几何画板迭代全解

佛山市南海区石门中学 谢辅炬
（唐家军 修订）

主要内容

- ✧ 迭代的基本概念以及迭代的基本操作
  - ◆ 迭代的概念
  - ◆ 迭代在代数、几何中的应用
  - ◆ 绘制正多边形
  - ◆ 数列的图象、前 n 项和与积
- ✧ 迭代与分形几何
  - ◆ Sierpinski 三角形
  - ◆ Sierpinski 地毯
  - ◆ 摇曳的 Pythagorean Tree(毕达哥拉斯树)
  - ◆ 分形树
  - ◆ KOCH 柯赫曲线
  - ◆ KOCH Snowflake 柯赫雪花
  - ◆ 数学之美
  - ◆ H 迭代
  - ◆ 蜂巢
  - ◆ 其它分形欣赏
- ✧ 函数迭代：函数映射，M 集，朱丽亚集
  - ◆ 迭代法求方程解
  - ◆ MIRA 米拉
  - ◆ Henon-Attractor 挨农吸引子
  - ◆ Mandelbrot Sets M 集合
  - ◆ Julia Sets 朱丽亚集合
  - ◆ 牛顿迭代法

第一章 迭代的概念和操作

迭代是数学中一个很有趣的功能，它相当于程序设计的递归算法。通俗的讲就是用自身的结构来描述自身。最典型的例子就是对阶乘运算可看作以下定义：n!=n×(n-1)!、(n-1)!=(n-1)(n-2)!。递归算法的特点是书写简单，容易理解，但是运算消耗内存较大。为了更好地理解几何画板中迭代的应用，先了解下面这几个迭代最基本的概念。

迭代：按一定的迭代规则，从原象到初象的反复映射过程。

原象：产生迭代序列的初始对象，通常称为“种子”。

初象：原象经过一定规则变换操作而得到的第一个象。与原象是相对概念。

更具体一点，在代数学中，如计算数列 1，3，5，7，9......的第 n 项。我们知道 $A_n=A_{n-1}+2$，所以迭代的规则就是后一项等于前一项加 2。以“1”作为原象，“3”作为初象，迭代一次后得到“5”，再迭代一次得到“7”，如此下去得到以下数值序列 7、9、11、13、15......如图 1.1 所示。

$a_1 = 1.00$

$a_1+2 = 3.00$

n	a_1+2	$(a_1+2)\text{-}2$
0	3.00	1.00
1	5.00	3.00
2	7.00	5.00
3	9.00	7.00
4	11.00	9.00
5	13.00	11.00

图 1.1

图 1.2

在几何学中，迭代使一组对象产生一组新的对象。图 1.2 中 A、B、C、D、E、F、G，各点相距 1cm，那么怎么由 A 点和 B 点得到其它各点呢？我们可以发现其中的规律就是从左到右，每一个点相当于前面一个点向右平移了 1cm。所以我们以 A 点作为原象，B 点作为初象，迭代一次得到 B 点，二次为 C 点，以此类推。

所以，**迭代象**就是迭代操作产生的象的序列，而**迭代深度**是指迭代的次数，迭代的**终点**就是最后的那个象。那么下面我们通过例子来进一步地了解迭代以及相关的概念。

几何画板中迭代的控制方式分为两种，一种是没有参数的迭代，另一种是带参数的迭代，后者我们称之为深度迭代。两者没有本质的不同，但前者需要手动改变迭代的深度，后者可通过修改参数的值来改变迭代深度。我们先通过画圆内接正 n 边形这个例子来看一下它们的区别。

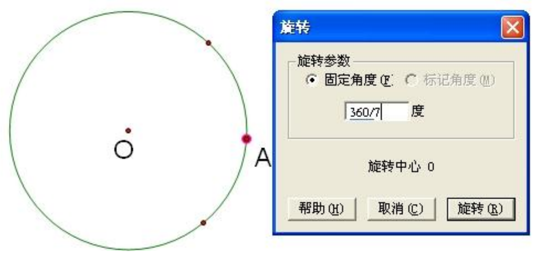
例 1.1 画圆的内接正七边形。

分析：由正七边形的特征，我们知道，每一个点都相当于前面的点逆时针旋转“360°/7”，抓住这个规律，我们可以用迭代功能来解决。

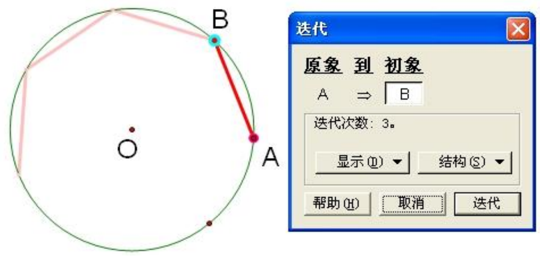
步骤：

1.新建圆 O，在圆 O 上任取一点 A。

2.双击圆心 O 作为旋转中心。选中 A 点，单击菜单“变换”-“旋转”，旋转参数选为选择固定角度，然后在框中输入“360° /7”（单位必须标记出来），得到 B 点。连接线段 AB。



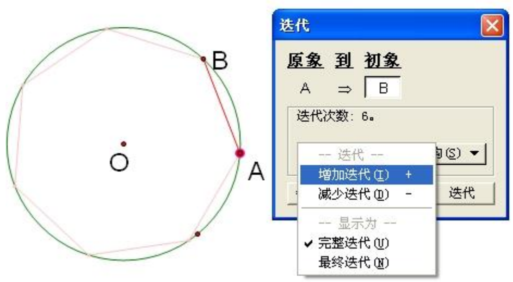
第 2 步



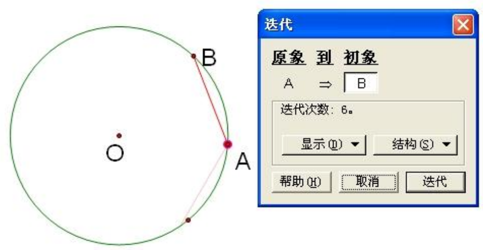
第 3 步

3.选择 A 点，单击“变换”-“迭代”，点击 B 点作为初象。屏幕上显示出迭代的象是正七边形的 4 条边（因为系统默认普通迭代的迭代次数是 3 次）。

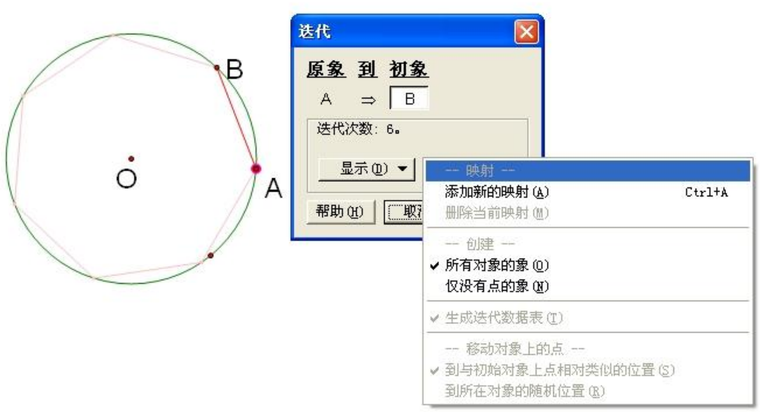
4.单击迭代框的“显示”按钮，选择“增加迭代”。（或者按键盘的‘+’或‘—’）。增加三次迭代后，我们可以看到一个完整的正七边形。此时的迭代次数为 6 次，正七边形制作完成。



第 4 步



第 5 步



5.单击迭代框的“显示”按钮，选“最终迭代”，得到的图象仅是最后一条边。

6.点击迭代框“结构”按钮，我们可以设置创建的对象，选择“仅没有点的对象”则迭代的象只有正多边形的各条边，而没有顶点，反之则有顶点。

选择迭代象，我们可以修改他们的属性，比如颜色和粗细等，但是细心的你会发现，线段的迭代象是不能够度量其长度的，当然也就不能取中点之类的操作。迭代的点是不能够度量他们的横纵坐标，但是我们可以得到**迭代的终点**，方法是选择迭代的象点，然后单击“变换”-“终点”，可以发现最后的那个点变成实点了，此点可以被度量，此功能在函数映射里面会用到。

上述方法在增加后减少迭代次数时比较麻烦，而且迭代规则限定了，即每次都是旋转同样

的角度。迭代次数和迭代规则能不能用带参数来控制呢？可以的，这就是深度迭代。

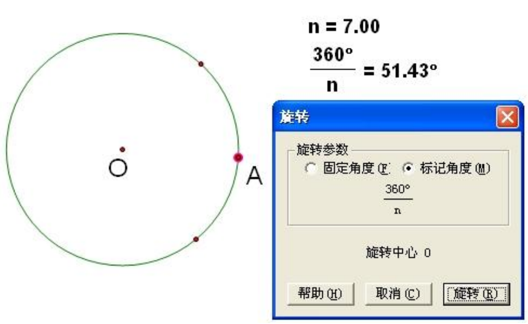
例 1.2 画圆的任意内接正 n 边形

步骤：

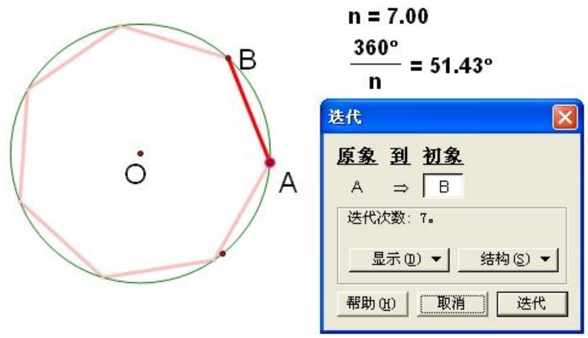
1. 新建圆 O 并在圆上任取一点 A。双击圆心 O 作为旋转中心。

2. 新建参数 n=7，计算“360°/n”，注意这时要带单位“度”。

3. 选择 A 点，单击菜单“变换”-“旋转”，出现旋转对话框，单击计算结果“360°/n”作为标记角度，得到 B 点。连接线段 AB。



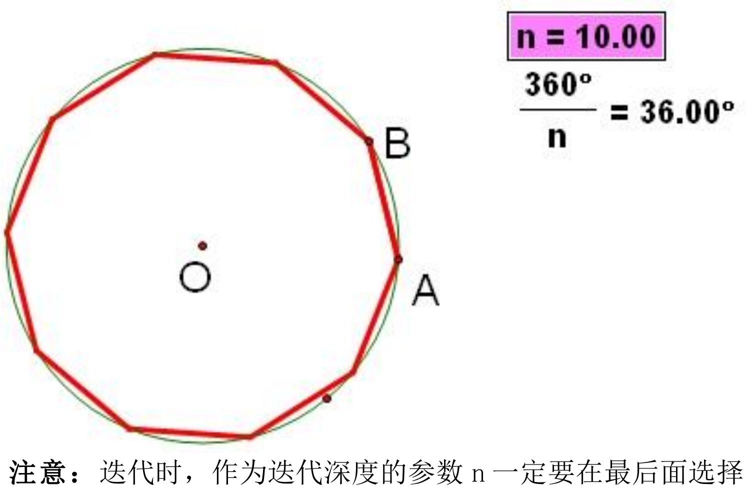
第 3 步



第 4 步

4. 顺次选择点 A 和参数 n，按住“shift”键不放，单击“变换”-“深度迭代 I”，出现迭代对话框。单击 B 点作为初象，屏幕上显示出完整的正七边形。按“迭代”完成操作。

5. 如何改变参数 n 呢？有多种方法，第一种是双击参数 n，然后在对话框中输入值。第二种是选定参数 n，按键盘的‘+’、‘—’，系统默认变化量为 1。右键参数-“属性”可以修改变化量的大小。当然，还可以通过动画和移动参数调整参数的大小，当参数有编辑框时，还可以直接输入数字。



注意：迭代时，作为迭代深度的参数 n 一定要在最后面选择，这是系统的规定。

上面讲的都是迭代在几何方面的应用，下面我们来看看用迭代在画数列图象和数列求和方面的应用。

例 1.3 求数列 an=1+n/2(n=1,2......)的前 8 项，并在平面上画出散点(n，an）

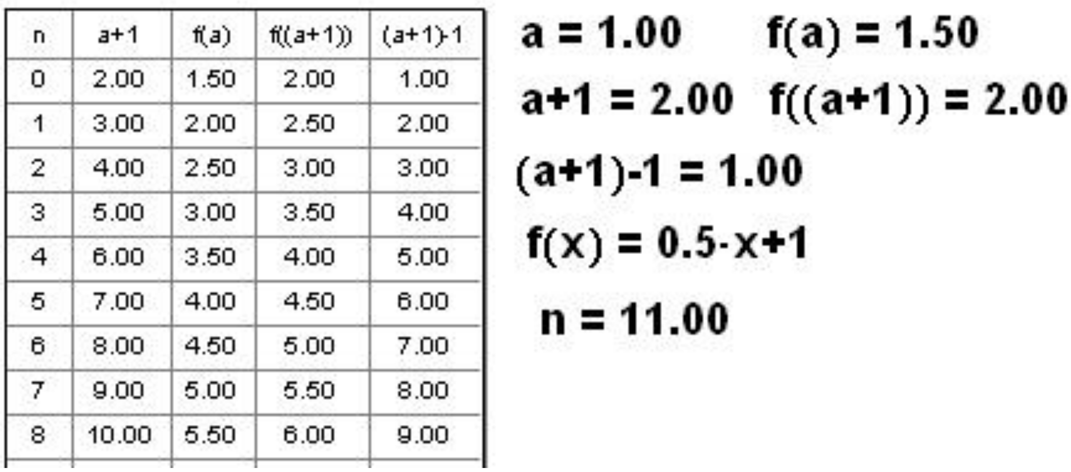
分析：由数列的表达式可知，(n, a_n)是直线 y=1+0.5x 上面的点。我们要产生两个数列，一个是作为横坐标的数列 1，2，3......，一个是作为纵坐标的满足上述通项公式的数列。

步骤：

1. 新建函数 f(x)=1+0.5x。
2. 新建参数 a=1，计算 a+1，a+1-1，f(a)，f(a+1)。

（计算 a+1-1 是为了得到 f(a)对应的横坐标 a。因为迭代次数为 0 的时候，f(a)=1.5，a 的值在迭代数据表中是不会显示出来的。）

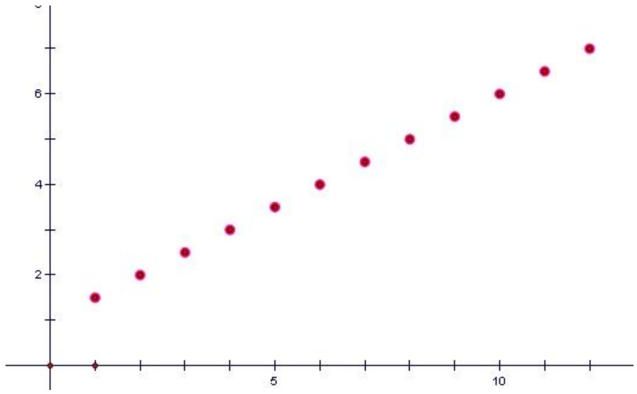
3. 新建参数 n＝7，作为迭代深度。
4. 选择 a 和 n，做深度迭代，原象是“a”，初象是“a＋1”。



n	a+1	f(a)	f((a+1))	(a+1)-1
0	2.00	1.50	2.00	1.00
1	3.00	2.00	2.50	2.00
2	4.00	2.50	3.00	3.00
3	5.00	3.00	3.50	4.00
4	6.00	3.50	4.00	5.00
5	7.00	4.00	4.50	6.00
6	8.00	4.50	5.00	7.00
7	9.00	5.00	5.50	8.00
8	10.00	5.50	6.00	9.00

5. 右键点击数据表，选择‘绘制表中记录’，设置 x 列变量为(a+1)-1，y 列为 f(a)。坐标系为直角坐标系。

n	a+1	f(a)	f((a+1))	(a+1)-1
0	2.00	1.50	2.00	1.00
1	3.00	2.00	2.50	2.00
2	4.00	2.50	3.00	3.00
3	5.00	3.00	3.50	4.00
4	6.00	3.50	4.00	5.00
5	7.00	4.00	4.50	6.00
6	8.00	4.50	5.00	7.00
7	9.00	5.00	5.50	8.00
8	10.00	5.50	6.00	9.00
9	11.00	6.00	6.50	10.00
10	12.00	6.50	7.00	11.00
11	13.00	7.00	7.50	12.00



第 6 步

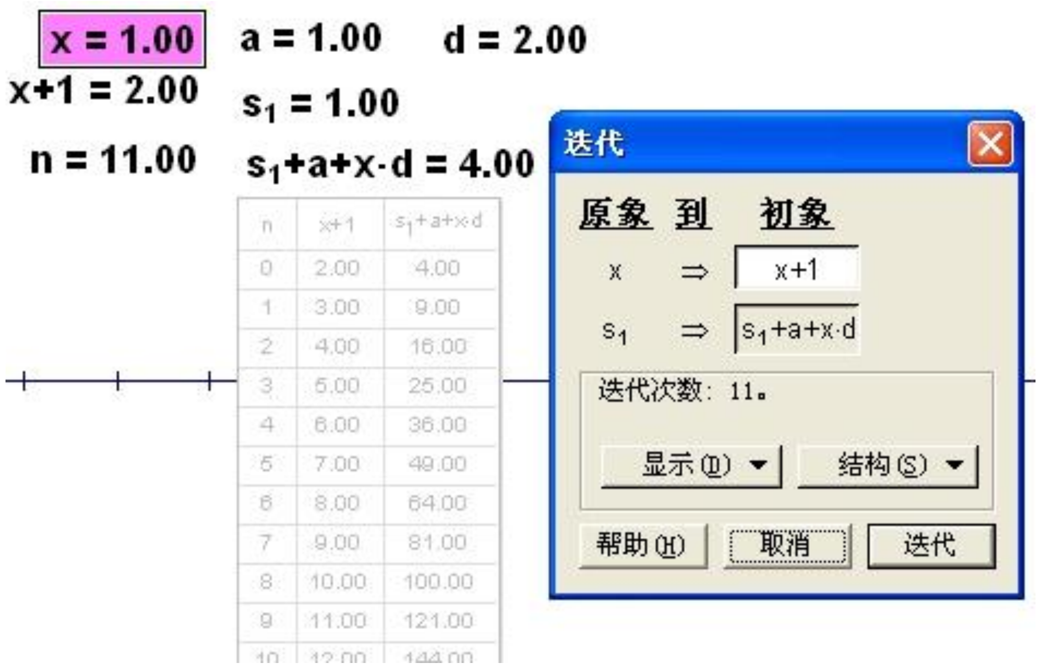
6. 点击绘图，得到散点。这些点是可以度量的。但是当参数 n 改变的时候，这些点不与数据表同步，所以是不会改变的。

例 1.4 求数列 1，3，5，7，9(n=1,2......)的前 n 项的和。

分析：公差为 d，假设前 n 项和为 S_n，$S_n=S_{n-1}+a_n=S_{n-1}+a_1+(n-1)*d$，在平面上描出（n, S_n）。

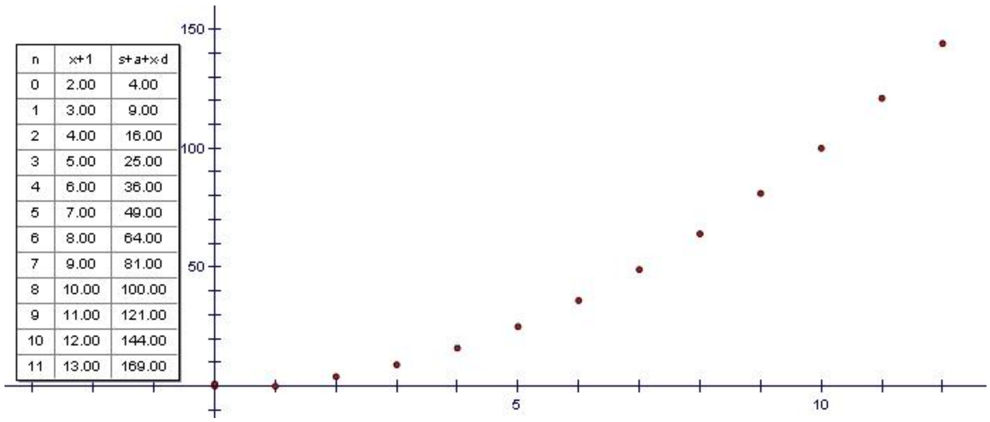
步骤：

1. 新建参数 x=1, 计算 x＋1。
2. 新建参数 a=1, d=2，n=11。分别表示数列首项、公差和迭代次数。
3. 新建参数 s=1, 计算 s+a+x*d。
4. 选择 x, S_1 和 n 做深度迭代。绘制数据表。
5、右键表格，绘制表中数据，x 的列为 x＋1，y 的列为 s＋a+x*d。



n	x+1	s_1+a+x·d
0	2.00	4.00
1	3.00	9.00
2	4.00	16.00
3	5.00	25.00
4	6.00	36.00
5	7.00	49.00
6	8.00	64.00
7	9.00	81.00
8	10.00	100.00
9	11.00	121.00
10	12.00	144.00

第 4 步



第 5 步

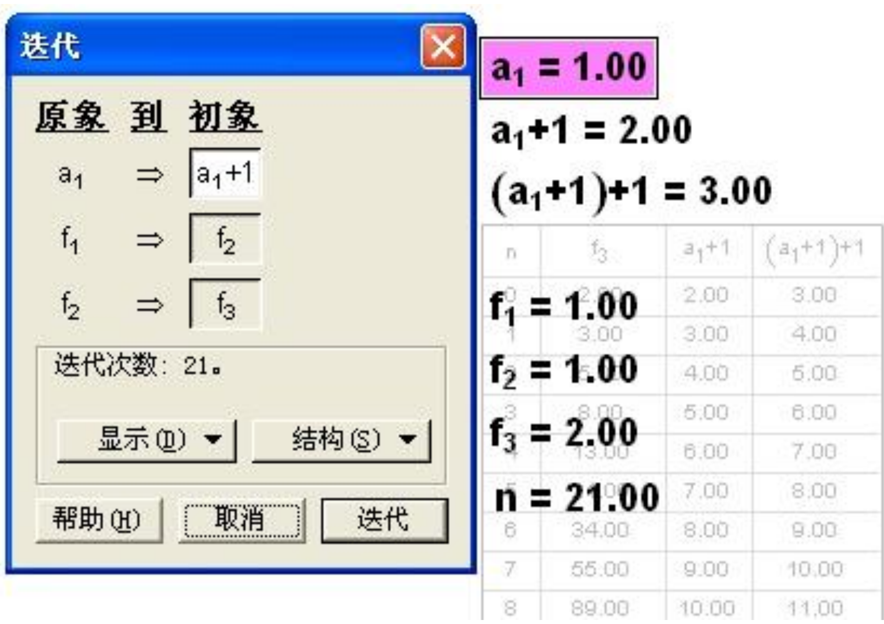
与此同理，等比数列的制作也是一样的。下面我们来看看通项公式不知道的数列怎么画出其图象。

例 1.5 画出斐波那契数列 a1=1，a2=1，an=an-1+an-2。

分析：数列的前提条件是 $a_1=1$，$a_2=1$，因为 $a_n=a_{n-1}+a_{n-2}$；所以原象是 a_1，a_2，初象是 a_2，a_3。

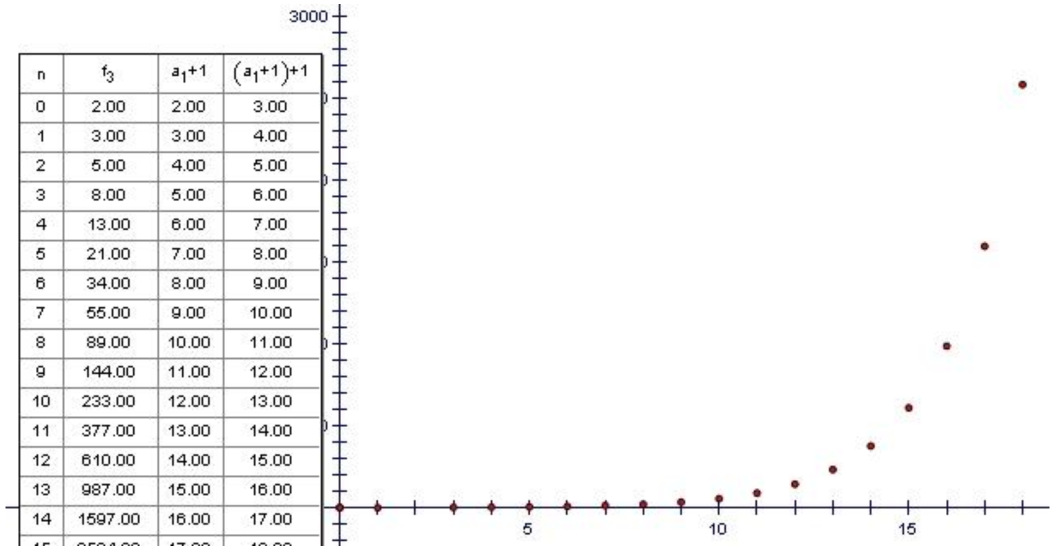
步骤：

1. 新建参数 $f_1=1$, $f_2=1$, 计算 f_1+f_2, 把计算结果的标签改为 f_3。
2. 新建参数 a=1, 计算 a+1,。计算（a+1）+1(因为迭代 0 次的时候 f3＝2，而，所以下标应该是 3，而 a=1, 故计算 a+1+1)
3. 新建参数 n=8。
4. 依次选择 f_1, f_2, a_1, n, 做深度迭代，初象分别为 f_2, f_3, a_1+1,。



第 5 步

5.绘制表中数据，x 列为(a_1+1)+1， y 列为 f_3。



n	f_3	a_1+1	$(a_1+1)+1$
0	2.00	2.00	3.00
1	3.00	3.00	4.00
2	5.00	4.00	5.00
3	8.00	5.00	6.00
4	13.00	6.00	7.00
5	21.00	7.00	8.00
6	34.00	8.00	9.00
7	55.00	9.00	10.00
8	89.00	10.00	11.00
9	144.00	11.00	12.00
10	233.00	12.00	13.00
11	377.00	13.00	14.00
12	610.00	14.00	15.00
13	987.00	15.00	16.00
14	1597.00	16.00	17.00

第 6 步

6.画点（0,1）,(1,1)两点，作为数列的前两项。从图象可以看出，数列前面增长的很缓慢，但是到了后面就非常的惊人了。

小结：

在开始下一章“迭代与分形”之前，先复习一下深度迭代的过程是：

1.顺次选择原象和参数 n。(注意顺序）

2.按住 shift 不放，单击菜单“变换”-“深度迭代”(出现对话框后可以松开 shift 键)。

3.依次选定原象，选取初象。(注意顺序)。

4.添加映射的方法是按键盘“Ctrl＋A”。

第二章：迭代与分形几何

分形作为现代数学的一个分支，从诞生的那天起，就有着独特的魅力。分形的特点是整体与部分之间存在某种自相似性，整体具有多种层次结构。分形图片具有无可争议的美学感召力，特别是对于从事分形研究的科学家来说。欣赏分形之美当然也要求具有一定的科学文化知识，但相对而言，分形美是通俗易懂的。分形就在我们身边，我们身体中的血液循环管道系统、肺脏气管分岔过程、大脑皮层、消化道小肠绒毛等等都是分形，参天大树、连绵的山脉、奔涌的河水、漂浮的云朵等等，也都是分形。人们对这些东西太熟悉了，当然熟悉不等于真正理解。分形的确贴近人们的生活，因而由分形而来的分形艺术也并不遥远，普通人也能体验分形之美。

因为分形几何的迭代的原象一般不止一个，而且均为多映射迭代，为了叙述的方便，我们先作以下两个约定。

1.用(A,B,C)表示有顺序的三点 A、B 和 C。

2.(A,B,C)⇨(D,E,F,)，(G,H,I)表示 A 映射到 D，B 映射到 E，C 映射到 F,然后添加映射 A 映射到 G，B 映射到 H，C 映射到 I,以此类推。

例 2.1 Sierpinski 三角形

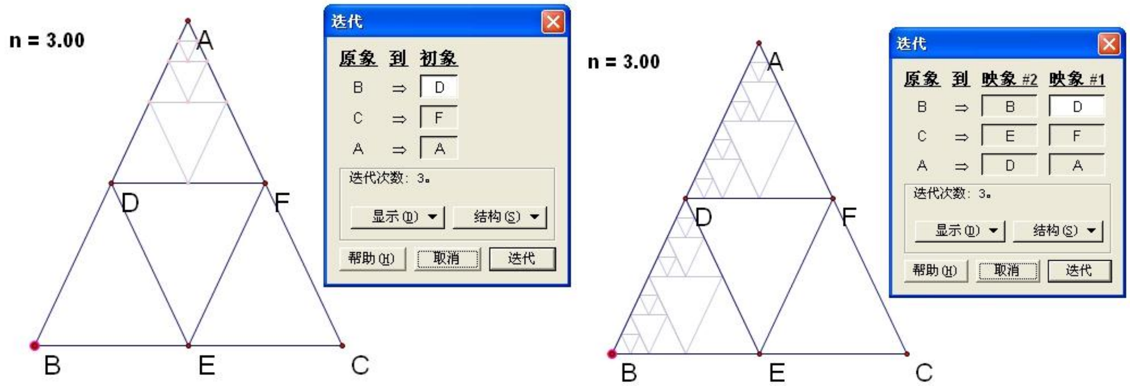
波兰著名数学家谢尔宾斯基在 1915-1916 年期间，为实变函数理论构造了几个典型的例子，这些怪物常称作“谢氏三角”、“谢氏地毯”、“谢氏海绵”、“谢氏墓垛”。如今，几乎任何一本讲

分形的书都要提到这些例子。它们不但有趣，而且有助于形象地理解分形。

著名的 Sierpinski 三角形，它是很有代表性的线性分形，具有严格的自相似特点。不断连接等边三角形的中点，挖去中间新的小三角形进行分割—随着分割不断进行 Sierpinski 三角形总面积趋于零，总边长趋于无穷。Sierpinski 三角形在力学上也有实用价值，Sierpinski 三角形结构节省材料，强度高，埃菲尔铁塔的结构与它就很相似。

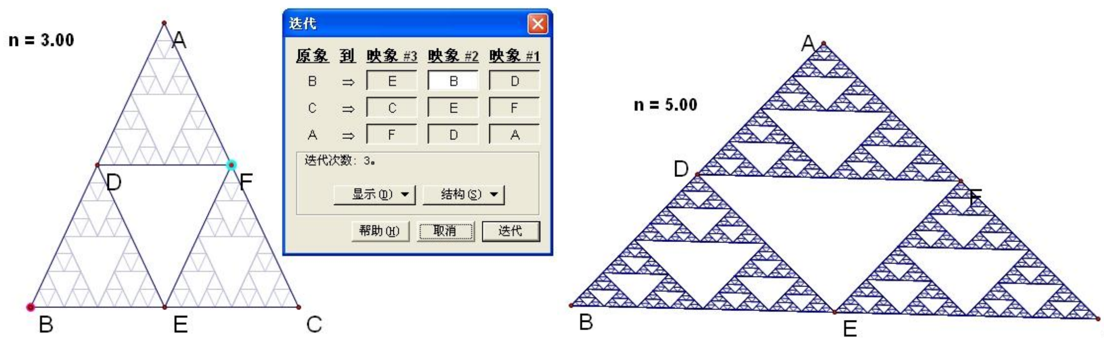
步骤：

1. 在平面上任意画一个三角形 ABC，取三边中点为 D、E、F，连接 D、E、F。
2. 新建参数 n＝3。
3. 顺次选择 B,C,A 三点和参数 n，作深度迭代,(B,C,A)⇨(D,F,A)。
4. “ctrl-a”，添加新的映射，(B,C,A)⇨(B,E,D)。



第 3 步和第 4 步

5. 继续添加映射。(B,C,A)⇨(E,C,F)。
6. 改变参数 n 可观察图形变化。



第 5 步和第 6 步

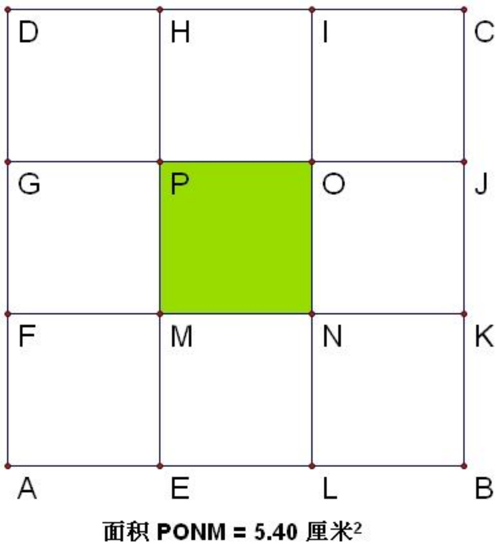
例 2.2 Sierpinski 地毯

和 Sierpinski 三角形相似，只是步骤多了一些。取正方形将其 9 等份，得到 9 个小正方形，舍去中央的小正方形，保留周围 8 个小正方形。然后对每个小正方形再 9 等份，并同样舍去中央正方形。按此规则不断细分与舍去，直至无穷。谢尔宾斯基地毯的极限图形面积趋于零，小正方形个数与其边的线段数目趋于无穷多，它是一个线集，图形具有严格的自相似性。

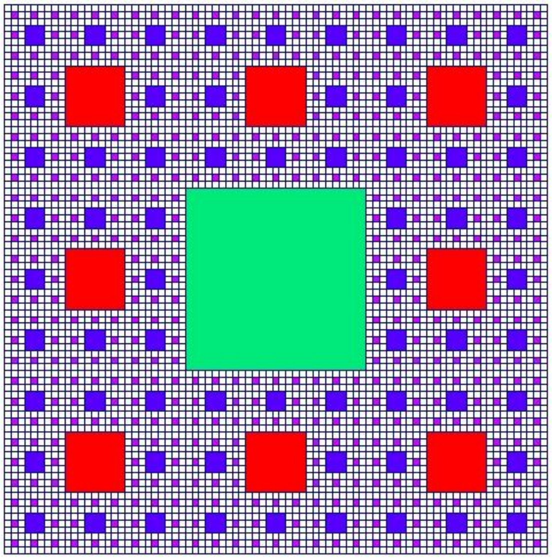
步骤：

1. 平面上任取线段 AB，以线段 AB 构造正方形 ABCD。
2. 以 A 为缩放中心，将 B、D 缩放为 1/3,得到 E、F；以 D 为缩放中心，A、C 缩放为 1/3 得到 G、H。同理得到 I、J、K、L。连接各点，将正方形九等份；

3.构造正方形 MNOP 内部，度量 MNOP 的面积，选择该度量结果和正方形内部，单击“显示”-“颜色”-“参数”，确定。则该 MNOP 的颜色随它的面积变化而变化。



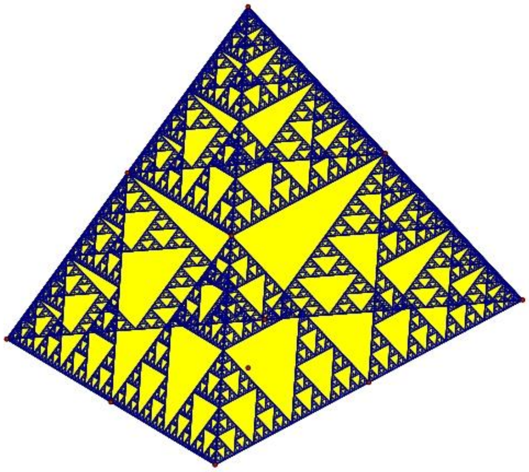
第 2 步

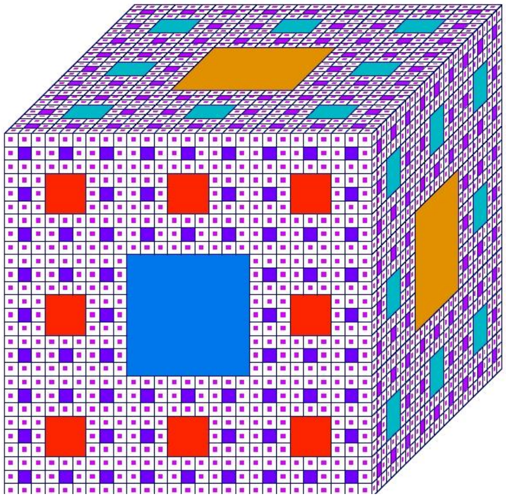


第 3 步

4.新建参数 n＝4，顺次选择 A、B 两点和参数 n，作深度迭代，（A，B）⇨（G，P），（P，O），（O，J），（F，M），（M，N），（N，K），（A，E），（E，L），（L，B）。注意迭代中点的对应，当迭代框遮住图象的时候可用鼠标选中拖动开。单击迭代，隐藏不必要的点。

如果我们制作任意三角形的 Sierpinski 三角形和任意四边形的 Sierpinski 地毯（即三角形和四边形的顶点都是自由点），然后按照多面体的侧面数将他们复制。利用画板合并点的功能，将它们“粘贴”到三棱锥和正方体的各个侧面上，（如下图）可以制作空间的 Sierpinski 三角形和地毯。是不是很漂亮呢？





例 2.3 摇曳的 Pythagorean Tree(毕达哥拉斯树)

毕达哥拉斯学派发现勾股定理(西方叫做毕达哥拉斯定理)闻名于世，又由此导致不可通约

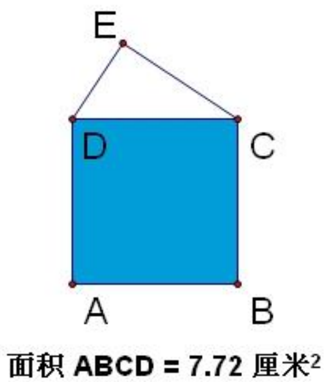
量[①]的发现。1988 年，劳威尔通过数值研究发现毕达哥拉斯树花是一迭代函数系的 J 集。

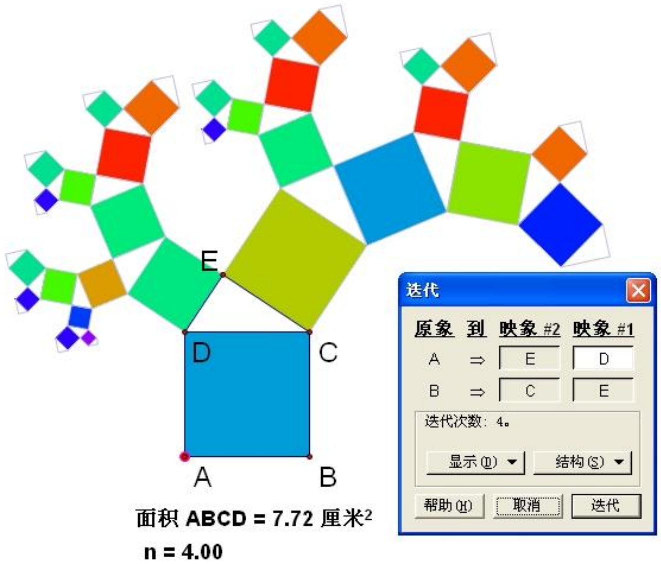
步骤：

1.在屏幕上任取两点 A 和 B，作正方形 ABCD，以 CD 为直径作圆 O，取半圆弧 OCD，在该弧上任取一点 E，连接 CE，DE。隐藏不必要的对象。

2.构造四边形 ABCD 内部，度量 ABCD 的面积。选择四边形内部和度量结果，单击“显示”-“颜色”-“参数”。则四边形的颜色会随它的面积变化而变化。

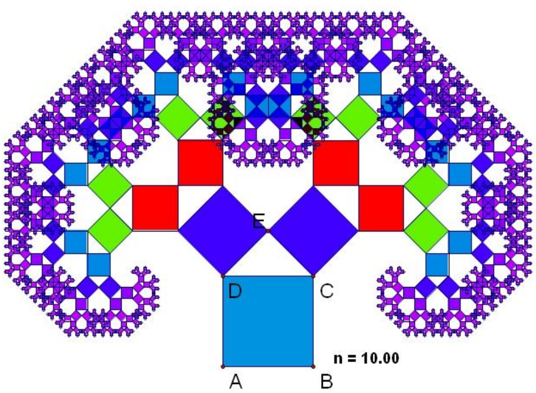
3.新建参数 n＝4，选择 A、B 和 n，作深度迭代，(A,B)⇨(D,E),(E,C)。





第 2 步　　　　第 3 步

4.选择 E 点，单击“编辑”-“操作类按钮”-“动画”，E 点变动，很漂亮的效果。当 E 点在弧 OCD 的中点时，整个树显出对称美。



例 2.4 分形树

分析：和毕达哥拉斯树类似，树枝按一定的规律生长。

步骤：

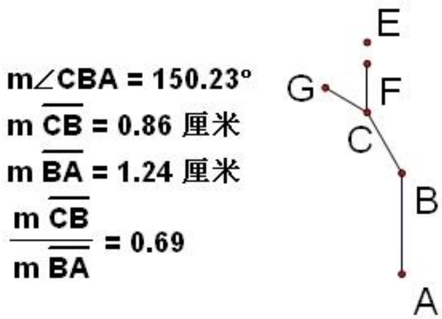
1.在垂直方向上画线段 AB，在 AB 左上区域任取一点 C。

① 两个几何线段，如果存在一个第三线段能同时量尽它们，就称这两个线段是可通约的，否则称为不可通约的。

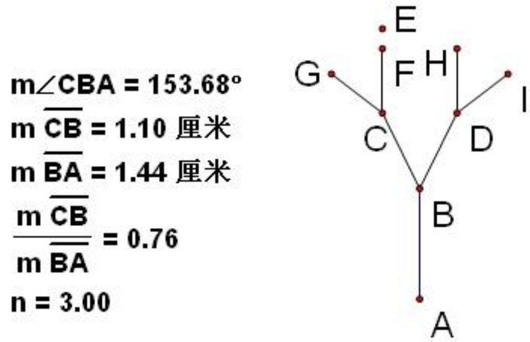
2.度量 CB，BA 的长度，计算 CB/BA；度量∠CBA 的大小。

3.双击 C 点作为旋转中心，旋转角度为∠CBA，旋转 B 得到点 E；继续以 CB/BA 为缩放比例，E 点缩为 F 点；双击线段 CB 作为标记镜面，得到 F 点关于线段 CB 的对称点 G。连接 GC，FC。

4.双击线段 AB 作为标记镜面，得到 C、F、G 关于线段 AB 的对称点 D、H、I，连接 BD、HD、

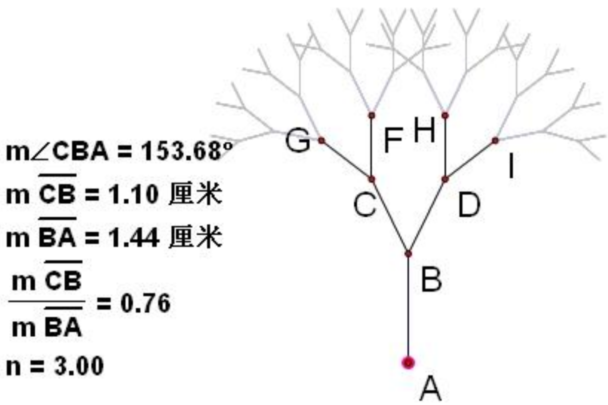


第 3 步

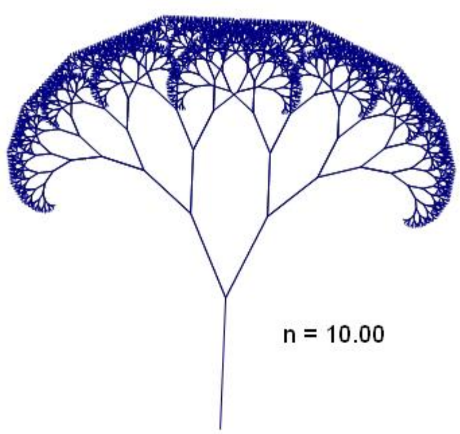


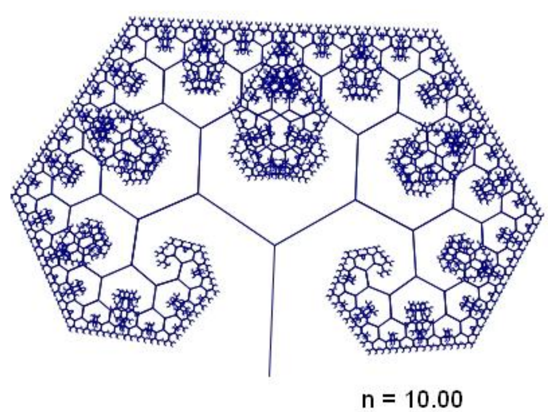
第 4 步

5.新建参数 n=3。顺次选择 A、B、C 三点和参数 n（参数必须最后选择），作深度迭代，(A,B,C)⇨(B,C,G),(B,C,F),(B,D,H),(B,D,I)。



6.移动 C 点的位置，改变树枝的形状。





例 2.5 KOCH 曲线

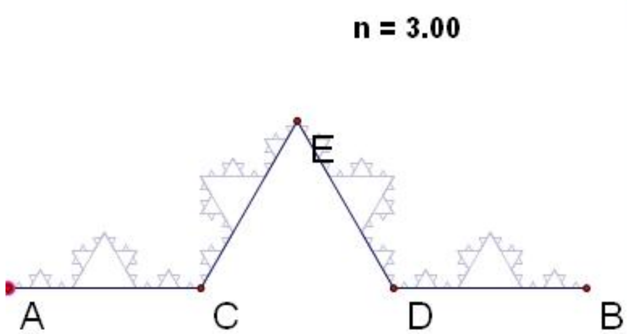
瑞典数学家柯赫于 1904 年构造了如今称之为“柯赫曲线”(Koch curve)的几何对象，这一年，他一共发表了两篇论文描述这种曲线，他画出了此曲线的图形，给出了生成步骤。它的构造过程如下：取一条长度为 L 的线段，那样先将它三等分，然后保留两侧的两段，将中间的一段改成夹角为 60° 的两个等长的线段，每段长度均为 L/3，这是 n=1 的第一次操作。类似地，第二次操作是将上次所得的四段边长为 L/3 的线段都进行三等分，现在每段长度为 L/9，并将它们中间的一段改成夹角为 60° 的两个长度为 L/9 的线段。如果将上述操作一直进行下去，最终得到一条具有自相似结构的曲线，称为三次柯赫曲线。

步骤：

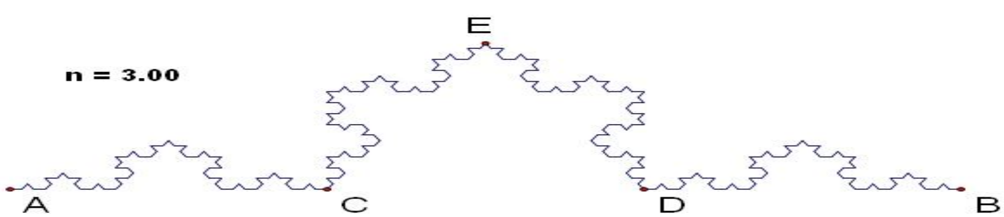
1.画线段 AB，以 A 为缩放中心，B 缩放为 1/3,得到 C 点；同理以 B 为缩放中心，A 缩放为 1/3，得到 D 点。以 C 点为旋转中心，D 点顺时针旋转 60 度，得到 E 点。

2.隐藏线段 AB，连接线段 AC、CE、ED、DB。

3.新建参数 n＝3，顺次选择 A、B 两点和 n，作深度迭代。(A,B)⇨(A,C),(C,E),(E,D),(D,B)（如下图所示）。



4.单击迭代框的“显示”按钮，选择“显示最终迭代”。隐藏线段 AC、CE、ED、DB（如下图所示）。



5.改变参数 n，观察图形变化。

例 2.6 KOCH 雪花

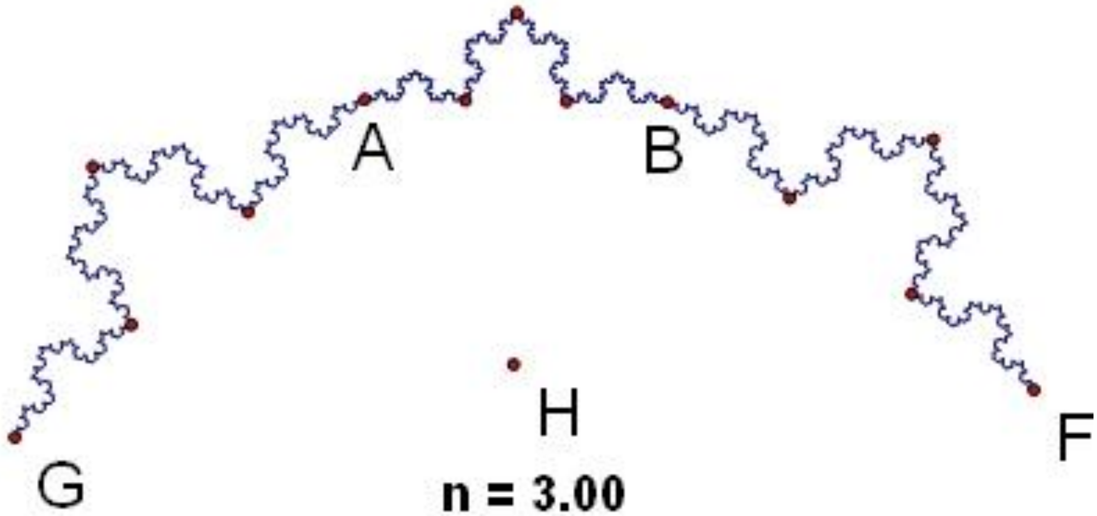
因为它酷似雪花，所以叫“雪花曲线”(snowflake curve)，也很像海岸线。柯赫曲线的生成过程很简单，以一个三角形作为源多边形，即初始元，将三角形的每一边做三等分，舍去中间的 1/3，然后按科赫曲线的规则产生生成元。从源多边形开始，第一步形成一个六角星形，第二步将六角星形的 12 条边，按科赫曲线的生成规则进行同样的操作得 48 条边星形。以后依此进行同样得操作，直至无穷，生成称为科赫雪花的图形。在极限的情况下，科赫雪花的上的

折线演变成为曲线。由于科赫曲线生成中的每一步操作都会使折线的长度增加，所以在极限的情况下，科赫雪花边的总长度将趋于无穷。

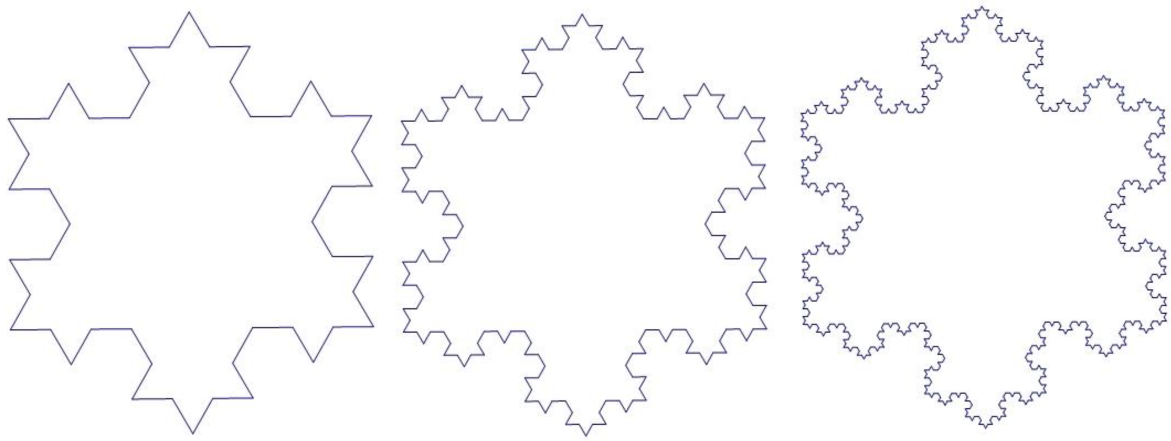
柯赫曲线是很复杂的，首先它有许多折点，到处都是“尖端”，用数学的语言讲，曲线虽然连续，但处处不可微，即没有切线。

步骤：

1.在平面上取 AB 做一个 KOCH 曲线，然后在 A 的左端任取一点 G，在 B 的右边任取一点 F，分别在 AG 和 BF 上做 KOCH 曲线，注意三个迭代深度都必须为 n。



2.以 B 点为旋转中心，A 顺时针旋转 60 度得到 H 点。选择 G，H 两点，单击“编辑”-“合并点”，则 G 点与 H 点合并。同理，再合并 F、H 两点。KOCH 雪花完成了。



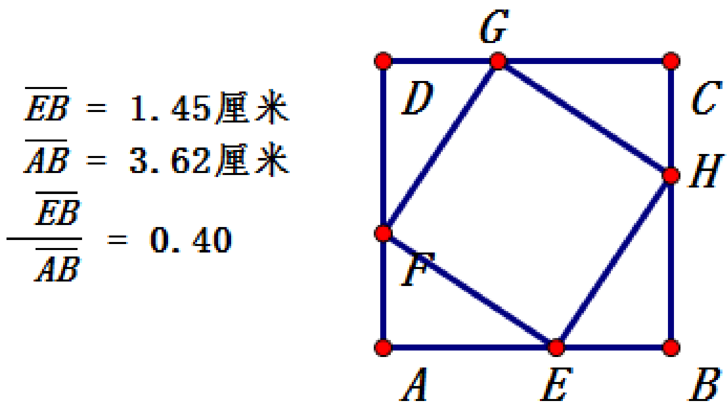
例 2.7 数学之美

步骤：

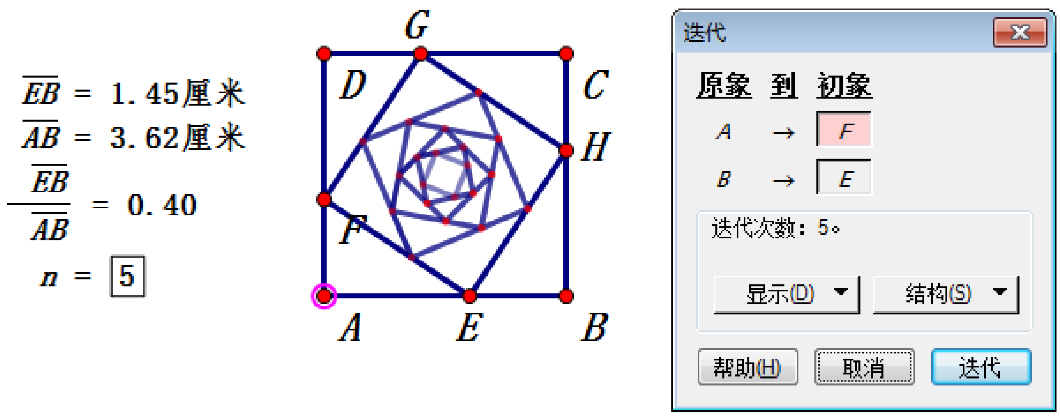
1.任取两点 A、B，并作正方形 ABCD。

2.在 AB 上任取一点 E,连接 BE，度量线段 BE 的长度并计算 BE/AB。

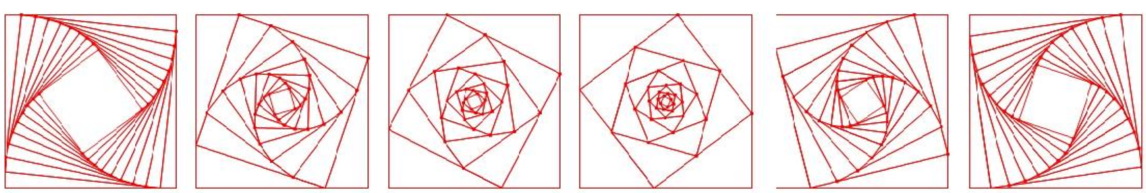
3.双击 A 点作为缩放中心，选择 D 点，单击“变换”-“缩放”以计算结果‘BE/AB’为比例缩放，得到点 F；同理以 D 点为中心，缩放 C 点得到点 G；以 C 点为缩放中心，缩放 B 点得到点 H。连接正方形 EFGH。



4.新建参数 n=5，顺次选择 A、B 两点，和参数 n，按下 shift 键不放，(A,B)⇨(F,E)。如下图所示：



5.选择 E 点，点击“编辑”-“操作类按钮”-“动画”。E 点变动，产生梦幻般的效果。



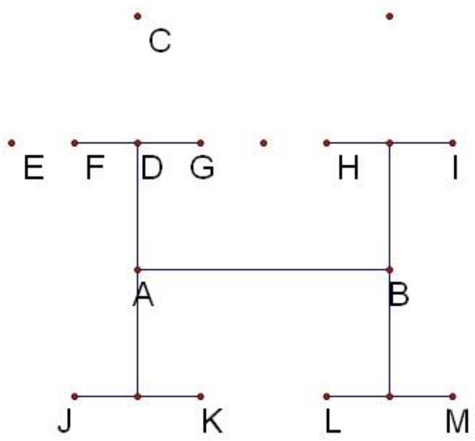
例 2.8 H 迭代

步骤：

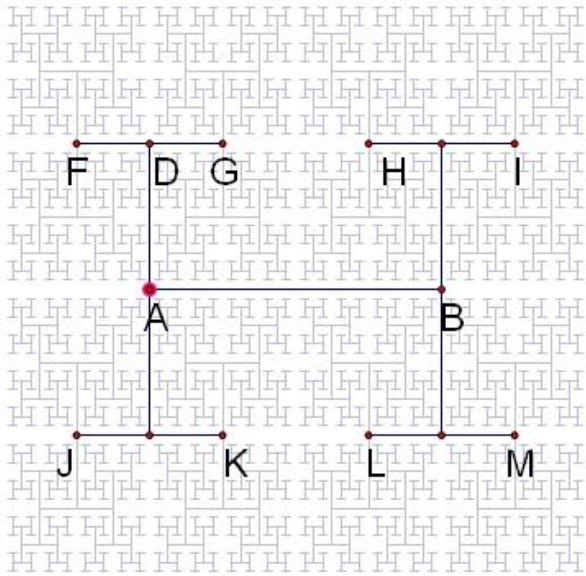
1.在水平直线上取两点 A 和 B，连接 AB。以 A 点为旋转中心，B 点顺时针旋转 90 度，得到 C 点，再取 AC 中点 D。

2.以 D 为旋转中心，C 点逆时针旋转 90 度得到 E 点，取 DE 中点 F。以 D 为旋转中心，F 点再旋转 180 度得到 G 点。连接 FG。

3.同理再画出 H、I 两点。以 AB 为标记镜面，得到 F、G、H、I 关于 AB 的对称点 J、K、L、M，连接线段 JK，LM。(如下图所示)



4.隐藏不必要的点，新建参数 n＝4。顺次选择 A、B 两点和参数 n，作深度迭代，(A,B)⇨(F,G),(H,I),(J,K),(L,M)



5.单击迭代，隐藏各点的标签。

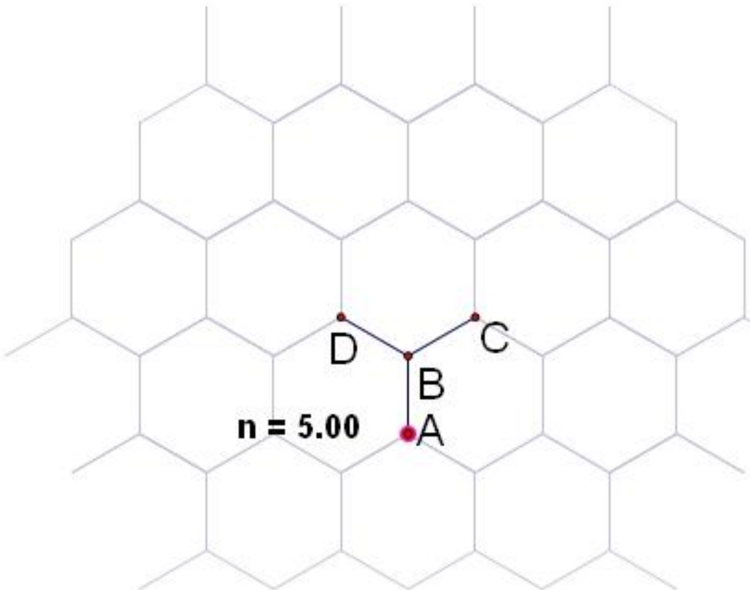
例 2.9 蜂巢

蜜蜂的巢你观察过没有？是什么形状呢？聪明的蜜蜂选择了正六边形，因为这样可以填充整个空间，而且正六边形是最省材料的一种结构。从蜂巢中我们也可以发现许多自相似的结构。由三条边迭代就可以得到蜂巢了，不信？请看。

步骤：

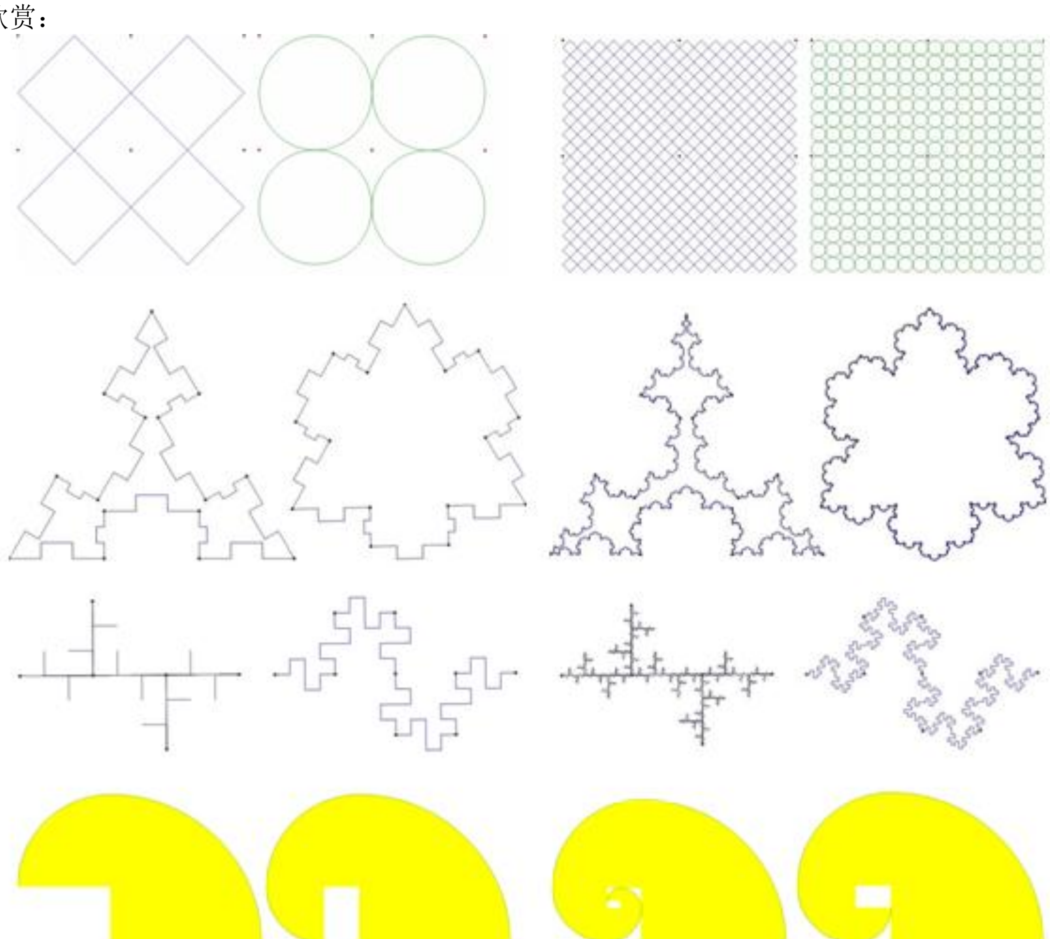
1.屏幕上任取线段 AB，以 B 为旋转中心，A 点顺时针旋转 120°得到点 C，A 点逆时针旋转 120°得到点 D。

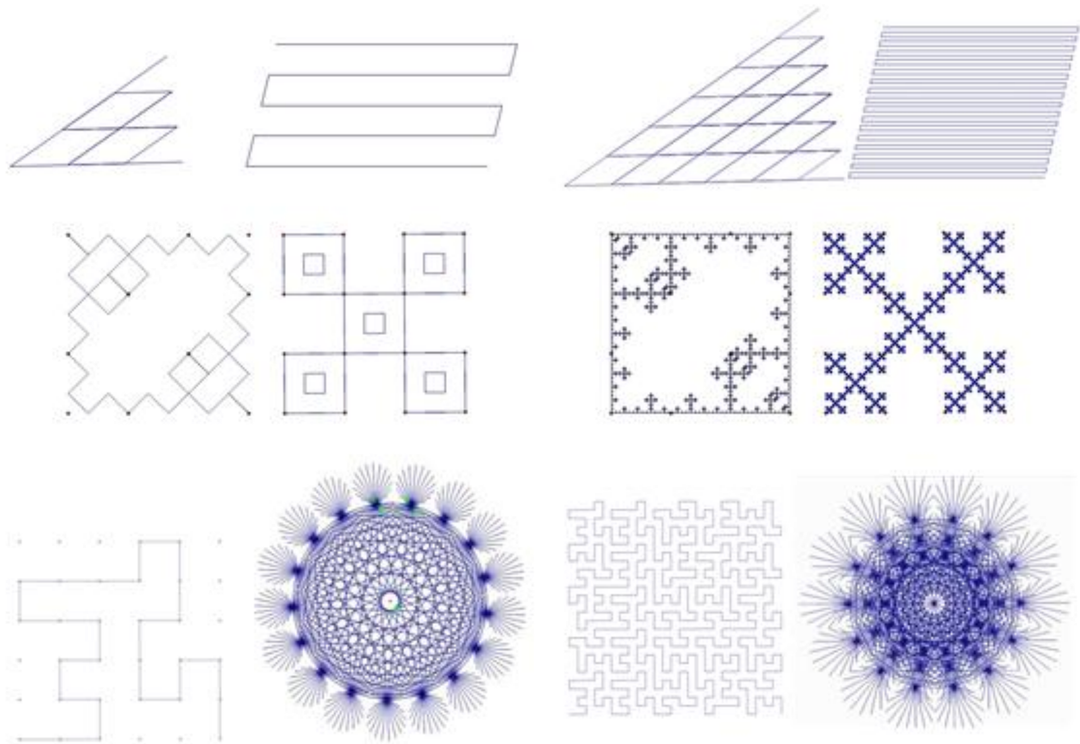
2.新建参数 n＝5。选择 A、B 和参数 n，作深度迭代，(A,B)⇨(B,C),(B,D)。



3. 单击迭代，得到蜂巢的图象。

上面的迭代只是分形几何的一部分，由于篇幅所限，下面给出其余一些分形几何的图片，以供欣赏：





第三章：函数迭代

例 3.1 多项式 $f(x)=ax^4+bx^3+cx^2+dx+e$ 求根

分析：多项式求根的迭代式是：$x_{n-1}=x_n-f(x_n)/f'(x_n)$

1.新建参数 a=-0.1,b=-0.1,c=1,d=2,e=-1，n＝5。

2.新建函数 $f(x)=ax^4+bx^3+cx^2+dx+e$,绘制出它的图象。

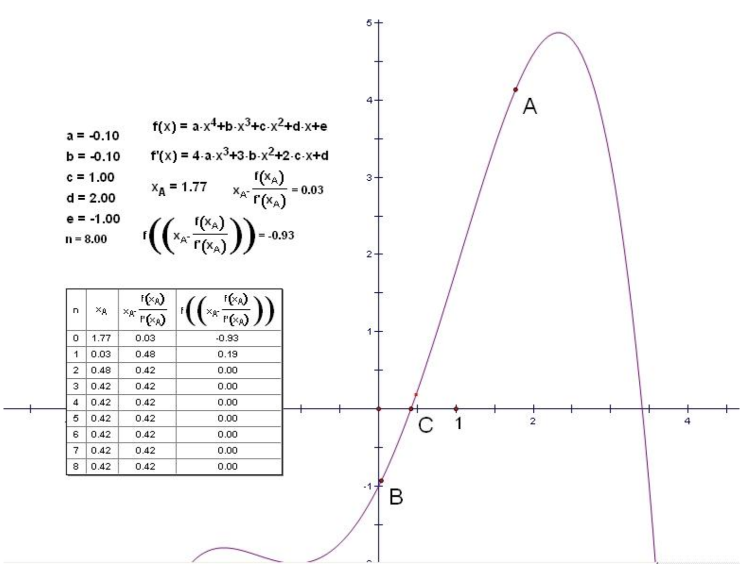
3.在图象上任取一点 A，度量 A 的横坐标 X_A。

4.计算 $x_A-f(x_A)/f'(x_A)$；计算 $f(x_A-f(x_A)/f'(x_A))$。

5.依次选择 $x_A-f(x_A)/f'(x_A)$，$f(x_A-f(x_A)/f'(x_A))$，单击“绘图”–“绘制点(x,y)”。得到点 B。

6.度量点 B 的坐标 X_B。

7.选中点 A，和参数 n，按住 Shift 键，单击“变换”菜单“深度迭代”，弹出迭代对话框，单击点 B。结果如图 1 所示。



n	x_A	$x_A-\frac{f(x_A)}{f'(x_A)}$	$f\left(\left(x_A-\frac{f(x_A)}{f'(x_A)}\right)\right)$
0	1.77	0.03	-0.93
1	0.03	0.48	0.19
2	0.48	0.42	0.00
3	0.42	0.42	0.00
4	0.42	0.42	0.00
5	0.42	0.42	0.00
6	0.42	0.42	0.00
7	0.42	0.42	0.00
8	0.42	0.42	0.00

图 1

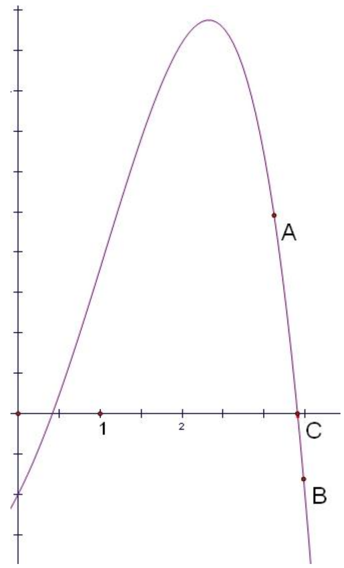


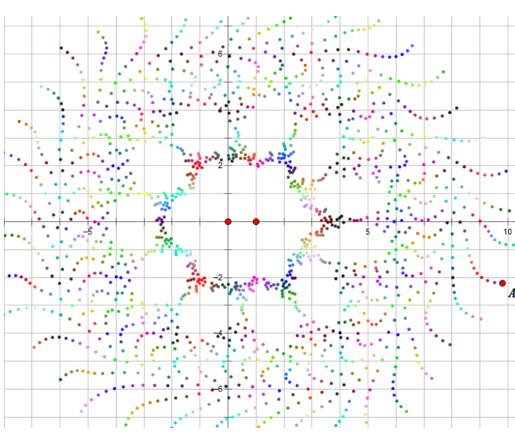
图 2

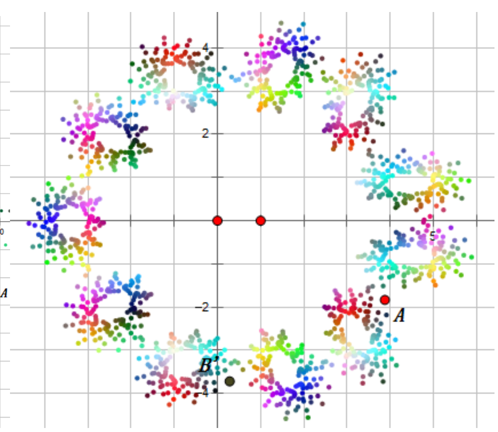
8. 选择迭代象，单击“变换”菜单“终点”，得到迭代的终点 C，度量 C 点的横坐标 X_C。

9. 观察表格可知，显示方程的一个近似根是 0.42。

10. 拖动 A 点，改变它的位置。观察表格可知道方程的另外一个近似根是 3.41。如图 2。如果度量函数图象与坐标轴交点的横坐标，得到的值会比较精确。

例 3.2 MIRA 米拉





步骤：

1. 在平面上取一点 A，度量 A 的横坐标 x_A 和纵坐标 y_A。

2. 新建参数 a＝0.4，b=0.99875。（b 取得尽量接近 1）

3. 新建函数 f(x)=ax+(1-a)x²/(1+x²)。

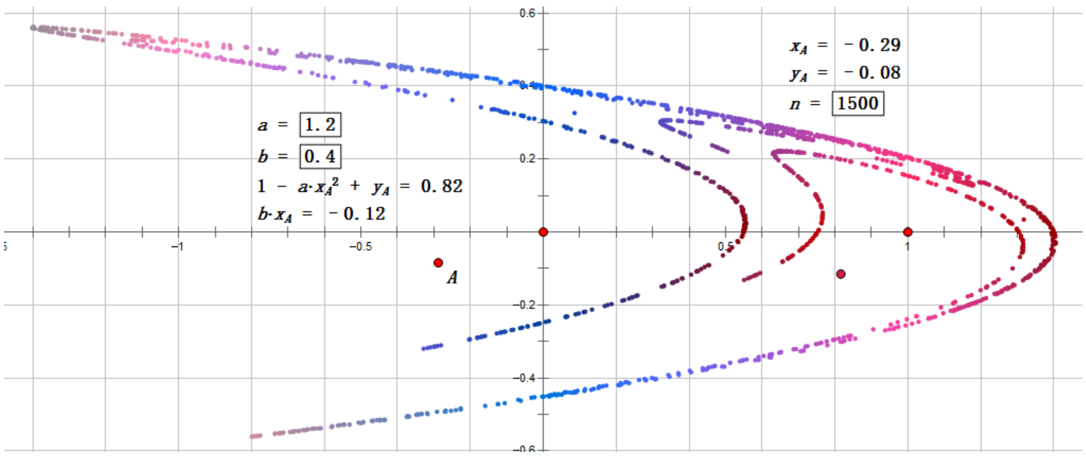
4. 计算 $f(x_A)+by_A$, $f(f(x_A)+by_A)-x_A$。注意这里用的是函数嵌套。顺次选择这两个结果，单击“绘图”-“绘制点(x,y)”。得到点 B。

5. 顺次选择点 B 和三个计算结果：$f(x_A)+by_A$, $f(f(x_A)+by_A)-x_A$，x_A。单击菜单“显示”-“颜色”-“参数”，单击确定。发现 B 点的颜色变了，其实 B 点已经隐藏起来，看到的是同一位置上的另外一个点 B’。

6.新建参数 n＝1500，选择 A 点和参数 n 作深度迭代。A⇨B'。“迭代”，完成。

如果选定点 A，“编辑”-“操作类按钮”-“动画”，会出现漂亮的动画。

例 3.3 Henon Map（埃农映射）



步骤：

1.在平面上取一点 A，度量 A 的横坐标 x_A 和纵坐标 y_A。

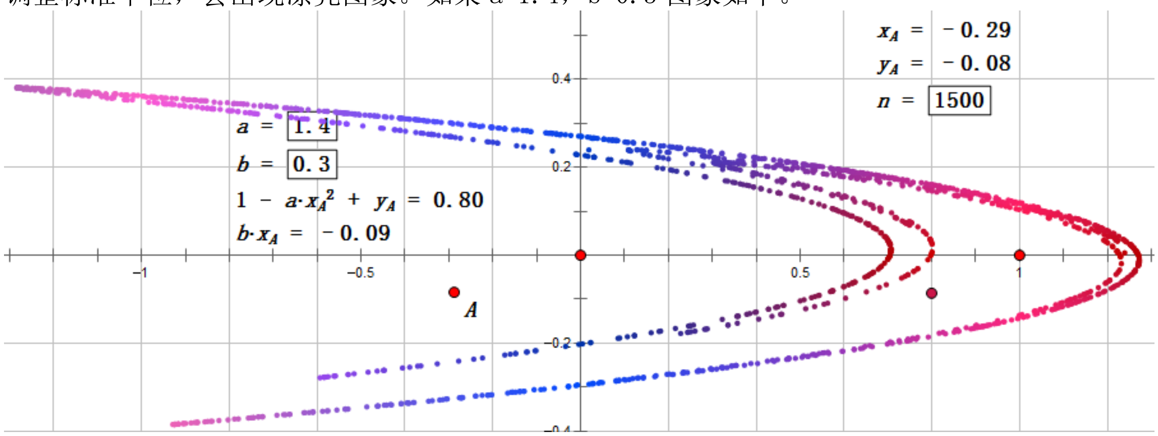
2.新建参数 a=1.2,b=0.4

3.计算$(1-ax_A^2)+y_A$、bx_A。顺次选择这两个计算结果，点击“绘图”-“绘制点”，得到点 B。

4.选择点 B，并依次选择$(1-ax_A^2)+y_A$、bx_A 和 x_A，单击菜单“显示”-“颜色”-“参数”，出现颜色参数对话框，单击确定。得到点 B'。

5.新建参数 n＝1500,选择点 A 和参数 n，作深度迭代，A⇨B'。

调整标准单位，会出现漂亮图象。如果 a=1.4，b=0.3 图象如下。



因为 M 集和朱丽亚集其实是复数平面迭代，我们先来复习一下复平面的一些知识。

若 $Z_k=x_k+iy_k$，$\mu=p+iq$。因为 $Z_k^2=x_k^2-y_k^2+2x_ky_k\times i$，所以 $Z_k^2+\mu=(x_k^2-y_k^2+p)+(2x_ky_k+q)\times i$。

则 $x_{k+1}=x_k^2-y_k^2+p$，$y_{k+1}=2x_ky_k+q$，聪明的你应该知道怎么表示复平面上的点的平方了吧。

好了，那么什么是 Julia 集和 Mandelbrot 集合，他们之间的区别是什么呢？考虑 $Z_{k+1}=Z_k^2+$

μ，给定复数初值 Z_0, μ，得到无穷复数序列$\{Z_k\}$。

Julia 集：固定μ，Jμ=$\{Z_0$ | 序列$\{Z_k\}$有界$\}$

Mandelbrot 集：固定 Z_0，M_Z＝{μ | 序列$\{Z_k\}$有界}

例 3.4 Mandelbrot sets 曼德布洛特集合

步骤：

1.在平面上以原点为中心，建立一个矩形 ABCD 作为观察区域（单位长度 1 以内）。

2.在线段 AD 上取一点 E，点击“编辑”－“操作类按钮”－“动画”，使得 E 点能够在 AD 上运动。

3.作 E 点关于 Y 轴的对称点 E’，然后连接 EE’。在 EE’上取一点 G，度量 X_G, Y_G。

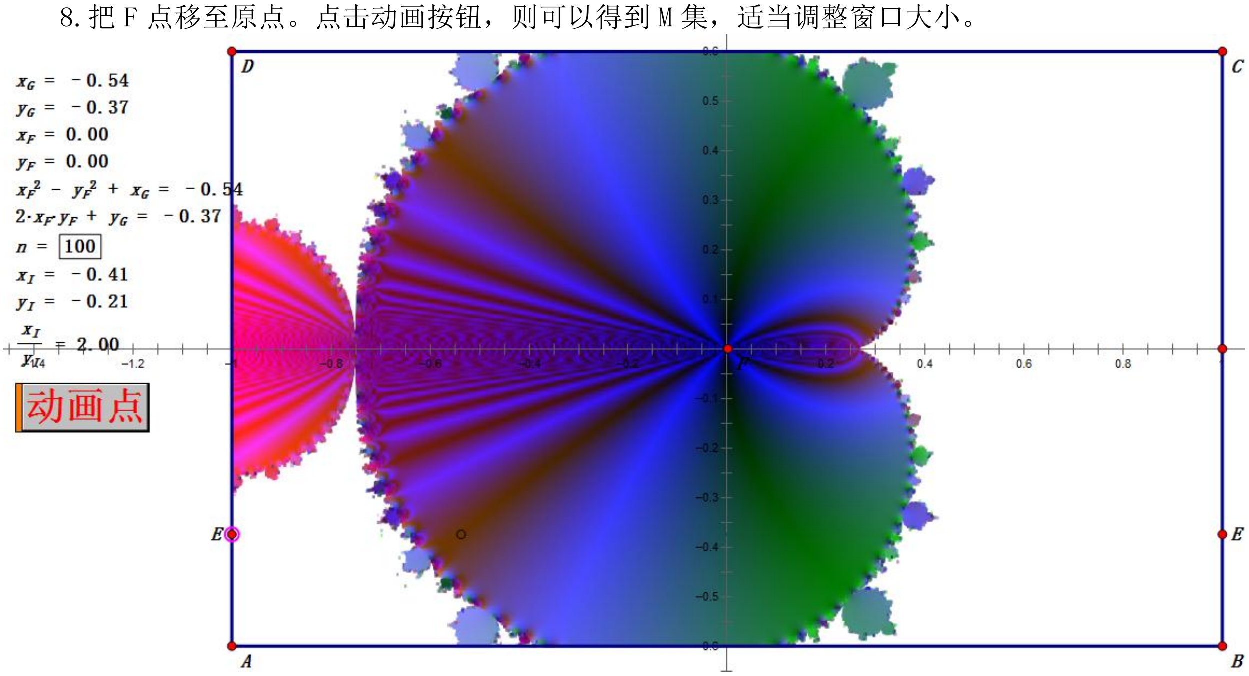
4.在平面上取一点 F，度量 X_F, Y_F。计算 $X_F^2-Y_F^2+X_G$ 和 $2X_FY_F+Y_G$,顺次选择这两个度量结果，单击“绘图”－“绘制点(x,y)”。得到点 H。

5.新建参数 n＝100，选择点 F 和参数 n，作深度迭代，F⇨H。

6.选择迭代象，单击“变换”－“终点”，得到迭代终点 I。度量 I 的横、纵坐标，并计算 X_I/Y_I，选择 X_I、Y_I 和 X_I/Y_I，这三个结果和点 G（注意是点 G），单击“显示”－“颜色”－“参数”，得到 G’。

7.选定 G’,“构造”－“轨迹”。隐藏线段 EE’、迭代象、点 H、点 I,选择刚才的轨迹，按右键（或者“显示”），单击‘追踪轨迹’。

8.把 F 点移至原点。点击动画按钮，则可以得到 M 集，适当调整窗口大小。



例 3.5 Julia Sets 朱丽亚集

步骤：

1.在平面上以原点为中心，建立一个矩形 ABCD 作为观察区域。

2.在线段 AD 上取一点 E，点击“编辑”-“操作类按钮”-“动画”，使得 E 点能够在 AD 上运动。

3.作 E 点关于 Y 轴的对称点 E’，然后连接 EE’。在 EE’ 上取一点 G，度量 X_G,Y_G。

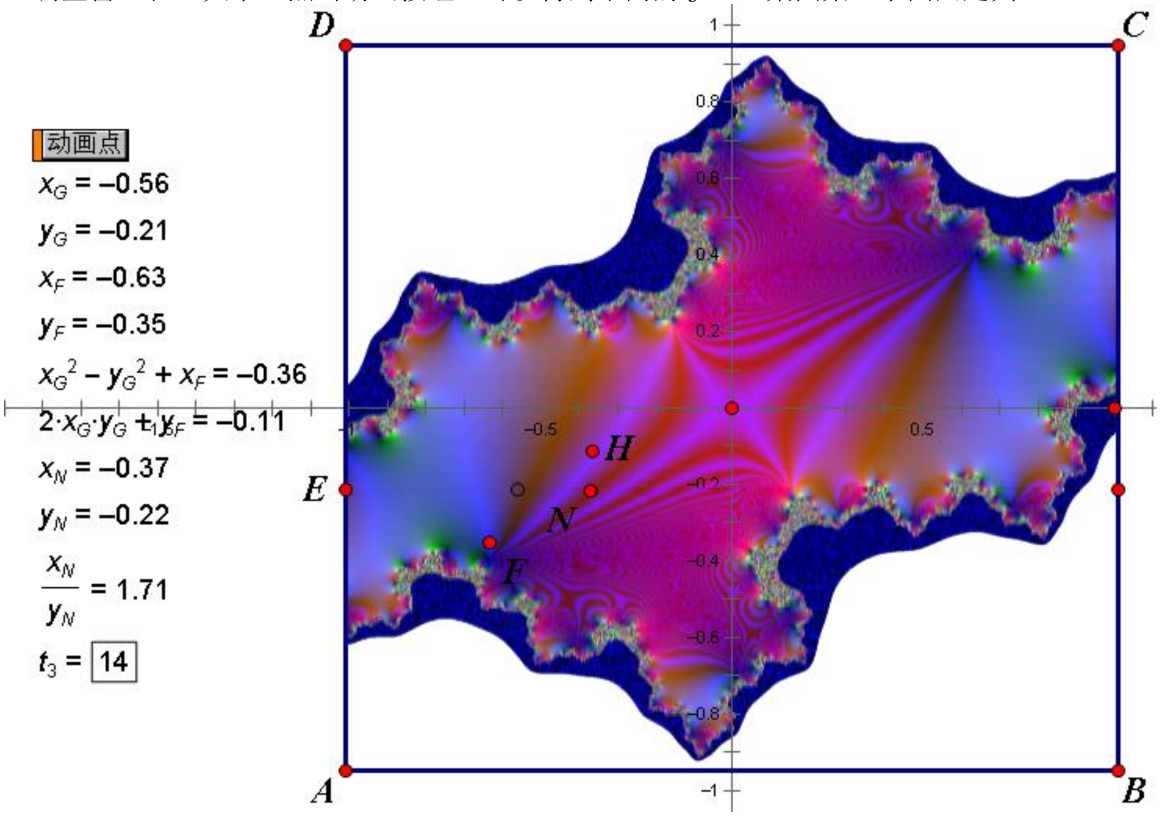
4.在平面上取一点 F，度量 X_F,Y_F。计算 $X_G^2-Y_G^2+X_F$ 和 $2X_GY_G+Y_F$,顺次选择这两个度量结果，单击“绘图”-“绘制点(x,y)”。得到点 H。

5.新建参数 n＝2，选择点 G 和参数 n，作深度迭代，G⇨H。

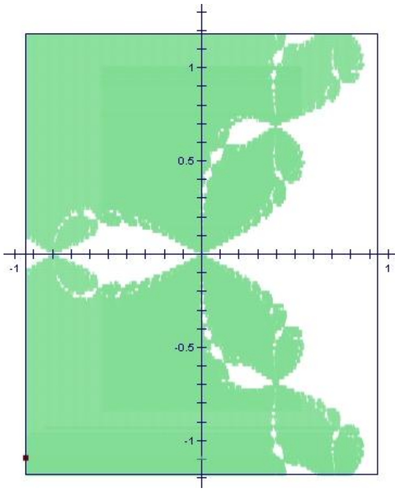
6.选择迭代象，单击“变换”-“终点”，得到迭代终点 N。度量 N 的横、纵坐标，并计算 X_N/Y_N，选定 X_N、Y_N 和 X_N/Y_N 这三个结果和点 G（注意是点 G），单击“显示”-“颜色”-“参数”，得到 G’。

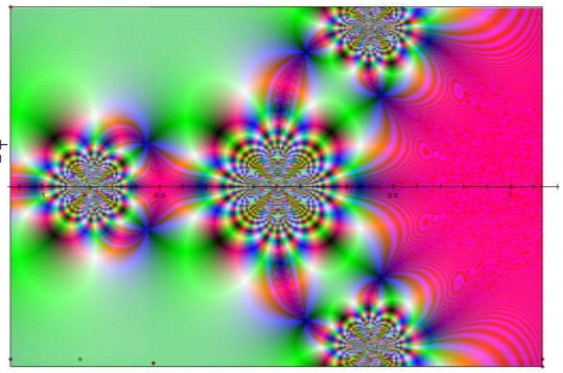
7.选定点 G’，“构造”-“轨迹”。隐藏线段 EE’，调整 n 的大小，选择刚才的轨迹，按右键，‘追踪轨迹’。

8.调整窗口和 n 大小，点击动画按钮，可以得到不同的 Julia 集图案，下图只是其一。



例 3.6 牛顿迭代法





步骤：

1.在平面上以原点为中心，建立一个矩形 ABCD 作为观察区域。

2.在线段 AD 上取一点 E，点击“编辑”-“操作类按钮”-“动画”，使得 E 点能够在 AD 上运动。

3.作 E 点关于 Y 轴的对称点 E’，然后连接 EE’。在 EE’上取一点 G，度量 X_G,Y_G。

4.在平面上取一点 F，度量 X_F,Y_F。计算 $(X_F^2-Y_F^2)/3(X_F^2+Y_F^2)^2+2X_G/3$ 和 $2X_FY_F/3(X_F^2+Y_F^2)^2+2Y_G/3$，顺次选择这两个度量结果，单击“绘图”-“绘制点(x,y)”。得到点 H。

5.新建参数 n＝100，选择点 F 和参数 n，作深度迭代，F⇨H。

6.选择迭代象，单击“变换”-“终点”，得到迭代终点 I。度量 I 的横、纵坐标，并计算 X_I/Y_I，选择 X_I、Y_I 和 X_I/Y_I，这三个结果和点 G（注意是点 G），单击“显示”-“颜色”-“参数”，得到 G’。

7.选定 G’，“构造”-“轨迹”。隐藏线段 EE’，选择刚才的轨迹，按右键，‘追踪轨迹’。

8.把 F 点移至原点。点击动画按钮，则可以得到牛顿迭代图象。