

12 (1)  $y = x^3 - 3x^2 + 6x - 2 \quad x \in [-1, 1]$

$y' = 3x^2 - 6x + 6 = 3(x-1)^2 \geq 0$  则最大值  $y(1) = 2$  最小值  $y(-1) = -12$

(2)  $y = x^2 e^{-x} \quad x \in [-1, 3]$

$y' = e^{-x} (2x - x^2)$   $y$  在  $[-1, 0]$  上  $\downarrow$   $[0, 2]$  上  $\uparrow$   $[2, 3]$  上  $\downarrow$

$y(-1) = e \quad y(0) = 0 \quad y(2) = 4e^{-2} \quad y(3) = 9e^{-3} > y(0)$

则最小值  $y(0) = 0$   $e > 4e^{-2}$ , 最大值  $y(-1) = e$

13. 令  $f(x) = (1+x)^n - nx - 1 \quad f(0) = 0$

$f'(x) = n(1+x)^{n-1} - n = n[(1+x)^{n-1} - 1] \geq 0$ , 当  $x \geq 0$

则  $f(x)$  单调递增  $f(x) > f(0) = 0$  当  $x > 0$

14. 设高  $h$ , 底面半径  $r$ . 则  $\pi r^2 h = 300$ , 设单位面积造价为 1

造价  $y = 2\pi r^2 + 2\pi r h = 2\pi r^2 + \frac{600}{r}$

$y' = 4\pi r - \frac{600}{r^2} \Rightarrow y$  在  $(0, \sqrt[3]{\frac{150}{\pi}}]$  上  $\downarrow$   $[\sqrt[3]{\frac{150}{\pi}}, +\infty)$  上  $\uparrow$

$y(\sqrt[3]{\frac{150}{\pi}}) = \pi^{\frac{1}{3}} (2 \cdot 150^{\frac{2}{3}} + 600 \cdot 150^{-\frac{1}{3}})$  为最低造价

此时高  $h = 2\sqrt[3]{\frac{150}{\pi}}$  米. 底半径  $r = \sqrt[3]{\frac{150}{\pi}}$  米

15. 利润  $y = R(x) - C(x) = -0.01x^2 + 5x - 200$  (元)

$y' = -0.02x + 5 = -0.02(x - 250)$

当  $x = 250$  时 利润最大, 为 425 元

16 (1)  $y = x^2 e^{-x} \quad y' = e^{-x} (2x - x^2) \quad y'' = e^{-x} (2 - 2x)$

$y$  在  $(-\infty, \sqrt{2}-2)$  及  $(\sqrt{2}+2, +\infty)$  上  $\uparrow$ , 在  $(\sqrt{2}-2, \sqrt{2}+2)$  上  $\downarrow$

拐点为  $(\sqrt{2}-2, (6-4\sqrt{2})e^{2-\sqrt{2}})$  及  $(\sqrt{2}+2, (6+4\sqrt{2})e^{-2-\sqrt{2}})$

(2)  $y = 2x^4 - 6x^2 \quad y' = 8x^3 - 12x \quad y'' = 24x^2 - 12$

$y$  在  $(-\infty, -\frac{\sqrt{2}}{2})$  及  $(\frac{\sqrt{2}}{2}, +\infty)$  上  $\uparrow$ , 在  $(-\frac{\sqrt{2}}{2}, \frac{\sqrt{2}}{2})$  上  $\downarrow$

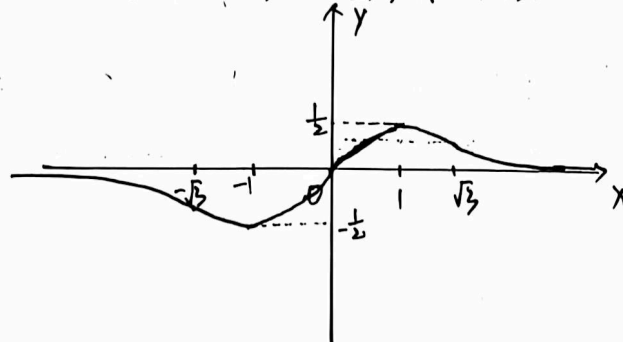
拐点为  $(-\frac{\sqrt{2}}{2}, -\frac{5}{2})$  和  $(\frac{\sqrt{2}}{2}, -\frac{5}{2})$

17.  $y = \frac{x}{1+x^2}$ . 奇函数. 定义域  $x \in (-\infty, +\infty)$

$$\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{x}{1+x^2} = 0 \quad y' = \frac{1-x^2}{(1+x^2)^2} \quad y'' = \frac{2x^3-6x}{(1+x^2)^3}$$

$y$  在  $(-\infty, -1)$  及  $(1, +\infty)$  递减, 在  $(-1, 1)$  递增

在  $(-\infty, -\sqrt{3})$  及  $(0, \sqrt{3})$  上凸, 在  $(-\sqrt{3}, 0)$  及  $(\sqrt{3}, +\infty)$  上凹



18.  $y = \frac{x^2}{\sqrt{x+1}}$  定义域  $x \in (-1, +\infty)$   $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{x^2}{\sqrt{x+1}} = +\infty$

$$y' = \frac{2x\sqrt{x+1} - x^2 \cdot \frac{1}{2\sqrt{x+1}}}{x+1} = \frac{3x^2+4x}{2(x+1)\sqrt{x+1}} \quad y \text{ 在 } (-1, 0) \downarrow \text{ 在 } (0, +\infty) \uparrow$$

$$y'' = \frac{(6x+4) \cdot 2(x+1)\sqrt{x+1} - (3x^2+4x) \cdot 2[\sqrt{x+1} + (x+1) \cdot \frac{1}{2\sqrt{x+1}}]}{4(x+1)^3}$$

$$= \frac{3x^2+8x+8}{4(x+1)^{5/2}} > 0 \quad y \text{ 为凹函数}$$

