2025 秋高等数学 D 第七次习题课讲义

数学科学学院　冯宣瑞　2401110009

2025 年 12 月 9 日

1　定积分综合讲解

上一次课我们综合回顾了不定积分的概念和各种计算方法, 现在我们转到定积分的研究. 以前我们往往觉得, 定积分不过就是不定积分加上了积分上下限, 只要能求出原函数, 代入两个值作差就得到定积分, 所以问题的关键在于求出原函数, 也就是求不定积分的这一步.

但是通过定积分的严格定义, 我们会发现, **定积分的定义本质上是与所谓求导逆运算完全无关的**, 它的直观意义是函数图像与坐标轴之间所围成的面积大小, 具体的定义用到复杂的切割区间和极限过程, 是一个独立的概念. 之所以可以和不定积分关联起来, 是根据牛顿-莱布尼兹法则得出的. 从这个角度上看, 不定积分只是一种运算, 而定积分才是揭示函数整体性质的本质工具.

但是话说回来, 如果从计算定积分的角度看, 在本课程范围内没有任何别的方法, 无一例外都是通过计算不定积分得到原函数, 再将积分上下限代入作差得到定积分, 所以这种初始的理解对于计算题来说没有问题.

1.1　定积分的计算

定积分的计算没有任何额外的技巧, 大家只需要熟练不定积分的计算, 这一部分就不会有本质的难度. 唯一需要注意的是在换元过程中积分上下限怎么变化. 这里我们只举几个简单的例子进行说明.

$$\int_0^1 \sqrt{1-x^2}\,\mathrm{d}x = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sqrt{1-\sin^2\theta}\,\mathrm{d}(\sin\theta) = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos^2\theta\mathrm{d}\theta = \frac{\theta}{2} + \frac{\sin 2\theta}{4}\Big|_0^{\frac{\pi}{2}} = \frac{\pi}{4}.$$

上面的计算过程演示了, 如何在换元的过程中更换积分上下限. 这里的规律是: **积分上下限始终对应着积分里面的变量的取值范围, 而不是微分符号 d 后面的部分的取值范围.** 这是因为积分上下限是最后算出原函数后要代入积分变量的, 而不是代入微分符号 d 后面的, 当原函数算出来后 d 早就不见了. 所以**第一个等号虽然 d 后面仍然是 $\sin\theta = x$, 积分上下限却已经换成了 θ 的取值范围, 而不是 $\sin\theta$ 的取值范围.**

这样的好处是不用把最后的原函数变回关于 x 的形式, 坏处是如果不熟悉以上过程, 可能会代入错误的积分上下限.

另一种办法就是直接扔掉上下限不管, 强硬求出关于 x 的原函数再代入, 这样的好处是不用担心积分上下限变错, 坏处是最后原函数可能形式上比较复杂.

$$\int \sqrt{1-x^2}\,\mathrm{d}x = \int \sqrt{1-\sin^2\theta}\,\mathrm{d}(\sin\theta) = \int \cos^2\theta\mathrm{d}\theta = \frac{\theta}{2} + \frac{\sin 2\theta}{4} = \frac{\arcsin x}{2} + \frac{\sin 2(\arcsin x)}{4}.$$

代入 $x = 0$ 和 $x = 1$ 作差得到:

$$\int_0^1 \sqrt{1-x^2}\mathrm{d}x = \frac{\pi}{4}.$$

后面这种方法在计算题中或许没有问题, 但在抽象函数的定积分证明题当中, 肯定还是会涉及到换元法带来的上下限的变化, 所以不建议大家偷这个懒.

以上演示的是第二换元法, 对于第一换元法也是同理.

$$\int_0^1 x\mathrm{d}x = \int_0^1 \mathrm{d}\Big(\frac{1}{2}x^2\Big) = \frac{1}{2}x^2\Big|_0^1 = \frac{1}{2}.$$

这里第一个等号后虽然 d 后面的数变化了, 但积分上下限却并没有变化.

1.2 定积分的定义和变限积分

我们简单回顾一下定积分的定义.

定义 1 (定积分)**.** *设函数 $f(x)$ 在闭区间 $[a,b]$ 上有界. 如果存在一个常数 I, 对 $\forall\varepsilon > 0$, 存在 $\delta > 0$, 使得对任意一个 $[a,b]$ 上的分割 $a = x_0 < x_1 < \ldots < x_n = b$ 和任意的中间值 $\xi_i \in [x_{i-1}, x_i]$, 只要 $\max|x_i - x_{i-1}| < \delta$, 就有*

$$\Big|\sum_{i=1}^{n} f(\xi_i)(x_i - x_{i-1}) - I\Big| < \varepsilon,$$

则称函数 $f(x)$ 在闭区间 $[a,b]$ 上可积, I 称为函数 $f(x)$ 在闭区间 $[a,b]$ 上的定积分, 记为

$$I = \int_a^b f(x)\mathrm{d}x.$$

这个定义应该是本课程范围内形式最复杂的, 因为这里涉及到一个 "**双重任意**", 从而使这个极限过程与一般的不全相同. 具体而言, 只要我们划分区间足够细 (区间长度都$< \delta$), 那么我们对任意的划分方式, 任取区间中的中间值 ξ_i, 算出来的求和 (黎曼和) 都要离 I 足够近.

定积分的最大作用就是为我们提供了构造原函数的方法.

定义 2 (变限积分)**.** *设函数 $f(x)$ 在闭区间 $[a,b]$ 上可积, 定义 $f(x)$ 的变上限积分为*

$$F(x) = \int_a^x f(t)\mathrm{d}t,$$

变下限积分为

$$G(x) = \int_x^b f(t)\mathrm{d}t.$$

则变上限积分和变下限积分的求和是一个定值: $F(x) + G(x) = \displaystyle\int_a^b f(t)\mathrm{d}t$.

命题 1. *设函数 $f(x)$ 在闭区间 $[a,b]$ 上连续, 则 $f(x)$ 的变上限积分 $F(x)$ 就是 $f(x)$ 的一个原函数.*

关于变限积分的结构有以下几点需要注意:

其一, 变上限积分是一个关于 x 的函数, 这是因为从定义来看, 变上限积分是指从 a 到 x 的定积分, 等于说把左端点固定住, 任意输入一个自变量 x, 输出一个以 x 为右端点的区间上的定积分. 变上限积分作为一个关于 x 的函数, 其导函数是 $f(x)$, 也就是它本身是 $f(x)$ 的一个原函数. 这里的积分变量 t 是虚

假的变量, 只是一个积分记号, 可以替换成任意其他的字母, 但一定不能写成 $\int_a^x f(x)\mathrm{d}x$! 因为这里 x 已经是有实际意义的变量, 不能再作为虚拟变量出现. 类比求和的情况:

$$\sum_{i=1}^n a_i = \sum_{j=1}^n a_j = a_1 + \cdots + a_n,$$

但不能写 $\sum_{n=1}^n a_n$. 既然 $F(x) = \int_a^x f(t)\mathrm{d}t$ 是关于 x 的函数, 则它的导数也只能写成 $f(x)$ 而不是 $f(t)$, 因为 t 根本就是一个虚假变量.

其二, 变上限积分的积分下限不一定要取成 a, 而是可以取成任意的一个固定点, 因为这样的变换只会让 $F(x)$ 变化一个常数, 求导之后结果是一样的, 也就是都是 $f(x)$ 的原函数. 一般取成区间左端点是因为习惯让积分上限大于等于积分下限. 既然上限 x 是在 $[a,b]$ 中取值, 则下限取成 a 是最自然的一个方式.

其三, 变下限积分始终可以看成一个常数减去变上限积分, 为了记忆方便, 建议大家处理所有的变下限积分时都转化成常数减去变上限积分, 否则容易结果多出或者少掉一个负号.

其四, 对于变上限积分的求导, 如果上限本身也是关于 x 的函数, 求导时要多乘上上限的导数, 即

$$\left(\int_a^{g(x)} f(t)\mathrm{d}t\right)' = f(g(x)) \cdot g'(x).$$

这是因为左边实际上就是一个复合函数 $F(g(x))$ 求导, 其中 $F(x)$ 就是变上限积分 $\int_a^x f(t)\mathrm{d}t$, 根据复合函数求导法则:

$$\Big(F(g(x))\Big)' = F'(g(x)) \cdot g'(x) = f(g(x)) \cdot g'(x).$$

这里用到 $F' = f$.

问题 1. 求函数 $F(x) = \int_0^x \frac{\sin t}{t+1}\mathrm{d}t$ 的导数.

问题 2. 求极限:

$$\lim_{x\to 0} \frac{\int_0^x \frac{\sin t}{t+1}\mathrm{d}t}{x^2}.$$

问题 3. 求函数 $F(x) = \int_0^{2\ln x} \frac{\sin t}{t+1}\mathrm{d}t$ 的导数.

问题 4. 求极限:

$$\lim_{x\to 1} \frac{\int_0^{2\ln x} \frac{\sin t}{t+1}\mathrm{d}t}{(x-1)^2}.$$

1.3 定积分计算极限

前面我们给出了定积分的定义, 并提到这是一个非常复杂的极限过程, 并不会要求大家通过定义验证某个函数是否可积, 但一类非常经典的题型是, 反过来根据定积分来求解一系列求和形式的极限.

最常见的情况: 区间取成 $[0,1]$, 分割方式取成 $\left[0,\frac{1}{n}\right], \left[\frac{1}{n},\frac{2}{n}\right], \cdots, \left[\frac{n-1}{n},1\right]$, 则当 $n\to\infty$ 时这一分割的区间长度趋于 0. 取中间值 $\xi_i = \frac{i}{n}$, 则根据定积分的定义,

$$\sum_{i=1}^n f(\xi_i)(x_i - x_{i-1}) = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^n f\Big(\frac{i}{n}\Big)$$

应该收敛到 $\int_0^1 f(x)\mathrm{d}x$. 所以只要所求的数列极限里, 可以写成 $\frac{1}{n}$ 乘上 $\sum_{i=1}^{n}$ 某个函数 f 在 $\frac{i}{n}$ 处的取值, 则极限就等于 $\int_0^1 f(x)\mathrm{d}x$. 注意这一方法要求所凑出的函数 f 与 n 和 i 无关.

问题 5.

$$\lim_{n\to\infty}\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}\sin\frac{n+i}{n}.$$

问题 6.

$$\lim_{n\to\infty}\frac{1}{n^{\frac{3}{2}}}\sum_{i=1}^{n}\sqrt{i}.$$

1.4 无穷积分

在本课程中, 无穷积分的计算和敛散性判断相比起一般定积分的计算, 没有本质上的难度增加, 因为只需要计算出有限区间上的定积分, 再判断上限趋于 $+\infty$ 时有无极限即可.

需要注意的是, 无穷积分发散并不都能写成无穷积分 $=\infty$, 举例:

$$\int_0^\infty \cos x\mathrm{d}x$$

发散, 但不能说它等于 ∞.

问题 7 (习题四 29(4))**.**

$$\int_1^\infty \frac{1}{(x+\sqrt{x^2-1})^n}\mathrm{d}x.$$

重要的不定积分解题思路: **万般无奈之下可以把被积函数整个换元成** t**.** 反正这个函数都这么丑了, 我也没办法处理了, 干脆把你变成最好看的样子, 把麻烦交给微分符号 d, 说不定求一次导有奇效.

2 多元函数及其极限

课本的第五章涉及到多元函数的微积分运算, 主要是将前面的极限, 微分, 积分理论引入到多元函数当中, 主要是二元函数. 这一引入是非常重要的, 因为在实际生产生活当中, 很少会遇到一个因素决定一件事情的情况, 绝大多数事情都会受到多种因素的影响, 要想系统地分析多个因素作用的情况, 就要采用多元函数的概念.

2.1 多元函数的基本概念

回顾我们课程开始的时候问的一个基本问题: 什么是函数? 当时我们给出的揭示是, 函数就是一个作用机制, 就像一台机器, “吃” 进去什么 (x), 就会相应给出来什么 $(f(x))$. 而所谓函数极限, 可以理解成当 “吃” 进去的东西 (x) 越来越 “像” 某个东西 (x_0), 则它给出来的东西 $(f(x))$ 也会越来越 “像” 对应的给出来的东西 (y_0). 以上用数学语言来写就是

$$\lim_{x\to x_0} f(x)=y_0.$$

这就涉及到一个重要问题: 怎么刻画这个 "像" 的程度? 对于一元函数, 自变量和因变量都是实数, 自然用作差取绝对值来衡量. 但对于二元函数, 我们怎么来说 (x,y) 和 (x_0,y_0) 很接近? 怎么刻画它们之间的距离? 这需要我们定义 $\mathbb{R}^2$ 上两个点的距离.

定义 3 ($\mathbb{R}^2$ 中的距离)**.** *设 P,Q 为 $\mathbb{R}^2$ 中的点, 坐标分别为 $P(x_1,x_2),Q(y_1,y_2)$, 则定义 P 与 Q 之间的距离为*

$$d(P,Q)=\sqrt{(x_1-y_1)^2+(x_2-y_2)^2}.$$

注 1. *直观上看, 我们说 (x,y) 和 (x_0,y_0) 很接近, 最直接的想法应该是 x 和 x_0 很接近, 且 y 和 y_0 很接近. 或者说, 一个合理的 $\mathbb{R}^2$ 上的距离的定义应该满足, (x,y) 和 (x_0,y_0) 很接近, 等价于是 x 和 x_0 很接近, 且 y 和 y_0 很接近. 事实是否如此呢?*

我们考虑这样定义的 $\mathbb{R}^2$ 中两点的距离和它们各自分量之间的距离 (一维实轴上的距离) 的关系: 一方面, P,Q 的距离可以控制它们各自分量之间的距离:

$$|x_1-y_1|\le d(P,Q),\quad |x_2-y_2|\le d(P,Q);$$

另一方面, 它们各自分量之间的距离的整体可以控制 P,Q 之间的距离:

$$d(P,Q)\le |x_1-y_1|+|x_2-y_2|.$$

所以我们可以发现, 只要 $d(P,Q)$ 小, 那么 $|x_1-y_1|,|x_2-y_2|$ 都小, 反之只要 $|x_1-y_1|,|x_2-y_2|$ 都小, 那么 $d(P,Q)$ 也小.

定义 4 ($\mathbb{R}^2$ 中的 (圆形) 邻域)**.** *设 P 为 $\mathbb{R}^2$ 中的点, 坐标为 $P(x_1,x_2)$, 则定义 P 的 δ-邻域为以 P 为圆心, δ 为半径的圆盘, 即下面的点集:*

$$U_\delta(P)=\{Q=(y_1,y_2)\in\mathbb{R}^2|d(P,Q)=\sqrt{(x_1-y_1)^2+(x_2-y_2)^2}<\delta\}.$$

定义 P 的空心 δ-邻域为以 P 为圆心, δ 为半径的圆盘去掉 P 点, 即下面的点集:

$$U_\delta(\bar{P})=\{Q=(y_1,y_2)\in\mathbb{R}^2|0<d(P,Q)=\sqrt{(x_1-y_1)^2+(x_2-y_2)^2}<\delta\}.$$

注 2. *前面提到过, 两点之间的距离和各自分量的一维距离可以相互控制, 反映在邻域上就是: 如果我们按照分量的一维距离定义方形邻域, 那么每一个方形邻域必定包含一个圆形邻域, 每一个圆形邻域也一定包含一个方形邻域. 按照这两种意义去理解函数极限都是可以的.*

定义 5 (二元函数极限的两种等价定义)**.** *设二元函数 $f(x,y)$ 在平面上点 $P(x_0,y_0)$ 的某个空心邻域内有定义, 对于常数 A, 称 A 为 $f(x,y)$ 在 P 点处的极限, 记为*

$$\lim_{(x,y)\to(x_0,y_0)} f(x,y)=A,$$

如果对任意 $\epsilon>0$, 存在 $\delta>0$, 使得当 $(x,y)\in U_\delta(\bar{P})$ 时, 总有 $|f(x,y)-f(x_0,y_0)|<\epsilon$. 等价地, 极限的定义也可以换成当 $x\in U_\delta(x_0),y\in U_\delta(y_0),(x,y)\neq(x_0,y_0)$ 时, 总有 $|f(x,y)-f(x_0,y_0)|<\epsilon$.

注 3. *两者的等价性正是来源于上面提到的两种邻域的等价性. 第一种定义是说, 只要自变量落在充分小的圆形邻域内, 函数值就充分接近; 第二种定义则是换成了方形邻域. 但是前面已经提过, 这两种邻域是等价的, 因为任意小的圆盘邻域内都包含充分小的方形邻域, 反之亦然.*

定义 6. 多元函数极限的四则运算法则, 保号性, 夹逼定理, 复合法则, 以及多元函数连续与间断的定义, 与一元函数完全相同.

2.2 多元函数极限计算

多元函数的极限计算并不涉及太多的额外技巧, 更多地就是使用定义本身来验证. 在以下的讨论中我们只考虑 $(x,y)\to(0,0)$ 的情况. 绝大多数多元函数极限, 如果用定义验证, 都是**取绝对值然后往大了放缩, 证明极限是** 0.

注 4. 二元函数的情况下, 许多函数的复杂形式并不像一元函数那样, 是由许多函数复合叠加而成, 而更多地是因为有两个自变量, 本来表达式就更长, 而且它们之间还可以有不同的形式组合: $x, y, x+y, x-y, x^2+y^2, xy$ 等等. 但始终注意, 一元函数情况下我们最喜欢 x 本身, 不仅因为它形式最简单, 而且因为 x 本身就代表了自变量距离的一种衡量方式; 如今自变量之间的距离变成了 $\sqrt{x^2+y^2}$, 所以相应地我们也可以**把函数值都转化为跟** x^2+y^2 **直接相关的量**. 常用的就是均值不等式:$|xy|\le\frac{1}{2}(x^2+y^2), |x+y|\le\sqrt{2(x^2+y^2)}$. 一旦我们将所有的量都转化成 x^2+y^2, 就可以使用换元法 $r=\sqrt{x^2+y^2}$, 将问题转化为 $r\to 0$ 的一元函数极限.

如果出现其他初等函数, 可以先用一元的无穷小量替换: $\ln(1+xy)\sim xy, \sin(x+y)\sim x+y$ 等等.

问题 8.

$$\lim_{(x,y)\to(0,0)}(x+y)\ln(x^2+y^2).$$

问题 9.

$$\lim_{(x,y)\to(0,0)}(x+y)\sin\frac{1}{x^2+y^2}.$$

如果题目中没有明确求极限, 而是问极限是否存在, 则必须要小心, 要时刻记住多元函数极限必须满足 “路径任意” 这件事情, 即 “**函数值从四面八方来**”. 我们通过一个一般的例子来说明这件事情的重要性.

问题 10. 对任意连续函数 $f(x)$, 满足 $f(0)=0$ 且当 $x\neq 0$ 时 $f(x)\neq 0$, 则二元函数

$$g(x,y)=\begin{cases}\dfrac{f(x)y}{f(x)^2+y^2} & (x,y)\neq(0,0)\\ 0 & (x,y)=(0,0)\end{cases}$$

沿路径 $(x,f(x))$ 趋于原点时恒等于 $1/2$, 沿路径 $(x,0)$ 趋于原点时恒等于 0, 因此在原点处不连续.

对于多元函数来说, 如果想证明极限不存在其实是比较容易的, 只需要观察函数的特征然后取两条特定的路径即可, 一般来说我们会选取**能最大程度上简化函数形式的路径**.

问题 11. 判断下面极限是否存在:

$$\lim_{(x,y)\to(0,0)}\frac{x^2y^2}{x^2y^2+(x-y)^2}.$$

补充说明: 对于二元函数 $f(x,y)$ 和点 $P(x_0,y_0)$, 我们还可以定义如下的累次极限:

$$\lim_{x\to x_0}\lim_{y\to y_0}f(x,y).$$

一般来说, 不可以认为上面的累次极限等于我们定义的二元函数极限, 也就是求二元函数极限不能 “分而治之”.

思考 1. 累次极限和我们定义的二元函数的极限之间有什么关系？累次极限交换对 x 和 y 的求极限顺序是否会变化？什么情况下我们可以说二元函数极限等于累次极限？这个问题将在高等数学 B 的课程中给出一定的解答.