

## chapter 3. Kinematics and Dynamics

冯学伟

July 2, 2020

The first step in developing navigation, guidance, and control strategies (策略) for MAVs is to develop appropriate dynamic models. Deriving the nonlinear equations of motion for a MAV is the focus of chapters 3 and 4. In chapter 5, we linearize the equations of motion to create transfer-function and state-space models(状态空间模型) appropriate 适当的 for control design. 第三章和第四章推导非线性动力学方程第五章线性动力学方程创建传递函数和状态空间模型

In this chapter, we derive the expressions for the kinematics 动力学 and the dynamics of a rigid body(刚体). We will apply Newton's laws 牛顿定律: for example,  $f = m\dot{v}$  in the case of the linear motion. In this chapter, we will focus on defining the relations between positions and velocities (the kinematics) and relations between forces and moments and the momentum (dynamics). 第三章, 定义位置和速度的关系和力与时刻和动力学的关系. In chapter 4, we will concentrate on the definition of the forces and moments involved, particularly the aerodynamic forces and moments. 第四章, 力和时刻的定义, 尤其是空气动力和时刻. In chapter 5, we will combine these relations to form the complete nonlinear equations of motion. 第五章, 合并上面关系, 来形成复杂的非线性动力学方程. While 然而 the expressions derived in this chapter are general to any rigid body, we will use notation 符号 and coordinate frames that are typical in the aeronautics literature 航空专业领域内. In particular, in section 3.1 we define the notation that will be used for MAV state variables MAV的状态变量的声明. In section 3.2 we derive the kinematics 推导出运动学, and in section 3.3 we derive the dynamics 推导出动力学方程.

补充: Kinematics and dynamics are branches of mechanics, which is the study of forces and motion in physics.

Kinematics is the study of motion of particles 粒子 and bodies 物体, without taking into account the factors that cause motion 而不考虑引起运动的因素. Kinematics takes into account quantities 考虑量 such as displacement 位移, velocity, acceleration.

Dynamics is the study of motion, along with 连同一起 the factors that cause motion. Calculations in dynamics, therefore, involve masses and forces. Consequently 所以, study of quantities such as momenta 瞬间 can be considered as a part of dynamics.

Kinematics: 着重于结果, 不考虑原因和过程;

Dynamics: 原因加结果, 并且计算动力学方程;

### 1 state variables 状态变量

In developing the equations of motion for a MAV, twelve 十二 state variables will be introduced. (引入十二个状态变量: 和平移运动相关的三个位置变量; 三个速度变量; 和旋转运动有关的三个角度变量; 三个角速度变量. ). There are three position states and three velocity states associated with the translational 平移的 motion of the MAV. Similarly, there are three angular position and three angular velocity states associated with the rotational motion. The state variables are listed in

- The vehicle frame (NED,原点是在机体的质心) , 绕z轴( $k^v$ )旋转chi 角度得到yaw, 即the vehicle-1 frame
- The vehicle-1 frame (NED,原点是在机体的质心) , 绕y轴( $j^{v1}$ )旋转theta 角度得到pitch, 即the vehicle-2 frame
- The vehicle-2 frame (NED,原点是在机体的质心) , 绕x轴( $i^{v2}$ )旋转phi 角度得到roll , 即the body frame
- $i^b$ 被指向飞机的机头
- $j^b$ 被指向飞机的右翼
- $K^b$ 被指向飞机的肚皮belly
- vehicle-2 frame:
- $i^{v2}$ 被指向飞机的机头
- $j^{v2}$ 被指向飞机的右翼
- $K^{v2}$ 被指向飞机的肚皮belly
- $u$  : 体坐标系下的 $i^b$ 上的速度
- $v$  : 体坐标系下的 $j^b$ 上的速度
- $\omega$  : 体坐标系下的 $k^b$ 上的速度
- $\phi$  : roll ( $F^{v2}$ )
- $\theta$  : pitch ( $F^{v1}$ )
- $\psi$  : yaw ( $F^v$ )
- $p$  roll rate (体坐标系下)
- $q$  pitch rate (体坐标系下)
- $r$  yaw rate (体坐标系下)

Because the Euler angles are defined relative to intermediate 中间的 frames of reference, we cannot say that the angular rates ( $p, q, r$ ) are simply the time derivatives of the attitude angles ( $\phi, \theta, \psi$ ). . 因为欧拉角是定义为中间的坐标系(vehicle-2 / 1)不能说角速率是姿态角相对于时间的导数.

下面章节中我们看到的  $p = \dot{\phi}, q = \dot{\theta}, r = \dot{\psi}$  仅仅在  $\phi = \theta = 0$  的时候成立.

本章的其余部分专门用于制定与1中列出的每个状态相对应的运动方程式.

## 2 Kinematics

The translational 位移的 velocity of the MAV is commonly expressed in terms of the velocity components along each of the axes in a body-fixed coordinate frame. The components  $u, v$ , and  $w$  correspond to the inertial velocity of the vehicle projected onto the  $i^b, j^b$ , and  $k^b$  axes, respectively. On the other hand, the translational position of the MAV is usually measured and expressed in an inertial reference frame. Relating the translational velocity and position requires differentiation 微分 and a rotational transformation 旋转变形, 见公式1

体坐标系到vehicle的旋转

$$\frac{d}{dt} \begin{pmatrix} p_n \\ p_e \\ p_d \end{pmatrix} = \mathcal{R}_b^v \begin{pmatrix} u \\ v \\ w \end{pmatrix} = (\mathcal{R}_v^b)^T \begin{pmatrix} u \\ v \\ w \end{pmatrix},$$

NED 位置  $u, v, w$  是体坐标系下的速度

which using equation (2.5) gives

$$\begin{pmatrix} \dot{p}_n \\ \dot{p}_e \\ \dot{p}_d \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} C_\theta C_\psi & S_\theta S_\psi C_\psi & -C_\theta S_\psi & C_\theta S_\psi C_\psi & + S_\theta S_\psi \\ C_\theta S_\psi & S_\theta C_\psi C_\psi & + C_\theta C_\psi & C_\theta S_\psi S_\psi & - S_\theta C_\psi \\ -S_\theta & S_\theta C_\theta & & C_\theta C_\theta & \end{pmatrix} \begin{pmatrix} u \\ v \\ w \end{pmatrix}, \quad (3.1)$$

↑

$$\mathcal{R}_v^b(\phi, \theta, \psi) = \mathcal{R}_{v2}^b(\phi) \mathcal{R}_{v1}^v(\theta) \mathcal{R}_v^{v1}(\psi) \quad (2.4)$$

$$= \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \cos \phi & \sin \phi \\ 0 & -\sin \phi & \cos \phi \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \cos \theta & 0 & -\sin \theta \\ 0 & 1 & 0 \\ \sin \theta & 0 & \cos \theta \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \cos \psi & \sin \psi & 0 \\ -\sin \psi & \cos \psi & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

$$= \begin{pmatrix} C_\theta C_\psi & C_\theta S_\psi & -S_\theta \\ S_\theta S_\psi C_\psi - C_\theta S_\psi & S_\theta S_\psi S_\psi + C_\theta C_\psi & S_\theta C_\psi \\ C_\theta S_\psi C_\psi + S_\theta S_\psi & C_\theta S_\psi S_\psi - S_\theta C_\psi & C_\theta C_\psi \end{pmatrix}, \quad (2.5)$$

图 1. NED下的位置导数

欧拉角  $\phi, \theta, \psi$  (坐标系 Vehicle, Vehicle-1, Vehicle-2) 和角速率  $p, q, r$  (体坐标) 因被定义在不同的坐标系下而复杂, (yaw, pitch, roll 对应着 vehicle 到 vehicle-1 (k 轴), vehicle-1 到 vehicle-2 (j 轴), vehicle-2 到 body (i 轴)), 将它们分别从各自的坐标系旋转变换到 body 坐标系进行求速率, 继而求和即可 [2](#)

### 3 Rigid-body Dynamics

#### 3.1 Newton's second law

牛顿第二运动定律的常见表述是: (作用在惯性坐标系, 即物体的运动被固定在一个固定的坐标系下, 这里是大地坐标系(ground), 尽管如此, 我们也是可以使用向量(和其他的坐标系所联系的向量)来进行表示)

$$F = ma$$

- 物体加速度的大小跟作用力成正比, 跟物体的质量成反比,
- 且与物体质量的倒数成正比; 加速度的方向跟作用力的方向相同。

#### 3.2 向量的微分

向量的叉乘 ( $a \times b$ ) = 在数值上等于由向量  $a$  和向量  $b$  构成的平行四边形的面积, 公式推导可见 [3](#)

#### 3.3 向量的叉积

见 [4](#)

#### 3.4 叉乘矩阵

见: [5](#)

将三个欧拉角分别进行旋转变换到体坐标系下，再求导数

(vehicle-2 -> body)(vehicle-1 -> vehicle - 2)

roll pitch yaw(vehicle -> vehicle-1)

$$\begin{pmatrix} p \\ q \\ r \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \dot{\phi} \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} + \mathcal{R}_{v2}^b(\phi) \begin{pmatrix} 0 \\ \dot{\theta} \\ 0 \end{pmatrix} + \mathcal{R}_{v2}^b(\phi) \mathcal{R}_{v1}^{v2}(\theta) \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ \dot{\psi} \end{pmatrix}$$

体坐标系下的角速率

$$\begin{aligned} &= \begin{pmatrix} \dot{\phi} \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \cos \phi & \sin \phi \\ 0 & -\sin \phi & \cos \phi \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 \\ \dot{\theta} \\ 0 \end{pmatrix} \\ &+ \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \cos \phi & \sin \phi \\ 0 & -\sin \phi & \cos \phi \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \cos \theta & 0 & -\sin \theta \\ 0 & 1 & 0 \\ \sin \theta & 0 & \cos \theta \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ \dot{\psi} \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} 1 & 0 & -\sin \theta \\ 0 & \cos \phi & \sin \phi \cos \theta \\ 0 & -\sin \phi \cos \phi \cos \theta \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \dot{\phi} \\ \dot{\theta} \\ \dot{\psi} \end{pmatrix}. \end{aligned} \quad (3.2)$$

Inverting this expression yields 取反之后

$$\begin{pmatrix} \dot{\phi} \\ \dot{\theta} \\ \dot{\psi} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \sin \phi \tan \theta \cos \phi \tan \theta \\ 0 \cos \phi -\sin \phi \\ 0 \sin \phi \sec \theta \cos \phi \sec \theta \end{pmatrix} \begin{pmatrix} p \\ q \\ r \end{pmatrix}, \quad (3.3)$$

$y = 1/(\cos x)^2 = (\sec x)^2$   
 $y' = 2 \sec x * (\sec x)' = 2 \sec x * \sec x * \tan x = 2(\sec x)^2 \tan x$

图 2. 旋转坐标系, 继而求和, 得到体坐标系下的角速率

① 向量  $p$  在体坐标系下进行移动;  
体坐标系在进行旋转, 旋转到惯性坐标系下

我们的目标是: 寻找  $p$  在惯性坐标系下关于时间的导数, 对此, 我们定义体坐标系下的体坐标系到惯性坐标系的旋转角速度

Figure 2.13 A vector in a rotating reference frame.

表示了向量  $a$  在体坐标系下变换关于惯性坐标系的导数,

③

$$\frac{d}{dt_i} p = \frac{d}{dt_b} p + \omega_{b/i} \times p, \quad (2.17)$$

④

$$\frac{d}{dt_b} p = \dot{p}_x i^b + \dot{p}_y j^b + \dot{p}_z k^b + p_x \frac{d}{dt_i} i^b + p_y \frac{d}{dt_i} j^b + p_z \frac{d}{dt_i} k^b,$$

⑤

$$\frac{d}{dt_b} p = \dot{p}_x i^b + \dot{p}_y j^b + \dot{p}_z k^b + p_x \omega_{b/i} \times i^b + p_y \omega_{b/i} \times j^b + p_z \omega_{b/i} \times k^b$$

$$= \omega_{b/i} \times p. \quad (2.16)$$

⑥

$\dot{i}^b = \omega_{b/i} \times i^b$   
 $\dot{j}^b = \omega_{b/i} \times j^b$   
 $\dot{k}^b = \omega_{b/i} \times k^b$

⑦

$\dot{p} = p_x \dot{i}^b + p_y \dot{j}^b + p_z \dot{k}^b$   
 $\dot{p} = p_x \omega_{b/i} \times i^b + p_y \omega_{b/i} \times j^b + p_z \omega_{b/i} \times k^b$   
 $\dot{p} = \omega_{b/i} \times p$

图 3. 向量的微分

$$a = a_x i + a_y j + a_z k;$$

$$b = b_x i + b_y j + b_z k;$$

$a \times b = (a_y b_z - a_z b_y) i + (a_z b_x - a_x b_z) j + (a_x b_y - a_y b_x) k$ , 为了帮助记忆, 利用三阶行列式, 写成:

$$\begin{vmatrix} i & j & k \\ a_x & a_y & a_z \\ b_x & b_y & b_z \end{vmatrix}$$

图 4. 叉积计算

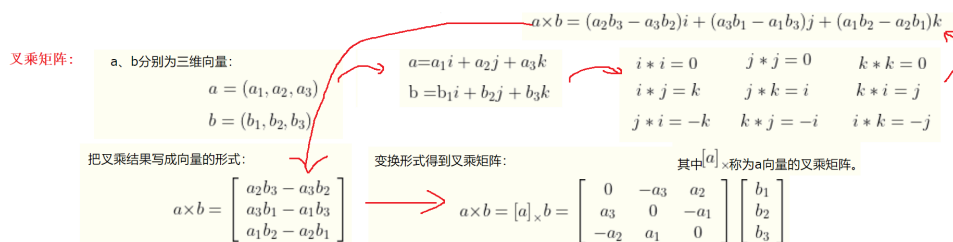


图 5. 叉乘矩阵

## 4 转动惯量

定义: 刚体绕轴转动时惯性的量度, 用字母  $I$  或  $J$  表示

公式:

$$I = m * r^2$$

其中的  $m$  是物体的质量,  $r$  是质点和转轴的垂直距离. 单位是  $kgm^2$

## 5 角动量

定义: 物体在转动的时候, 具有的”冲量”.

公式:

$$L = velocity * radius * mass \quad (1)$$

其中,  $velocity$  是速度,  $radius$  是转弯的半径,  $mass$  是物体的质量.

系统的角动量守恒定律: 一个系统内的所有物体的旋转运动所具有的角动量之和是不会随着时间的变化而变化的. 除非有外界因素的干扰.

## 6 力矩

定义: 力矩表示力对物体作用时所产生的转动效应的物理量。力矩是产生转动效应的原因.

公式:

$$\mathbf{M} = \mathbf{L} \times \mathbf{F} \quad (2)$$

其中的  $L$  是转动轴到着力点的距离矢量,  $F$  是矢量力. 力矩也是一个矢量.

### 6.1 Rigid-body Dynamics

first to the translational degrees of freedom and then to the rotational degrees of freedom. 首先平移自由度, 然后旋转自由度.

假设: 平缓的地面模型, 对于小型无人机是适用的.

MAV 的速度向量是  $V_g$ , 这个变量是方便的对于大多数体坐标系下的公式表达, 体坐标系下的速度向量为  $V_g^b = (u, v, w)$ .

## 6.2 translational motion

针对无人机做平移运动, 牛顿第二定律作用在物体上面的动力学模型 6.

位置是在惯性坐标系  
速度在之前已经被转换到vehicle坐标系下了  
加速度也应该是惯性坐标系或vehicle坐标系

牛顿第二定律



惯性坐标系  $m \frac{dV_g}{dt_g} = f$  重力, 空气动力, 推力等的合力(3.4)  
在惯性坐标系下对时间的导数

向量在体坐标系下, 旋转到惯性坐标系下的微分方程

$$\frac{dV_g}{dt_g} = \frac{dV_g}{dt_b} + \omega_{b/i} \times V_g, \quad (3.5)$$

$V_g$ 是体坐标系下的向量

惯性坐标系 体坐标系

$$m \left( \frac{dV_g}{dt_b} + \omega_{b/i} \times V_g \right) = f.$$

$$\begin{pmatrix} \dot{u} & \dot{v} & \dot{w} \\ p & q & r \\ u & v & w \end{pmatrix}$$

速度改变的频率

$$m \left( \frac{dV_g^b}{dt_b} + \omega_{b/i}^b \times V_g^b \right) = f^b, \quad (3.6)$$

体坐标系下的力和速度的牛顿第二定律的表达

$$f^b \triangleq (f_x, f_y, f_z)^T$$

$$V_g^b = (u, v, w)^T \text{ and } \omega_{b/i}^b = (p, q, r)^T$$

体坐标系下的三轴的速度 体坐标系下的roll, pitch, yaw的速率

$$\frac{dV_g^b}{dt_b} = \begin{pmatrix} \dot{u} \\ \dot{v} \\ \dot{w} \end{pmatrix}$$

$u, v, w$ 是三轴的 $V_g$ 在三轴的速度分量

$$\begin{pmatrix} \dot{u} \\ \dot{v} \\ \dot{w} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} rv - qw \\ pw - ru \\ qu - pv \end{pmatrix} + \frac{1}{m} \begin{pmatrix} f_x \\ f_y \\ f_z \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} (q w - r v) \hat{i} + (r u - p w) \hat{j} + (p v - q u) \hat{k} \end{pmatrix}$$

图 6. 牛顿第二运动定律在平移运动下的合并公式

## 6.3 rotational motion

惯性矩阵：是转动惯量的表示

针对无人机做旋转运动, 牛顿第二定律作用在物体上面的动力学模型 7 其中的惯性矩阵  $J$  的对角项被

h是矢量形式的角动量

如果力矩是围绕MAV质心求和的, 则此表达式是正确的。

惯性坐标系下的导数:  $\frac{d\mathbf{h}}{dt_i} = \mathbf{m}$  (2.17)  $\frac{d\mathbf{h}}{dt_i} = \frac{d\mathbf{h}}{dt_b} + \boldsymbol{\omega}_{b/i} \times \mathbf{h} = \mathbf{m}$

where  $\mathbf{h}$  is the angular momentum in vector form and  $\mathbf{m}$  is the sum of all externally applied moments.

其中 $\mathbf{h}$ 是矢量形式的角动量,  $\mathbf{m}$ 是所有外部施加力矩的总和。

针对刚体, 角动量定义为: 惯性矩阵 $J$ 和速度矢量的乘积(product):  $\mathbf{h}^b \triangleq J\boldsymbol{\omega}_{b/i}^b$

例体

where  $J$  is given by

$$J = \begin{pmatrix} \int (y^2 + z^2) dm & -\int xy dm & -\int xz dm \\ -\int xy dm & \int (x^2 + z^2) dm & -\int yz dm \\ -\int xz dm & -\int yz dm & \int (x^2 + y^2) dm \end{pmatrix}$$

$$\triangleq \begin{pmatrix} J_x & -J_{xy} & -J_{xz} \\ -J_{xy} & J_y & -J_{yz} \\ -J_{xz} & -J_{yz} & J_z \end{pmatrix} \cdot \begin{matrix} J \text{的对角项称为惯性矩, 非对角项是惯性乘积} \\ \text{惯性矩: 反对围绕特定旋转轴的加速度,} \end{matrix} \quad (3.9)$$

$J$ 是一个常数, 所以求导数的时候为0, 所以(3.8)可以写成旁边的形式 (3.10)

$$J \frac{d\boldsymbol{\omega}_{b/i}^b}{dt_b} + \boldsymbol{\omega}_{b/i}^b \times (J\boldsymbol{\omega}_{b/i}^b) = \mathbf{m}^b$$

体坐标系下的表达式:  $\frac{d\mathbf{h}^b}{dt_b} + \boldsymbol{\omega}_{b/i}^b \times \mathbf{h}^b = \mathbf{m}^b$

角动量旋转到惯性坐标系下进行

图 7. 牛顿第二运动定律在旋转运动下的合并公式

称为惯性动量, 非对角项是惯性乘积。

惯性动量是飞机的趋势测量, 来抵消无人机关于某一个特定轴的旋转。比如:  $J_x$  是组成飞机的每一个元素的质量和元素到体坐标系 $x$ 的距离的平方( $y^2 + z^2$ )的乘积, 再取和。  $J_x$ 越大, 飞机抵制关于 $x$ 轴的角加速度越有效。  $J_y, J_z$ 类似。

实际上, 惯性矩阵不能被公式(3.9)进行计算。而是使用CAD模型从质量的大小计算出来的, 或者也可以通过实验就行测量。

因为公式(3.19)中的惯性被相对于 $i^b, j^b, k^b$ 轴进行计算的, 且, 这些轴都是固定的, 所以 $J$ 是一个在体坐标系下可见的常数值, 即  $\frac{dJ}{dt_b} = 0$ , 所以:

$$J \frac{d\boldsymbol{\omega}_{b/i}^b}{dt_b} + \boldsymbol{\omega}_{b/i}^b \times (J\boldsymbol{\omega}_{b/i}^b) = \mathbf{m}^b \quad (3)$$

其中:  $\frac{d\boldsymbol{\omega}_{b/i}^b}{dt_b}$  是角速度在体坐标系下的变化速率

$p, q, r$  是瞬时 $\boldsymbol{\omega}_{b/i}^b$ 在 $i^b, j^b, k^b$ 上的投影。所以:

$$\boldsymbol{\omega}_{b/i}^b = \frac{d\boldsymbol{\omega}_{b/i}^b}{dt_b} = \begin{pmatrix} \dot{p} \\ \dot{q} \\ \dot{r} \end{pmatrix}$$

飞机通常关于 $i^b$ 和 $k^b$ 跨越的平面对称。在这种情况下,  $J_{xy} = J_{yz} = 0$ , 这意味着

$$J = \begin{pmatrix} J_x & 0 & -J_{xz} \\ 0 & J_y & 0 \\ -J_{xz} & 0 & J_z \end{pmatrix}$$

故, 公式可以推导如下: 8

在对称平面假设的情况下:

$$\begin{aligned}
 \mathbf{J}^{-1} &= \frac{\text{adj}(\mathbf{J})}{\det(\mathbf{J})} \quad \text{行列式的值} \quad \text{adj}(\mathbf{A}), \text{表示A的伴随矩阵} \\
 &= \frac{\begin{pmatrix} J_y J_z & 0 & J_y J_{xz} \\ 0 & J_x J_z - J_{xz}^2 & 0 \\ J_{xz} J_y & 0 & J_x J_y \end{pmatrix}}{J_x J_y J_z - J_{xz}^2 J_y} \\
 &= \begin{pmatrix} \frac{J_z}{\Gamma} & 0 & \frac{J_{xz}}{\Gamma} \\ 0 & \frac{1}{J_y} & 0 \\ \frac{J_{xz}}{\Gamma} & 0 & \frac{J_x}{\Gamma} \end{pmatrix} \quad \Gamma \triangleq J_x J_z - J_{xz}^2.
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 \dot{\omega}_{b/i}^b &= \mathbf{J}^{-1} [-\omega_{b/i}^b \times (\mathbf{J} \omega_{b/i}^b) + \mathbf{m}^b] \quad (3.11) \\
 &= \begin{pmatrix} \frac{J_z}{\Gamma} & 0 & \frac{J_{xz}}{\Gamma} \\ 0 & \frac{1}{J_y} & 0 \\ \frac{J_{xz}}{\Gamma} & 0 & \frac{J_x}{\Gamma} \end{pmatrix} \left[ \begin{pmatrix} 0 & r & -q \\ -r & 0 & p \\ q & -p & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} J_x & 0 & -J_{xz} \\ 0 & J_y & 0 \\ -J_{xz} & 0 & J_z \end{pmatrix} \begin{pmatrix} p \\ q \\ r \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} l \\ m \\ n \end{pmatrix} \right] \\
 &= \begin{pmatrix} \frac{J_z}{\Gamma} & 0 & \frac{J_{xz}}{\Gamma} \\ 0 & \frac{1}{J_y} & 0 \\ \frac{J_{xz}}{\Gamma} & 0 & \frac{J_x}{\Gamma} \end{pmatrix} \left[ \begin{pmatrix} J_{xz} p q + (J_y - J_z) q r \\ J_{xz} (r^2 - p^2) + (J_z - J_x) p r \\ (J_x - J_y) p q - J_{xz} q r \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} l \\ m \\ n \end{pmatrix} \right] \\
 &= \begin{pmatrix} \Gamma_1 p q - \Gamma_2 q r + \Gamma_3 l + \Gamma_4 n \\ \Gamma_5 p r - \Gamma_6 (p^2 - r^2) + \frac{1}{J_y} m \\ \Gamma_7 p q - \Gamma_1 q r + \Gamma_4 l + \Gamma_8 n \end{pmatrix} \quad (3.12)
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 \Gamma_1 &= \frac{J_{xz}(J_x - J_y + J_z)}{\Gamma} & \Gamma_3 &= \frac{J_z}{\Gamma} & \Gamma_5 &= \frac{J_z - J_x}{J_y} & \Gamma_7 &= \frac{(J_x - J_z)J_x + J_{xz}^2}{\Gamma} \\
 \Gamma_2 &= \frac{J_z(J_z - J_y) + J_{xz}^2}{\Gamma} & \Gamma_4 &= \frac{J_{xz}}{\Gamma} & \Gamma_6 &= \frac{J_{xz}}{J_y} & \Gamma_8 &= \frac{J_x}{\Gamma}.
 \end{aligned}$$

图 8. 公式推导

## 7 12个姿态的动力学方程

本章我们推导出了6个自由度, 和12个姿态动力学模型如9所示. 但它们是不完整的, 因为尚未定义外部施加的力和力矩.

由重力, 空气动力学和推进力而产生的力和力矩的模型将在第4章中得出. 这些模型将会是下面几章分析, 仿真, 和控制设计的基础.

$$\begin{pmatrix} \dot{p}_n \\ \dot{p}_e \\ \dot{p}_d \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} c_\theta c_\psi & s_\phi s_\theta c_\psi & -c_\phi s_\psi & c_\phi s_\theta c_\psi & + s_\phi s_\psi \\ c_\theta s_\psi & s_\phi s_\theta s_\psi & + c_\phi c_\psi & c_\phi s_\theta s_\psi & - s_\phi c_\psi \\ -s_\theta & s_\phi c_\theta & & c_\phi c_\theta & \end{pmatrix} \begin{pmatrix} u \\ v \\ w \end{pmatrix} \quad (3.14)$$

$$\begin{pmatrix} \dot{u} \\ \dot{v} \\ \dot{w} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} r v - q w \\ p w - r u \\ q u - p v \end{pmatrix} + \frac{1}{m} \begin{pmatrix} f_x \\ f_y \\ f_z \end{pmatrix}, \quad (3.15)$$

$$\begin{pmatrix} \dot{\phi} \\ \dot{\theta} \\ \dot{\psi} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & \sin \phi \tan \theta & \cos \phi \tan \theta \\ 0 & \cos \phi & -\sin \phi \\ 0 & \frac{\sin \phi}{\cos \theta} & \frac{\cos \phi}{\cos \theta} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} p \\ q \\ r \end{pmatrix} \quad \text{body frame} \quad (3.16)$$

$$\begin{pmatrix} \dot{p} \\ \dot{q} \\ \dot{r} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \Gamma_1 p q - \Gamma_2 q r \\ \Gamma_5 p r - \Gamma_6 (p^2 - r^2) \\ \Gamma_7 p q - \Gamma_1 q r \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} \Gamma_3 l + \Gamma_4 n \\ \frac{1}{J_y} m \\ \Gamma_4 l + \Gamma_8 n \end{pmatrix}. \quad (3.17)$$

图 9. 动力学方程