并尝试用定义验证计算了几个基本的极限. 然而, 在实际的题目中, 数列或函数的形式往往十分复杂, 用定义去计算极限已不可能. 在此情况下, 我们需要运用几种常见的处理方式, 将要求极限的数列/函数转化成可以通过四则运算和简单极限求出来极限的形式.

这里我们常用的工具主要有: **恒等变形** (因式分解, 裂项求和, 等差等比数列求和, 三角函数和差化积/积化和差/和角差角倍角公式, 分子/分母有理化等等), **夹逼定理** (最常用于复杂求和公式或极限为 0 的计算), 凑常用极限 (转化为 e 的定义式), **主项分析/无穷大量量级估计** (主要用于数列极限或 x 趋于无穷时的函数极限), **无穷小量/无穷大量替换** (常见于整体为分式但有很复杂的项的情况) 等等. 但是归根结底, 快速准确计算极限的要点在于熟练掌握常见的不等式放缩技巧, 无他, 唯有熟能生巧.

希望大家通过不断地做题和整理, 能够总结出常见的**放缩技巧和量级估计**的结果, 就像高考备考期间针对各种作文题材积累素材一样, 在考场上即使见不到原题, 也可以根据题目出现的各种形式, 针对性地使用最有效的办法. 这才是大家做题的最重要的意义.

最后强调一点, 对于这种较难的极限计算题, 所给的函数基本都是连续函数. 在此情况下, 希望大家养成一个习惯: 从一开始每操作一步或化简一步, 都把自变量的极限点代入进去, 只要代入后得到的不是不定式 $\left(\frac{0}{0}, \frac{\infty}{\infty}, 0\cdot\infty, \infty-\infty, 1^\infty\right)$, 那么就已经做完了. 即使仍是不定式, 也有可能有一些形式复杂的部分可以被拎出去. 简单的例子: $\lim\limits_{x\to 0}\frac{\sin x}{x\cdot\cos(e^x x^2)}$. 虽然带有 cos 的项形式极为复杂, 但当 $x=0$ 时该项 $=1$, 因此根据极限四则运算, 该极限就等于 $\frac{\sin x}{x}$ 的极限. 这有助于大家一步步拨开迷雾见青天. 如果始终想着如何对这一项进行变形或者估计, 那很大概率是做不出来的.

问题 1 (恒等变形)**.** *因式分解: (12)(13). 初始形式分别是 $\frac{0}{0}$ 和 $\infty-\infty$ 形式的不定式, 但通过因式分解可以转化成直接代入可得结果的形式. 注意计算不要出错.*

等差等比求和: (10)(11). 这样的求和可以直接计算, 对于等差等比数列求和的公式一定要熟练记住. (10) 不可以拆成 $\lim\limits_{n\to\infty}\frac{1}{n^2}+\cdots+\lim\limits_{n\to\infty}\frac{n}{n^2}=0+\cdots+0=0$ 来做, 因为求和一共有 n 项, 而 n 是一个趋于无穷的变量, 不能出现在极限过程外面.

分子有理化: (2)(6)(9)(15). 之所以想到分子有理化, 是因为这样可以消除部分或全部的不定式影响: (2)(6) 可以去掉 $\infty-\infty$ 的情况 (注意 $\infty+\infty=\infty$ 不是不定式), (9)(15) 可以去掉 $\frac{0}{0}$ 的情况. 实际解题当中几乎都可以这么做. (9) 需要看清楚趋于 0 的变量到底是什么.

直接代入就能做: (3)(4)(14)(16). 如果不养成直接代入的习惯, 再去做其他变形, 只会多此一举.

问题 2 (夹逼定理)**.** *(8)* $\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{n^{1/3}\sin n}{n+1}$.

错误写法 1. $\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{n^{1/3}\sin n}{n+1}=\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{n^{1/3}}{n+1}\cdot\lim\limits_{n\to\infty}\sin n=0$. (利用极限四则运算时一定要保证拆出来的极限都存在, 否则是错误的写法) □

错误写法 2. 因为 $n^{1/3}\sin n<n+1$, 所以 $\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{n^{1/3}\sin n}{n+1}=0$. (分子比分母小不能说明极限是 0) □

错误写法 3. $\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{n^{1/3}\sin n}{n+1}=\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{n^{1/3}\cdot n}{n+1}=\infty$.(无穷小量替换 $\sin x\sim x$ 要求在 $x\to 0$ 时) □

正确写法. $\left|\dfrac{n^{1/3}\sin n}{n+1}\right|\leq\dfrac{n^{1/3}}{n}=n^{-2/3}\to 0$. 故原极限 $=0$. □

注 1. *这实际上就是课本提到的: 有界变量 × 无穷小量 = 无穷小量.*

注 2. *关于正弦函数 sin 的估计方式总结如下:*

(1) 如果 sin 后面的东西是一个存在极限且不等于 $k\pi$ 的量, 根据前述, 直接代入就会产生一个极限非 0 的量, 然后就不需要特殊处理了. 如 $x\to 0$ 时 $\sin(\cos x)\to\sin 1$.

(2) 如果 sin 后面的东西是一个极限为 0 的量, 则由无穷小量替换 $\sin x\sim x$, 可以把 sin 这个量代换为这个量本身. 如果极限是 $k\pi$, 利用诱导公式转化为极限是 0 的情况然后同样代换. 如 $x\to 0$ 时 $\sin x^3\sim x^3$, $n\to\infty$ 时 $\sin\dfrac{1}{e^n}\sim\dfrac{1}{e^n}$.

(3) 如果 sin 后面的东西是一个发散到无穷的量, 我们大概知道这个正弦值会不断在 $[-1,1]$ 之间振荡, 此时一般都只能用 $|\sin|\leq 1$ 进行放缩, 因为我们实在没有更好的信息了. 这可以用来处理看起来很可怕的量, 比如 $\sin n,\sin(e^n),\sin(n^2 n!)$ 等等, 越是这样复杂的形式, 放缩的方式越有限而标准.

问题 3. *主项分析/无穷大量量级估计: (1)(5)(7). 常见于数列极限或 $x\to\infty$ 的函数极限, 且表达式形式为分式, 分子分母均为无穷大量. 这类问题在动笔计算之前, 关键在于先思考一个问题, 也就是分子分母的增长速度分别是由哪一项 (主项) 控制的. 通常来说如果所求极限存在, 分子分母的主项应该一致 (或相差一个常数倍), 而其他项都是相对于主项来说增长速度更慢的. 此时可以直接分子分母同时除以主项, 其他项则全部变成极限为 0 的无穷小量了.*

思考 1. *常见的无穷大量之间的大小关系: $\ln n<<n^\alpha<<a^n<<n!<<n^n$.*

证明. 分子 $n!$ 中后面一半每一个都 $\leq n$, 抵消掉分母中一半的 n:

$$\frac{n!}{n^n}\leq\frac{([\frac{n}{2}])!}{n^{[n/2]}}\leq\frac{1}{2^{[n/2]}}\to 0.$$

对分母 $n!$ 中 $\leq[a]$ 的都放缩成 1, $\geq[a]+1$ 的都放缩成 $[a]+1$:

$$\frac{a^n}{n!}\leq\frac{a^n}{([a]+1)\cdots n}\leq a^{[a]}\cdot\left(\frac{a}{[a]+1}\right)^{n-[a]}\to 0.$$

对分母 $a^n=(1+(a-1))^n$ 作二项式展开, 只保留 $[\alpha]+1$ 次项:

$$\frac{n^\alpha}{a^n}\leq\frac{n^\alpha}{C_n^{[\alpha]+1}(a-1)^{[\alpha]+1}}\to 0.$$

$\ln n << n^\alpha$ (**较为复杂, 选读**): 只需要证明对任意 $\beta > 0$, $\ln n < n^\beta$ 在 n 充分大时成立, 然后就有

$$\frac{\ln n}{n^\alpha} \le \frac{n^{\alpha/2}}{n^\alpha} = n^{-\alpha/2} \to 0.$$

而 $\ln n < n^\beta$ 等价于 $n < e^{n^\beta}$. 前面已经证明 $e^n >> n^{1/\beta}$, 所以 $e^{n^\beta} >> (n^\beta)^{1/\beta} = n$. □

思考 2. *常见的无穷小量之间的大小关系: $x, \sin x, \tan x, 1-\cos x, x^\alpha, a^x - 1, \ln(x+1), \arcsin x, \arctan x$.*

1.2 证明题: 补充题第 2 题

问题 4. *设数列 $\{x_n\}$ 满足 $\lim_{n\to\infty} x_n = 0$, 以及 $\lim_{n\to\infty} \frac{x_{n+1}}{x_n} = a$. 证明: $|a| \le 1$.*

逻辑关系错误 1. $|x_n| \le \epsilon, |x_n| \le |a| \cdot \epsilon \Rightarrow |a| \le 1$. □

逻辑关系错误 2. $\frac{x_{n+1}}{x_n} \to a \Rightarrow \frac{x_{n+1}}{x_n} = a$. □

逻辑关系错误 3. $\lim_{n\to\infty} \frac{x_{n+1}}{x_n} = \frac{\lim_{n\to\infty} x_{n+1}}{\lim_{n\to\infty} x_n} = a$. (极限四则运算必须保证分母极限不为 0) □

逻辑关系错误 4. $\lim_{n\to\infty} x_n = 0 \Rightarrow |x_{n+1}| \le |x_n|$ 或者 $|x_n|$ 必然单调递减收敛到 0. □

逻辑关系错误 5. $|x_n|$ 单调递增 $\Rightarrow |x_n|$ 发散到无穷/没有上界, 或者 $\Rightarrow |x_n|$ 不可能收敛. □

注 3. *证明题的过程书写中很重要的一环是因果关系和逻辑推导. 所有过程中得到的中间结论, 都必须严格写清楚是从什么条件或者什么定理得到的, 并且确实真的可以得到. 并不是说我从条件中推出几个正确的结论, 然后说所以最终结论成立, 这个证明就是对的; 也并不是说只要我推出的结论在这个题里确实成立, 那么推导就没有问题.*

比如上面提到的逻辑关系错误 5, 如果通过合理取 ϵ 得到, 当 n 充分大时 $|x_{n+1}| \ge \frac{|a|+1}{2}|x_n|$, 再通过反证法假设 $|a| > 1$ 以及等比数列公式, 确实可以证明 $|x_n|$ 会发散到无穷, 从而导出矛盾. 但是如果只说 $|x_n|$ 递增, 并不能得到发散的结论, 因为当然存在递增数列收敛的例子. 任何的结论都必须真的能从前一步严格推导出来.

注 4. *以上的几种错误在去年和今年的作业批改中屡见不鲜. 其实如果单独作为判断题让大家做, 几乎所有的同学都能判断出其中的错误, 但是自己写证明的时候往往意识不到, 或者推到这一步发现推不出想要的结论, 却没有去更换前面的思路, 而是将错就错. 如果是因为意识不到, 希望大家以此机会提醒自己, 比如数列收敛本身不能推出任何跟单调性有关的东西; 如果是因为将错就错, 考场上无奈之下可以以此争取更多的分数, 但在平时作业中还是要多去思考正确的解答.*

证明. 反证法. 假设 $|a| > 1$, 由条件 $\lim_{n\to\infty} \frac{x_{n+1}}{x_n} = a$ 知, 对 $\epsilon = \frac{|a|-1}{2} > 0$, 存在 $N > 0$, 使得当 $n > N$ 时都有

$$\left|\frac{x_{n+1}}{x_n} - a\right| < \epsilon.$$

从而

$$\left|\frac{x_{n+1}}{x_n}\right| \ge |a| - \epsilon = \frac{|a|+1}{2} > 1.$$

因此当 $n > N$ 时总有 $|x_{n+1}| > |x_n|$, 特别地, 当 $n > N+2$ 时总有 $|x_n| > |x_{N+2}| > |x_{N+1}| \ge 0$. 这说明 $\lim_{n\to\infty} |x_n| \ge |x_{N+2}| > 0$, 与 $x_n \to 0$ 矛盾. 假设不成立, 原命题得证.

或可以具体计算得到当 $n > N$ 时:

$$|x_n| \geq \left(\frac{|a|+1}{2}\right)^{n-N-1}|x_{N+1}|,$$

故 $\lim\limits_{n\to\infty}|x_n| = +\infty$, 与 $x_n \to 0$ 矛盾. □

1.3 证明题: 补充题第 3 题, 第 4 题

问题 5. 设函数 $f(x)$ 在 x_0 点有极限 $\lim\limits_{x\to x_0} f(x) = A > 0$. 请用 $\epsilon - \delta$ 语言证明: $\lim\limits_{x\to x_0}\sqrt{f(x)} = \sqrt{A}$.

问题 6. 设函数 $f(x)$ 在 x_0 点有极限 $\lim\limits_{x\to x_0} f(x) = A \neq 0$. 请用 $\epsilon - \delta$ 语言证明: $\dfrac{1}{f(x)}$ 在 x_0 附近有界.

思考 3. 函数有界, 有上界, 有下界的定义分别是什么.

逻辑关系错误 *1.* $A - \epsilon < f(x) < A + \epsilon \Rightarrow \dfrac{1}{A-\epsilon} < \dfrac{1}{f(x)} < \dfrac{1}{A+\epsilon}$. □

逻辑关系错误 *2.* $|f(x)| \leq A \Rightarrow \dfrac{1}{|f(x)|} \leq A$. □

自行增加条件. 假设 $\lim\limits_{x\to x_0}\sqrt{f(x)} = B$, 则 $B^2 = A$. □

证明. 由极限保号性知存在 $\delta_1 > 0$, 使得当 $0 < |x - x_0| < \delta_1$ 时总有 $f(x) > 0$. 此时 $\sqrt{f(x)}$ 有合理定义.

对任意 $\epsilon > 0$, 由条件 $\lim\limits_{x\to x_0} f(x) = A$ 知, 存在 $\delta_2 > 0$, 使得当 $0 < |x - x_0| < \delta_2$ 时总有 $|f(x) - A| < \sqrt{A}\epsilon$, 则当 $0 < |x - x_0| < \delta = \min(\delta_1, \delta_2)$ 时总有

$$|\sqrt{f(x)} - \sqrt{A}| = \frac{|f(x) - A|}{\sqrt{f(x)} + \sqrt{A}} \leq \frac{\sqrt{A}\epsilon}{\sqrt{A}} = \epsilon,$$

故所求极限成立. □

证明. 不妨设 $A > 0$, 否则用 $-f$ 代替 f 即可. 对 $\epsilon = \dfrac{A}{2} > 0$, 由条件 $\lim\limits_{x\to x_0} f(x) = A$ 知, 存在 $\delta > 0$, 使得当 $0 < |x - x_0| < \delta$ 时总有

$$|f(x) - A| < \epsilon = \frac{A}{2},$$

即 $f(x) > \dfrac{A}{2} > 0$. 故此时 $0 < \dfrac{1}{f(x)} < \dfrac{2}{A}$, 即 $\dfrac{1}{f}$ 在 x_0 附近有界. □

1.4 证明题: 补充题第 6 题

问题 7. 若 $\lim\limits_{x\to\infty} f(x) = A$, $\lim\limits_{x\to\infty} g(x) = B$, 且 $B \neq 0$, 则 $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{f(x)}{g(x)} = \dfrac{A}{B}$.

本题难度较大, 但题目条件和结论形式均比较简单, 所以思路基本上是固定的, 与补充题第 3 题大致相同, 就是利用绝对值不等式对 $\left|\dfrac{f(x)}{g(x)} - \dfrac{A}{B}\right|$ 进行放缩, 用 $|f(x) - A|$ 和 $|g(x) - B|$ 来进行控制. 其实这样的思路是几乎所有抽象证明题以及用定义证明极限的通法: 就是通过不等式放缩, 将目标函数与目标极限的差的绝对值, 转化为已知函数与已知极限的差的绝对值, 或者转化为 $|x - x_0|$(函数极限) 或者关于 n(数列极限) 的直接的表达式.

$$\Big|\frac{f(x)}{g(x)}-\frac{A}{B}\Big|=\Big|\frac{Bf(x)-Ag(x)}{Bg(x)}\Big|.$$

在放缩过程中要时刻记住: 我们是要希望这个量小于任给的一个很小的 ϵ, 所以不能放缩过头, 特别地, 最极端的情况是把 $f(x)$ 换成 A, 把 $g(x)$ 换成 B, 这个表达式要等于 0. 否则一定是放过头了.

前面提到我们希望用 $|f(x)-A|$ 和 $|g(x)-B|$ 来进行控制 (这两个相当于是已经有人跟上帝玩过这两把游戏并且通关了, 现在轮到我们来玩, 由于我们对抽象函数一无所知, 所以需要借助前人的成功经验), 所以对分子进行一个常见的加一项减一项放缩:

$$|Bf(x)-Ag(x)|=|Bf(x)-AB+AB-Ag(x)|\le|B|\cdot|f(x)-A|+|A|\cdot|g(x)-B|.$$

现在我们借助前人的成功经验, 对于任给的 $\epsilon>0$, 存在 $X>0$ 使得当 $x>X$ 时总有 $|f(x)-A|<\epsilon, |g(x)-B|<\epsilon$, 从而此时分子已经被控制住为一个小量. 现在我们只需要确定分母 $|B||g(x)|$ 有没有大于等于什么常数就可以了. 由条件 $\lim\limits_{x\to\infty}g(x)=B$, 且 $B\neq 0$, 则存在 $X_1>0$ 使得当 $x>X_1$ 时总有 $|g(x)-B|<\dfrac{|B|}{2}$, 即 $|g(x)|\ge\dfrac{|B|}{2}$. 所以当 $x>\max(X,X_1)$ 时总有

$$\Big|\frac{f(x)}{g(x)}-\frac{A}{B}\Big|\le\frac{|B|\epsilon+|A|\epsilon}{|B|^2/2}=\frac{2(|A|+|B|)}{|B|^2}\epsilon.$$

这就证明了结论.

注 5. *很多同学采用了分解 $f(x)=A+\alpha, g(x)=B+\beta$, 其中 α,β 都是无穷小量, 这样就只要证 $\dfrac{B\alpha-A\beta}{Bg(x)}$ 也是无穷小量. 这是一个很好的思路, 但是要注意此时我们应用的是 "有界变量 $\times$ 无穷小量 $=$ 无穷小量", 而不是 "无穷小量 / 有界变量 $=$ 无穷小量", 所以下面需要证明的是 $\dfrac{1}{Bg(x)}$ 有界, 而不是 $Bg(x)$ 有界. "无穷小量 / 有界变量 $=$ 无穷小量" 一般来说并不成立.*

总体来说本次作业的补充证明题难度较大, 对于初学的同学们来说并不容易, 结合我个人的经验来看, 非数学专业的同学们往往对证明题具有天然的恐惧. 从普遍情况来看, 计算题主要涉及的技巧较为单一, 并且始终出现的是有具体形式的函数, 大家在中学阶段已经见得比较多了, 所以即使涉及到新的知识和技巧, 相对来说也更好处理一些. 而证明题通常涉及抽象函数性质的直接逻辑推导, 几乎没有任何具体形式的函数可以操作, 加上对知识和技巧的融会贯通和灵活运用要求更高, 所以更容易出现综合难度较大的情况.

根据往年经验, 本次作业证明题的思维难度已经足以覆盖考试的难度, 当然这并不是说会了这六道题考试就没有问题. 一方面, 这些题目确实难度较大, 大家一时无法完全吸收理解, 或者觉得出现类似的题目还是不会做, 都属正常; 另一方面, 也希望大家如果想攻克证明题这一关, 在假期回来考试之前, 反复去回顾和书写这几道题的过程, 体会其中比较核心的证明思想和放缩技巧, 直到让它们成为一种自然的想法. 同时结合书上的证明和学习指导书上的补充题, 多积累自己的武器库.

此外, 无论是希望进一步地理解课本内容, 还是提升自己对证明题思路的理解, 都非常推荐大家阅读一下谢彦桐学长撰写的非常经典的高数习题课讲义 (文件我会发在群里, 我的主页上也有链接). 虽然这份讲义是高数 B 的参考资料, 但其中部分内容跟我们课程要求是一致的. 特别推荐 "序列极限讲义" 部分的 1.1 和 1.2 两节内容.

2 祝大家假期快乐!

2025 秋高等数学 D 第三次习题课讲义

数学科学学院　冯宣瑞　2401110009

2025 年 10 月 14 日

1　第三次作业选讲

1.1　x^x 型极限: 对数法与重要极限法

在极限的计算题中, 一种非常常见的形式是 x^x 型极限, 也就是所要求极限的函数的表达式中, 底数和指数同时含有未知数. 由于形式非常接近第二个重要极限

$$\lim_{n\to\infty}\left(1+\frac{1}{n}\right)^n = e, \quad \lim_{x\to\infty}\left(1+\frac{1}{x}\right)^x = e,$$

一个最自然的思路是使用适当的变形, 将其凑成对应的形式.

问题 1 (习题一第 19 题 (19) 问)**.** $\lim\limits_{n\to\infty}\left(1+\dfrac{4}{n}\right)^n$.

问题 2 (习题一第 19 题 (20) 问)**.** $\lim\limits_{x\to\infty}\left(1-\dfrac{1}{x}\right)^x$.

问题 3 (习题一第 19 题 (21) 问)**.** $\lim\limits_{n\to\infty}\left(1+\dfrac{1}{n}\right)^{n+m}$.

重要极限法.

$$\lim_{n\to\infty}\left(1+\frac{4}{n}\right)^n = \lim_{n\to\infty}\left[\left(1+\frac{1}{n/4}\right)^{n/4}\right]^4 = e^4.$$

$$\lim_{x\to\infty}\left(1-\frac{1}{x}\right)^x = \lim_{x\to\infty}\left[\left(1+\frac{1}{-x}\right)^{-x}\right]^{-1} = e^{-1}.$$

$$\lim_{n\to\infty}\left(1+\frac{1}{n}\right)^{n+m} = \lim_{n\to\infty}\left(1+\frac{1}{n}\right)^n\cdot\lim_{n\to\infty}\left(1+\frac{1}{n}\right)^m = e\cdot 1 = e.$$

□

注 1. *在求极限的过程中, 一定要留意哪些字母是变量, 哪些字母是给定的常量. 对于写在* lim *下面的极限变量, 一定不能出现在极限符号的外面. 如第三题部分同学会写成*

$$= \left[\lim_{n\to\infty}\left(1+\frac{1}{n}\right)^n\right]^{1+\frac{m}{n}} = e^{1+\frac{m}{n}}.$$

这实际上就把极限变量 n 给带到极限符号外面来了, 是绝对不可以的. 答案里无论如何也不可能带着 n.

以上所用的重要极限法虽然自然, 但较为依赖于所要求极限的函数的底数中具有明显的 $1+\dfrac{1}{*}$ 的形式, 而且涉及到指数的运算, 很多时候不方便运用. 下面我们介绍一种几乎是万金油的方法, 也就是取对

数法, 不但应用范围更广, 而且可以一劳永逸消除指数的运算, 而转化为我们熟悉的乘除运算, 从而可以自由叠加无穷小量替换.

取对数法.

$$\lim_{n\to\infty} n\ln\Big(1+\frac{4}{n}\Big) = \lim_{n\to\infty} n\cdot\frac{4}{n} = 4.$$

$$\lim_{x\to\infty} x\ln\Big(1-\frac{4}{x}\Big) = \lim_{x\to\infty} x\cdot\Big(-\frac{4}{x}\Big) = -4.$$

$$\lim_{n\to\infty} (n+m)\ln\Big(1+\frac{1}{n}\Big) = \lim_{n\to\infty} \frac{n+m}{n} = 1.$$

□

根据上节课提到的不定式的五种形式, 我们知道对于 x^x 型极限, 只有底数极限为 1 的情况才需要特殊处理, 所以取完对数后 ln 后面的表达式极限一定是 1, 必然可以通过无穷小量替换 $\ln x \sim x-1$ 把对数去掉. 对数法可以帮助我们解决形式更加一般的函数极限问题.

问题 4 (2023 期中)**.** $\lim\limits_{x\to\frac{\pi}{2}-0}(\sin x)^{\tan x}$.

问题 5 (补充题)**.** 设函数 $f(x)$ 在 $x=a$ 处可导, 且 $f(a)>0$, 求 $\lim\limits_{n\to\infty}\left(\frac{f(a+\frac{1}{n})}{f(a)}\right)^n$.

1.2 间断点: 习题一第 20 题

定义 1. 连续点, 间断点, 第一类间断点, 第二类间断点, 可去间断点, 跳跃间断点, 无穷间断点.

根据定义, 要判断一个点是连续点还是间断点, 必须充分考虑它在定义域里的位置. 特别地, 如果定义域是分段区间, 而要考虑的点只是一个区间的端点, 只需要看单侧连续性, 这时不可能是跳跃间断点.

问题 6 (习题一第 20 题第 (7) 问)**.** 指出函数 $y = x\sin\dfrac{1}{x}$ 的连续区间和间断点类型.

问题 7 (习题一第 20 题第 (8) 问)**.** 指出函数 $y = \dfrac{x^2-1}{x^2-3x+2}$ 的连续区间和间断点类型.

1.3 最值定理与中间值定理在证明题中的运用: 习题一第 22 题

定理 1 (最值定理)**.** 连续函数 $f(x)$ 在有界闭区间 $[a,b]$ 上可以取到它的最大值和最小值.

定理 2 (中间值定理)**.** 连续函数 $f(x)$ 在有界闭区间 $[a,b]$ 上可以取到 $f(a)$ 与 $f(b)$ 之间的一切值.

推论 1 (零点存在性)**.** 连续函数 $f(x)$ 在有界闭区间 $[a,b]$ 上满足 $f(a)$ 与 $f(b)$ 异号, 则 $f(x)$ 在 $[a,b]$ 上有零点.

推论 2 (值域连续性)**.** 连续函数 $f(x)$ 在有界闭区间 $[a,b]$ 上可以取到最大值与最小值之间的一切值, 因而其值域必为一个连续区间.

问题 8 (习题一第 22 题第 (2) 问)**.** 如果 $f(x)$ 在 $[a,b]$ 上连续, 且无零点, 则 $f(x)>0$ 或 $f(x)<0$.

正确写法 1. 反证法. 假设结论不成立, 则存在 $c,d\in[a,b]$ 使得 $f(c)>0, f(d)<0$. 不妨设 $c<d$, 由中间值定理, 存在 $\xi\in[c,d]$ 使得 $f(\xi)=0$, 与 f 无零点矛盾. 故原结论成立. □

正确写法 2. 由最值定理, $f(x)$ 在 $[a,b]$ 上取到最大值 M 和最小值 m. 且由中间值定理的推论, $f(x)$ 在 $[a,b]$ 上可以取到 $[m,M]$ 中的一切值. 由于 f 无零点, 故 $0 \notin [m,M]$, 即 $m>0$ 或 $M<0$, 即 $f(x)>0$ 或 $f(x)<0$. □

错误写法 1: 这也要证. 因为 $f(x)$ 没有零点, 所以 $f(x) \neq 0$, 所以 $f(x)>0$ 或者 $f(x)<0$. □

错误写法 2: 记号重复. 假设结论不成立, 则存在 a,b 使得 $f(a)>0, f(b)<0$. □

错误写法 3: 依据不足. 由最值定理, $f(x)$ 在 $[a,b]$ 上取到最大值 M 和最小值 m. 由于 f 无零点, 所以 $m>0$ 或 $M<0$. (一定要写出能取到 $[m,M]$ 中一切值) □

2 第四次作业选讲

2.1 可导的定义: 习题二第 3 题

问题 9 (习题二第 3 题)**.** *若下面的极限都存在, 判别下式是否正确.*

(1) $\lim\limits_{\Delta x\to 0}\dfrac{f(x_0)-f(x_0-\Delta x)}{\Delta x}=f'(x_0)$*;*

(2) $\lim\limits_{\Delta x\to 0}\dfrac{f(x_0+\Delta x)-f(x_0-\Delta x)}{2\Delta x}=f'(x_0)$*.*

注 2. 本题考查的实际上是判断函数在一点处是否可导的等价方式, 即左边的极限存在是否能判断 f 在 x_0 处可导, 且导数等于该极限值. 因此作答时不能事先假定 $f'(x_0)$ 存在.

错误解答.

$$\begin{aligned}&\lim_{\Delta x\to 0}\frac{f(x_0+\Delta x)-f(x_0-\Delta x)}{2\Delta x}\\ =&\frac{1}{2}\lim_{\Delta x\to 0}\frac{f(x_0+\Delta x)-f(x_0)}{\Delta x}+\frac{1}{2}\lim_{\Delta x\to 0}\frac{f(x_0)-f(x_0-\Delta x)}{\Delta x}\\ =&\frac{1}{2}f'(x_0)+\frac{1}{2}f'(x_0)\\ =&f'(x_0).\end{aligned}$$

□

注 3. 运用极限的四则运算法则时, 必须时刻注意, 经过转化之后的表达式是否还存在极限.

不严谨的解答. 分类讨论: 当 f 在 x_0 处可导时正确, 理由如下:

$$\begin{aligned}&\lim_{\Delta x\to 0}\frac{f(x_0+\Delta x)-f(x_0-\Delta x)}{2\Delta x}\\ =&\frac{1}{2}\lim_{\Delta x\to 0}\frac{f(x_0+\Delta x)-f(x_0)}{\Delta x}+\frac{1}{2}\lim_{\Delta x\to 0}\frac{f(x_0)-f(x_0-\Delta x)}{\Delta x}\\ =&\frac{1}{2}f'(x_0)+\frac{1}{2}f'(x_0)\\ =&f'(x_0).\end{aligned}$$

当 f 在 x_0 处不可导时错误. □

注 4. *这里有一定的逻辑问题: 必须要说明左边的极限存在能推出 f 在 x_0 处可导, 或者存在一个反例使得左边的极限存在但是 f 在 x_0 处不可导, 否则实际上并没有解决这道题.*

正确解答. (2) 的结论是错误的. 取 $f(x)=|x|$, $x_0=0$, 则左边的极限存在:

$$\begin{aligned}&\lim_{\Delta x\to 0}\frac{f(x_0+\Delta x)-f(x_0-\Delta x)}{2\Delta x}\\=&\lim_{\Delta x\to 0}\frac{|\Delta x|-|\Delta x|}{2\Delta x}=0.\end{aligned}$$

但是 $f(x)$ 在 $x_0=0$ 处不可导, 原式不正确. □

注 5. *一个本质的问题在于, 函数在某一点处的可导性与该点处的取值密切相关, 而函数在某一点处的极限与该点处的取值无关. 所以事实上我们可以任取一个可导函数, 修改其在一个点处的取值, 得到的新的函数就不满足 (2), 因为修改这个取值后左边极限不变, 但右边导数就不存在了 (在该点处甚至不连续).*

2.2 判断分段函数可导性: 习题二第 10 题

问题 10 (习题二第 10 题)**.** *判断函数* $f(x)=\begin{cases}x^2+1 & x\le 1\\ 2x+3 & x>1\end{cases}$ *在 $x=1$ 是否可导.*

错误写法 1: 分不清左右极限和左右导数. $\lim\limits_{x\to 1^-}f(x)=1+1=2$, $\lim\limits_{x\to 1^+}f(x)=2+3=5$, 故 f 在 $x=1$ 处左右导数不相等, 所以不可导. □

错误写法 2: 还是分不清左右极限和左右导数. $f'_-(1)=\lim\limits_{x\to 1^-}f(x)=1+1=2$, $f'_+(1)=\lim\limits_{x\to 1^+}f(x)=2+3=5$, 故 f 在 $x=1$ 处左右导数不相等, 所以不可导. □

注 6. *以上两种错误都是意识到了函数在 1 处不连续, 所以不可导, 但是写法有问题.*

正确解答 1. $\lim\limits_{x\to 1^-}f(x)=1+1=2$, $\lim\limits_{x\to 1^+}f(x)=2+3=5$, 故 f 在 $x=1$ 处左右极限不相等, 不连续, 所以不可导. □

错误写法 3: 左右导数求法不对. $f'_-(1)=\lim\limits_{\Delta x\to 0^-}\dfrac{f(1+\Delta x)-f(1)}{\Delta x}=\lim\limits_{\Delta x\to 0^-}\dfrac{(1+\Delta x)^2+1-2}{\Delta x}=2$, $f'_+(1)=\lim\limits_{\Delta x\to 0^+}\dfrac{f(1+\Delta x)-f(1)}{\Delta x}=\lim\limits_{\Delta x\to 0^+}\dfrac{2(1+\Delta x)+3-5}{\Delta x}=2$, 故 f 在 $x=1$ 处左右导数相等, 所以可导. □

注 7. *这里看起来出现了矛盾: 一方面根据前面的讨论 f 不连续, 所以不可导; 另一方面直接计算左右导数似乎又是相等的, 符合导数存在的定义. 这里的问题出在计算左右导数时代入的 $f(1)$ 函数值有问题, 算左导数代入了 2, 算右导数却代入了 5.*

2.3 隐函数求导

问题 11 (习题二第 13 题)**.** *求以下方程所确定的隐函数的导数:*

(1) $(x-2)^2+(y-3)^2=25$, *(2)* $\cos(xy)=x$,

(3) $y=1+xe^y$, *(4)* $x^y=y^x$.

错误解答. (2) $y=\dfrac{1}{x}\arccos x$, $y'=-\dfrac{1}{x^2}\arccos x-\dfrac{1}{x\sqrt{1-x^2}}$. □

正确解答. (2) $-\sin(xy)(y+xy')=1, y'=\dfrac{1}{x}\Big(-\dfrac{1}{\sin(xy)}-y\Big)$. □

注 8. 不要将方程决定的隐函数求出来然后直接求导, 首先大部分情况这是解不出来的, 其次隐函数的唯一性并不是一件显然甚至正确的事情, 比如 *(1)(2)* 中的隐函数都不唯一, 所以解出来的结果并不严谨, 我们应该掌握直接对隐函数求导的办法.

注 9. 一般来说隐函数求导的结果会带有自变量 x 和隐函数 y 本身, 而 y 本质上又是 x 的函数, 所以经过不同的化简方式会得到形式上不同的表达式. 这是非常自然的, 只要求导过程正确, 一定可以证明这些表达式是等价的, 因此不需要刻意追求形式的简化, 求出来之后直接下结论即可.

问题 12 (习题二第 18 题)**.** 若 $x+2y-\cos y=0$, 求 $\dfrac{\mathrm{d}^2y}{\mathrm{d}x^2}$.

错误解答. 对 x 求一阶导: $1+2y'+\sin y\cdot y'=0$, 故 $y'=-\dfrac{1}{2+\sin y}$. 两边再对 x 求导得: $y''=\dfrac{\cos y}{(2+\sin y)^2}$. □

注 10. 必须时刻牢记 y 是关于 x 的函数, 很多同学上一题可以做对, 这题求一阶导也都求对, 但是求第二次导数的时候就忘记再乘一个 y', 实际上第二次变成了对 y 求导. 一个可能有帮助的办法是在计算的过程中不写 y, 而是写 $f(x)$, 可以提醒自己这一项也是关于 x 的函数. 但是卷子上最后的结果必须写成带有 y 的形式.

问题 13 (补充题)**.** 设 u,v 关于 x 二阶可导, 令 $y=\arctan\dfrac{u}{v}$, 求 $\dfrac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x},\dfrac{\mathrm{d}^2y}{\mathrm{d}x^2}$.

2025 秋高等数学 D 第四次习题课讲义

数学科学学院　冯宣瑞　2401110009

2025 年 10 月 28 日

1　导数部分常见题型

1.1　根据导数定义计算复杂极限

我们回忆函数的导数的定义:

$$f'(x) = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{f(x+\Delta x) - f(x)}{\Delta x}.$$

由此可见, 导数的定义是离不开极限的计算的. 这也衍生出另一类型的题目: 在求一个抽象函数的复杂极限时, 可以考虑通过变形凑出类似于上式右边的形式, 从而将所求极限转化为某一函数的导数.

问题 1. 设函数 $f(x)$ 在 $x=a$ 处可导, 且 $f(a)>0$, 求极限

$$\lim_{x\to+\infty} \left(\frac{f(a+\frac{1}{x})}{f(a)}\right)^x.$$

注 1. 回忆上次课所提到的取对数法处理 x^x 型极限.

1.2　x^x 型函数导数的直接计算

常见函数的导数计算相对来说是大家比较熟悉的内容. 这一部分的主要难点在于幂指函数 x^x 型函数的导数的计算. 课上老师讲过两种方法, 不过个人推荐大家采用取对数法, 相对来说不用记忆复杂的公式.

$$y = x^x \Rightarrow \ln y = x\ln x \Rightarrow \frac{y'}{y} = \ln x + 1 \Rightarrow y' = y(\ln x + 1) = x^x(\ln x + 1).$$

这里的隐患在于大家可能在做第二步时, 会忘记 y 是关于 x 的函数, 从而写不出 $(\ln y)' = y'/y$ 这一步. 但是这个隐患本身在隐函数求导时也很容易出现, 所以不如就用心把这件事记住, 把这个方法用好.

问题 2 (2024 期中)**.** 设函数 $f(x) = \left(\sin\dfrac{1}{x}\right)^{\sin\frac{1}{x}}$, 求导数 $f'\left(\dfrac{2}{\pi}\right)$.

1.3　分段函数求导

在许多题目中, 都会涉及到一个分段定义的函数的连续性或可导性问题. 函数在每一段上通常都是初等函数的形式, 所以不需要额外的讨论, 但是在分段的端点处, 因为函数在左右两边的性态是由两个不同的表达式给出的, 所以一定要通过定义去讨论这一点处的极限连续性/可导性/导数等概念, 不能想当然利用函数表达式直接形式计算.

问题 3 (习题二第 9 题)**.** *设* $f(x)=\begin{cases}1-e^{2x}, & x\le 0;\\ x^2, & x>0.\end{cases}$ *求* $f'(x)$.

这里定义的分段函数 f 里面 0 是分段的端点, 所以对于 $x<0$ 和 $x>0$ 都可以直接形式上求导得到, 但在 $x=0$ 处不能直接下结论:

$$f'(x)=(1-e^{2x})'=-2e^{-2x}.$$

这是因为这样的形式计算有一个底层逻辑, 就是函数在 0 的左右两边都按照 $1-e^{2x}$ 的形式来变化, 但这里 $f(x)$ 在 0 的右边由另一个函数来描述. 直接按照定义可以验证 $f(x)$ 在 0 处左右导数不相等, 故不可导.

问题 4 (2024 期中改)**.** *设* $f(x)=\begin{cases}x^{\alpha}\sin\dfrac{1}{x}, & x\neq 0;\\ 0\end{cases}$ *在* $(-\infty,+\infty)$ *上可导. 求* α *的取值范围.*

1.4 洛必达法则相关概念辨析

在高等数学 D 的课程中, 导数的计算是一个重要专题, 而由此产生的一个重要工具就是洛必达法则, 其作用范围之广, 效果之强, 从它的名声之大可见一斑. 但是它的使用条件实际上常常被大家所忽略, 这里我们通过一道作业题来讨论.

问题 5 (习题三第 9 题)**.** *求下列各极限, 并指出能否使用洛必达法则? 为什么?*

(1) $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{x-\sin x}{x+\sin x}$; *(2)* $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{x^2\sin\frac{1}{x}}{\sin x}$.

我们回顾洛必达法则的适用条件: 如果极限 $\lim\limits_{x\to a}\dfrac{f(x)}{g(x)}$ 是 $\dfrac{0}{0}$ 型或 $\dfrac{\infty}{\infty}$ 型未定式, 不能直接通过连续函数代入的方法求出极限, 则可以对上下同时求导, 如果此时得到的极限存在, 则原极限也存在且极限值相等. 以上的条件缺一不可.

这也就意味着: 其一, 如果所要求极限的函数的形式不是 $\dfrac{0}{0}$ 或者 $\dfrac{\infty}{\infty}$ 的形式, 是不可以使用洛必达法则的. 简单的例子:

$$\lim_{x\to\infty}\frac{1}{x}.$$

这一极限显然等于 0. 但如果错误地使用洛必达法则, 上下求导得到极限为 1, 虽然此时极限存在, 但也不等于原来的所求极限. 其二, 如果对所要求极限的函数上下求导后, 得到的新函数极限不存在, 则没办法继续使用洛必达法则. 而此时也不能断言, 原来所求的极限不存在. 换言之, 洛必达法则是一种退而求其次的尝试, 原来的问题太难无法处理, 我们尝试退一步看看能不能解决, 但如果退完是一条死路, 那我们只有回到原问题想别的办法. 不能说退完是死路, 那原来也是死路. 比如这道习题.

错误解答 1: 判断错误. 题中函数分子分母在定义域内都可导, 且所求极限都是 $\dfrac{0}{0}$ 型或 $\dfrac{\infty}{\infty}$ 型未定式. 所以可以使用. □

错误解答 2: 理由错误. 部分同学的判断正确, 但是说明的理由有误.

- 不能使用, 因为 $1-\cos x$ 和 $1+\cos x$ 在 $x\to\infty$ 时振荡/没有极限/不能确定/分母可能为 0.
- 不能使用, 因为分子分母在定义域内不是处处可导.
- 不能使用, 因为 $\sin x$ 在 $x\to\infty$ 时振荡. □

1.5 洛必达法则在计算中的应用

对于形式过于复杂的极限, 常规办法几乎无法处理, 那么只要验证了满足前面所说的使用条件, 大家尽可以放心地运用洛必达法则. 当然一个直观的理解是, 用完之后我可以做到一些化简, 比如分子或者分母变成非 0 非无穷的形式, 或者复杂的函数被化简了.

问题 6 (2018 期中)**.** *计算极限*

$$\lim_{x\to 1}\frac{x-x^x}{1-x+\ln x}.$$

有时也会遇到多次使用洛必达法则的情况.

问题 7 (习题三第 8 题 (10)(12))**.** $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{e^{-\frac{1}{x^2}}}{x^{100}}$*;* $\quad\lim\limits_{x\to +\infty}\dfrac{x^n}{e^{5x}}$*.*

这两道题都是典型的多项式/指数型的极限, 本质上是要利用指数函数求导不变, 而多项式有限次求导为 0 的性质去多次运用洛必达法则. 在书写过程的时候, 我们要将这个多次求导的过程展现出来, 不能笼统地写大白话. 对于 (10) 这种变形的结构, 还要找到合适的转化方法.

错误解答. $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{e^{-\frac{1}{x^2}}}{x^{100}}=\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\frac{2}{x^3}e^{-\frac{1}{x^2}}}{100x^{99}}=...=0.$ □

注 2. *如果直接对原来的函数上下求导, 由于分子会创造出来一个* $\dfrac{2}{x^3}$*, 其中的* x^3 *会乘到分母上去, 所以分母的多项式次数反而会不断增大, 这样最后是得不到答案的. 这也是大家一定要把每次求导之后的结果写清楚的原因.*

正确解答. 令 $t=\dfrac{1}{x^2}$, 则 $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{e^{-\frac{1}{x^2}}}{x^{100}}=\lim\limits_{t\to+\infty}t^{50}e^{-t}=\lim\limits_{t\to+\infty}\dfrac{50t^{49}}{e^t}=...=\lim\limits_{t\to+\infty}\dfrac{50!}{e^t}=0.$ □

正确解答. $\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{x^n}{e^{5x}}=\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{nx^{n-1}}{5e^{5x}}=...=\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{n!}{5^ne^{5x}}=0.$ □

对于不直接表现为一个分式的函数极限来说, 也可以通过适当换元或者变形, 转化为分式的极限, 再去运用洛必达法则. 对于加减法来说通常先通分 + 无穷小量替换简化形式, 对于乘法来说则想办法把 $a\cdot b$ 变成 $\dfrac{a}{1/b}$ 或者 $\dfrac{b}{1/a}$, 具体选择哪个取决于哪个适合求导.

问题 8. *设 n 为正整数, 求极限*

$$\lim_{x\to 0^+}x^n\ln x.$$

1.6 罗尔定理的应用

回忆一下, 之前对于有界闭区间上的连续函数, 我们得到了最值定理和中间值定理两个非常有力的结论, 从而很好地刻画了连续函数的特点, 在许多关于抽象连续函数的证明中都需要用到这两个结论和它们的推论.

那么如果把条件加强到可导, 对应的就是罗尔定理的结论, 它给予我们判断一个抽象函数的导数存在零点的非常有力的工具. 我们不需要知道关于 $f(x)$ 的导数的任何信息, 只要找到两个点函数值相等, 就能在中间确认导数零点的存在性.

应用于解题当中, 只要题目中要证明存在某个中间值 ξ, 使得一个等式成立, 那么几乎可以确认就是构造一个辅助函数 $F(x)$, 使得这个等式等价于 $F'(\xi)=0$. 从而只需要找到 F 有两个点函数值相等, 结论就成立了. 当然也有可能是等价于 $F(\xi)=0$, 那就对应使用零点存在性定理即可, 这是前一章的结论了.

问题 9 (2024 期中)**.** *设 $f(x)$ 在 $[a,b]$ 上连续, 在 (a,b) 上可导, 且 $f(a)=f(b)=0$. 证明: 对任意实数 α, 存在 $\xi\in(a,b)$, 使得 $\alpha f(\xi)=f'(\xi)$.*

而对于拉格朗日中值定理, 通常是利用 f' 的上界估计来控制两个函数值之间的差的大小. 比如如果有 $|f'(x)|\le M$ 恒成立, 则由拉格朗日中值定理, 存在 $\xi\in(a,b)$ 使得

$$f(b)-f(a)=(b-a)f'(\xi).$$

因此有

$$|f(b)-f(a)|\le M|b-a|.$$

问题 10 (2018 期中)**.** *设 $f(x)$ 在 $[a,b]$ 上连续, 在 (a,b) 上可导, 且对任意 $x\in(a,b)$, 有 $|f'(x)|\le M$. 若 $f(x)$ 在 (a,b) 上至少有一个零点, 证明:$|f(a)|+|f(b)|\le M(b-a)$.*

2 关于考试的一些说明

2.1 考试基本情况

期中考试时间是本周四 10 月 30 日上午 10:00-12:00, 地点是理教 207 课室, 随堂考试, 共两个小时, 试卷满分为 100 分. 根据去年情况分析, 题型可能包括判断题, 填空题, 计算题和证明题.

大家会拿到一份试卷, 一份答题纸和足量草稿纸. 答题纸是由 10 张 A4 白纸装订成册, 正反面都可以写, 空白位置充足. 试卷和草稿纸上作答和过程均不得分. 答题纸上所写的内容都会成为判分的依据, 不用抄题, 但需要标注清楚题号.

期中考试占总评的 30%, 平时作业占 30%, 期末考试占 40%.

2.2 一些基本建议

考前的复习以教材, 课后习题和作业题为重, 这部分内容如果完全掌握, 按往年的经验看已经可以取得较高的分数. 这门课程的知识量相比其他高等数学实在有限, 题目类型和套路其实不多, 扎实的基本功一定是最重要的. 对于往年题, 大家不要指望会出现十分类似的题目, 但可以了解一下考试常见的题目类型和解法. 如果时间来不及, 可以至少把往年题答案都看一下, 对考试的风格和给分的思路有个了解.

判断题和填空题以基本概念的考察为主, 技巧难度不会太高, 这部分题目一定要细心认真完成, 而且因为不用书写过程, 一点点的粗心可能就会丢很多分. 尤其不要出现抄答案到答题纸上时的笔误, 我们不可能去揣摩大家是否得到了正确答案. 实在遇到不会的, 一定要随便蒙一个答案, 还是有不小的概率可以蒙对的.

计算题和证明题, 过程的书写要严谨清晰. 题目的难度不一定是单调递增的, 不要因为前面的题目卡住就放弃后面的题目, 尤其如果后面的题有多个小问, 还是可以捡到不少分数. 实在不会的情况下, 建议把跟本题相关的你能想到的东西都写上去, 千万不要因为害怕不对而不写甚至完全留白.

一般来说期中考试总会难度较大一些. 根据教务老师要求, 期末成绩的卷面分不可以更改, 卷子要上交留档四年, 但是期中考试则不然. 去年的情况是, 期中成绩都取卷面分开根号乘 10 计入了总评, 这样下来平均分和中位数都挺高. 大家可以有个心理准备, 但不用太过于担心分数.

考试结束后会立刻组织改卷, 当天下午一定会把卷面分批改出来, 再由老师决定是否需要调分. 一旦调分方式确定 (也可能不调), 助教会尽快公布分数, 不会耽误大家思考是否退课. 改卷的方式是两个平行

班所有老师助教流水线批改, 且都有标准答案和步骤给分的规范, 不会出现不同助教和老师标准不一的情况. 大家考完之后请耐心等待, 不要单独发消息来问自己的分数.

期中考试后到退课之前, 我会让大家核对前五次作业的提交情况和得分, 如果有错漏请及时告诉我. 作业分数最后不会为难大家, 但也希望大家认真完成和提交作业, 至少让老师看到大家的学习态度是认真的.

3 祝大家考试顺利!

2025 秋高等数学 D 第五次习题课讲义

数学科学学院　冯宣瑞　2401110009

2025 年 11 月 11 日

1　单调, 极值, 最值, 凹凸

在课程刚开始的时候我们曾经提到, 如何回答高等数学这门课的目的这样一个问题: 高等数学课程的主要内容, 就是通过极限, 导数, 积分这三个基本工具, 研究一系列抽象函数的性质. 对于连续函数, 我们总结出最本质的性质就是最值定理和中间值定理及其推论. 而对于更好的可导函数, 借助于导数, 我们就可以研究一系列新的性质, 如前面提到的罗尔中值定理, 拉格朗日中值定理等, 而作为应用, 我们就可以以此分析函数的单调性, 极值点, 最值点, 凹凸性等. 这就是课本第三章最后两节的内容.

按照惯例, 这一部分不会是考试的重点, 最多也只会考察一下基本的定义和计算, 而且这里的内容大家高中也有所接触, 所以这里只作简要的概述.

1.1　单调

在本课程的教材中, 单调递增指的是高中时期所提到的严格单调递增, 即对于任意 $x > y$, 必须有 $f(x) > f(y)$ 而不能取等, 单调递减同理.

课本中提到的一个重要判别标准是, 若 $f(x)$ 可导, 且 $f'(x) > 0$ 恒成立, 则 $f(x)$ 单调递增. 这个结论大家在高中时期已经熟练运用. 下面我们思考一些变式.

问题 1. *判断以下说法是否正确:*

(1) 函数 $f(x)$ 在 (a,b) 上单调递增的充要条件是 $f'(x) > 0$ 在 (a,b) 上恒成立.

(2) 可导函数 $f(x)$ 在 (a,b) 上单调递增的充要条件是 $f'(x) > 0$ 在 (a,b) 上恒成立.

在数学中, 一个结论的判别标准 (criterion) 通常是这个结论的充分条件, 也就是这一标准成立就能推出结论成立, 但它不一定是必要条件, 或者说结论不一定与它等价, 又或者说结论可以在更广泛的意义下成立. 上面的问题有助于大家理解这一思想.

结合单调性的判别标准和连续函数的中间值定理, 我们还可以综合处理一些问题.

问题 2 (2025 秋高等数学 B 期中最后一题)**.** *设函数 $f(x) = x^8 - x^4 - \cos x$, 求 $f(x)$ 在 $(-\infty, +\infty)$ 上的零点个数.*

1.2　极值与最值

最大值与最小值的概念大家已经熟悉, 现在我们新引入了一个极值的概念, 从定义上看, 所谓极值点其实就是局部意义下的最值点. 我们当然可以理解, 一个函数的最值点有很重要的意义 (尤其是在实际问题中), 比如说一段时间内人口峰值, 最大收入, 流量低谷等概念, 那么极值点就可以理解成一小段时间内的对应现象. 从而对于极值点的研究也是必要的.

我们先回顾一下课本给出的可导函数的极值点的判别标准. 与单调性不同, 这里书上既给出了必要条件, 也给出了充分条件.

定理 1 (极值点的必要条件)**.** *设函数 $f(x)$ 可导, 则 x_0 是 $f(x)$ 的极值点的必要条件是 $f'(x_0)=0$.*

定理 2 (极值点的充分条件)**.** *设函数 $f(x)$ 可导, 则 x_0 是 $f(x)$ 的极大值点的充分条件是 $f'(x_0)=0$, 且存在 x_0 的邻域 $U(x_0)$, 使得 $x\in U^+(\bar{x_0})$ 时 $f'(x)<0$, $x\in U^-(\bar{x_0})$ 时 $f'(x)>0$. 极小值点反之.*

定理 3 (极值点的充分条件)**.** *设函数 $f(x)$ 二阶可导, 则 x_0 是 $f(x)$ 的极大值点的充分条件是 $f'(x_0)=0$, 且 $f''(x_0)<0$. 极小值点反之.*

以上条件大家可以通过简单的画图来记忆. 通常来说, 必要条件用于求出可能的极值点 (先用等式把极值点可能的范围算出来), 充分条件用于判断上一步求出来的点是不是真的是极值点. 课本也介绍了鞍点的定义, 也就是由定理1确定的所有点.

下面同样思考一些变式.

问题 3. *判断以下说法是否正确:*

(1) 函数 $f(x)$ 在 $x_0\in(a,b)$ 处取到极值的充要条件是 $f'(x_0)=0$.

(2) 可导函数 $f(x)$ 在 $x_0\in(a,b)$ 处取到极值的充要条件是 $f'(x_0)=0$.

(3) 可导函数 $f(x)$ 在 $x_0\in(a,b)$ 处取到极值的必要条件是 $f'(x_0)=0$.

(4) 函数 $f(x)$ 在 (a,b) 上有定义, $x_0\in(a,b)$ 为 $f(x)$ 的极值点, 则存在 x_0 的邻域 U, 使得 $f(x)$ 在 x_0 处取到 U 上的最值.

1.3 凹凸

凹凸性是这门课程中新引入的一个重要概念, 无论是在数学研究还是在其他领域的应用 (如经济学和定量社会学研究) 当中都十分常见. 我们先从课本上的定义和判别标准讲起.

定义 1 (凹凸)**.** *若曲线弧位于它每一点的切线上方, 则称此曲线弧是凹的, 若曲线弧位于它每一点的切线下方, 则称此曲线弧是凸的.*

这里需要对这个定义做一些说明.

其一, 这并不是一个严谨的数学定义. 从数学的角度看, 所谓位于上方等词语是不严谨的, 至少应该用数学表达式重写. 但这样描述有利于大家的理解.

其二, 这个定义并不是最标准的凹凸性的定义. 比如这里默认了函数有图像且是一段曲线弧 (当然也没说什么叫曲线弧), 还默认了每一点处都有切线. 但实际上凹凸性可描述的函数不止这些.

其三, 如果大家在其他书上或者视频中看到凹凸性的定义, 有可能会与书上的刚好相反, 也就是前者叫凸函数, 后者叫凹函数. 实际上这才是正确的叫法, 课本的写法是与主流不合的, 但在这门课中我们以教材为准.

定理 4 (凹凸性的判别标准)**.** *设函数 $f(x)$ 在区间 (a,b) 上二阶可导. 若 $f''(x)<0$ 恒成立, 则 $f(x)$ 是凸函数, 若 $f''(x)>0$ 恒成立, 则 $f(x)$ 是凹函数.*

从这个判别标准可以看出, 所谓凹凸性也近似于描述了函数的导数的单调性, 也就是说凹凸性可以看成是单调性的下一层延伸. 我们借助图像来理解, 如 $f(x)=\sqrt{x}$ 是单调递增的凸函数, 则可以看出 $f'(x)=\dfrac{1}{2\sqrt{x}}$ 是单调递减的, 也就是说函数是上升的, 但上升速度是下降的. 这跟我们所熟知的调分函数

$f(x)=10\sqrt{x}$ 对大家的影响是一样的, 也就是大家的分数都会变高, 但考得越高的人分数变高的幅度越小. 另一个例子就是我们的绩点函数 $f(x)=4-\dfrac{3(100-x)^2}{1600}$. 同等变化分数的情况下, 考的分数越低的人, 绩点受影响越大, 这也就是为什么老生常谈一门课的低分要十门课的高分来补.

一个笑话: 如何利用四阶导数研究房价变化. 2017 年 5 月 5 日广州从化发布: 我区多举措加强房地产调控力度, 楼价快速上涨趋势得到有效遏制.

对于凹凸性的研究, 基本不会涉及到不是二阶可导的情况, 因此这里不再进行概念辨析.

2 不定积分的基本概念

第四章主要讲的是积分的概念, 分为定积分和不定积分两类. 中学时期大家也许已经接触过积分的运算, 比如了解到定积分大概是函数图像围成的面积, 然后可以用牛顿-莱布尼茨公式计算. 但现在我们需要重新了解这两部分内容, 且必须要强调的一点是, 从定义的本质上看, 定积分与不定积分是完全不一样的事物, 这会在后面讲到定积分时重新解释. 定积分是非常复杂的一个概念.

我们首先学习不定积分的内容, 这一部分相对简单. 大致来说, 求不定积分就是求导的逆运算, 之前是给定函数求它的导数, 现在是要找什么东西求完导等于它. 我们先来进行概念辨析.

定义 2 (原函数)**.** 函数 $F(x)$ 是函数 $f(x)(x\in X)$ 的一个原函数, 如果对 $\forall x\in X$, 都有 $F'(x)=f(x)$.

定义 3 (不定积分)**.** 函数 $f(x)$ 的不定积分是指它的全体原函数, 记为 $\displaystyle\int f(x)\mathrm{d}x$.

命题 1 (原函数的刻画)**.** 如果 $F(x)$ 是 $f(x)(x\in X)$ 的一个原函数, 则 $\displaystyle\int f(x)\mathrm{d}x=F(x)+C$.

根据定义, 不定积分是全体原函数, 所以会有我们老生常谈的 $+C$ 问题. 也就是说, 我们求不定积分, 实际上是算出一个具体的原函数, 然后用它 $+C$ 来表示全体的原函数, 也就是不定积分. 一定要注意因为这个 $+C$ 的存在, 所以前面求出的原函数在相差一个常数的情况下都是对的.

换句话说, 原函数有无穷多个, 我们写出来的时候只是挑了一个作为代表元, 那么自然也有无穷多种挑法. 所以不定积分的结果从形式上看肯定有多种写法. 就像前面所学的隐函数求导一样, 不必追求答案形式的统一, 我们改卷时自然会去验证你的答案与标准答案是不是相差一个常数.

2025 秋高等数学 D 第六次习题课讲义

数学科学学院　冯宣瑞　2401110009

2025 年 11 月 25 日

1　不定积分综合讲解

在上一次课中, 我们已经介绍过不定积分的定义, 并着重强调了原函数与不定积分这两个概念的辨析. 这里再简要回顾一下: 从定义上看, 原函数是一个具体的函数, 它的求法对应的就是求导函数的逆运算; 不定积分是指全体原函数, 本质上是一个由函数构成的集合. 然而基于以下的事实: 两个函数具有相同的导函数, 则它们相差一个常数; 我们知道不定积分一定可以表示成一个原函数 $+C$, 所以归根结底还是只要求出一个原函数即可.

再次强调最后一定要 $+C$!

在理清我们的目标之后, 今天我们综合介绍求不定积分的各种方法和技巧, 并说明对于什么样的函数大概会采用什么样的方法. 对于大多数同学来说, 解不出一道不定积分不是因为知识上的欠缺, 而是拿到题目不知从何下手, 不知用什么方法往什么方向处理, 这和之前求极限的情况非常类似. 这个问题需要客观认识: 一方面, 包括求极限求不定积分在内的大多数数学问题, 本就没有一招鲜吃遍天的通法, 因此不可能指望有什么法宝秘籍能让我们看到一个极限或一个积分马上就知道怎么算, 我们能做的只有不断提高各种方法和计算的熟练程度, 让自己的武器库更加充实, 每一次尝试的效率更高; 另一方面, 数学的思维总是强调如何把未知的问题转化为已知的问题, 所以我们可以总结出一些常见的处理方法, 能够把题目中的问题不断简化, 同时通过不断的积累让自己已知的问题越来越多.

1.1　基本不定积分

前面提到, 一切复杂的积分都是要简化成我们熟悉的简单情况, 就像再复杂的复合函数求导最后都落实到基本初等函数的求导一样, 我们首先必须将基本的不定积分彻底熟练掌握.

$$\int 1\mathrm{d}x = x + C. \tag{1}$$

$$\int \frac{1}{x}\mathrm{d}x = \ln|x| + C. \tag{2}$$

$$\int x^{\alpha}\mathrm{d}x = \frac{1}{\alpha+1}x^{\alpha+1} + C \quad (\alpha \neq -1). \tag{3}$$

$$\int e^{x}\mathrm{d}x = e^{x} + C. \tag{4}$$

$$\int a^x \mathrm{d}x = \frac{1}{\ln a}a^x + C \quad (a > 0, a \neq 1). \tag{5}$$

$$\int \cos x \mathrm{d}x = \sin x + C. \tag{6}$$

$$\int \sin x \mathrm{d}x = -\cos x + C. \tag{7}$$

$$\int \sec^2 x \mathrm{d}x = \int \frac{1}{\cos^2 x}\mathrm{d}x = \tan x + C. \tag{8}$$

$$\int \csc^2 x \mathrm{d}x = \int \frac{1}{\sin^2 x}\mathrm{d}x = -\cot x + C. \tag{9}$$

$$\int \frac{1}{1+x^2}\mathrm{d}x = \arctan x + C. \tag{10}$$

$$\int \frac{1}{\sqrt{1-x^2}}\mathrm{d}x = \arcsin x + C = -\arccos x + C. \tag{11}$$

这 11 个不定积分必须牢牢记住, 形成肌肉记忆, 因为它们是构建自己武器库的最底层的部分, 只有熟练掌握才能进一步往上搭台. 而且要注意的是, 所谓牢牢记住不是说只记住这些不定积分的形式, 而是看到这 11 个函数要马上想到它们的原函数长成右边的形式, 这对于后面换元法和分部积分法的使用时机的判断至关重要.

注 1. (2)中必须写成 $\ln|x|$ 而不能省去绝对值, 否则定义域不同.

注 2. (3)中注意原函数的幂次始终比被积函数多 1, 如果幂次是负数, 对应的也是幂次 $+1$ 而不是幂次绝对值 $+1$.

注 3. (8)和(9)中被积函数是平方形式, 但原函数没有平方.

注 4. (11)中右端原函数有两种常见写法, 即写成 $\arcsin x$ 或 $-\arccos x$. 因为这两个函数的值始终相差 $\pi/2$, 因此 $+C$ 之后对应的不定积分是相同的.

以上基本不定积分的第一个常见推广就是, 把被积函数中的 x 变成 $ax+b$ 的形式, 比如

$$\int \sin(ax+b)\mathrm{d}x, \quad \int (ax+b)^\alpha \mathrm{d}x, \quad \int \frac{1}{1+(ax+b)^2}\mathrm{d}x, \quad \int \frac{1}{\sqrt{1-(ax+b)^2}}\mathrm{d}x,$$

这是因为只要做换元 $u = ax+b$, 由于 $\mathrm{d}u = a\mathrm{d}x$, 整个问题立刻化归到前面的情况. 现在我们的武器库已经从最开始的 11 个积分充实到它们经过线性换元得到的所有形式. 根据具体题目中被积函数的形式, 可以考虑能不能凑出形式接近的对应基本不定积分. 此外, 我们还可以结合一些恒等变形进行处理.

问题 1.

$$\int \frac{1}{\sqrt{2x-x^2}}\mathrm{d}x.$$

问题 2.

$$\int \frac{1}{4x^2+4x+2}\mathrm{d}x.$$

问题 3.

$$\int \frac{1}{x^2-4}\mathrm{d}x.$$

1.2 第一换元法

换元法实际上都是利用复合函数求导的链式法则, 来达到简化被积函数的形式的目的. 第一换元法也叫凑微分法, 侧重于从被积函数中“删掉”一些多余的项, 把它们“吃”到微分后面去, 这需要对常见微分的写法比较熟练:

$$a\mathrm{d}x = \mathrm{d}(ax+b), \quad x\mathrm{d}x = \mathrm{d}\Big(\frac{1}{2}x^2\Big), \quad e^x\mathrm{d}x = \mathrm{d}e^x, \quad \cos x\mathrm{d}x = \mathrm{d}\sin x.$$

从中也可以看出, 上面这些写法其实就是对被积函数中要被“吃掉”的那部分先做不定积分, 然后再考虑换元之后的形式. 这也是为什么一定要对 11 个基本不定积分掌握非常熟练. 特别是熟练运用

$$\sin x\mathrm{d}x = -\mathrm{d}\cos x, \quad \cos x\mathrm{d}x = \mathrm{d}\sin x,$$

对于处理只带三角函数的不定积分非常有效.

问题 4.

$$\int xe^{-\frac{x^2}{2}}\mathrm{d}x.$$

问题 5.

$$\int \frac{\sin x}{\cos^2(\cos x)}\mathrm{d}x.$$

问题 6.

$$\int x\sin(x^2+1)\mathrm{d}x.$$

1.3 第二换元法

第二换元法侧重于往被积函数中“添加”一些新的项, 或者直接改变被积函数的形式. 最常见的有两种: 其一是前面提到过的线性变换 $x = ay+b$, 适合处理形式上接近 11 个基本不定积分但系数稍有不同的情况; 其二是三角换元, 适合处理带有根号的不定积分.

$$\int \frac{1}{x^2+2}\mathrm{d}x = \int \frac{1}{(\sqrt{2}y)^2+2}\mathrm{d}(\sqrt{2}y) = \frac{\sqrt{2}}{2}\int \frac{1}{y^2+1}\mathrm{d}y = \frac{\sqrt{2}}{2}\arctan\Big(\frac{x}{\sqrt{2}}\Big)+C.$$

$$\begin{aligned}\int \sqrt{1-x^2}\mathrm{d}x &= \int \sqrt{1-\cos^2 t}\,\mathrm{d}(\cos t) = -\int \sin^2 t\mathrm{d}t = \frac{1}{2}\int \cos(2t)-1\mathrm{d}t \\ &= \frac{1}{4}\sin(2t) - \frac{t}{2} + C = \frac{1}{2}x\sqrt{1-x^2} - \frac{\arccos x}{2} + C.\end{aligned}$$

通常来说遇到 $\sqrt{1-x^2}$ 则用 $x = \cos t$ 换元 ($t \in [0,\pi]$, 可以保证 $\sin t \geq 0$), 遇到 $\sqrt{1+x^2}$ 则用 $x = \tan t$ 换元, 遇到 $\sqrt{x^2-1}$ 则用 $x = 1/\cos t$ 换元.

注 5. *三角换元 $x = \sin t$ 等虽然是很有效的工具, 但是由于三角函数的周期性, 我们对反三角函数是有值域的限制的:*

$$\arcsin x \in [-\frac{\pi}{2},\frac{\pi}{2}), \quad \arccos x \in [0,\pi), \quad \arctan x \in [-\frac{\pi}{2},\frac{\pi}{2}).$$

如果不加以说明, 换元之后变量 t 的取值范围就可能有歧义, 也容易在后面的计算中误导自己, 因此希望大家都要写出 t 的取值范围. 特别地, 因为原来的积分变量 x 一般来说不是正数, 所以不要通过画直角三角形的方式来说明.

问题 7 (习题四第 4 题第 (17) 问)**.** $\displaystyle\int \frac{\sqrt{x^2-a^2}}{x}\mathrm{d}x.$

错误解答. 令 $x = a\sec t$, 则 $\mathrm{d}x = a\tan t\sec t\mathrm{d}t$. 代入得

$$\begin{aligned}\int \frac{\sqrt{x^2-a^2}}{x}\mathrm{d}x &= \int \cos t\cdot\sqrt{\frac{\sin^2 t}{\cos^2 t}}\cdot a\sec t\tan t\mathrm{d}t\\ &= a\int \tan^2 t\mathrm{d}t\\ &= a(\tan t - t + C).\end{aligned}$$

又 $t = \arccos\dfrac{a}{x}$, $\tan t = \sqrt{\dfrac{1-\cos^2 t}{\cos^2 t}} = \dfrac{\sqrt{x^2-a^2}}{a}$, 则所求不定积分等于

$$\sqrt{x^2-a^2} - a\arccos\frac{a}{x} + C.$$

□

注 6. 本次作业几乎所有同学本题都是采用以上的写法, 问题就出在换元之后的第一步变换, 因为 t 的取值范围是 $[0,\pi)$, 对应地 $\tan t$ 有正负两种取值, 分别对应 x 的正负两种取值, 所以拆开根号之后实际上得到的是 $|\tan t|$. 这时就需要分类讨论, 得到的结果也是分段的, 当然可以从形式上将其合并, 但这是三角换元常见的问题.

注 7. 之所以强调求完积分之后要求导验算, 就是因为这里如果进行一步验算就会发现, 当 $x<0$ 的时候这个结果求导后不等于原来的被积函数.

正确解答 *1*. 令 $x = a\sec t$, $t\in[0,\pi)$, 则 $\mathrm{d}x = a\tan t\sec t\mathrm{d}t$. 当 $x>a$ 即 $t\in[0,\dfrac{\pi}{2})$ 时, 代入得

$$\begin{aligned}\int \frac{\sqrt{x^2-a^2}}{x}\mathrm{d}x &= \int \cos t\cdot\sqrt{\frac{\sin^2 t}{\cos^2 t}}\cdot a\sec t\tan t\mathrm{d}t\\ &= a\int \tan^2 t\mathrm{d}t\\ &= a(\tan t - t + C).\end{aligned}$$

又 $t = \arccos\dfrac{a}{x}$, $\tan t = \sqrt{\dfrac{1-\cos^2 t}{\cos^2 t}} = \dfrac{\sqrt{x^2-a^2}}{a}$, 则所求不定积分等于

$$\sqrt{x^2-a^2} - a\arccos\frac{a}{x} + C.$$

当 $x<-a$ 即 $t\in(\frac{\pi}{2},\pi)$ 时, 代入得

$$\begin{aligned}\int\frac{\sqrt{x^2-a^2}}{x}\mathrm{d}x &= \int\cos t\cdot\sqrt{\frac{\sin^2 t}{\cos^2 t}}\cdot a\sec t\tan t\mathrm{d}t\\ &= a\int-\tan^2 t\mathrm{d}t\\ &= -a(\tan t-t+C).\end{aligned}$$

又 $t=\arccos\frac{a}{x}$, $\tan t=-\sqrt{\frac{1-\cos^2 t}{\cos^2 t}}=-\frac{\sqrt{x^2-a^2}}{a}$, 则所求不定积分等于

$$\sqrt{x^2-a^2}+a\arccos\frac{a}{x}+C.$$

综上, 所求不定积分等于

$$\sqrt{x^2-a^2}-a\arccos\frac{a}{|x|}+C.$$

□

正确解答 2.

$$\begin{aligned}\int\frac{\sqrt{x^2-a^2}}{x}\mathrm{d}x &= \int\frac{x^2-a^2}{x^2}\mathrm{d}\sqrt{x^2-a^2}\\ &= \int\frac{t^2}{t^2+a^2}\mathrm{d}t\quad(t=\sqrt{x^2-a^2})\\ &= a\int\frac{y^2}{y^2+1}\mathrm{d}y\quad(t=ay)\\ &= a(y-\arctan y+C)\\ &= t-a\arctan\frac{t}{a}+C\\ &= \sqrt{x^2-a^2}-a\arctan\frac{\sqrt{x^2-a^2}}{a}+C.\end{aligned}$$

□

1.4　分部积分

分部积分是最常见的处理复杂积分的方式, 某种程度上它允许我们自由地把一些丑陋的东西移到微分后面去让它求导. 因此它常常跟第一换元法捆绑出现.

如果被积函数中出现对数函数 $\ln x$, 反三角函数 $\arctan x,\arcsin x,\arccos x$ 等函数, 我们称之为“丑陋但求完导好看的东西”, 就可以考虑把剩下的部分用第一换元法“吃”到微分后面去, 然后用分部积分把这部分东西转移到微分后面, 从而消除掉它们的形式. 如果没有剩下的东西, 那就直接使用分部积分.

如果被积函数出现指数函数 e^x, 而剩下的部分求导很好看, 则可以反复利用 $e^x\mathrm{d}x=\mathrm{d}e^x$ 把它“吃”过去然后分部积分, 让剩下的部分不停求导.

如果被积函数出现 x 乘上一些只跟三角函数或者指数函数有关的东西, 可以考虑把后面这些东西“吃”过去 (因为通常来说这部分可以用第一换元法), 然后分部积分, 从而把 x 消掉.

问题 8.

$$\int \ln(x^2+1)\mathrm{d}x.$$

问题 9.

$$\int x^n e^{-x}\mathrm{d}x.$$

问题 10.

$$\int \frac{xe^x}{\sqrt{1+e^x}}\mathrm{d}x.$$

问题 11.

$$\int x^n e^{-x}\mathrm{d}x.$$

解. 记所求不定积分为 $I_n(x)$. 由分部积分,

$$I_n(x) = -\int x^n \mathrm{d}(e^{-x}) = -x^n e^{-x} + \int e^{-x}\mathrm{d}(x^n) = -x^n e^{-x} + n\int x^{n-1}e^{-x}\mathrm{d}x.$$

即我们有

$$I_n(x) = -x^n e^{-x} + nI_{n-1}(x). \tag{12}$$

在(12)中用 $n-1$ 替换 n, 则有

$$I_{n-1}(x) = -x^{n-1}e^{-x} + (n-1)I_{n-2}(x). \tag{13}$$

联立(12)(13)得

$$I_n(x) = -x^n e^{-x} - nx^{n-1}e^{-x} + n(n-1)I_{n-2}(x). \tag{14}$$

观察(12)(14)可得规律, 即每一项均为 $-n(n-1)\cdots(n-k+1)x^{n-k}e^{-x}$, 其中 k 为非负整数. 因此可得

$$I_n(x) = -\sum_{k=0}^{n-1} n(n-1)\cdots(n-k+1)x^{n-k}e^{-x} + n!I_0(x).$$

注意到 $I_0(x) = -e^{-x} + C$, 则有

$$I_n(x) = -\sum_{k=0}^{n}\frac{n!}{(n-k)!}x^{n-k}e^{-x} + C.$$

也可以整理成

$$I_n(x) = -n!\sum_{k=0}^{n}\frac{x^k}{k!}e^{-x} + C.$$

可利用求导验算:

$$\begin{aligned}
I_n'(x) = & -n!\sum_{k=0}^{n} k\frac{x^{k-1}}{k!}e^{-x} + n!\sum_{k=0}^{n}\frac{x^k}{k!}e^{-x} \\
= & -n!\sum_{k=0}^{n-1}\frac{x^k}{k!}e^{-x} + n!\sum_{k=0}^{n}\frac{x^k}{k!}e^{-x} \\
= & n!\frac{x^n}{n!}e^{-x} = x^n e^{-x}.
\end{aligned}$$

□

注 8. 本题完整计算难度较大, 且需要对递推式和求和公式比较熟悉, 应该已经超过本课程要求. 大家掌握其中通过反复 "吃掉"e^{-x} 从而实现对 x^n 不停求导降次的思想即可.

问题 12.

$$\int \frac{xe^x}{\sqrt{1+e^x}}\mathrm{d}x.$$

解. 思路是希望通过第一换元法, 将 $\dfrac{e^x}{\sqrt{1+e^x}}$ "吃" 过去, 然后使用不定积分. 为此, 先求 $\dfrac{e^x}{\sqrt{1+e^x}}$ 的原函数.

由第一换元法, 令 $u=e^x$, 则有

$$\int \frac{e^x}{\sqrt{1+e^x}}\mathrm{d}x = \int \frac{1}{\sqrt{1+e^x}}\mathrm{d}(e^x) = \int (1+u)^{-1/2}\mathrm{d}u = \frac{1}{2}(1+u)^{1/2}+C = \frac{\sqrt{1+e^x}}{2}+C.$$

故在原不定积分中, 我们有

$$\int \frac{xe^x}{\sqrt{1+e^x}}\mathrm{d}x = \int x\mathrm{d}\frac{\sqrt{1+e^x}}{2} = \frac{x\sqrt{1+e^x}}{2} - \frac{1}{2}\int \sqrt{1+e^x}\,\mathrm{d}x.$$

为求上式最后一项不定积分, 作换元 $u=\sqrt{1+e^x}$, 则 $x=\ln(u^2-1)$,

$$\begin{aligned}\int \sqrt{1+e^x}\,\mathrm{d}x = \int u\mathrm{d}\ln(u^2-1) = \int \frac{2u^2}{u^2-1}\mathrm{d}u = \int 2+\frac{1}{u-1}-\frac{1}{u+1}\mathrm{d}u \\ = 2u+\ln\left|\frac{u-1}{u+1}\right|+C \\ = 2\sqrt{1+e^x}+\ln\frac{\sqrt{1+e^x}-1}{\sqrt{1+e^x}+1}+C.\end{aligned}$$

故原不定积分等于

$$\frac{x\sqrt{1+e^x}}{2}-\sqrt{1+e^x}-\frac{1}{2}\ln\frac{\sqrt{1+e^x}-1}{\sqrt{1+e^x}+1}+C.$$

□

注 9. 本题难度同样较大, 主要在于第一步换元法的思维量和计算量不小, 且换元分部积分后得到的简化后的不定积分同样也不好求. 大家同样以理解思想为主.

注 10. 本题第二步处理 $\int \sqrt{1+e^x}\,\mathrm{d}x$ 采用的方法比较特殊, 是将整个被积函数整体换元, 以牺牲微分符号 d 后面表达式形式的代价, 将被积函数暴力简化, 并指望 d 后面的 x 换元求导之后形式更加简单. 此方法常用于处理被积函数是单独一个根号下面复杂函数的情况, 值得积累.

2025 秋高等数学 D 第七次习题课讲义

数学科学学院　冯宣瑞　2401110009

2025 年 12 月 9 日

1　定积分综合讲解

上一次课我们综合回顾了不定积分的概念和各种计算方法, 现在我们转到定积分的研究. 以前我们往往觉得, 定积分不过就是不定积分加上了积分上下限, 只要能求出原函数, 代入两个值作差就得到定积分, 所以问题的关键在于求出原函数, 也就是求不定积分的这一步.

但是通过定积分的严格定义, 我们会发现, **定积分的定义本质上是与所谓求导逆运算完全无关的**, 它的直观意义是函数图像与坐标轴之间所围成的面积大小, 具体的定义用到复杂的切割区间和极限过程, 是一个独立的概念. 之所以可以和不定积分关联起来, 是根据牛顿-莱布尼兹法则得出的. 从这个角度上看, 不定积分只是一种运算, 而定积分才是揭示函数整体性质的本质工具.

但是话说回来, 如果从计算定积分的角度看, 在本课程范围内没有任何别的方法, 无一例外都是通过计算不定积分得到原函数, 再将积分上下限代入作差得到定积分, 所以这种初始的理解对于计算题来说没有问题.

1.1　定积分的计算

定积分的计算没有任何额外的技巧, 大家只需要熟练不定积分的计算, 这一部分就不会有本质的难度. 唯一需要注意的是在换元过程中积分上下限怎么变化. 这里我们只举几个简单的例子进行说明.

$$\int_0^1 \sqrt{1-x^2}\,\mathrm{d}x = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sqrt{1-\sin^2\theta}\,\mathrm{d}(\sin\theta) = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos^2\theta \mathrm{d}\theta = \frac{\theta}{2} + \frac{\sin 2\theta}{4}\Big|_0^{\frac{\pi}{2}} = \frac{\pi}{4}.$$

上面的计算过程演示了, 如何在换元的过程中更换积分上下限. 这里的规律是: **积分上下限始终对应着积分里面的变量的取值范围, 而不是微分符号 d 后面的部分的取值范围.** 这是因为积分上下限是最后算出原函数后要代入积分变量的, 而不是代入微分符号 d 后面的, 当原函数算出来后 d 早就不见了. 所以**第一个等号虽然 d 后面仍然是 $\sin\theta = x$, 积分上下限却已经换成了 θ 的取值范围, 而不是 $\sin\theta$ 的取值范围.**

这样的好处是不用把最后的原函数变回关于 x 的形式, 坏处是如果不熟悉以上过程, 可能会代入错误的积分上下限.

另一种办法就是直接扔掉上下限不管, 强硬求出关于 x 的原函数再代入, 这样的好处是不用担心积分上下限变错, 坏处是最后原函数可能形式上比较复杂.

$$\int \sqrt{1-x^2}\,\mathrm{d}x = \int \sqrt{1-\sin^2\theta}\,\mathrm{d}(\sin\theta) = \int \cos^2\theta \mathrm{d}\theta = \frac{\theta}{2} + \frac{\sin 2\theta}{4} = \frac{\arcsin x}{2} + \frac{\sin 2(\arcsin x)}{4}.$$

代入 $x=0$ 和 $x=1$ 作差得到:

$$\int_0^1 \sqrt{1-x^2}\mathrm{d}x = \frac{\pi}{4}.$$

后面这种方法在计算题中或许没有问题, 但在抽象函数的定积分证明题当中, 肯定还是会涉及到换元法带来的上下限的变化, 所以不建议大家偷这个懒.

以上演示的是第二换元法, 对于第一换元法也是同理.

$$\int_0^1 x\mathrm{d}x = \int_0^1 \mathrm{d}\Big(\frac{1}{2}x^2\Big) = \frac{1}{2}x^2\Big|_0^1 = \frac{1}{2}.$$

这里第一个等号后虽然 d 后面的数变化了, 但积分上下限却并没有变化.

1.2 定积分的定义和变限积分

我们简单回顾一下定积分的定义.

定义 1 (定积分)**.** *设函数 $f(x)$ 在闭区间 $[a,b]$ 上有界. 如果存在一个常数 I, 对 $\forall\varepsilon>0$, 存在 $\delta>0$, 使得对任意一个 $[a,b]$ 上的分割 $a=x_0<x_1<...<x_n=b$ 和任意的中间值 $\xi_i\in[x_{i-1},x_i]$, 只要 $\max|x_i-x_{i-1}|<\delta$, 就有*

$$\Big|\sum_{i=1}^n f(\xi_i)(x_i-x_{i-1})-I\Big|<\varepsilon,$$

则称函数 $f(x)$ 在闭区间 $[a,b]$ 上可积, I 称为函数 $f(x)$ 在闭区间 $[a,b]$ 上的定积分, 记为

$$I=\int_a^b f(x)\mathrm{d}x.$$

这个定义应该是本课程范围内形式最复杂的, 因为这里涉及到一个 "**双重任意**", 从而使这个极限过程与一般的不全相同. 具体而言, 只要我们划分区间足够细 (区间长度都$<\delta$), 那么我们对任意的划分方式, 任取区间中的中间值 ξ_i, 算出来的求和 (黎曼和) 都要离 I 足够近.

定积分的最大作用就是为我们提供了构造原函数的方法.

定义 2 (变限积分)**.** *设函数 $f(x)$ 在闭区间 $[a,b]$ 上可积, 定义 $f(x)$ 的变上限积分为*

$$F(x)=\int_a^x f(t)\mathrm{d}t,$$

变下限积分为

$$G(x)=\int_x^b f(t)\mathrm{d}t.$$

则变上限积分和变下限积分的求和是一个定值: $F(x)+G(x)=\displaystyle\int_a^b f(t)\mathrm{d}t$.

命题 1. *设函数 $f(x)$ 在闭区间 $[a,b]$ 上连续, 则 $f(x)$ 的变上限积分 $F(x)$ 就是 $f(x)$ 的一个原函数.*

关于变限积分的结构有以下几点需要注意:

其一, 变上限积分是一个关于 x 的函数, 这是因为从定义来看, 变上限积分是指从 a 到 x 的定积分, 等于说把左端点固定住, 任意输入一个自变量 x, 输出一个以 x 为右端点的区间上的定积分. 变上限积分作为一个关于 x 的函数, 其导函数是 $f(x)$, 也就是它本身是 $f(x)$ 的一个原函数. 这里的积分变量 t 是虚

假的变量, 只是一个积分记号, 可以替换成任意其他的字母, 但一定不能写成 $\int_a^x f(x)\mathrm{d}x$! 因为这里 x 已经是有实际意义的变量, 不能再作为虚拟变量出现. 类比求和的情况:

$$\sum_{i=1}^{n} a_i = \sum_{j=1}^{n} a_j = a_1 + \cdots + a_n,$$

但不能写 $\sum_{n=1}^{n} a_n$. 既然 $F(x) = \int_a^x f(t)\mathrm{d}t$ 是关于 x 的函数, 则它的导数也只能写成 $f(x)$ 而不是 $f(t)$, 因为 t 根本就是一个虚假变量.

其二, 变上限积分的积分下限不一定要取成 a, 而是可以取成任意的一个固定点, 因为这样的变换只会让 $F(x)$ 变化一个常数, 求导之后结果是一样的, 也就是都是 $f(x)$ 的原函数. 一般取成区间左端点是因为习惯让积分上限大于等于积分下限. 既然上限 x 是在 $[a,b]$ 中取值, 则下限取成 a 是最自然的一个方式.

其三, 变下限积分始终可以看成一个常数减去变上限积分, 为了记忆方便, 建议大家处理所有的变下限积分时都转化成常数减去变上限积分, 否则容易结果多出或者少掉一个负号.

其四, 对于变上限积分的求导, 如果上限本身也是关于 x 的函数, 求导时要多乘上上限的导数, 即

$$\Big(\int_a^{g(x)} f(t)\mathrm{d}t\Big)' = f(g(x)) \cdot g'(x).$$

这是因为左边实际上就是一个复合函数 $F(g(x))$ 求导, 其中 $F(x)$ 就是变上限积分 $\int_a^x f(t)\mathrm{d}t$, 根据复合函数求导法则:

$$\Big(F(g(x))\Big)' = F'(g(x)) \cdot g'(x) = f(g(x)) \cdot g'(x).$$

这里用到 $F' = f$.

问题 1. 求函数 $F(x) = \int_0^x \frac{\sin t}{t+1}\mathrm{d}t$ 的导数.

问题 2. 求极限:

$$\lim_{x\to 0} \frac{\int_0^x \frac{\sin t}{t+1}\mathrm{d}t}{x^2}.$$

问题 3. 求函数 $F(x) = \int_0^{2\ln x} \frac{\sin t}{t+1}\mathrm{d}t$ 的导数.

问题 4. 求极限:

$$\lim_{x\to 1} \frac{\int_0^{2\ln x} \frac{\sin t}{t+1}\mathrm{d}t}{(x-1)^2}.$$

1.3 定积分计算极限

前面我们给出了定积分的定义, 并提到这是一个非常复杂的极限过程, 并不会要求大家通过定义验证某个函数是否可积, 但一类非常经典的题型是, 反过来根据定积分来求解一系列求和形式的极限.

最常见的情况: 区间取成 $[0,1]$, 分割方式取成 $\Big[0, \frac{1}{n}\Big], \Big[\frac{1}{n}, \frac{2}{n}\Big], \cdots, \Big[\frac{n-1}{n}, 1\Big]$, 则当 $n \to \infty$ 时这一分割的区间长度趋于 0. 取中间值 $\xi_i = \frac{i}{n}$, 则根据定积分的定义,

$$\sum_{i=1}^{n} f(\xi_i)(x_i - x_{i-1}) = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} f\Big(\frac{i}{n}\Big)$$

应该收敛到 $\int_0^1 f(x)\mathrm{d}x$. 所以只要所求的数列极限里, 可以写成 $\frac{1}{n}$ 乘上 $\sum_{i=1}^{n}$ 某个函数 f 在 $\frac{i}{n}$ 处的取值, 则极限就等于 $\int_0^1 f(x)\mathrm{d}x$. 注意这一方法要求所凑出的函数 f 与 n 和 i 无关.

问题 5.

$$\lim_{n\to\infty}\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}\sin\frac{n+i}{n}.$$

问题 6.

$$\lim_{n\to\infty}\frac{1}{n^{\frac{3}{2}}}\sum_{i=1}^{n}\sqrt{i}.$$

1.4 无穷积分

在本课程中, 无穷积分的计算和敛散性判断相比起一般定积分的计算, 没有本质上的难度增加, 因为只需要计算出有限区间上的定积分, 再判断上限趋于 $+\infty$ 时有无极限即可.

需要注意的是, 无穷积分发散并不都能写成无穷积分 $=\infty$, 举例:

$$\int_0^\infty \cos x\mathrm{d}x$$

发散, 但不能说它等于 ∞.

问题 7 (习题四 29(4))**.**

$$\int_1^\infty \frac{1}{(x+\sqrt{x^2-1})^n}\mathrm{d}x.$$

重要的不定积分解题思路: **万般无奈之下可以把被积函数整个换元成 t.** 反正这个函数都这么丑了, 我也没办法处理了, 干脆把你变成最好看的样子, 把麻烦交给微分符号 d, 说不定求一次导有奇效.

2 多元函数及其极限

课本的第五章涉及到多元函数的微积分运算, 主要是将前面的极限, 微分, 积分理论引入到多元函数当中, 主要是二元函数. 这一引入是非常重要的, 因为在实际生产生活当中, 很少会遇到一个因素决定一件事情的情况, 绝大多数事情都会受到多种因素的影响, 要想系统地分析多个因素作用的情况, 就要采用多元函数的概念.

2.1 多元函数的基本概念

回顾我们课程开始的时候问的一个基本问题: 什么是函数? 当时我们给出的揭示是, 函数就是一个作用机制, 就像一台机器, “吃” 进去什么 (x), 就会相应给出来什么 $(f(x))$. 而所谓函数极限, 可以理解成当 “吃” 进去的东西 (x) 越来越 “像” 某个东西 (x_0), 则它给出来的东西 $(f(x))$ 也会越来越 “像” 对应的给出来的东西 (y_0). 以上用数学语言来写就是

$$\lim_{x\to x_0} f(x) = y_0.$$

这就涉及到一个重要问题: 怎么刻画这个“像”的程度? 对于一元函数, 自变量和因变量都是实数, 自然用作差取绝对值来衡量. 但对于二元函数, 我们怎么来说 (x,y) 和 (x_0,y_0) 很接近? 怎么刻画它们之间的距离? 这需要我们定义 $\mathbb{R}^2$ 上两个点的距离.

定义 3 ($\mathbb{R}^2$ 中的距离)**.** *设 P,Q 为 $\mathbb{R}^2$ 中的点, 坐标分别为 $P(x_1,x_2),Q(y_1,y_2)$, 则定义 P 与 Q 之间的距离为*

$$d(P,Q)=\sqrt{(x_1-y_1)^2+(x_2-y_2)^2}.$$

注 1. *直观上看, 我们说 (x,y) 和 (x_0,y_0) 很接近, 最直接的想法应该是 x 和 x_0 很接近, 且 y 和 y_0 很接近. 或者说, 一个合理的 $\mathbb{R}^2$ 上的距离的定义应该满足, (x,y) 和 (x_0,y_0) 很接近, 等价于是 x 和 x_0 很接近, 且 y 和 y_0 很接近. 事实是否如此呢?*

我们考虑这样定义的 $\mathbb{R}^2$ 中两点的距离和它们各自分量之间的距离 (一维实轴上的距离) 的关系: 一方面, P,Q 的距离可以控制它们各自分量之间的距离:

$$|x_1-y_1|\le d(P,Q),\quad |x_2-y_2|\le d(P,Q);$$

另一方面, 它们各自分量之间的距离的整体可以控制 P,Q 之间的距离:

$$d(P,Q)\le |x_1-y_1|+|x_2-y_2|.$$

所以我们可以发现, 只要 $d(P,Q)$ 小, 那么 $|x_1-y_1|,|x_2-y_2|$ 都小, 反之只要 $|x_1-y_1|,|x_2-y_2|$ 都小, 那么 $d(P,Q)$ 也小.

定义 4 ($\mathbb{R}^2$ 中的 (圆形) 邻域)**.** *设 P 为 $\mathbb{R}^2$ 中的点, 坐标为 $P(x_1,x_2)$, 则定义 P 的 δ-邻域为以 P 为圆心, δ 为半径的圆盘, 即下面的点集:*

$$U_\delta(P)=\{Q=(y_1,y_2)\in\mathbb{R}^2|d(P,Q)=\sqrt{(x_1-y_1)^2+(x_2-y_2)^2}<\delta\}.$$

定义 P 的空心 δ-邻域为以 P 为圆心, δ 为半径的圆盘去掉 P 点, 即下面的点集:

$$U_\delta(\bar{P})=\{Q=(y_1,y_2)\in\mathbb{R}^2|0<d(P,Q)=\sqrt{(x_1-y_1)^2+(x_2-y_2)^2}<\delta\}.$$

注 2. *前面提到过, 两点之间的距离和各自分量的一维距离可以相互控制, 反映在邻域上就是: 如果我们按照分量的一维距离定义方形邻域, 那么每一个方形邻域必定包含一个圆形邻域, 每一个圆形邻域也一定包含一个方形邻域. 按照这两种意义去理解函数极限都是可以的.*

定义 5 (二元函数极限的两种等价定义)**.** *设二元函数 $f(x,y)$ 在平面上点 $P(x_0,y_0)$ 的某个空心邻域内有定义, 对于常数 A, 称 A 为 $f(x,y)$ 在 P 点处的极限, 记为*

$$\lim_{(x,y)\to(x_0,y_0)}f(x,y)=A,$$

如果对任意 $\epsilon>0$, 存在 $\delta>0$, 使得当 $(x,y)\in U_\delta(\bar{P})$ 时, 总有 $|f(x,y)-f(x_0,y_0)|<\epsilon$. 等价地, 极限的定义也可以换成当 $x\in U_\delta(x_0),y\in U_\delta(y_0),(x,y)\neq(x_0,y_0)$ 时, 总有 $|f(x,y)-f(x_0,y_0)|<\epsilon$.

注 3. *两者的等价性正是来源于上面提到的两种邻域的等价性. 第一种定义是说, 只要自变量落在充分小的圆形邻域内, 函数值就充分接近; 第二种定义则是换成了方形邻域. 但是前面已经提过, 这两种邻域是等价的, 因为任意小的圆盘邻域内都包含充分小的方形邻域, 反之亦然.*

定义 6. 多元函数极限的四则运算法则, 保号性, 夹逼定理, 复合法则, 以及多元函数连续与间断的定义, 与一元函数完全相同.

2.2 多元函数极限计算

多元函数的极限计算并不涉及太多的额外技巧, 更多地就是使用定义本身来验证. 在以下的讨论中我们只考虑 $(x,y)\to(0,0)$ 的情况. 绝大多数多元函数极限, 如果用定义验证, 都是**取绝对值然后往大了放缩, 证明极限是** 0.

注 4. 二元函数的情况下, 许多函数的复杂形式并不像一元函数那样, 是由许多函数复合叠加而成, 而更多地是因为有两个自变量, 本来表达式就更长, 而且它们之间还可以有不同的形式组合: $x, y, x+y, x-y, x^2+y^2, xy$ 等等. 但始终注意, 一元函数情况下我们最喜欢 x 本身, 不仅因为它形式最简单, 而且因为 x 本身就代表了自变量距离的一种衡量方式; 如今自变量之间的距离变成了 $\sqrt{x^2+y^2}$, 所以相应地我们也可以**把函数值都转化为跟 x^2+y^2 直接相关的量**. 常用的就是均值不等式:$|xy|\le\dfrac{1}{2}(x^2+y^2), |x+y|\le\sqrt{2(x^2+y^2)}$. 一旦我们将所有的量都转化成 x^2+y^2, 就可以使用换元法 $r=\sqrt{x^2+y^2}$, 将问题转化为 $r\to 0$ 的一元函数极限.

如果出现其他初等函数, 可以先用一元的无穷小量替换: $\ln(1+xy)\sim xy, \sin(x+y)\sim x+y$ 等等.

问题 8.

$$\lim_{(x,y)\to(0,0)}(x+y)\ln(x^2+y^2).$$

问题 9.

$$\lim_{(x,y)\to(0,0)}(x+y)\sin\frac{1}{x^2+y^2}.$$

如果题目中没有明确求极限, 而是问极限是否存在, 则必须要小心, 要时刻记住多元函数极限必须满足 “路径任意” 这件事情, 即 “**函数值从四面八方来**”. 我们通过一个一般的例子来说明这件事情的重要性.

问题 10. 对任意连续函数 $f(x)$, 满足 $f(0)=0$ 且当 $x\ne 0$ 时 $f(x)\ne 0$, 则二元函数

$$g(x,y)=\begin{cases}\dfrac{f(x)y}{f(x)^2+y^2} & (x,y)\ne(0,0)\\ 0 & (x,y)=(0,0)\end{cases}$$

沿路径 $(x,f(x))$ 趋于原点时恒等于 $1/2$, 沿路径 $(x,0)$ 趋于原点时恒等于 0, 因此在原点处不连续.

对于多元函数来说, 如果想证明极限不存在其实是比较容易的, 只需要观察函数的特征然后取两条特定的路径即可, 一般来说我们会选取**能最大程度上简化函数形式的路径**.

问题 11. 判断下面极限是否存在:

$$\lim_{(x,y)\to(0,0)}\frac{x^2y^2}{x^2y^2+(x-y)^2}.$$

补充说明: 对于二元函数 $f(x,y)$ 和点 $P(x_0,y_0)$, 我们还可以定义如下的累次极限:

$$\lim_{x\to x_0}\lim_{y\to y_0}f(x,y).$$

一般来说, 不可以认为上面的累次极限等于我们定义的二元函数极限, 也就是求二元函数极限不能 “分而治之”.

思考 1. 累次极限和我们定义的二元函数的极限之间有什么关系？累次极限交换对 x 和 y 的求极限顺序是否会变化？什么情况下我们可以说二元函数极限等于累次极限？这个问题将在高等数学 B 的课程中给出一定的解答.

2025 秋高等数学 D 第八次习题课讲义

数学科学学院　冯宣瑞　2401110009

2025 年 12 月 23 日

1　多元函数的偏导数与全微分

1.1　偏导数

定义 1 (偏导数与可导性)**.** 设二元函数 $f(x,y)$ 在平面上点 $P(x_0,y_0)$ 的某个邻域内有定义, 则 $g(x) \triangleq f(x,y_0)$ 是在 x_0 的某个邻域内有定义的一元函数. 如果 $g(x)$ 在 x_0 处可导, 则称二元函数 $f(x,y)$ 在 $P(x_0,y_0)$ 处存在对 x 的偏导数, 并记为

$$f'_x(x_0,y_0)=g'(x_0).$$

偏导数的记号有时也写成 $\dfrac{\partial f}{\partial x}(x_0,y_0)$ 或 $\partial_x f(x_0,y_0)$. 如果二元函数 $f(x,y)$ 在 $P(x_0,y_0)$ 处对 x,y 的偏导数都存在, 则称 $f(x,y)$ 在 P 处可导.

注 1 (可导与连续的关系)**.** 从定义中可以看出, $f(x,y)$ 在 (x_0,y_0) 处的偏导数只反映它在经过 (x_0,y_0) 的两条坐标轴上的函数值的信息, 而无法刻画这两条坐标轴之外的点处函数值的信息. 而如果要 $f(x,y)$ 在 (x_0,y_0) 处连续, 则需要涉及 (x_0,y_0) 附近一个 (圆形或方形) 邻域内的函数值的信息. 所以对于多元函数而言不存在 "可导 $\Rightarrow$ 连续" 这一准则. 一般地, 可导的条件甚至无法给出任何涉及到 (x_0,y_0) 邻域内的性质, 即使是 "可导 $\Rightarrow$ 有界" 都是错误的.

注 2 (偏导数的计算方法)**.** 多元函数偏导数的计算本质上是一元函数的求导, 因此只要熟练掌握了一元函数的求导, 并且弄清楚哪些字母是自变量, 哪些字母是因变量, 偏导数的计算就易如反掌. 在处理隐函数求偏导问题时, 一定要分清楚自变量和因变量.

问题 1. 设 $f(x,y)=xy+\sin(x^2+y^2)-\dfrac{\sqrt{x}}{\ln y}$, 求 $\dfrac{\partial f}{\partial x},\dfrac{\partial f}{\partial y}$.

问题 2. 设 $z=z(x,y)$ 是由以下方程决定的隐函数: $xyz+\sin(x^2+y^2+z^2)-\ln(xz+yz^2)=0$, 求 $\dfrac{\partial z}{\partial x},\dfrac{\partial z}{\partial y}$.

1.2　全微分

前面已经提到过, 对于多元函数来说, 偏导数只能反映函数在两条坐标轴上的信息. 那么自然我们需要一个更强的条件, 能够刻画函数在整个邻域里面的信息, 并且这个性质是比连续性更好的, 就像一元函数里面一样. 这就需要考虑一元函数的导数的本质: 即函数在一点附近, 函数值之间的距离和自变量之间的距离近似有线性关系 $\Delta y=f'(x)\Delta x$. 或者说, 在自变量变化 Δx 的情况下, 函数值的变化主要由一个线性变化 $f'(x)\Delta x$ 给出. 这个定义可以自然拓展到多元的情况.

定义 2 (全微分与可微性)**.** 设二元函数 $f(x,y)$ 在平面上点 $P(x_0,y_0)$ 的某个邻域内有定义, 如果存在常数 A,B 使得

$$f(x_0+\Delta x,y_0+\Delta y)-f(x_0,y_0)=A\Delta x+B\Delta y+o(\sqrt{(\Delta x)^2+(\Delta y)^2}), \tag{1}$$

则称 $f(x,y)$ 在 $P(x_0,y_0)$ 处可微, 并记 f 在 P 处的全微分为

$$\mathrm{d}f(x_0,y_0)=A\mathrm{d}x+B\mathrm{d}y.$$

注 3 (可微与连续, 可导的关系)**.** 根据定义可以直接得到 "可微 $\Rightarrow$ 连续", 因为当 Δx 与 Δy 趋于 *0* 时, (1)的右边收敛到 0. *(注意这里我采取了方形邻域的说法, 如果改用圆形邻域则要说当* $\sqrt{(\Delta x)^2+(\Delta y)^2}$ *趋于 0 时).*

在(1)中令 $\Delta y=0$, 两边同时除以 Δx 并令 $\Delta x\to 0$, 就得到 f 在 P 处对 x 存在偏导数, 且 $\dfrac{\partial f}{\partial x}(x_0,y_0)=A$. 同理有 $\dfrac{\partial f}{\partial y}(x_0,y_0)=B$. 所以 "可微 $\Rightarrow$ 可导". 由以上结果也可以看出, 求函数的全微分本质上就是求函数的偏导数, 因此计算上也是简单的.

注 4 (总结)**.** 可微 $\Rightarrow$ 连续, 可微 $\Rightarrow$ 可导, 可导 + 偏导数连续 $\Rightarrow$ 可微, 连续和可导互相不能推出.

定义 3 (复合函数微分)**.** 设二元函数 $z=f(u,v)$, 且 u,v 均为关于 x,y 的二元函数: $u=g(x,y),v=h(x,y)$, 则 z 也可以写成关于 x,y 的二元函数: $z=f(u,v)=f(g(x,y),h(x,y))\triangleq F(x,y)$. 以下等式成立:

$$\frac{\partial F}{\partial x}=\frac{\partial f}{\partial u}\cdot\frac{\partial g}{\partial x}+\frac{\partial f}{\partial v}\cdot\frac{\partial h}{\partial x}. \tag{2}$$

注 5 (如何理解)**.** *以上的定义中出现了很多的字母, 我们应该如何理解它们的含义, 以及不同的记号之间怎么区分?*

这里面 x,y,u,v,z 都是变量, 就像一个指标, 比如人的身高, 公司的收入, 国家的人口等等. 其中 x,y 是第一层的, 它们会影响 u,v 这两个第二层的, 而 u,v 又会影响 z 这个第三层的. 而 f,g,h,F 都是函数 (再次回忆函数的本质, 是一个作用机制, 一个自变量如何影响因变量的逻辑). 我们用 g,h 表示一层变量 x,y 如何影响二层变量 u,v, 用 f 表示二层变量 u,v 如何影响三层变量 z. 但是这个影响当然是有传递性的, 所以也可以描述一层变量 x,y 如何 (通过二层变量 u,v) 影响三层变量 z, 这就由函数 F 来表示.

回忆偏导数的概念, 其实就近似于表示了一个自变量如何影响因变量. 因此等式(2)的意义可以看成是, 怎么通过这两层影响的强度来表达这个跨层影响的强度. 这里 $\dfrac{\partial F}{\partial x}$ 就表示在 F 这个影响机制下, x 的变动程度. 由于 F 是描述 x,y 对 z 的影响, 因此这也可以写成 $\dfrac{\partial z}{\partial x}$. 这样来看(2)其实就是一个直观的 "影响叠加" 的公式.

如何记忆(2)中每个函数对谁求偏导, 其实只需要看这个函数依赖于什么变量 (或理解成 "认识谁"). 比如 z 作为变量, 它当然对 x,y,u,v 都有依赖性. 但 f 作为对 u,v 如何影响 z 的刻画, 它是 "不认识" x,y 的, 所以切记不能写出 $\dfrac{\partial f}{\partial x}$ 这样的记号.

注 6. *如果习惯微分的写法, 以上等式其实是比较自然的:*

$$\mathrm{d}z=\frac{\partial f}{\partial u}\mathrm{d}u+\frac{\partial f}{\partial v}\mathrm{d}v=\frac{\partial f}{\partial u}\cdot\Big(\frac{\partial g}{\partial x}\mathrm{d}x+\frac{\partial g}{\partial y}\mathrm{d}y\Big)+\frac{\partial f}{\partial v}\cdot\Big(\frac{\partial h}{\partial x}\mathrm{d}x+\frac{\partial h}{\partial y}\mathrm{d}y\Big).$$

按照 $\mathrm{d}x$ 和 $\mathrm{d}y$ 的系数整理一下就得到上面的等式.

思考 1. *在必要的时候, 一定要区分* $\dfrac{\mathrm{d}z}{\mathrm{d}x}$ *和* $\dfrac{\partial z}{\partial x}$*. 设二元函数* $z = f(x, y)$*, 且* $y = g(x)$ *为关于* x *的函数, 则* z *也可以写成关于* x *的函数:* $z = f(x, g(x))$*. 如何计算* $\dfrac{\mathrm{d}z}{\mathrm{d}x}$*? 它等于* $\dfrac{\partial z}{\partial x}$ *吗?*

2 多元函数条件极值

定义 4 (拉格朗日乘数法)**.** *为求二元函数* $z = f(x, y)$ *在约束条件* $\varphi(x, y) = 0$ *下的极值点, 构造辅助函数* $F(x, y, \lambda) = f(x, y) - \lambda\varphi(x, y)$*, 则极值点所满足的必要条件是*

$$\frac{\partial F}{\partial x} = \frac{\partial f}{\partial x} - \lambda\frac{\partial \varphi}{\partial x} = 0, \qquad \frac{\partial F}{\partial y} = \frac{\partial f}{\partial y} - \lambda\frac{\partial \varphi}{\partial y} = 0, \qquad \frac{\partial F}{\partial \lambda} = \varphi(x, y) = 0.$$

注 7 (多元函数)**.** 如果涉及到三元及以上的函数, 有可能有多个约束条件, 一般的情况是多元函数 $y = f(x_1, \cdots, x_n)$, 约束条件 $\varphi_1(x_1, \cdots, x_n) = 0, \cdots, \varphi_k(x_1, \cdots, x_n) = 0$. 此时我们需要对每个约束条件都引入一个 λ_i, 对应构造的辅助函数是

$$F(x_1, \cdots, x_n, \lambda_1, \cdots, \lambda_k) = f(x_1, \cdots, x_n) - \sum_{i=1}^{k} \lambda_i\varphi_i(x_1, \cdots, x_n) = 0.$$

极值点所满足的必要条件是

$$\frac{\partial F}{\partial x_j} = \frac{\partial f}{\partial x_j} - \sum_{i=1}^{k} \lambda_i \frac{\partial \varphi_i}{\partial x_j} = 0, \qquad \frac{\partial F}{\partial \lambda_j} = \varphi_j(x_1, \cdots, x_n) = 0.$$

尽管形式上更加复杂, 但思想方法是一致的, 即使看到多元函数或者多个约束条件也不用担心无法处理.

注 8 (验证极值点)**.** 拉格朗日乘数法所给出的只是极值点的必要条件, 通常情况下如果解出了唯一解, 题目也是要求极值点, 则可以不必额外验证. 如果解出来的解不唯一, 且它们对应的函数值不同, 则有可能需要排除掉一些. 回忆如何证明一个点不是极值点: 要说明 P 不是极小值点, 则要说明在 P 的任意小邻域内, 都存在满足约束条件的点 Q 使得 $f(Q) < f(P)$. 换言之, 即存在一列点 P_k 趋于 P, 且 $f(P_k) < f(P)$ 对每个 k 均成立.

注 9 (如何求解)**.** 求解拉格朗日乘数法给出的方程组有时并不容易, 特别是如果多元函数 $f(x_1, \cdots, x_n)$ 中包括复杂的根号或者乘积结构, 则求完偏导之后形式可能非常复杂. 常见的技巧是取平方或者取对数, 从而消去根号或者将乘积变成求和, 因为 f 的极值点和 f^2 或者 $\ln f$ 的极值点总是一样的. 这个方法同样也适用于一般极值的求法.

问题 3 (习题五第 17 题)**.** 当 n 个正数 $x_1, \cdots, x_n$ 的和为常数时, 求它们乘积开 n 次根的最大值.

方法 1. 设 $\sum\limits_{i=1}^{n} x_i = a$, 则要求极值的多元函数为 $f(x_1, \cdots, x_n) = \prod\limits_{i=1}^{n} x_i$, 约束条件为 $\varphi(x_1, \cdots, x_n) = \sum\limits_{i=1}^{n} x_i - a = 0$. 考虑构造的辅助函数 $F(x_1, \cdots, x_n, \lambda) = f(x_1, \cdots, x_n) - \lambda\varphi(x_1, \cdots, x_n) = \prod\limits_{i=1}^{n} x_i - \lambda\Big(\sum\limits_{i=1}^{n} x_i - a\Big)$, 对 x_j 求偏导得到

$$\frac{1}{x_j}\prod_{i=1}^{n} x_i - \lambda = 0.$$

故 $x_1=\cdots=x_n=\dfrac{1}{\lambda}\prod_{i=1}^n x_i$. 结合 $\sum_{i=1}^n x_i=a$ 得到 $x_i=\dfrac{a}{n}$, 此时所求最大值为 $\dfrac{a}{n}$. □

方法 2. 设 $\sum_{i=1}^n x_i=a$, 注意到 $\prod_{i=1}^n x_i$ 取到最大值等价于 $\sum_{i=1}^n \ln x_i$ 取到最大值, 则要求极值的多元函数为 $f(x_1,\cdots,x_n)=\sum_{i=1}^n \ln x_i$, 约束条件为 $\varphi(x_1,\cdots,x_n)=\sum_{i=1}^n x_i-a=0$. 考虑构造的辅助函数 $F(x_1,\cdots,x_n,\lambda)=f(x_1,\cdots,x_n)-\lambda\varphi(x_1,\cdots,x_n)=\sum_{i=1}^n \ln x_i-\lambda\Big(\sum_{i=1}^n x_i-a\Big)$, 对 x_j 求偏导得到

$$\frac{1}{x_j}-\lambda=0.$$

故 $x_1=\cdots=x_n=\dfrac{1}{\lambda}$. 结合 $\sum_{i=1}^n x_i=a$ 得到 $x_i=\dfrac{a}{n}$, 此时所求最大值为 $\dfrac{a}{n}$. □

问题 4 (习题 5 第 13 题第 (2) 问)**.** *求函数 $u=xyz$ 在约束条件 $x^2+y^2+z^2=1, x+y+z=0$ 下的极值.*

证明. 由于 (x,y,z) 满足约束条件等价于 $(-x,-y,-z)$ 满足约束条件, 且它们对应的 u 互为相反数, 故 u 的极大值即为 $|xyz|$ 的极大值, 极小值即为其相反数. 同样可以采用取对数法, 构造辅助函数 $F(x,y,z,\lambda,\mu)=\ln|x|+\ln|y|+\ln|z|-\lambda(x^2+y^2+z^2-1)-\mu(x+y+z)$, 求偏导得到

$$\frac{1}{x}-2\lambda x-\mu=0,\qquad \frac{1}{y}-2\lambda y-\mu=0,\qquad \frac{1}{z}-2\lambda z-\mu=0.$$

三式分别乘上 x,y,z 求和得到 $\lambda=\dfrac{3}{2}$. 代入得 $\dfrac{1}{x}-3x=\dfrac{1}{y}-3y=\dfrac{1}{z}-3z$. 因式分解得到 $x=y$ 或 $xy=-\dfrac{1}{3}$, 对 y,z 和 z,x 也同理. 由于不可能 $x=y=z$, 故必然是两个相等且与第三个乘积为 $-\dfrac{1}{3}$. 不妨设 $x=y=-\dfrac{1}{3z}$, 代入得 $x=y=-\dfrac{1}{\sqrt{6}}, z=\dfrac{2}{\sqrt{6}}$ 或者 $x=y=\dfrac{1}{\sqrt{6}}, z=-\dfrac{2}{\sqrt{6}}$, 分别对应极大值和极小值. 所有的极值点即为以上坐标的全部轮换. □

注 10. *不用取对数法也可以类似地证明, 但个人感觉计算会麻烦一些, 详见参考答案. 对于这种三个变量具有完全对称地位的函数和约束条件问题, 通常来说会得到 x,y,z 同时满足某个相同的方程, 但是不能由此认为 $x=y=z$ 或者至少两个相等, 需要借助其它方法.*

注 11. *在实际问题当中, 约束条件有可能没有通过明显的表达式给出, 此时需要自行转化, 这时需要仔细阅读题目中给出的约束条件, 列出正确的表达式. (其实这正符合实际科研和生产生活的需求) 如习题五第 14 题中的长方体是半球内接, 许多同学当作球内接来做, 会得到错误的约束条件和结果.*

3 二重积分的计算

二重积分是一个非常复杂的定义. 在本课程中所要求的所有二重积分计算, 都可以化归成所谓累次积分的计算, 也就是对于二重积分 $\iint_D f(x,y)\mathrm{d}\sigma$, 我们总是把区域 D 写成 $x\in[a,b], y\in[y_1(x),y_2(x)]$ 的形式 (或者反过来), 也就是在 xy 平面上, 先用 $x=a, x=b$ 两条竖线框住 D 的左右边界, 然后再对每个

x, 算出 y 的上下限. 然后将积分变成

$$\int_a^b \mathrm{d}x \int_{y_1(x)}^{y_2(x)} f(x,y)\mathrm{d}y.$$

积分时先算后面对 y 的积分, 此时所有的 x 都看成无关的常数系数, 积出来得到关于 x 的函数再做一次积分.

特别地, 在用二重积分计算空间立体体积时, 不需要能够想象出三维图形, 只要能画出平面上的积分区域 D 的形状, 就可以计算了.

注 12. *二重积分的题型主要分为三种: 直接求积分, 求平面图形面积, 求空间立体体积. 第一种就是累次积分的正常计算, 第二种就是在该区域上积分 1 这个函数, 第三种则是要先画出该空间立体在 xy 平面上的投影区域 D, 然后在 D 上求一个二重积分, 被积函数 $f(x,y)$ 就是这个空间立体在 (x,y) 点处的高度, 也就是围成该空间立体的两个曲面 z 坐标的高度差.*

问题 5 (习题五第 18 题第 (3) 问)**.**

$$\int\int_D (y+x^2)\mathrm{d}\sigma.$$

其中 D 是由 $y=x^2, y^2=x$ 围成的区域.

问题 6 (习题五第 19 题第 (1) 问)**.** *计算曲线 $y=x^2, y=x+2$ 围成的平面图形的面积.*

问题 7 (习题五第 20 题)**.** *计算由曲面 $z=1+x+y, z=0, x+y=1, x=0, y=0$ 所界的空间立体的体积.*

问题 8 (习题五第 20 题变式)**.** *计算由曲面 $z=\frac{1}{2}-x-y, z=0, x+y=1, x=0, y=0$ 所界的空间立体的体积.*

4 结束语

4.1 期末考试注意事项

期末考试时间为 1 月 4 日 (星期日) 早上 8:30-10:30, 地点为二教 105, 考试范围是教材除附录外所有内容 (期中考前部分不单独出题考察), 两个班统考统一批改. 同期中考试一样, 考试结束后会立刻改卷, 当天下午即可完成批改. 期末卷面分可能不会单独公布, 最后只公布总评成绩.

关于考试的具体注意事项, 参考第四次习题课讲义的期中考试注意事项部分. 特别地, 根据教务要求, 期末成绩不能调整, 提交给教务的分数必须与卷面登分保持一致, 因此请大家务必认真复习, 细心答卷, 不要空题, 解答题即使不会做也要将所有的思路和相关的结论写上去, 便于我们给分.

特别提醒: 如果有同学考完试后发现自己有挂科的风险 (总评不及格, 而不是卷面不及格), 请及时告诉我或联系老师.

4.2 其它注意事项

平时作业的成绩大家不需要担心, 只要交齐了作业, 我最后都会记成满分, 之前登记分数时扣分只是为了让大家知道自己作业的对错情况. 我会在这两天匿名发布全部 11 次作业的提交情况, 供大家自行核对, 欠交的作业只要在考前补交上来, 都可以算作正常提交. 考试之后不再接受补交作业.

另外, 麻烦大家在复习期间放松的时候, 顺手填一下课程评估, 你们的建议和意见将是我未来助教工作的重要参考.

4.3 说在最后的话

4.4 祝大家期末顺利!