北京大学高等数学D期中考试

2024-2025第一学期

本试卷共六道大题，满分100分

一、 概念判断题（每题2 分,总共20分）

1. 如果数列$\{x_n\}$以a为极限，则在a的任意邻域内都包含该数列的无穷多项. ( )
2. $f(x)$,$g(x)(x\to x_0)$为无穷小量，则$\lim\limits_{x\to x_0}\dfrac{f(x)}{g(x)}=a$ 等价于$\lim\limits_{x\to x_0}\dfrac{f'(x)}{g'(x)}=a$.（)
3. 函数$y=\frac{|x|}{x}$和$y=\begin{cases} 1, & x>0; \\ -1, & x\le 0; \end{cases}$ 是同一个函数. ( )
4. 若$\lim\limits_{x\to 0}f(x^2)$存在，则$\lim\limits_{x\to 0}f(x)$存在. ( )
5. $x\ln 5$是5^x-1的等价无穷小量. ( )
6. Dirichlet函数为$D(x)=\begin{cases} 1 & x\in\mathbb{Q}, \\ 0 & x\notin\mathbb{Q}, \end{cases}$是周期函数.（)
7. 数列极限$\lim\limits_{n\to\infty}x_n=x$成立的充分必要条件是$\forall\epsilon>0,\exists N>0,\forall n>N$, 有$|x_n-x|<\sqrt{\epsilon}$.（)
8. 如果函数$f(x)$在x_0点可微，则它在x_0点一定连续且可导.（)
9. 无穷小量与无穷大量的乘积只能是无穷小量或者无穷大量. ( )
10. 函数$f(x)=\begin{cases} x^2\sin\frac{1}{x}, & x\neq 0; \\ 0, & x=0; \end{cases}$ 在$x=0$处连续且可导. ( )

二、 填空题（每题4 分,总共20分）

1. 已知函数$f(x)$满足$2f(x)+x^2f\left(\dfrac{1}{x}\right)=\dfrac{x^2+2x}{x+1}$，则$f(x)=$________.
2. $\sqrt{15.7}$的近似值（精确到小数点后第二位）________ .
3. 函数$f(x)$处处可导，则$\lim\limits_{\Delta x\to 0}\dfrac{f^2(x+\Delta x)-f^2(x-\Delta x)}{\Delta x}=$________.
4. 设$f(x)=x^3+9$, 定义域为$x\in[0,\infty)$, 则函数$f^{-1}(\frac{1}{x^2})=$________, 其定义域为________.
5. 若曲线$y=ax^2$和$y=\ln x$相切，则a的值为________.

三、 极限计算（每题4 分,总共20分）

1. $\lim\limits_{n\to\infty}\left(1+\frac{1}{n^2}\right)^{n\cos n}$

2. $\lim\limits_{x\to 1}\frac{(1-\cos(x-1))^2\sin(x^2-x)}{(x-1)^3\arctan(x-1)\ln x}$

3. $\lim\limits_{x\to 0}(x^2)^x$

4. $\lim\limits_{n\to\infty}\left(\dfrac{1}{\sqrt{n^2+1}}+\ldots+\dfrac{1}{\sqrt{n^2+n}}\right)$

5. $\lim\limits_{x\to\infty}\frac{\sqrt[5]{x^3+10x^2+20}}{x+1}$

四、 导数计算（每题4 分,总共20分）

1. $f(x)=\sin\left(\frac{1}{x}\right)^{\sin\left(\frac{1}{x}\right)}$，求$f'(x)|_{x=\frac{2}{\pi}}$.

2. 设函数$y=y(x)$是由方程$e^y+xy=e$确定的隐函数.求$\left.\dfrac{\mathrm{d}^2y}{\mathrm{d}x^2}\right|_{x=0}$.

3. 计算函数的一阶导数$y=\sqrt{\sin x\cdot x^3\cdot\sqrt{1-x^2}}$.

4. 求曲线$x^2+3xy+y^2+1=0$ 在点$M(2,-1)$处的法线方程.

5. 求函数$y=\cos(x^2)$在$x=\frac{\sqrt{2\pi}}{2}$处的微分.

五、 解答题（8 分）

设函数

$$f(x)=\begin{cases} x^a\ln|x| & ,\ x\neq 0\\ 0 & ,\ x=0\end{cases}$$

在$(-\infty,\infty)$上导函数连续，求a的取值范围.

六、 证明题（每题6 分,总共12分）

1. 设函数$f(x)$在$[0,\infty)$上可导，$f(0)=0$, 且对任意$x\geq 0$都有$f'(x)\leq 2x$. 证明: $f(1)\leq 1$.

2. 设$f(x)$在区间$[a,b]$内连续，在(a,b)上可导，并且$f(a)=f(b)=0$. 证明：对任意的实数α，存在一个$\xi\in(a,b)$，使得$\alpha f(\xi)=f'(\xi)$.