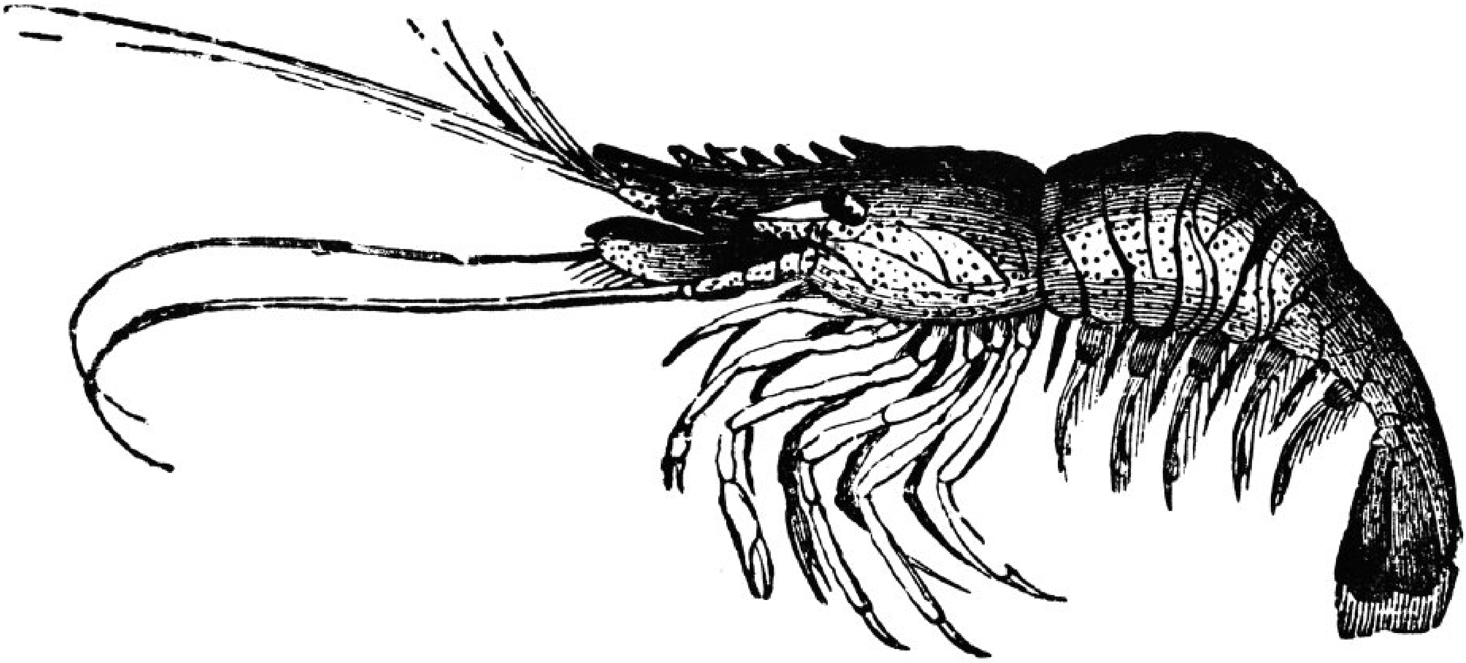
github.com/fengyukongzhou



理论最小值：经典力学

Mathematica 学习笔记

O'RLY?

游戏客人

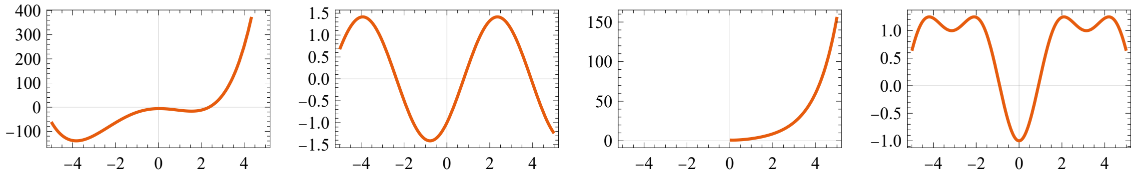
经典物理学的本质

空间、三角学和矢量

练习4

In[∘]:=
```
Plot[#, {t, -5, 5}, PlotTheme → "Scientific"] & /@
绘图                  绘图主题
  {t^4 + 3 t^3 - 12 t^2 + t - 6, Sin[t] - Cos[t], Exp[t] + t Log[t], Sin[t]^2 - Cos[t]} //
                                  正弦      余弦      指数形式    对数      正弦          余弦
 GraphicsRow[#, ImageSize → Full] &
 按行画出图形     图像尺寸      全范围
```

Out[∘]=



练习7

In[∘]:=
```
{Norm[#[[1]]], Norm[#[[2]]], Dot[#[[1]], #[[2]]], VectorAngle[#[[1]], #[[2]]]} &@
 模             模             点积                向量角度
 {{2, -3, 1}, {-4, -3, 2}}
N[%]
数值运算
```

Out[∘]=

$$\left\{\sqrt{14},\ \sqrt{29},\ 3,\ \text{ArcCos}\left[\frac{3}{\sqrt{406}}\right]\right\}$$

Out[∘]=

{3.74166, 5.38516, 3., 1.42135}

练习8

```
Subsets[{{1, 1, 1}, {2, -1, 3}, {3, 1, 0}, {-3, 0, 2}}, {2}] (*向量两两组合*)
子集
Dot @@@ % (*组合后作点积，确定正交向量*)
点积
```

Out[∘]=

{{{1, 1, 1}, {2, -1, 3}}, {{1, 1, 1}, {3, 1, 0}}, {{1, 1, 1}, {-3, 0, 2}},
 {{2, -1, 3}, {3, 1, 0}}, {{2, -1, 3}, {-3, 0, 2}}, {{3, 1, 0}, {-3, 0, 2}}}

Out[∘]=

{4, 4, -1, 5, 0, -9}

运动

微分学

练习1

In[∘]:=
```
D[#, t] & /@
偏导
  {t^4 + 3 t^3 - 12 t^2 + t - 6, Sin[t] - Cos[t], Exp[t] + t Log[t], Sin[t]^2 - Cos[t]}
                                 正弦      余弦     指数形式    对数    正弦        余弦
```

Out[∘]=

$$\left\{1 - 24\,t + 9\,t^2 + 4\,t^3,\ \mathrm{Cos}[t] + \mathrm{Sin}[t],\ 1 + e^t + \mathrm{Log}[t],\ \mathrm{Sin}[t] + 2\,\mathrm{Cos}[t] \times \mathrm{Sin}[t]\right\}$$

练习2

In[∘]:=
```
D[#, {t, 2}] & /@
偏导
  {t^4 + 3 t^3 - 12 t^2 + t - 6, Sin[t] - Cos[t], Exp[t] + t Log[t], Sin[t]^2 - Cos[t]}
                                 正弦      余弦     指数形式    对数    正弦        余弦
```

Out[∘]=

$$\left\{-24 + 18\,t + 12\,t^2,\ \mathrm{Cos}[t] - \mathrm{Sin}[t],\ e^t + \frac{1}{t},\ \mathrm{Cos}[t] + 2\,\mathrm{Cos}[t]^2 - 2\,\mathrm{Sin}[t]^2\right\}$$

质点运动

练习8

In[∘]:=
```
{va, vb, vc, vd} =
  {#, D[#, t], D[#, {t, 2}]} (*位置、速度、加速度*) & /@ {{Cos[ω t], Exp[ω t]},
      偏导      偏导                                        余弦        指数形式
   {Cos[ω t - ϕ], Sin[ω t - ϕ]}, {c Cos[t]^3, c Sin[t]^3}, {c (t - Sin[t]), c (1 - Cos[t])}}
    余弦            正弦              余弦         正弦             正弦             余弦
```

Out[∘]=

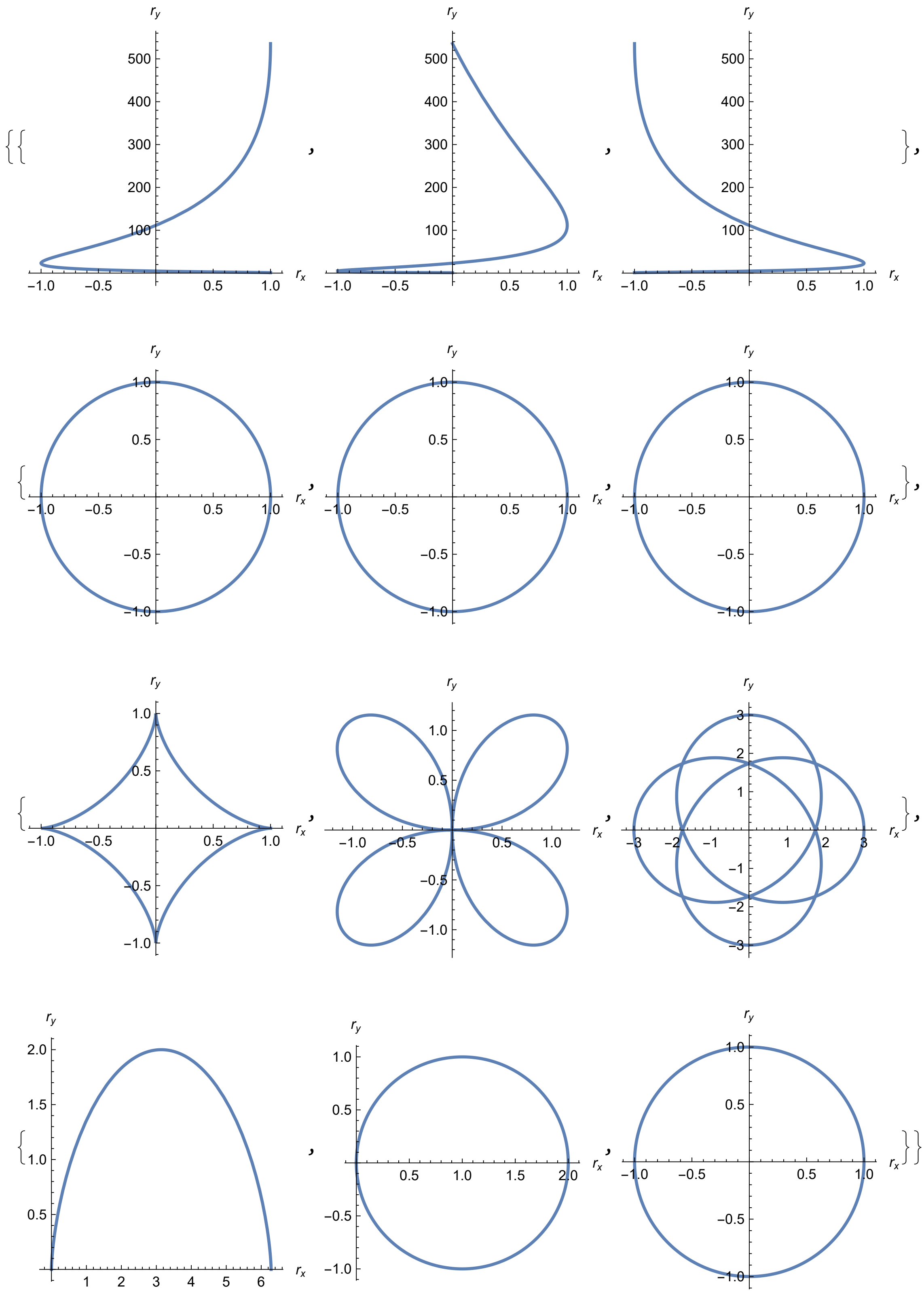
$$\{\{\{\mathrm{Cos}[t\,\omega],\ e^{t\,\omega}\},\ \{-\omega\,\mathrm{Sin}[t\,\omega],\ e^{t\,\omega}\,\omega\},\ \{-\omega^2\,\mathrm{Cos}[t\,\omega],\ e^{t\,\omega}\,\omega^2\}\},$$
$$\{\{\mathrm{Cos}[\phi - t\,\omega],\ -\mathrm{Sin}[\phi - t\,\omega]\},$$
$$\{\omega\,\mathrm{Sin}[\phi - t\,\omega],\ \omega\,\mathrm{Cos}[\phi - t\,\omega]\},\ \{-\omega^2\,\mathrm{Cos}[\phi - t\,\omega],\ \omega^2\,\mathrm{Sin}[\phi - t\,\omega]\}\},$$
$$\{\{c\,\mathrm{Cos}[t]^3,\ c\,\mathrm{Sin}[t]^3\},\ \{-3\,c\,\mathrm{Cos}[t]^2\,\mathrm{Sin}[t],\ 3\,c\,\mathrm{Cos}[t]\,\mathrm{Sin}[t]^2\},$$
$$\{c\left(-3\,\mathrm{Cos}[t]^3 + 6\,\mathrm{Cos}[t]\,\mathrm{Sin}[t]^2\right),\ c\left(6\,\mathrm{Cos}[t]^2\,\mathrm{Sin}[t] - 3\,\mathrm{Sin}[t]^3\right)\}\},$$
$$\{\{c\,(t - \mathrm{Sin}[t]),\ c\,(1 - \mathrm{Cos}[t])\},\ \{c\,(1 - \mathrm{Cos}[t]),\ c\,\mathrm{Sin}[t]\},\ \{c\,\mathrm{Sin}[t],\ c\,\mathrm{Cos}[t]\}\}\}$$

In[∘]:=

```
ParametricPlot[# /. {ω → 1, ϕ → 0, c → 1}, {t, 0, 2 Pi},
  AspectRatio → 1, AxesLabel → {rx, ry}] & /@ # & /@ {va, vb, vc, vd}
```

绘制参数图 圆周率 宽高比 坐标轴标签

Out[∘]=



积分

练习9

In[•]:=
```
Integrate[#, t, GeneratedParameters → C] & /@ {t^4, Cos[t], t^2 - 2}
```
积分 生成参数 常量 余弦

Out[•]=

$$\left\{\frac{t^5}{5} + c_1,\ c_1 + \mathrm{Sin}[t],\ -2t + \frac{t^3}{3} + c_1\right\}$$

练习10

In[•]:=
```
Integrate[#, {t, 0, T}] & /@ {t^4, Cos[t], t^2 - 2}
```
积分 余弦

Out[•]=

$$\left\{\frac{T^5}{5},\ \mathrm{Sin}[T],\ -2T + \frac{T^3}{3}\right\}$$

练习12

In[•]:=
```
Integrate[x Cos[x], {x, 0, Pi / 2}] // Expand
```
积分 余弦 圆周率 展开

Out[•]=

$$-1 + \frac{\pi}{2}$$

动力学

练习4

In[•]:=
```
DSolve[x''[t] == -ω^2 x[t], x[t], t]
```
求解微分方程

Out[•]=

$$\{\{x[t] \to c_1 \mathrm{Cos}[t\,\omega] + c_2 \mathrm{Sin}[t\,\omega]\}\}$$

偏微分

练习5

In[∘]:=
```
{D[#, x], D[#, y], D[#, {x, 2}], D[#, {y, 2}], D[D[#, x], y]} (*一二阶及混合偏导*) & /@
 偏导     偏导     偏导           偏导           ·· 偏导
 {x^2 + y^2 - Sin[x y], x/y (Exp[x^2] + y^2), Exp[x] × Cos[y]}
                  正弦          指数形式        指数形式   余弦
```

Out[∘]=

$$\left\{\left\{2\,x-y\,\mathrm{Cos}[x\,y],\ 2\,y-x\,\mathrm{Cos}[x\,y],\ 2+y^2\,\mathrm{Sin}[x\,y],\ 2+x^2\,\mathrm{Sin}[x\,y],\ -\mathrm{Cos}[x\,y]+x\,y\,\mathrm{Sin}[x\,y]\right\},\right.$$
$$\left\{\frac{2\,e^{x^2}\,x^2}{y}+\frac{e^{x^2}+y^2}{y},\ 2\,x-\frac{x\left(e^{x^2}+y^2\right)}{y^2},\ \frac{4\,e^{x^2}\,x}{y}+\frac{x\left(2\,e^{x^2}+4\,e^{x^2}\,x^2\right)}{y},\ -\frac{2\,x}{y}+\frac{2\,x\left(e^{x^2}+y^2\right)}{y^3},\right.$$
$$\left.\left.2-\frac{2\,e^{x^2}\,x^2}{y^2}-\frac{e^{x^2}+y^2}{y^2}\right\},\ \left\{e^x\,\mathrm{Cos}[y],\ -e^x\,\mathrm{Sin}[y],\ e^x\,\mathrm{Cos}[y],\ -e^x\,\mathrm{Cos}[y],\ -e^x\,\mathrm{Sin}[y]\right\}\right\}$$

练习6

如果海森矩阵的行列式和迹是正数，那么驻点对应局部极小值。

如果行列式是正数，迹是负数，那么驻点对应局部极大值。

如果行列式是负数，那么无论迹是正是负，驻点都对应鞍点。

In[∘]:=
```
{Det[#], Tr[#]} &@ResourceFunction["HessianMatrix"][#, {x, y}] & /@
 行列式    迹          资源函数
 {Sin[x] + Sin[y], Cos[x] + Cos[y]}
  正弦      正弦      余弦      余弦
% /. {{x → Pi / 2, y → -Pi / 2}, {x → -Pi / 2, y → Pi / 2}, {x → -Pi / 2, y → -Pi / 2}}
            圆周率          圆周率            圆周率         圆周率             圆周率          圆周率
```

Out[∘]=

$$\{\{\mathrm{Sin}[x]\times\mathrm{Sin}[y],\ -\mathrm{Sin}[x]-\mathrm{Sin}[y]\},\ \{\mathrm{Cos}[x]\times\mathrm{Cos}[y],\ -\mathrm{Cos}[x]-\mathrm{Cos}[y]\}\}$$

Out[∘]=

```
{{{-1, 0}, {0, 0}}, {{-1, 0}, {0, 0}}, {{1, 2}, {0, 0}}}
```

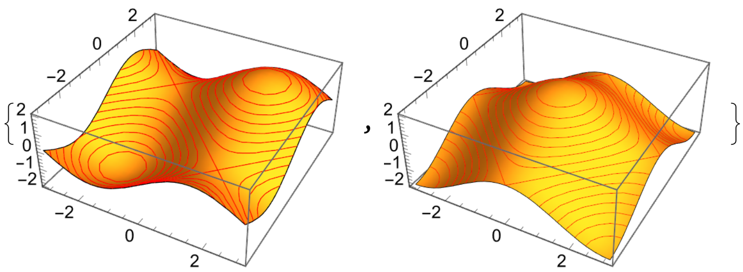
In[•]:=

```
Plot3D[#, {x, -Pi, Pi}, {y, -Pi, Pi}, PlotRange → All, MeshFunctions → {#3 &},
  MeshStyle → Directive[Red, PointSize[0.03]]] & /@ {Sin[x] + Sin[y], Cos[x] + Cos[y]}
```

绘制三维图形 … 圆周率 … … 绘制范围 全部 网格函数

网格样式 指令 红色 点的大小 正弦 正弦 余弦 余弦

Out[•]=



最小作用量原理

In[∘]:=
```
<< VariationalMethods`
```

最小作用量的优势

示例 1

在任意时刻 t，列尼在 $x+f(t)$ 处定位乔治的原点，f 描述乔治如何相对于列尼运动

在 t 时刻发生的一个时间，列尼赋以坐标 x，乔治赋以坐标 $X=x-f(t)$

$$L=\frac{1}{2}m\dot{x}^2-V(x)$$

In[∘]:=
```
EulerEquations[1/2 m (X'[t] + f'[t])^2 - V[X[t]], X[t], t] // FullSimplify
                                                              完全简化
```

Out[∘]=
```
V′[X[t]] + m (f″[t] + X″[t]) == 0
```

乔治观测到了一个额外的等于 $-m\ddot{f}$ 的施加在物体上的“虚拟”力

示例 2

乔治在正在旋转的旋转木马上，列尼坐标系由 x, y 组成，而乔治的坐标系由 X, Y 组成

$$x=X\cos\omega t+Y\sin\omega t$$

$$y=-X\sin\omega t+Y\cos\omega t$$

假设列尼观察到质点运动时没有力施加在上面

$$L=\frac{m}{2}(\dot{x}^2+\dot{y}^2)$$

In[∘]:=
```
lcs2 =
 m/2 (D[X[t] Cos[ω t] + Y[t] Sin[ω t], t]^2 + D[-X[t] Sin[ω t] + Y[t] Cos[ω t], t]^2) //
      偏导   余弦              正弦          偏导   正弦              余弦
   FullSimplify // Expand // Collect[#, {m ω^2 / 2, m ω, m / 2}] &
   完全简化           展开        合并同类项
 (*将拉格朗日量分为三项：离心力、科里奥利力、动能*)
```

Out[∘]=
$$\frac{1}{2}m\omega^2\left(X[t]^2+Y[t]^2\right)+m\omega\left(Y[t]X'[t]-X[t]Y'[t]\right)+\frac{1}{2}m\left(X'[t]^2+Y'[t]^2\right)$$

In[∘]:=
```
EulerEquations[lcs2, {X[t], Y[t]}, t] // FullSimplify (*包含离心力和科里奥利力的牛顿方程*)
                                          完全简化
```

Out[∘]=
```
{m ω^2 X[t] == m (2 ω Y′[t] + X″[t]), m ω (ω Y[t] + 2 X′[t]) == m Y″[t]}
```

练习3

试将乔治的运动方程变换到极坐标下

In[∘]:=
```
llx3 = m/2 (D[R[t] Cos[θ[t]], t]^2 + D[R[t] Sin[θ[t]], t]^2) // Simplify
```
偏导 余弦 偏导 正弦 化简

Out[∘]=

$$\frac{1}{2} m \left(R'[t]^2 + R[t]^2 \theta'[t]^2\right)$$

In[∘]:=
```
EulerEquations[llx3, {R[t], θ[t]}, t] // FullSimplify
```
完全简化

Out[∘]=

$$\{m R[t] \theta'[t]^2 == m R''[t],\ m R[t] (2 R'[t] \theta'[t] + R[t] \theta''[t]) == 0\}$$

练习5

长度为 l 的单摆运动

In[∘]:=
```
eqlx5 = EulerEquations[1/2 m l^2 θ'[t]^2 + m g l Cos[θ[t]], θ[t], t];
```
余弦

```
DSolve[eqlx5, θ[t], t]
```
求解微分方程

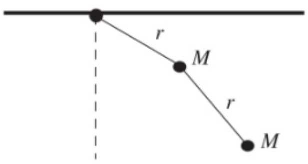
Solve: Solve 正在使用反函数，因此可能无法找到某些解；请使用 Reduce 来获取完整的解信息.

Out[∘]=

$$\left\{\left\{\theta[t] \to 2\ \text{JacobiAmplitude}\left[\frac{\sqrt{2 g + l\ c_1}\ (t + c_2)}{2 \sqrt{l}}, \frac{4 g}{2 g + l\ c_1}\right]\right\},\right.$$
$$\left.\left\{\theta[t] \to -2\ \text{JacobiAmplitude}\left[\frac{t \sqrt{2 g + l\ c_1}}{2 \sqrt{l}} + \frac{\sqrt{2 g + l\ c_1}\ c_2}{2 \sqrt{l}}, \frac{4 g}{2 g + l\ c_1}\right]\right\}\right\}$$

对称性和守恒定律

双摆运动



连杆长1米、摆锤质量为1千克，第一个摆离开垂直方向的角度为 θ，

第二个摆相对于第一个摆偏离角度 α

```
In[•]:= x1[t_] = Sin[θ[t]];
                 正弦
        y1[t_] = Cos[θ[t]];
                 余弦
        x2[t_] = x1[t] + Sin[α[t] + θ[t]];
                         正弦
        y2[t_] = y1[t] + Cos[α[t] + θ[t]];
                         余弦
```

第一个摆锤的动能

```
In[•]:= t1 = 1/2 (x1'[t]^2 + y1'[t]^2) // Simplify
                                          化简
```

Out[•]=

$$\frac{1}{2}\theta'[t]^2$$

第二个摆锤的动能

```
In[•]:= t2 = 1/2 (x2'[t]^2 + y2'[t]^2) // Simplify
                                          化简
```

Out[•]=

$$\frac{1}{2}\alpha'[t]^2 + (1 + \text{Cos}[\alpha[t]])\,\alpha'[t]\,\theta'[t] + (1 + \text{Cos}[\alpha[t]])\,\theta'[t]^2$$

总势能为

```
In[•]:= V[θ_, α_] := -g (2 Cos[θ] + Cos[θ - α])
                           余弦        余弦
```

考虑和不考虑重力场时拉格朗日量为

```
In[•]:= l1 = t1 + t2
        l2 = t1 + t2 - V[θ[t], α[t]]
```

Out[•]=

$$\frac{1}{2}\alpha'[t]^2 + (1 + \text{Cos}[\alpha[t]])\,\alpha'[t]\,\theta'[t] + \frac{1}{2}\theta'[t]^2 + (1 + \text{Cos}[\alpha[t]])\,\theta'[t]^2$$

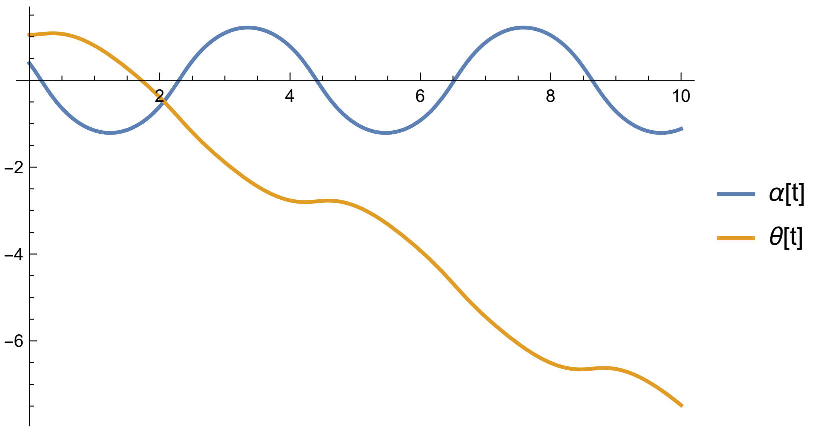
Out[•]=

$$g\,(\text{Cos}[\alpha[t] - \theta[t]] + 2\,\text{Cos}[\theta[t]]) + \frac{1}{2}\alpha'[t]^2 + (1 + \text{Cos}[\alpha[t]])\,\alpha'[t]\,\theta'[t] + \frac{1}{2}\theta'[t]^2 + (1 + \text{Cos}[\alpha[t]])\,\theta'[t]^2$$

练习6

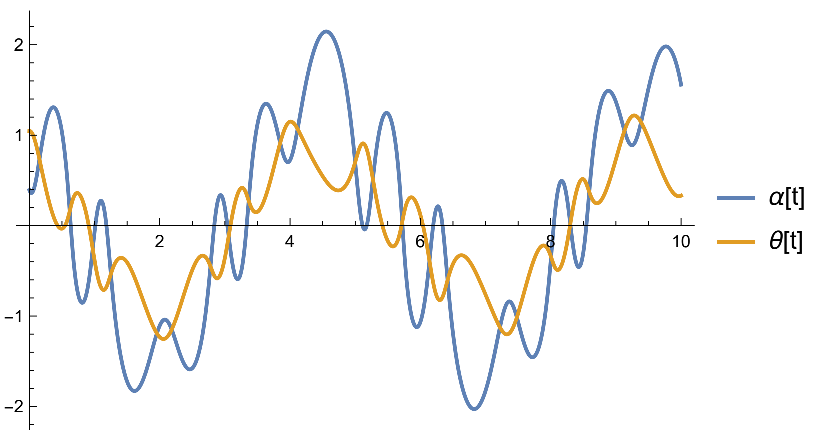
In[∘]:=
```
sol1 = NDSolve[{EulerEquations[l1, {α[t], θ[t]}, t], α[0] == Pi / 8,
        数值求解微分方程组                                    圆周率
   α'[0] == -2, θ[0] == Pi / 3, θ'[0] == 0}, {α[t], θ[t]}, {t, 0, 10}];
                   圆周率
Plot[{α[t], θ[t]} /. sol1 // Evaluate, {t, 0, 10}, PlotLegends → {"α[t]", "θ[t]"}]
绘图                          计算                绘图的图例
```

Out[∘]=



In[∘]:=
```
sol2 = NDSolve[{EulerEquations[l2 /. g → 9.8, {α[t], θ[t]}, t], α[0] == Pi / 8,
        数值求解微分方程组                                            圆周率
   α'[0] == -2, θ[0] == Pi / 3, θ'[0] == 0}, {α[t], θ[t]}, {t, 0, 10}];
                   圆周率
Plot[{α[t], θ[t]} /. sol2 // Evaluate, {t, 0, 10}, PlotLegends → {"α[t]", "θ[t]"}]
绘图                          计算                绘图的图例
```

Out[∘]=



In[•]:=
```
Table[
  Evaluate@GraphicsRow@{Graphics[{{PointSize[.025], {Red, Point[{x1[t], -y1[t]}]},
          {Blue, Point[{x2[t], -y2[t]}]}, Line[{{0, 0}, {x1[t], -y1[t]},
            {x2[t], -y2[t]}}]}} /. sol1}, PlotRange → {{-2, 2}, {-2, 2}}],
      Graphics[{{PointSize[.025], {Red, Point[{x1[t], -y1[t]}]},
          {Blue, Point[{x2[t], -y2[t]}]}, Line[{{0, 0}, {x1[t], -y1[t]},
            {x2[t], -y2[t]}}]}} /. sol2}, PlotRange → {{-2, 2}, {-2, 2}}]},
  {t, 0, 10, .025}];
Export["双摆.gif", %]
(*由于坐标系的问题，y轴坐标加个负号*)
```
表格 计算 按行画出图形 图形 点的大小 红色 点 蓝色 点 线段 绘制范围 图形 点的大小 红色 点 蓝色 点 线段 绘制范围 导出

Out[•]=

双摆.gif

哈密顿力学与时间不变性

简谐振子的哈密顿函数

练习1

将 $L = \frac{m\,\dot{x}^2}{2} - \frac{k}{2}\,x^2$ 代换 $q = (k\,m)^{1/4}\,x$ 得到 $L = \frac{1}{2\,\omega}\,\dot{q}^2 - \frac{\omega}{2}\,q^2$

In[•]:=
```
m D[q[t] (k m) ^ (-1 / 4), t] ^2 / 2 - k (q[t] (k m) ^ (-1 / 4)) ^2 / 2
```
偏导

Out[•]=

$$-\frac{k\,q[t]^2}{2\,\sqrt{k\,m}} + \frac{m\,q'[t]^2}{2\,\sqrt{k\,m}}$$

In[•]:=
```
Solve[{k / Sqrt[k m] == ω, m / Sqrt[k m] == 1 / ω}, ω, Assumptions → m > 0] (*得到ω与k,m的关系*)
```
解方程 平方根 平方根 假设

Out[•]=

$$\left\{\left\{\omega \to \frac{\sqrt{k}}{\sqrt{m}}\right\}\right\}$$

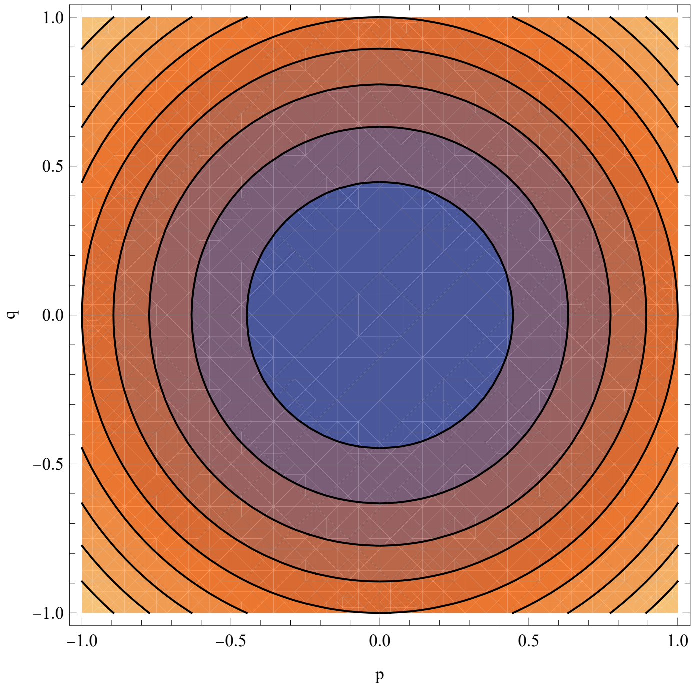
练习2

代换前后能量守恒，即 $\frac{1}{2}\,m_1\,\dot{q}^2 = \frac{1}{2}\,m\,\dot{x}^2$，则 $m_1 = 1/\omega$

$$\dot{q}^2 = p^2 / m_1^2 = \omega^2\, p^2\,,\;\; H = \frac{1}{2\,\omega}\,\dot{q}^2 + \frac{\omega}{2}\,q^2 = \frac{\omega}{2}\left(p^2 + q^2\right)$$

In[◦]:=
```
ContourPlot[p^2 + q^2, {p, -1, 1}, {q, -1, 1},
绘制等高线
 PlotTheme → "Scientific", FrameLabel → {"p", "q"}]
 绘图主题                     边框标签
```

Out[◦]=



对于一般的机械系统，能量曲面形式非常复杂而无法进行可视化，但是原理是相同的：

能量曲面一层一层地填充相空间，流体在能量曲面上流动，相点一直保持在它初始的曲面上

泊松括号、角动量、对称性

泊松括号

练习2

```
PoissonBracket[f_, g_, q_List, p_List] /; Length[q] == Length[p] :=
 Fold[Plus, 0, MapThread[D[f, #1] × D[g, #2] - D[f, #2] × D[g, #1] &, {q, p}]]
(*https://mathematica.stackexchange.com/questions/41850/how-to-define-the-poisson-bracket-in-mathematica*)
```

In[∘]:=
```
PoissonBracket[#, 1/(2 m) p^2 + V[q], {q}, {p}] & /@ {q, p}
```

Out[∘]=

$$\left\{\frac{p}{m}, -V'[q]\right\}$$

$$\ddot{q} = \frac{\dot{p}}{m} = \frac{F}{m}$$

角动量

练习3

$\{x, L_z\} = \{x, (x\, p_y - y\, p_x)\}$

$\{y, L_z\} = \{y, (x\, p_y - y\, p_x)\}$

$\{z, L_z\} = \{z, (x\, p_y - y\, p_x)\}$

In[∘]:=
```
PoissonBracket[#[[1]], #[[2]], {x, y, z}, {px, py, pz}] & /@
 {{x, x py - y px}, {y, x py - y px}, {z, x py - y px}}
```

Out[∘]=
```
{-y, x, 0}
```

我们可以得到一个并不意外的结论——对守恒量求泊松括号，将得到一种（具有守恒定律相关对称性的）坐标变换的效果。这是一般性的结论，并且为我们提供了一种思考对称性和守恒性之间关系的思路。

使用Levi-Civita记号，$\{x_i, L_j\} = \sum_k \epsilon_{i\,j\,k}\, x_k$

```
(*j=3时，等式右边*)
Sum[LeviCivitaTensor[3][[#, 3(*固定Lz*), k]] {x, y, z}[[k]], {k, 1, 3}] & /@ Range[3]
求和 列维-齐维塔张量                                                            范围
```

Out[∘]=

```
{-y, x, 0}
```

转子与进动

$$\{L_i, L_j\} = \sum_k \epsilon_{i\,j\,k}\, L_k$$

```
(*等式左边*)
PoissonBracket[#[[1]], #[[2]], {x, y, z}, {px, py, pz}] & /@
 Subsets[{y pz - z py, z px - x pz, x py - y px}, {2}]
 子集
```

Out[∘]=

```
{py x - px y, pz x - px z, pz y - py z}
```

```
(*等式右边*)
Sum[LeviCivitaTensor[3][[#[[1]], #[[2]], k]] {y pz - z py, z px - x pz, x py - y px}[[k]],
求和 列维-齐维塔张量
   {k, 1, 3}] & /@ Subsets[{1, 2, 3}, {2}]
                   子集
```

Out[∘]=

```
{py x - px y, pz x - px z, pz y - py z}
```

电力与磁力

磁场

$$\vec{B} = \nabla \times \vec{A}$$

练习3

```
(*不同矢势定义相同均匀磁场*)
Curl[#, {x, y, z}] & /@ {{0, b x, 0}, {-b y, 0, 0}}
旋度
```

Out[∘]=

```
{{0, 0, b}, {0, 0, b}}
```

```
(*求解矢势相差梯度的对应标量函数*)
DSolve[Grad[f[x, y, z], {x, y, z}] == {b y, b x, 0}, f[x, y, z], {x, y, z}]
求解…    梯度
```

Out[∘]=

$\{\{f[x, y, z] \to b\, x\, y + c_1\}\}$

匀强磁场中的运动

练习5

使用两种矢势分别求出 $a_y = -\frac{e\,b}{m\,c}\,v_x$, $a_x = \frac{e\,b}{m\,c}\,v_y$

且速度大小恒定，速度z分量守恒

上式两边对时间积分，整理为 $x^2 + y^2 = \left(\frac{m\,c}{e\,b}\right)^2 (\dot{x}^2 + \dot{y}^2)$

轨道半径为 $\frac{m\,c}{e\,b}\,\sqrt{\dot{x}^2 + \dot{y}^2}$

有心力与行星轨道

运动方程

In[∘]:=
```
<< VariationalMethods`
```

In[∘]:=
```
(m / 2 (D[r[t] × Cos[θ[t]], t]^2 + D[r[t] × Sin[θ[t]], t]^2) + G M m / r[t]) //
  EulerEquations[#, {r[t], θ[t]}, t] &
```
偏导 余弦 偏导 正弦

Out[∘]=

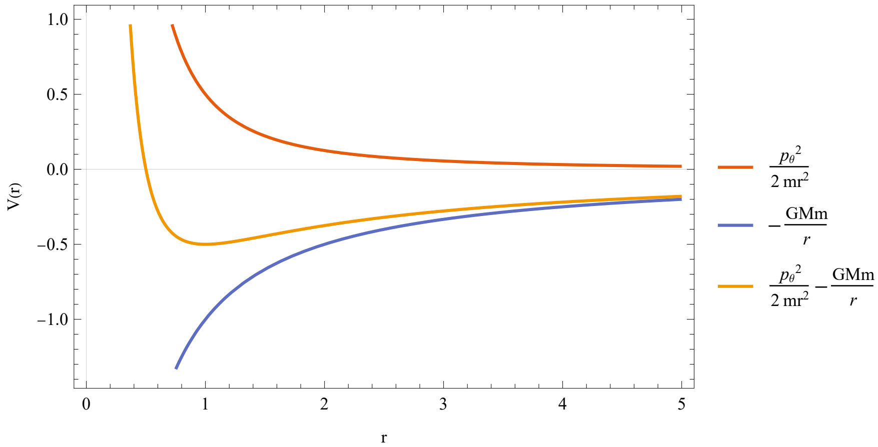
$$\left\{m\left(-\frac{G\,M}{r[t]^2} + r[t]\,\theta'[t]^2 - r''[t]\right) == 0,\ -m\,r[t]\,(2\,r'[t]\,\theta'[t] + r[t]\,\theta''[t]) == 0\right\}$$

有效势能曲线

In[∘]:=
```
Plot[{1 / (2 r^2), -1 / r, 1 / (2 r^2) - 1 / r}, {r, 0, 5}, PlotTheme → "Scientific",
绘图                                                         绘图主题
  FrameLabel → {"r", "V(r)"}, PlotLegends → {"pθ^2/(2 mr^2)", "-GMm/r", "pθ^2/(2 mr^2) - GMm/r"}]
  边框标签                      绘图的图例
```

$$\text{PlotLegends} \to \left\{ \text{"}\frac{p_\theta{}^2}{2\,mr^2}\text{"},\ \text{"}-\frac{GMm}{r}\text{"},\ \text{"}\frac{p_\theta{}^2}{2\,mr^2}-\frac{GMm}{r}\text{"} \right\}$$

Out[∘]=



In[∘]:=

$$\text{Solve}\left[D\left[\frac{p_\theta{}^2}{2\,m\,r^2}-\frac{G\,M\,m}{r},\ r\right] == 0,\ r\right]$$

解方程　偏导

Out[∘]=

$$\left\{\left\{r \to \frac{p_\theta^2}{G\,m^2\,M}\right\}\right\}$$