群论

田强 & 教 8 楼 106

作者：冯振华

组织：北京师范大学

时间：2022 年 09 月 13 日

版本：V1.0

学为人师，行为世范

目录

第 1 章 群的基本概念

1.1 简介

教材和主要内容：《群论及其在固体物理中的应用》（徐婉棠、喀兴林）高等教育出版社

群论：关于对称性的数学理论

对称性的描述：对称操作, 其包括转动、镜面反映、中心反演

1. 转动：C_n 表示绕一个轴转动 $\frac{2\pi}{n}$, 基中以 E 表示不动
2. 镜面：关于某个轴镜面对称，以 σ 表示，比如 σ_y 表示以为 y 为对称轴镜面对称，即 $\sigma_y : x \rightarrow -x$
3. 中心反演：$\vec{r} \rightarrow -\vec{r}$

1.2 群举例

1.2.1 长方形群

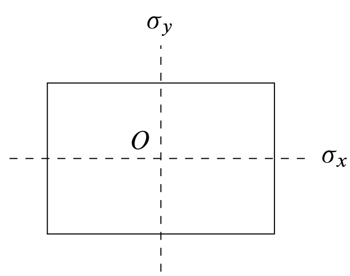


图 1.1: 长方式形群

长方形群表示为：$\{E, C_2, \sigma_x, \sigma_y\}$, 其中 O 点为其反演中心。

1.2.2 正方形

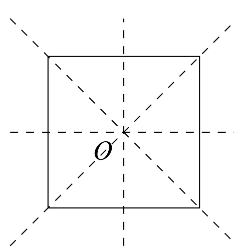


图 1.2: 正方形群

正方形群表示为：$\{E, C_4, C_2 \equiv C_4^2, C_4^3 \equiv C_4^{-1}, \sigma_x, \sigma_{xy}, \sigma_y, \sigma_{y\bar{x}}\}$

1.2.3 群的阶

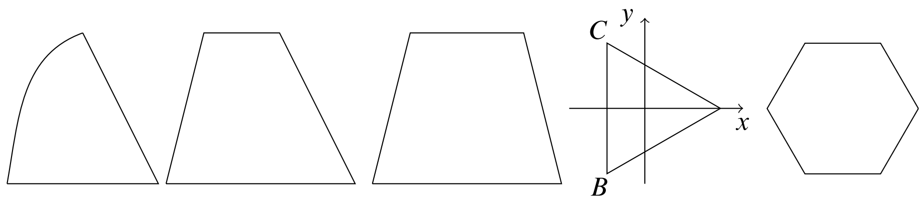
对称数的多少为群的阶，用符号 g 表示。对于长方形 $g = 4$, 正文形 $g = 8$, 由于 $8 \geq 4$ 所以正方形比长方形对称性高。

1.2.4 其他例子

1.2.4.1 氢原子

氢原子呈球对称性，如果在某一方向加上电场，则球对称性变成柱对称性。

1.2.4.2 一些平面图形



$\{E\}, g = 1$　$\{E\}, g = 1$　$\{E, \sigma\}, g = 2$　正三角形　正六边形

图 1.3: 其他平面图形的群

正三角形：$\left\{E, C_3, C_3^{-1}, \sigma_x, \sigma_B, \sigma_C\right\}, g = 6$
正六边形：课堂上老师没有具体写出，课后补充

1.2.4.3 矩阵操作

一个关于 y 轴镜面对称相当于 $y' = y, x' = -x$, 用矩阵可以表示为

$$\sigma = \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \qquad \begin{pmatrix} x' \\ y' \end{pmatrix} = \sigma \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \tag{1.1}$$

1.2.4.4 周期性

固体物理中没有正五边形晶体，周期性与对称性相互联系与制约。但是 1984 年发现 5 度对称性的准晶，而准晶不是晶体。晶体周期性结构称为晶胞，一个 cell.

1.2.4.5 微信群和数学上的群

微信群：对元素而言为集合，可以多也可以少，集合（set）
数学上的群：满足所有对称性条件的集合。

1.2.5 群的定义

定义 1.1 (群)

数学对象（群元）的集合 $\{A, B, C, \cdots\}$, 其中有一个与次序有关的运算（群乘）$AB = C$, 若满足下列四个条件，该集合称为群 (group , 记作 G)

1. 封闭性
2. 结合律成立：$A(BC) = (AB)C$
3. 单位元存在：$EA = AE = A$
4. 逆元存在：$A^{-1}A = AA^{-1} = E$

♣

笔记 若群乘满足交换律，称作交换群或阿贝尔群

1.2.6 连续操作

以正三角形为例: 一般操作都是在 2π 角内的。

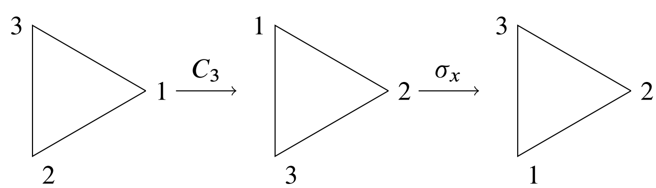


图 1.4: 连续操作 $\sigma_x C_3$

笔记 由以上变换可得：$\sigma_x C_3 = \sigma_C$

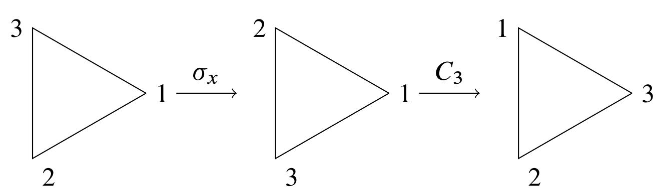


图 1.5: 连续操作 $\sigma_x C_3$

笔记 由以上变换可得：$C_3\sigma_x = \sigma_B$

1.2.7 群的分类

1.2.7.1 群分类

1. 根据群阶 g 划分:
   (a). 有限群
   (b). 无限群（离散的无限群和连续群）
2. 物理学中的群论课:
   (a). 固体群
   (b). 李群

3. 若干具体的群举例：
   (a). 群元特征：
      I. 普通的群
      II. 方阵群
      III. 对称操作群
      IV. 置换群等
4. 循环群：群元自乘若干次
5. 阿贝尔群：可交换群

1.2.7.2 一些例子

1. 整数群：若群乘为加法，则构成群
2. 整数群：若群乘为乘法，则不是群
3. 正有理数：若群乘为乘法，则构成群
4. $\{-1,1\}$ 群乘为乘法，构成群
5. $\left\{1, i, i^2=-1, i^3=-i\right\}$ 群乘为乘法，构成四阶群

1.2.8 作业

✍ **练习 1.1** 列出正三角形全部对称操作（正三角形群），并做出至少 5 个连续操作（群乘）。

✍ **练习 1.2** 列出正方形的全部对称操作（正方形群），并做出至少 5 个连续操作（群乘）。

✍ **练习 1.3** 说明正三角形群不是阿贝尔群