

chapter 4. Forces and Moments 力和力矩

冯学伟

July 6, 2020

- 目标: 描述作用在无人机上的力和力矩,
- 来源: 重力(f_g), 空气动力学(f_a, m_a), 推力(f_p, m_p) (f 是力, m 是动量) 见公式组1
- 推导的表达式: 上面的每个力和力矩的表达式
- 第一节: 重力
- 第二节: 空气动力和力矩
- 第三节: 推力的力和力矩
- 第四节: 大气的扰动被建模为风速的变化, 并通过空气动力和扭矩推导出运动方程

$$\begin{aligned} f &= f_g + f_a + f_p \\ m &= m_a + m_p \end{aligned} \tag{1}$$

其中的 f 是作用在飞行器上面的合力, m 是作用在飞行器上面的总力矩.

1 力矩

力矩表示力对物体作用时所产生的转动效应的物理量. 力对某一点的力矩的大小为该点到力的作用线所引垂线的长度 (即力臂) 乘以力的大小, 其方向则垂直于垂线和力所构成的平面用右手螺旋法则来确定1

2 量纲式

将一个物理导出量用若干个基本量的乘方之积表示出来的表达式, 称为该物理量的量纲式, 简称量纲. 它是在选定了单位制之后, 由基本物理量单位表达的式子. 有量纲的物理量都可以进行无量纲化处理.

线应变表示为线长度的增量除以初始长度, 由于分子、分母的量纲均为长度单位m, 故线应变是一个无量纲物理量. 无量纲按照个人理解应该是单位为1. 即无量纲的物理量其单位在计算时一般取为数字1.

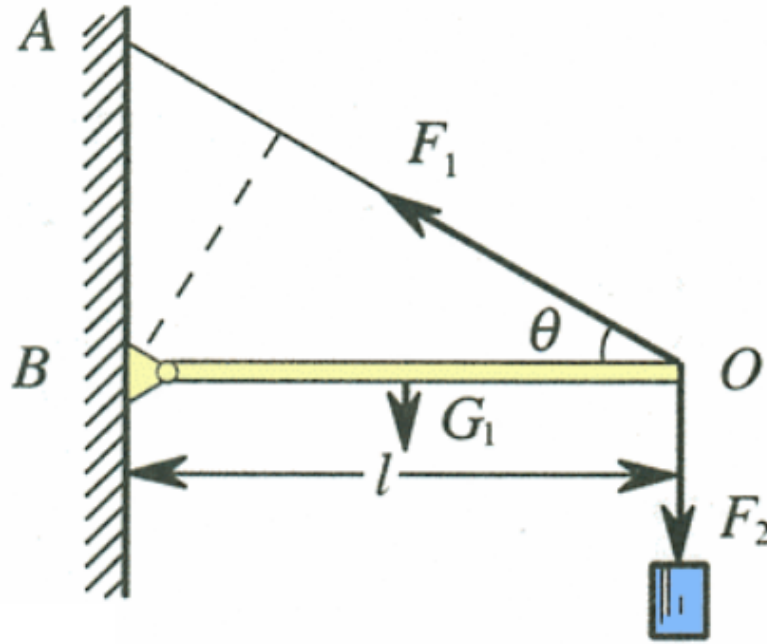


图 1. 力矩示意图

3 雷诺数和马赫数

3.1 雷诺数

雷诺数(Reynolds number)一种可用来表征流体流动情况的无量纲数。 $Re = \frac{\rho v d}{\mu}$ ，其中 v, ρ, μ 分别为流体的流速、密度与黏性系数， d 为一特征长度。

例如流体流过圆形管道，则 d 为管道的当量直径。利用雷诺数可区分流体的流动是层流或湍流，也可用来确定物体在流体中流动所受到的阻力。

3.2 马赫数

流体力学中表征流体可压缩程度的一个重要的无量纲参数，记为 Ma ，定义为流场中某点的速度 v 同该点的当地声速 c 之比，即 $Ma = \frac{v}{c}$ ，它是以奥地利科学家 E. 马赫的姓氏命名的。

4 Gravitational Forces 重力

作用在无人机上的地球的重力场和物体的质量大小成比例，方向是指向 k^i 并且与无人机的质量和重力加速度 g 的乘积(by)成比例。

在 vehicle frame F^v ，重力作用在质量的中心，公式见：2.

$$f_g^v = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ mg \end{pmatrix} \quad (2)$$

在第3章中应用牛顿第二定律时, 我们沿 body frame 的轴进行求和, 因此我们需要将重力转换到 body frame 下, 转换公式如: 2;

因为重力穿过在物体的质心, 所以没有力矩产生.

$$\begin{aligned} \mathbf{f}_s^b &= \mathcal{R}_v^b \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ mg \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} -mg \sin \theta \\ mg \cos \theta \sin \phi \\ mg \cos \theta \cos \phi \end{pmatrix}. \end{aligned}$$

因为重力的作用点在
物体的质量中心, 所
以, 没有动量产生

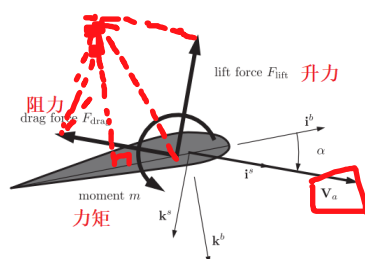
$$\begin{aligned} \mathcal{R}_v^b(\phi, \theta, \psi) &= \mathcal{R}_{v2}^b(\phi) \mathcal{R}_{v1}^b(\theta) \mathcal{R}_v^b(\psi) \quad \text{绕y(j)轴旋转} \quad (2.4) \\ &= \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \cos \phi & \sin \phi \\ 0 & -\sin \phi & \cos \phi \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \cos \theta & 0 & -\sin \theta \\ 0 & 1 & 0 \\ \sin \theta & 0 & \cos \theta \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \cos \psi & \sin \psi & 0 \\ -\sin \psi & \cos \psi & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \quad \text{绕x(i)轴旋转} \quad \text{绕z轴旋转} \\ &= \begin{pmatrix} C_\theta C_\psi & C_\theta S_\psi & -S_\theta \\ S_\phi S_\theta C_\psi - C_\phi S_\psi & S_\phi S_\theta S_\psi + C_\phi C_\psi & S_\phi C_\theta \\ C_\phi S_\theta C_\psi + S_\phi S_\psi & C_\phi S_\theta S_\psi - S_\phi C_\psi & C_\phi C_\theta \end{pmatrix}, \quad (2.5) \end{aligned}$$

图 2. 重力转换公式

5 空气动力学和动量

当无人机在空中飞行时, 会在无人机附近产生空气流动形成一定的压力 pressure,

α 迎角



$$\begin{aligned} F_{\text{lift}} &= \frac{1}{2} \rho V_a^2 S C_L \\ F_{\text{drag}} &= \frac{1}{2} \rho V_a^2 S C_D \quad \text{无量纲系数} \quad (4.1) \\ m &= \frac{1}{2} \rho V_a^2 S c C_m, \end{aligned}$$

S 是 MAV 机翼的平面区域,
 c 是 MAV 机翼的平均弦

Figure 4.2 Effect of pressure distribution can be modeled using a lift force, a drag force, and a moment.

图 3. 空气动力几何模型

见图3, C_L , C_D , 和 C_m 都是非量纲系数, S 是无人机机翼的平面区域, c 是 MAV 机翼的平均弦

升力, 阻力, 和 pitch 力矩系数受机翼的形状雷诺数马赫数和迎角的影响, 其中, 雷诺数和马赫数的影响大约是常量; 因此我们考虑的是角度 α, β , 以及角速率 p, q, r 和控制平面在空气动力学系数上的偏差.

- 一般将空气动力学的力和力矩分为两组: 纵向和横向;
- 纵向的力和力矩作用在 $i^b - k^b$ 平面(也称为pitch平面), 包含了在 i^b 和 k^b 两个方向上的力(升力和阻力), 在 j^b 轴上的是力矩;
- 横向的力和力矩包括 j^b 方向上的力和 i^b 和 k^b 上的力矩.

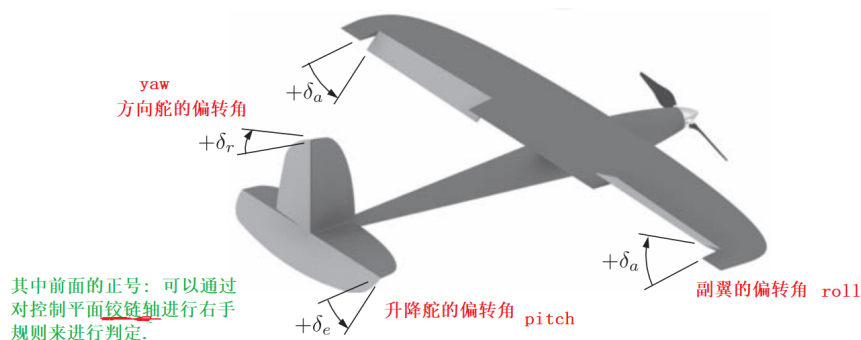


Figure 4.3 Control surfaces for a standard aircraft configuration. The ailerons are used to control the roll angle ϕ . The elevators are used to control the pitch angle θ . The rudder directly effects the yaw angle ψ .

图 4. 方向舵-升降舵初始结构

5.1 control Surfaces 控制平面

在描述由于升平面产生的空气动力和力矩之前, 我们需要定义操作无人机的控制平面.

控制平面常常被用来修改空气动力和力矩. 对于标准无人机初始结构, 控制平面包含了升降舵, 副翼和方向舵(the elevator, the aileron, and the rudder), 见4. 其他的平面比如扰流板, 襟翼和前翼(spoilers, flaps, and canards) 不会讨论, 但是建动力学模型的方法都是类似的.

流速越大,
压强越小,
压力也越小

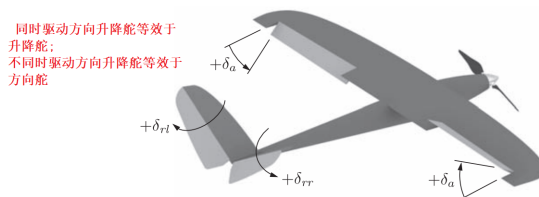


Figure 4.4 Ruddervators are used to control a v-tail aircraft. The ruddervators replace the rudder and the elevator. Driving the ruddervators together has the same effect as an elevator, and driving them differentially has the same effect as a rudder.

(a) ruddervators configuration

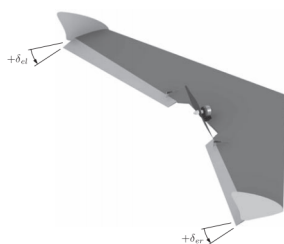


Figure 4.5 Elevons are used to control a flying-wing aircraft. The elevons replace the aileron and the elevator. Driving the elevons together has the same effect as an elevator, and driving them differentially has the same effect as ailerons.

(b) elevons configuration

图 5. 两种无人机初始结构分布

在图4中, 副翼被用来控制roll(ϕ), 升降舵控制pitch(θ), 方向舵被用来控制yaw(ψ). 其中偏转角前面的+号可以通过对控制平面铰链轴进行右手准则来决定.

- 升降舵的铰链轴和body frame的 j^b , 对 j^b 轴应用右手准则表明了正向偏转代表了尾翼边缘下降.
- 升降舵正向偏转: 代表了尾翼边缘下降.

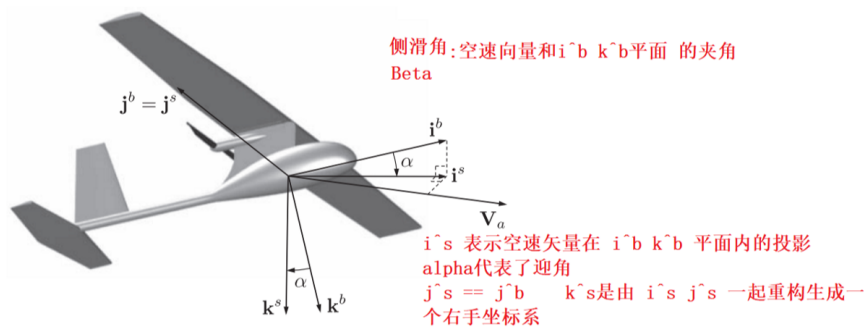


Figure 2.8 The stability frame. The i^s -axis points along the projection of the airspeed vector onto the i^b-k^b plane of the body frame, the j^s -axis is identical to the j^b -axis of the body frame, and the k^s -axis is constructed to make a right-handed coordinate system. Note that the angle of attack is defined as a left-handed rotation about the body j^b -axis. 迎角被定义为 绕 j^b 的左手旋转角度(顺时针)

图 6. stability frame

- 方向舵正向偏转: 代表了尾翼边缘左打.
- 副翼正向偏转: 代表了每个副翼都在边缘下降. ??????

同时, 副翼的偏转 $\delta_a = \frac{1}{2}(\delta_{a-left} - \delta_{a-right})$ 的复合变形, 所以正向 δ_a 代表了左翼朝下, 右翼朝上.

对于小型的无人机, 有两个标准初始结构

- 第一种是: V字形尾翼, 见 5(a)

方向升降舵代替了升降舵和方向舵, 同时驱动方向升降舵效果等同于升降舵(在 j^b 轴上面产生一个扭力), 不同时驱动效果等同于方向舵(在 k^b 轴上面产生一个扭力). δ_{rr} : 右方向舵角度偏转; δ_{rl} : 左方向舵角度偏转. 数学上, 我们利用两种情形进行一个转换. 见 3

$$\begin{pmatrix} \delta_e \\ \delta_r \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ -1 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \delta_{rr} \\ \delta_{rl} \end{pmatrix} \quad (3)$$

我们可以使用 3 关系, v-tail 无人机的力和扭矩的关系式可以就标准的方向舵和升降舵表示出来.

- 另外的一种标准飞机结构, 见 5(b)

δ_{er} : 右升降翼舵角度偏转; δ_{el} : 左升降翼舵角度偏转.

同时操作两个 elevons 机翼效果等同于升降舵, 产生一个 j^b 方向的扭矩.

不同时操作两个 elevons 机翼效果等同于副翼, 产生一个 i^b 方向的扭矩.

$$\begin{pmatrix} \delta_e \\ \delta_r \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ -1 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \delta_{er} \\ \delta_{el} \end{pmatrix} \quad (4)$$

我们可以利用 4 来对 elevons 和 4 进行转换. 故使用 4 关系, elevons 无人机的力和扭矩的关系式可以就标准的方向舵和升降舵表示出来.

5.2 纵向空气动力学

纵向空气动力学导致飞机在 i^b, k^b 平面(也称为 pitch 平面)内的移动, 它们是我们可能最熟悉的空气动力和力矩: 升力, 阻力和俯仰力矩.

升力和阻力与稳定坐标系的轴对齐, 见 3(stability frame 见 6) 当表示为一个向量的时候, pitching 的力矩是和 j^s 轴对齐, 升力和阻力以及 pitching 力矩受迎角的影响较大, 同时, pitch 角的变换率 q 和升降舵偏转角 δ_e 会影响纵向力和力矩.

基于这个, 我们重写了升力, 阻力和pitching力矩的表达式, 这个表达式依赖于 α, q, δ_e

$$\begin{aligned} F_{lift} &= \frac{1}{2} \rho V_a^2 S C_L(\alpha, q, \delta_e) \\ F_{Drag} &= \frac{1}{2} \rho V_a^2 S C_D(\alpha, q, \delta_e) \\ m &= \frac{1}{2} \rho V_a^2 S_c C_m(\alpha, q, \delta_e) \end{aligned} \tag{5}$$

一般而言: 这些力和力矩都是非线性的, 然而对于小的迎角, 机翼上的气流将保持层流状态, 在这种情形下, 升力和阻力以及pitching力矩可以使用线性近似可接受的精度建模.

6 注意

- 重心是在 Vehicle frame 下