Определение. $\|A\| = \sup\limits_{\|x\|\leqslant 1} \|Ax\| = \sup\limits_{\|x\|\leqslant 1} (Ax, Ax)$ — *непрерывная функция на компакте (достигается максимум).*

Теорема. $\|Ax\| \leqslant \|A\| \cdot \|x\|$

Доказательство. $Ax = (A\dfrac{x}{\|x\|}) \cdot \|x\| \Rightarrow \|Ax\| = \|A\dfrac{x}{\|x\|}\| \cdot \|x\| \leqslant \|A\| \cdot \|x\|$ (справа максимум по всем элементам, слева — какой-то элемент) ∎

Теорема. *Да, это норма.*

Доказательство.

1. (про неотрицательность) Очевидно (если подумать и про равенство нулю)
2. (про однородность с модулем) Следует из свойств нормы вектора
3. $\|(A + B)x\| = \|Ax + Bx\| \leqslant \|Ax\| + \|Bx\| \leqslant \|A\| \cdot \|x\| + \|B\| \cdot \|x\| = (\|A\| + \|B\|) \cdot \|x\|$

∎

Теорема. $A \in \mathrm{Lin}(\mathbb{R}^m, \mathbb{R}^l)$, $B \in \mathrm{Lin}(\mathbb{R}^l, \mathbb{R}^k)$. *Тогда* $\|BA\| \leqslant \|B\| \cdot \|A\|$

Доказательство. $\|BAx\| \leqslant \|B\| \cdot \|Ax\| \leqslant \|B\| \cdot \|A\| \cdot \|x\|$ ∎

Теорема. $R = S \circ T$. T — *дифференцируемо в* a, S *в* $b = T(a)$. *Тогда* R — *дифференцируемо в* a *и* $R'(a) = S'(b) \cdot T'(a)$. *И степень гладкости сохраняется.*

Доказательство. $\mathcal{A} \coloneqq T'(a)$, $\mathcal{B} \coloneqq S'(b)$. Тогда

$$T(a + h_1) - T(a) = \mathcal{A}(h_1) + \alpha(h_1) \cdot \|h_1\|; \qquad S(b + h_2) - S(b) = \mathcal{B}(h_2) + \beta(h_2) \cdot \|h_2\|$$

По непрерывности $\beta(0) = 0$. $h_2 \coloneqq T(a + h_1) - T(a):\ S(T(a + h_1)) - S(T(a)) = \mathcal{B}(T(a + h_1) - T(a)) + \beta(T(a+h_1) - T(a)) \cdot \|T(a+h_1) - T(a)\| \Rightarrow R(a+h_1) - R(a) = \mathcal{B} \cdot \mathcal{A}(h_1) + \|h_1\| \cdot \mathcal{B}(\alpha(h_1)) + \beta(T(a + h_1) - T(a)) \cdot \|T(a + h_1) - T(a)\|$.

Пусть $\gamma(h_1)$ — последние два слагаемых. Поймем, что она является б.м. относительно h_1. $\|\gamma(h_1)\|/\|h\| \leqslant \|\mathcal{B}\| \cdot \|\alpha(h_1)\| + \|T(a + h_1) - T(a)\|/\|h\| \cdot \|\beta(T(a + h_1) - T(a))\|$. $\|T(a + h_1) - T(a)\| = \mathcal{O}(\|h\|)$, при $h \to 0$, $\beta(T(a+h_1) - T(a)) = \beta(h_2) \xrightarrow[h_1 \to 0]{} 0$. А то, что $T(a+h_1) - T(a) \xrightarrow[h_1 \to 0]{} 0$ — вроде логично.

Про степень гладкости по индукции. ∎

Определение. *Длина гладкого пути* $\gamma \in C([a, b], \mathbb{R}^m)$: $l(\gamma) \overset{\text{def}}{=} \int\limits_a^b |\gamma'(t)|\, dt$

Определение. *(де)Градиент.* $\phi\colon \mathbb{R}^m \to \mathbb{R}^m$: $\operatorname{grad} \phi = \left(\dfrac{\partial \phi}{\partial x_1}, \dots, \dfrac{\partial \phi}{\partial x_m}\right)$

Определение. *Область (в $\mathbb{R}^m$) — открытое и связное множество.*

Определение. $f\colon O \subset \mathbb{R}^m \to \mathbb{R}^m$ — *диффеоморфизм, если*
f — *обратима, дифференцируема,* f^{-1} — *дифференцируема.*

N.B. $f^{-1} \cdot f = \mathrm{id} \Rightarrow \left(f^{-1}\right)'(f(x)) \cdot f'(x) = E \Rightarrow \left(f^{-1}\right)'(y = f(x)) = (f')^{-1}(x)$.

Лемма (о почти состоявшейся локальной инъективности). *Пусть* $F\colon O \to \mathbb{R}^m$, *дифференцируема в* x_0, $\det F'(x_0) \neq 0$. *Тогда* $\exists\, c,\, \delta > 0,\ \forall\, h : \|h\| < \delta :\ |F(x_0+h) - F(x_0)| \geqslant c \cdot \|h\|$ *(в частности, точки* $F(x_0)$ *и* $F(x_0+h)$ *не склеиваются).*

Доказательство.

$$\|F(x_0+h) - F(x_0)\| = \|F'(x_0)\cdot h + \alpha(h)\cdot\|h\|\| \geqslant$$
$$\|F'(x_0)\cdot h\| - \|\alpha(h)\cdot\|h\|\| \geqslant (\tilde{c} - |\alpha(h)|)\cdot\|h\| \geqslant \tilde{c}/2 \cdot \|h\|$$

При $\tilde{c} \coloneqq \dfrac{1}{\left\|(F'(x_0))^{-1}\right\|}$ предпоследний знак верен: (по свойству $\|Ax\| \leqslant \|A\|\cdot\|x\|$).
$\|(F'(x_0))^{-1}\| \cdot \|F'(x_0)\cdot h\| \geqslant \|I \cdot h\| \Rightarrow \left|F'(x_0)\cdot h\right| \geqslant \tilde{c}\cdot\|h\|$. Тогда выбираем δ, чтобы на $\|h\| < \delta$ было $|\alpha(h)| < \tilde{c}/2$. Тогда верен и последний. $c \coloneqq \tilde{c}/2$. ∎

N.B. *“$\forall x\ \det F'(x) \neq 0$” $\not\Rightarrow$ инъективность.*

Пример. $F\colon \mathbb{R}^2 \setminus \{(0,0)\} \to \mathbb{R}^2,\ (x,y) \mapsto (x^2 - y^2, 2xy),\ F' = \begin{pmatrix} 2x & -2y \\ 2y & 2x \end{pmatrix} \Rightarrow \det F' \neq 0$. *Но это возведение в квадрат комплексного числа, поэтому каждая точка является образом каких-то двух.*

Теорема (о сохранении области). *Пусть* $F\colon O \subset \mathbb{R}^m \to \mathbb{R}^m$, $\forall x \in O\ \det F'(x) \neq 0$.
Тогда $F(O)$ — *открыто.*

Доказательство. $x_0 \in O$, $y_0 = F(x_0)$. Покажем, что y_0 — внутренняя точка $F(O)$.
По лемме $\exists\, c, \delta :\ \forall\, h \in \overline{B(x_0,\delta)}$ (да, замкнутом) : $|F(x_0+h) - F(x_0)| \geqslant c \cdot \|h\|$ (образ сферы не проходит через y_0)

Пусть $r \coloneqq 1/2 \cdot \mathrm{dist}(y_0, F(S(x_0,\delta)))$, $\mathrm{dist}(a,S) = \inf\{\rho(a,s),\ s \in S\}$. F — непрерывно, $S(x_0,\delta)$ — компакт, $\Rightarrow F(S(x_0,\delta))$ — компакт. ρ — непрерывна $\Rightarrow$ на компакте по теореме Вейерштрасса достигается минимум. Который, как мы уже понимаем, положителен (истории про образ сферы и точку y_0) и равен R.

Хотим понять, что $B(y_0,R) \subset F(O)$. Пусть $y \in B(y_0,R)$, правда ли, что $\exists x : y = F(x)$, $x \in B(x_0,\delta)$. Пусть $g(x) \coloneqq |F(x) - y|$, определенная на шаре.

- На границе $(S(x_0,\delta))$ $g(x) \geqslant R$ (иначе $2R \leqslant \|y_0 - F(x)\| \leqslant \|F(x) - y\| + \|y_0 - y\| < 2R$)
- При $x \coloneqq x_0 : \|F(x_0) - y\| = \|y_0 - y\| < R \Rightarrow$ минимум внутри шара (хотелось бы, чтобы он был 0)

Понятно, что у $g(x)$ и у $(g(x))^2$ минимум там же. Раз минимум, то частные производные равны нулю: $L = \|(F(x)-y)\|^2 = (f_1(x_1,\dots,x_m)-y_1)^2 + (f_2(x_1,\dots,x_m)-y_2)^2 + \dots + (f_m(x_1,\dots,x_m)-y_m)^2$

$$\begin{array}{rlcl}
\text{дифф. по } x_1: & 2(f_1(x_1,\dots,x_m)-y_1)\cdot {f'}_{1x_1} & +\dots+ & 2(f_m(x_1,\dots,x_m)-y_m)\cdot {f'}_{mx_1} = 0\\
\text{дифф. по } x_2: & 2(f_1(x_1,\dots,x_m)-y_1)\cdot {f'}_{1x_2} & +\dots+ & 2(f_m(x_1,\dots,x_m)-y_m)\cdot {f'}_{mx_2} = 0\\
\vdots & \vdots & \vdots & \vdots\\
\text{дифф. по } x_m: & 2(f_1(x_1,\dots,x_m)-y_1)\cdot {f'}_{1x_m} & +\dots+ & 2(f_m(x_1,\dots,x_m)-y_m)\cdot {f'}_{mx_m} = 0
\end{array}$$

(${f'}_{ix_j}$ — производная i-ой координатной функции по переменной x_j).

Тогда $2F'(x)\cdot(F(x)-y) = \vec{0}$, а $F'(x)$ невырожденна, $\Rightarrow F(x) = y$ ∎

Следствие. *Пусть* $F\colon O \subset \mathbb{R}^m \to \mathbb{R}^l$, $l < m$. F — *дифференцируема на* O, $\forall x$ $\operatorname{rank} F'(x) = l$. *Тогда* $F(O)$ — *открыто в* $\mathbb{R}^l$

Доказательство. Будем считать, что первые l столбцов лнз в точке x_0 и окрестности.

Пусть $\tilde{F}\colon O \to \mathbb{R}^m := \begin{bmatrix} F \\ x_{l+1} \\ \vdots \\ x_m \end{bmatrix}$, тогда $\tilde{F}' = \begin{pmatrix} F' & \dots \\ \varnothing & E \end{pmatrix} \Rightarrow \det \tilde{F}'(x_0) \neq 0 \Rightarrow \tilde{F}(B(x_0,r))$ — открыто. $f(O) = proj_{\mathbb{R}^l}\tilde{F}(O)$ (подействовали непрерывной функцией). ∎

Мемы про согнуть бумагу.

Теорема (о гладкости обратного отображения)**.** $T \in C^r(O,\mathbb{R}^m)$, *обратимо,* $\forall x$ $\det T'(x) \neq 0$. *Тогда* $T^{-1} \in C^r$ *и* $(T^{-1})'(y_0) = (T'(x_0))^{-1}$, *где* $y_0 = T(x_0)$

Доказательство. **База**: $r = 1$. $S := T^{-1}$. O — открытое $\Rightarrow S^{-1}(O)$ открытое (по теореме о сохранении области) $\Rightarrow S$ — непрерывно (видимо (топологическая непрерывность)).

$T(O) = O_1$, $y_0 \in O_1$, $y_0 = T(x_0)$, $\mathcal{A} = T'(x_0)$. Правда ли, что S — дифференцируема в y_0?

По лемме о почти инъективности: $\exists c,\ \delta > 0 : x \in B(x_0,\delta) \Rightarrow |T(x)-T(x_0)| \geqslant c\cdot|x-x_0|$.

- (знаем): $T(x)-T(x_0) = \mathcal{A}(x-x_0) + \alpha(x)\cdot\|x-x_0\|$
- ($x = S(y)$, $x_0 = S(y_0)$): $y - y_0 = \mathcal{A}(S(y)-S(y_0)) + \alpha(S(y))\cdot\|S(y)-S(y_0)\|$
- ($\times\mathcal{A}^{-1}$, перенесем) : $S(y)-S(y_0) = \mathcal{A}^{-1}(y-y_0) - \mathcal{A}^{-1}(\alpha(S(y)))\cdot\|S(y)-S(y_0)\|$

Покажем, что последняя штука — б.м. относительно $\|y-y_0\|$. S — непрерывно, можно положить $\|x-x_0\| = \|S(y)-S(y_0)\| < \delta$. Тогда $\|x-x_0\|\cdot\|\mathcal{A}^{-1}(\alpha(S(y)))\| \leqslant 1/c\|T(x)-T(x_0)\|\cdot\|\mathcal{A}^{-1}\|\cdot\|\alpha(S(y))\| = \|\mathcal{A}^{-1}\|/c\cdot\|y-y_0\|\cdot\|\alpha(S(y))\|$. $x = S(y) \to x_0 \Rightarrow \alpha(S(y)) \xrightarrow[y\to y_0]{} 0$ (S все еще непрерывна). Поэтому S — дифференцируема в y_0. Более того, $S'(y_0) = \mathcal{A}^{-1} = (T'(x_0))^{-1}$

Про гладкость: $y \mapsto T^{-1}(y) = x \mapsto T'(x) = A \xmapsto{C^\infty} A^{-1} = S'(y)$. Все эти преобразования непрерывные. Про первое было в начале базы, второе по условию, про третье еще поговорим, оно вообще из C^∞. А композиция непрерывных — непрерывна. Значит, $S'(y)$ — непрерывна, значит $S \in C^1$

Да, последнее отображение из C^∞. Оно так-то $\in \mathbb{R}^{m^2}$ и его координатные функции (которых m^2) — это то, что даст алгоритм при поиске обратной матрицы. А даст он достаточно (бесконечно) гладкие выражения — дроби, где в числителе элементы союзной матрицы (многочлены от элементов исходной), а в знаменателе — детерминант исходной. То есть коорд функции — дробно-рац штуки, которые бесконечно гладкие.

Переход: Все эти преобразования C^{r-1} гладкие. Тогда первый переход из C^{r-1} по предположению индукции, второй по условию, третий по жизни. А при композиции степень гладкости сохраняется. Значит, отображение $S'(y) \in C^{r-1} \Rightarrow S \in C^r$ ■

Теорема (лемма о приближении отображения его линеаризацией). $\mathcal{T} \in C(O, \mathbb{R}^m), x_0 \in O$. *Тогда* $|T(x_0 + h) - T(x_0) - T'(x_0)h| \leqslant M \cdot \|h\|$, $M = \sup\limits_{z \in [x_0, x_0+h]} \|T'(z) - T'(x_0)\|$

Доказательство. $F(x) = T(x) - T'(x_0) \cdot x \Rightarrow F'(x) = T'(x) - T'(x_0)$,

$|F(x) - F(x_0)| \leqslant \sup\limits_{z \in [x_0, x]} \|F^{-1}(z)\| \cdot |x - x_0|$ ■

Теорема (о локальной обратимости). *Пусть* $T \in C^1(O, \mathbb{R}^m)$, $x_0 \in O$. *Матрица* $T'(x_0)$ *обратима. Тогда* $\exists U \subset O$ *точки* x_0, *что сужение* T *на* U *— диффеоморфизм.*

Доказательство. Докажем, что сужение T на окрестность удовлетворяет $\forall x\ \det T'(x) \neq 0$ и обратимо. Тогда по теореме о сохранении области $T(U)$ открыто, T^{-1} той же гладкости (по теореме о гладкости обратного отображения).

$c \coloneqq 1/\|(T'(x_0))^{-1}\|$. Выберем такой шар $U = B(x_0, r) \subset O$, чтобы $\det(T'(x)) \neq 0$ и $\|T'(x) - T'(x_0)\| \leqslant c/4$

Первое можем, так как $\det(T'(x)) \in C^1$ (как композиция $T'(x)\colon \mathbb{R}^m \to \mathbb{R}^{m^2}$ (непрерывна по условию) и $\det\colon \mathbb{R}^{m^2} \to \mathbb{R}$ (непрерывен как многочлен от координат); а также $\det(T'(x_0)) \neq 0$.

Второе можем, так как норма — непрерывная функция, в точке x_0 значение $= 0$.

Поймем, почему эта окрестность подходит. Достаточно понять, что T взаимно однозначно на U.

$\forall h : \|T'(x_0)(h)\| \geqslant c \cdot \|h\|$ — так специально выбрали c.

$\forall x,\, z \in U : \|T'(x) - T'(z)\| \leqslant \|T'(x) - T'(x_0)\| + \|T'(x_0) - T'(z)\| \leqslant c/2$

Пусть $y = x + h$, $h \neq 0 :$

$T(y) - T(x) = T(x+h) - T(x) - T'(x)(h) + (T'(x) - T'(x_0))(h) + T'(x_0)(h)$.

Тогда $\|T(y) - T(x)\| \geqslant \|T'(x_0)(h)\| - \|T(x+h) - T(x) - T'(x)(h)\| - \|(T'(x) - T'(x_0))(h)\| \geqslant c \cdot \|h\| - \sup\limits_{z \in [x, y]} \|T'(z) - T'(x)\| \cdot \|h\| - \|T'(x) - T'(x_0)\| \cdot \|h\| > c \cdot \|h\| - c/2\|h\| - c/4\|h\| > 0$ ■

N.B (Формулировка в терминах систем уравнений). m *уравнений* $\{f_i(x_1, \ldots, x_m) = y_1\}_{i=1}^m$, *где* $f_i\colon \mathbb{R}^m \to \mathbb{R}$, $f_i \in C^r$.

Если при $y = (b_1, \ldots, b_m)$ $\exists!\, x = (a_1, \ldots, a_m))$ *и* $\det\left(\dfrac{\partial f_i}{\partial x_j}(x)\right) \neq 0$.

Тогда для всех y *близких к* $(b_1, \ldots, b_m)$ *существует единственное решение, оно будет близкое к* $(a_1, \ldots, a_m)$, *и зависимости этого решения от* x *— гладкие.*

Пусть есть гладкое отображение $F\colon O \to \mathbb{R}^n$, O — открытое подмножество $\mathbb{R}^{n+m} = \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^m$, $z \in \mathbb{R}^{n+m} \leftrightarrow (x, y)$, $x = (x_1, \dots, x_m) \in \mathbb{R}^m$, $y = (y_1, \dots, y_n) \in \mathbb{R}^n$

Пусть $F_1, \dots, F_n$ — координатные функции. Тогда

$$F'(x, y) = \begin{pmatrix} \frac{\partial F_1}{\partial x_1} & \dots & \frac{\partial F_1}{\partial x_m} & \frac{\partial F_1}{\partial y_1} & \dots & \frac{\partial F_1}{\partial y_n} \\ \vdots & & \vdots & \vdots & & \vdots \\ \frac{\partial F_n}{\partial x_1} & \dots & \frac{\partial F_n}{\partial x_m} & \frac{\partial F_n}{\partial y_1} & \dots & \frac{\partial F_n}{\partial y_n} \end{pmatrix}$$

Правая и левая часть — F'_x и F'_y соответственно.

Определение. P, Q — *открытые в* $\mathbb{R}^m$ *и* $\mathbb{R}^n$ *соответственно,* $p \times Q \subset O$. *Уравнение* $F(x, y) = 0$ *определяет в* $P \times Q$ *неявное отображение, если* $\exists f\colon P \to Q : F(x, f(x)) = 0 \forall\, x \in P$.

Уравнение определяет единственное неявное отображение тогда и только тогда, когда $\forall\, x \in P\ \exists!\ y \in Q : F(x, y) = 0$

Теорема (о неявном отображении). $F\colon O \subset \mathbb{R}^{n+m} \to \mathbb{R}^n$, $F \in C^r(O, \mathbb{R}^{n+m})$, $(a, b) \in O$, $F(a, b) = 0$, $F'_y(a, b)$ — *обратима.*

Тогда

- $\exists\, P \in \mathbb{R}^m$, $a \in P$ *(открытое)*
- $\exists\, Q \in \mathbb{R}^n$, $b \in Q$ *(открытое)*
- $P \times Q \subset O$
- $\exists!\, \phi\colon P \to Q$, $\phi \in C^r$, *что* $F(x, \phi(x)) = 0$
- *И к тому же* $\phi'(x) = -\big(F'_y(x, f(x))\big)^{-1} \cdot F'_x(x, f(x))$

Доказательство. Пусть $\Phi\colon O \to \mathbb{R}^{m+n} : \Phi(x, y) = (x, F(x, y))$, $(x, y) \in O$. Тогда Φ — r-гладкое (уже на $\mathbb{R}^{n+m}$), $\Phi(a, b) = (a, 0)$. Оно переводит точки-решения в точки из $\mathbb{R}^m \times \{0\}$.

$\Phi'(x, y) = \begin{pmatrix} E & 0 \\ F'_x & F'_y \end{pmatrix}$. Тогда $\det \Phi'(x, y) \neq 0 \Rightarrow$ (по теореме о локальной обратимости) найдется окрестность $\overline{U} = Q' \times Q$ точки (a, b), что сужение Φ на $\overline{U}$ есть диффеоморфизм. $O_0 = \Phi(\overline{U})$ — открыто и содержит $(a, 0) = \Phi(a, b)$. $\Psi = \left(\Phi\Big|_U\right)^{-1}$.

Раз Φ не меняет первые m координат, то Ψ тоже. $\Psi(u, v) = (u, H(u, v))$, $H\colon O_0 \to \mathbb{R}^n$ $\exists\, P \subset \mathbb{R}^m$, $a \in P$, $P \subset (O_0 \cup \mathbb{R}^m)$ (ибо $O_0 \cap \mathbb{R}^m$ — открыто в $\mathbb{R}^m$) ((т.к. O_0 открытое)).

$f(x) \overset{\text{def}}{=} H(x, 0)$. Проверим:

- $\Psi(P \times \{0\}) \subset \Psi(O_0) = U \Rightarrow f(P) \subset Q$ (когда забили на первые m координат)
- $f \in C^r(P, \mathbb{R}^n)$ ($\Psi \in C^r(O_0, \mathbb{R}^{m+n})$ по теореме о гладкости обратного отображения)
- $y = f(x) : (x, F(x, y)) = \Phi(x, y) = \Phi(x, H(x, 0)) = \Phi(\Psi(x, 0)) = (x, 0) \Rightarrow F(x, y) = 0$

  Дифференцируем. (как композицию): $g(x)\colon \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^{n+m}$, $x \mapsto (x, f(x))$

  $(F(g(x))) = F'(g(x)) \cdot g'(x) = (F'_x(x, f(x)), F'_y(x, y)) \cdot \begin{pmatrix} I \\ f'(x) \end{pmatrix}$

  $\Rightarrow F'_x(x, f(x)) \cdot I + F'_y(x, f(x)) \cdot f'(x) = 0 \Rightarrow -\big(F'_y(x, f(x))\big)^{-1} \cdot F'_x(x, f(x)) = f'(x)$

- Поч единственна. $\Phi(x,y) = (x,0) \Rightarrow (x,y) = \Psi(\Phi(x,y)) = \Psi(x,0) = (x, H(x,0)) = (x, f(x)) \Rightarrow f(x)$ определена однозначно.

$\blacksquare$

N.B (формулировка теоремы о неявном отображении в терминах системы уравнений). *Система уравнений* $\{f_i(x_1,\ldots,x_m,y_1,\ldots,y_n)=0\}_{i=1}^n$, *все* $f_i \in C^r$

$(x,y)=(a,b)$ *— решение и* $\det\left(\dfrac{\partial f_i}{\partial y_j}(a,b)\right) \neq 0$

Тогда $\exists\, P \in \mathbb{R}^m$, $Q \in \mathbb{R}^n$ *открытые, содержащие* a *и* b *соответственно, что* $\exists!\, \phi\colon P \to Q$, $\phi \in C^r$ *и* $\forall\, x \in P : (x, \phi(x))$ *— решение.*

Полезное.

N.B. *Выведем теорему о локальной обраимости через теорему об обратном отображении (а не наоборот, как в докве последней).*

Доказательство. Пусть дали $T\colon O \to \mathbb{R}^m$, $T \in C^r$, $T'(x_0)$ обратима. Рассмотрим $F\colon \mathbb{R}^m \times O \to \mathbb{R}^m$, $F(x,y) = T(y) - x$. Ее область определения открыта, она r-гладкая, $(a,b) = (T(x_0), x_0)$, $F(a,b)=0$, $F'_y(a,b) = T'(a,b)$ обратима.
Тогда F подпадает под теорему о неявном отображении $\Rightarrow \exists\, P \in \mathbb{R}^m$, $Q \in O$, $T(x_0) \in P$, $x_0 \in Q$, на которых $\exists!\, f\colon P \to Q$, что $F(x, f(x)) = T(f(x)) - x = 0$.
Кажется, мы нашли окрестность точки x_0 и f — обратную функцию. Ну и понятно, что она гладкая и мы даже умеем ее дифференцировать (точно также, как и хотим). $\blacksquare$

Пример (Задача (с лекции)). *Найти* z'_x *в точке* $u=1, v=2$.

$$\begin{cases} x = u^2 - v^2 \\ y = 2uv \\ z = u + 3v \end{cases}$$

Решение. 3 уравнения $\Rightarrow$ 3 функции. z точно функция, x точно переменная. Пусть u, v — еще две функции. $u=1$, $v=2 \Rightarrow x=-3$, $y=4$, $z=7$. Дифференцируем по x. Первые два содержат две неизвестные — u'_x и v'_x. Решаем эту систему 2×2. (методом выписывания ответа, разумеется)

$$\begin{cases} (2u)u'_x - (2v)v'_x = 1 \\ (2v)u'_x + (2u)v'_x = 0 \\ u'_x + 3v'_x = z'_x \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} u'_x = \dfrac{2u}{4u^2+4v^2} \\ v'_x = \dfrac{-2v}{4u^2+4v^2} \end{cases} \xrightarrow{u=1,v=2} \begin{cases} u'_x = \dfrac{1}{10} \\ v'_x = \dfrac{-1}{5} \end{cases}$$

$\Rightarrow z'_x = u'_x + 3v'_x = -1/2$

Определение. O *гомеоморфно* M*, если* $\exists\,\phi$ *(гомеоморфизм):*

- $\phi\colon O \to M$
- ϕ *— непрерывно, сюръекция*
- ϕ *обратимо и* $(\phi)^{-1}$ *непрерывно*

Определение. ϕ *— гомеоморфизм, если* ϕ *— биекция,* ϕ *и* $(\phi)^{-1}$ *непрерывны.*

Определение. $M \subset \mathbb{R}^m$ *— простое* k*-мерное многообразие в* $\mathbb{R}^m$ *(непрерывное), если* M *гомеоморфно* $O \subset \mathbb{R}^k$ *((видимо,* $k \leqslant m$*)).*

Определение. $M \subset \mathbb{R}^m$ *— простое* k*-мерное* r*-гладкое многообразие, если*
$\exists\, O \subset \mathbb{R}^k$ *(открытое),* $\exists\,\phi\colon O \to \mathbb{R}^m$ *(гомеоморфизм),* $\phi(O) = M$*,*
$\phi \in C^r(O, \mathbb{R}^m)$*,* $\forall\, t \in O \ \operatorname{rank}\phi'(t) = k$

Определение. *Эту функцию* ϕ *называют параметризацией.*

Байка про полусферу. Говорят, это простое двумерное 2-гладкое многообразие.

Теорема (об эквивалентности определений). $M \subset \mathbb{R}^m$, $1 \leqslant k \leqslant \infty$, $1 \leqslant r \leqslant \infty$.
Тогда $\forall\, p \in M$ *эквивалентны:*

1. $\exists\, \mathcal{U} \subset \mathbb{R}^m$ *— открытое,* $p \in \mathcal{U}$, $M \cap \mathcal{U}$ *— простое,* k*-мерное* C^r*-гладкое многообразие.*
2. $\exists\, \overline{\mathcal{U}} \subset \mathbb{R}^m$ *— открытое,* $p \in \mathcal{U}$, $\exists\, f_1, \ldots, f_{m-k} : \overline{\mathcal{U}} \to \mathbb{R} \in C^r$ *такие, что выполнено:* $x \in M \cap \overline{\mathcal{U}} \Leftrightarrow \forall\, i : f_i(x) = 0$, $\{\operatorname{grad} f_i(p)\}_{i=1}^{m-k}$ *— ЛНЗ.*

Доказательство. $1 \Rightarrow 2$. $\exists\,\phi \in C^r(O \subset \mathbb{R}^k, \mathbb{R}^m)$ — параметризация $M \cap \mathcal{U}$, ϕ_i — координатные функции. $\operatorname{rank}\phi'(t_0) = k$, реализован на первых k строках. $p = \phi(t_0)$.

$L\colon \mathbb{R}^m \to \mathbb{R}^k : x \mapsto (x_1, \ldots, x_k)$. $\det(L \circ \phi)'(t_0) =$ первые k столбцов у $\phi'(t_0) \Rightarrow \neq 0$

Мы попали под теорему о локальной обратимости. То есть $\exists\, W$ — окрестность t_0, $(V \coloneqq L \circ \phi(W))$, что $(L \circ \phi)|_W$ взаимно однозначно $\Rightarrow L|_{\phi(W)}$ взаимно однозначно.

То есть каждая точка x из $\phi(W)$ определяется первыми k координатами (пусть это будет вектор $x' = L(x) \in V$). То есть $\phi(W)$ — график (k координат — аргументы, $(m-k)$ — значение) $f\colon V \to \mathbb{R}^{m-k}$.

$\psi\colon V \to W$, $\psi \coloneqq (L \circ \phi|_W)^{-1}$ (оно, как мы знаем, класса C^r). $\forall\, x' \in V$:
$L \circ \phi(\psi(x')) = x' = L(x', f(x')) \Rightarrow f(x') = \operatorname{proj}_{\|\mathbb{R}^k}(\phi(\psi(x'))) \Rightarrow f \in C^r$ как композиция н гладких отображений. (так как $\phi(W)$ график, можно L в равенстве убрать).

Так как $\phi(W)$ открытое в $M \Rightarrow \exists\, \overline{\mathcal{U}} \subset \mathbb{R}^m$ — открытое, что $\phi(W) = M \cap \overline{\mathcal{U}}$, $\overline{\mathcal{U}} \subset V \times \mathbb{R}^{m-k}$ (если не так, то пересечем. да, получится не пустое, ибо $\phi(W) \subset V \times \mathbb{R}^m$).
$F_j(x) \coloneqq f_j(L(x)) - x_{k+j}$

Тогда $x \in M \cap \overline{\mathcal{U}} \Leftrightarrow x \in \Gamma_f \Leftrightarrow F_j = 0$.

Про градиенты. $$\begin{pmatrix} \operatorname{grad} F_1 \\ \cdots \\ \operatorname{grad} F_{m-k} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \dfrac{\partial 1}{\partial 1} & \cdots & \dfrac{\partial 1}{\partial k} & -1 & \cdots & 0 \\ \vdots & & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \dfrac{\partial m-k}{\partial 1} & \cdots & \dfrac{\partial m-k}{\partial k} & 0 & \cdots & -1 \end{pmatrix} \text{ — ЛНЗ.}$$

$2 \Rightarrow 1$. $p \leftrightarrow (a, b)$, $a \in \mathbb{R}^k$, $b \in \mathbb{R}^{m-k}$. Будем считать, что ранг реализуется на последних $(m-k)$ столбцах.

Есть $F\colon \mathbb{R}^m \to \mathbb{R}^{m-k}$, причем $F'_y(a, b) \neq 0$. Тогда по теореме о неявном отображении $\exists\, P \subset \mathbb{R}^k$, $Q \in \mathbb{R}^{m-k}$ — открытые и с центрами в a и b соответственно, $\exists\, f \in C^r(P, \mathbb{R}^{m-k})$, такое что $x = (u, v) \in M \cap \mathcal{U} \Leftrightarrow v = f(u)$. Тогда $\Phi(u)\colon u \mapsto (u, f(u))$ — параметризация в окрестности $M \cap \mathcal{U}$ точки p. К тому же $\Phi \in C^r(P, \mathbb{R}^m)$, ранг матрицы $\Phi' = k \, \forall\, x \in P$. Оно и логично, ведь $F'(u) = \begin{pmatrix} I \\ f'(u) \end{pmatrix}$ ■

Следствие (о двух параметризациях)**.** $M \subset \mathbb{R}^m$ — k-*мерное, простое* r-*гладкое многообразие.* $p \in M$, U — *окрестность* p. $\{\phi_i\colon O_i \subset \mathbb{R}^k \to U \cap M$ *(сюръекции)*$\}_{i \in \{1,2\}}$.

Тогда $\exists\, \Psi\colon O_1 \to O_2$ — *диффеоморфизм. Причем* $\phi_1 = \psi(\Phi_2)$

Доказательство. Считаем, что ранг реализован на первых k столбцах. Тогда $\phi_i \circ L$ — диффеоморфизмы в некоторых окрестностях p. $\phi_1 = \phi_2 \circ (L \circ \phi_2)^{-1} \circ (L \circ \phi_1) \Rightarrow \Psi \coloneqq (L \circ \phi_2)^{-1} \circ (L \circ \phi_1)$. ■

Лемма. $\Phi\colon O \subset \mathbb{R}^k \to \mathbb{R}^m$ — C^r *параметризация многообразия* M *в окрестности* $U(p) \cap M$, $p \in M$, $\Phi(t_0) = p$. *Тогда образ* $\Phi'(t_0)$ *при действии на* $\mathbb{R}^m$ — k*-мерное подпространство, которое не зависит от* Φ.

Доказательство. Φ — пареметризация, значит $\operatorname{rank}\Phi' = k \Rightarrow$ образ k-мерен. Пусть есть Φ_2 $(\Phi_2(\overline{t_0}) = p = \Phi(t_0))$, тогда $\Phi_2 = \Phi \circ \Psi$, где Ψ — диффеоморфизм, а значит $\Phi_2'(\overline{t_0}) = \Phi'(t_0) \circ \Psi'(\overline{t_0})$.
$T_{p,\Phi_2} = \{\Phi_2'(\overline{t_0})v : v \in \mathbb{R}^k\} = \{\Phi'(t_0) \circ \Psi'(\overline{t_0})v : v \in \mathbb{R}^k\} = \{\Phi'(t_0)u : u \in \mathbb{R}^k\} = T_{p,\Phi}$ ■

Определение. *В условиях леммы* $\Phi'(t_0)(\mathbb{R}^m)$ — *афинное касательное пространство* $= T_pM$

N.B (касательное пространство в терминах векторов скорости гладких путей).
- $\forall v \in T_pM \ \exists \gamma\colon [-1, 1] \to \mathbb{R}^m, \gamma([-1, 1]) \subset M$ *(гладкий путь), что* $\gamma(0) = p$, $v = \gamma'(0)$
- *Пусть* $\gamma\colon [-\varepsilon, \varepsilon] \to M \subset \mathbb{R}^m$ — *гладкий путь, причем* $\gamma(0) = p \Rightarrow \gamma'(0) \in T_pM$

Доказательство.
- $v = \phi'(p)h$. Тогда пусть $\gamma(t) := \phi(p + th)$. Да, $\gamma(0) = p$ и $v = \gamma'(0)$.
- Рассмотрим $\psi\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}^k := \phi^{-1} \circ \gamma$. В окрестности 0 оно гладкое, как композиция пути и гладкой параметризации. Тогда $\gamma = \phi \circ \psi \Rightarrow \gamma'(0) = \phi'(p) \cdot \psi'(0) \in T_pM$

■

Пример (касательное пространство к графику функции и к поверхности уровня).
$f\colon \mathbb{R}^m \to \mathbb{R}$ *гладкое, график* $f = \{(x, y) | y = f(x)\}$.
Тогда $p = (x_0, f(x_0))$, $\phi(x) = \begin{pmatrix} x \\ f(x) \end{pmatrix}$, $\phi'(x) = \begin{pmatrix} E \\ f'_{x_1}(x) \dots f'_{x_m}(x) \end{pmatrix}$. *Тогда касательное пространство будет* $\phi'(p)(\mathbb{R}^m) = (h_1, \dots, h_m, f'_{x_1}(p)h_1 + \ldots + f'_{x_m}(p)h_m)$. *Что можно переписать как* $y - f(x^0) = f'_{x_1}(x^0)(x_1 - x_1^0) + \ldots + f'_{x_m}(x^0)(x_m - x_m^0)$. *Даже походит на уравнение касательной плоскости.*

(??? про поверхность. Ну видимо это тоже своего рода график, определенный неявной функцией. Но для красивой формулы понять бы, что л.ч = 0 ???)

Определение. $\{f_n(x)\}_{n=1}^{\infty} \underset{X}{\to} f(x)$, *если* $\forall\, x_0 \in X:\ \exists \lim\limits_{n\to\infty} f_n(x_0) = f(x)$.

Определение. $\{f_n(x)\}_{n=1}^{\infty} \rightrightarrows f(x)$ *на* X, *если* $\sup\limits_{x\in X}|f(x) - f_n(x)| \xrightarrow{n\to\infty} 0$.
Ну или $\forall\, \varepsilon > 0\, \exists\, N\, \forall\, n > N:\ \sup\limits_{x\in X}|f_n(x) - f(x)| < \varepsilon$.
Функциональный ряд называется равномерно сходящимся на множестве X*, если равномерно сходится на* X *последовательность его частичных сумм.*

Теорема (Стокса–Зайдля о непрерывности)**.** $\{f_n(x)\}_{n=1}^{\infty}$, $f_n \rightrightarrows f$, $c \in X$, f_i *непрерывны в окрестности* c*. Тогда* f *непрерывна в* c*.*

Доказательство. $|f(x)-f(c)| \leqslant |f(x)-f_n(x)|+|f_n(x)-f_n(c)|+|f_n(c)-f(c)|$. Первое и последнее слагаемое можно сделать меньше $\varepsilon/3$ из-за поточечной сходимости (которая следует из равномерной). f_n непрерывна, поэтому для данного n (которое мы придумали, оценивая первое и последнее) мы можем найти окрестность, где второе слагаемое будет $< \varepsilon/3$. ■

N.B (1)**.** *Можно без метрики, а в топологической непрерывности то же самое сказать. (ну логично, да).*

N.B (2!)**.** *Локально равномерно сходится на* X*, это когда* $\forall\, x \in X\, \exists\, U(x)$: $f_n \rightrightarrows f$ *на* X*.*

Следствие. $f_n \in C(X)$, $f_n \rightrightarrows f$ *локально. Тогда* $f \in C(X)$*. (ну логично да, те же оценки сработают)*

Определение. *Заведем метрику в пространстве (да-да, это пространство) непрерывных функций на* $[a, b]$*. А именно:* $\rho(f, g) = \sup\limits_{x\in[a,b]} |f(x) - g(x)|$.

N.B.
- *Видимо, "*sup*" можно заменить на "*max*".*
- *Да, это метрика (про равенство нулю и симметрию понятно)*
  Про треугольник:
  $|f(x)-h(x)| \leqslant |f(x)-g(x)|+|g(x)-h(x)|$*; возьмем максимум левой и правой части:*
  $\sup\limits_{x\in[a,b]} |f(x)-g(x)| \leqslant \sup\limits_{x\in[a,b]} \big(|f(x)-g(x)|+|f(x)-g(x)|\big) \leqslant \sup\limits_{x\in[a,b]} |f(x)-g(x)|+ \sup\limits_{x\in[a,b]} |f(x)-g(x)|$,
  ведь $\max(a + b) \leqslant \max(a) + \max(b)$

Теорема (метрика в пространстве непрерывных функций на компакте, его полнота)**.** *Пространство* $C([a, b])$ *с метрикой* ρ *из определения полно.*

Доказательство. Предъявим функцию, к которой сходится. Зададим в каждой точке. Зафиксируем $x_0 \in [a, b]$: Последовательность f_n фундаментальна относительно $\rho \Rightarrow$ последовательность $\{f_n(x)\}$ фундаментальна, а так как она в $\mathbb{R}$, то имеет предел $\overline{x}$, то есть $f_n(x_0) \xrightarrow[n\to\infty]{} \overline{x} = f(x)$ поточечно. Задали. Как говорит высшая теория (а именно "Теорема Стокса–Зайдля о непрерывности предельной функций") $f(x) \in C[a, b]$. ■

Определение. $V\colon O \to \mathbb{R}^m$ *(O открыто) — векторное поле. Если не оговорено обратное, считаем, что* $V \in C(O, \mathbb{R}^m)$

Определение. V *— векторное поле,* $\gamma\colon [a,b] \to \mathbb{R}^m$ *— кусочно-гладкий путь. Интеграл векторного поля по кусочно-гладкому пути:* $I(V,\gamma) \overset{\text{def}}{=} \int\limits_a^b \langle V(\gamma(t)), \gamma'(t)\rangle\, dt$

Свойства. (Старые)

- $I(\alpha V + \beta U, \gamma) = \alpha I(V,\gamma) + \beta I(U,\gamma)$ (следует из линейности $\langle\cdot,\cdot\rangle$ и $\int_a^b$)
- $I(V,\gamma) = I(V, \gamma|_{[a,c]}) + I(V, \gamma|_{[c,b]})$ (следует из аддитивности для $\int_a^b$)
- $\phi \in C^1([\alpha,\beta] \overset{\text{íà}}{\to} [a,b])$, растет, и к тому же $\phi(\alpha) = a$ и $\phi(\beta) = b$. Тогда $I(V,\gamma) = I(V, \gamma\circ\phi)$ ($\int_a^b \langle V(\gamma(t)), \gamma'(t)\rangle\, dt = \int_\alpha^\beta \langle V(\gamma(\phi(t))), \gamma'(\phi(t)) \cdot \phi'(t)\rangle\, dt$ — если учесть, что $\phi'(t)$ — число, которое ввиду линейности из скалярки можно вынести, то получится знакомая аналогичная теорема о замене параметра в интегрировании).

Определение. *Произведение путей* $\left\{\gamma_i\colon [a_i, b_i] \to \mathbb{R}^m\right\}_{i=1}^2$ *($b_1 = a_2$):*

$$(\gamma_1\gamma_2)(t) = \gamma(t) = \begin{cases} \gamma_1(t), & t \in [a,b] \\ \gamma_2(t-b+c), & t \in [b, b+d-c] \end{cases}$$

Определение. $t^{-1}\colon [a,b] \to \mathbb{R}^m \coloneqq \gamma(b+a-t)$ *— обратный путь.*

Свойства. (Новые)

- $I(V, \gamma_1\gamma_2) = I(V,\gamma_1) + I(V,\gamma_2)$ (логично да)
- $I(V,\gamma) = -I(V,\gamma^{-1})$ (t заменим на $b+a-t$, (-1) вылезет из-за этого)
- $I(V,\gamma) \leqslant \max\limits_{x\in[a,b]} \|V(x)\| \cdot l(\gamma)$ (оценим скалярку по КБ(Ш), потом оценим сам интеграл и получим формулу длины пути:
  $I(V,\gamma) = \int_a^b \langle V(\gamma(t)), \gamma'(t)\rangle\, dt \leqslant \int_a^b \|V(\gamma(t))\| \cdot |\gamma'(t)|\, dt \leqslant \max\limits_{x\in[a,b]} \|V(x)\| \cdot \int_a^b |\gamma'(t)|\, dt$

Определение. *Поле* V *— потенциально, если* $\exists\, f \in C^1(O)$*, что* $V = \operatorname{grad} f$*.* f *— потенциал.*

Теорема. *Потенциал определен однозначно с точностью до константы.*

Доказательство. $V = \operatorname{grad} f_1 = \operatorname{grad} f_2 \Rightarrow \operatorname{grad}(f_1 - f_2) = 0$($m$-мерный) $\Rightarrow (f_1 - f_2)' = 0$ по любому направлению и в любой точке. Ну тогда $f_1 - f_2 = \mathrm{const}$. ■

Определение. *Интеграл не зависит от пути в области* O*, если он определяется только концами.*

Определение. *Петля — путь, где конец совпал с началом.*

Теорема (характеризация потенциальных векторных полей в терминах интегралов)**.** *Три утверждения эквивалентны:*

1. V *— потенциальное*
2. $I(V,\gamma)$ *не зависит от пути*

3. $\forall$ кусочно-гладкой петли $I(V,\gamma)=0$

Доказательство. $(3)\Rightarrow(2)$. Пусть дали 2 конца $A, B\in O$ и два пути γ_1,γ_2 с этими концами. Пусть $\gamma=\gamma_1\cdot\gamma_2^{-1}$ — вполне себе кусочно-гладкая петля.
Тогда $0=I(V,\gamma)=I(V,\gamma_1)+I(V,\gamma_2^{-1})=I(V,\gamma_1)-I(V,\gamma_2^{-1})\Rightarrow I(V,\gamma_1)=I(V,\gamma_2)$

$(2)\Rightarrow(3)$. Дали контур, мы его разбили на два пути и провели те же рассуждения.

$(1)\Rightarrow(2)$. Зафиксируем точки $A(x_1^0,\dots,x_m^0)$ и $B(x_1^1,\dots,x_m^1)$. Рассмотрим путь $\gamma(t)=(x_1(t),\dots,x_m(t))$ с концами в точках. Продифференцируем по t функцию $f(\gamma(t))$:

$$\frac{\partial f}{\partial t}(t)=\frac{\partial f}{\partial x_1}(\gamma(t))\cdot\frac{\partial x_1}{\partial t}(t)+\dots+\frac{\partial f}{\partial x_m}(\gamma(t))\cdot\frac{\partial x_m}{\partial t}(t)$$

Еще поймем, что такое $\langle V(\gamma(t)),\gamma'(t)\rangle$. Так как f — потенциал V, то $(V(x))_i=\dfrac{\partial f}{\partial x_i}(x)\Rightarrow$ $\langle V(\gamma(t)),\gamma'(t)\rangle=\dfrac{\partial f}{\partial x_1}(\gamma(t))\cdot\dfrac{\partial\gamma}{\partial x_1}(t)+\ldots+\dfrac{\partial f}{\partial x_m}(\gamma(t))\cdot\dfrac{\partial\gamma}{\partial x_m}(t)$. Тогда

$$I(V,\gamma)=\int_a^b\langle V(\gamma(t)),\gamma'(t)\rangle\,dt=\int_a^b\frac{\partial f}{\partial t}dt=f(\gamma(b))-f(\gamma(a))$$

Вот, от пути не зависит, только от концов. А еще эта формула называется "обобщенная формула Ньютона-Лейбница"

$(2)\Rightarrow(1)$. Зафиксируем точку $A(x_1^0,\dots,x_m^0)$ и пусть $f\colon x\mapsto I(V,\gamma)$, где γ — путь из A в x. Так как (2), то определили f корректно.

Поймем, что $f(y)-f(x)=I(V,\gamma)$, где γ — путь от x до y. Ну логично, когда будем считать путь до y, выберем путь через x. Тогда $f(y)=f(x)+I(V,\gamma)$.

Докажем, что $\dfrac{\partial f}{\partial x_i}=V_i$. Посчитаем производную по определению: $\lim\limits_{c\to 0}(f(x+ce_i)-f(x))/c$. $f(x+ce_i)-f(x)=I(V,\gamma)=\int_0^c\langle V(x+te_i),\gamma'(t)\rangle\,dt=\int_0^c V_i(x+te_i)dt=c\int_0^1 V_i(x+cte_i)dt$. Тогда $\dfrac{\partial f}{\partial x_i}=\lim\limits_{c\to 0}\int_0^1 V_i(x+cte_i)dt=V_i(x)$

Первое равенство только что поняли, второе по определению, третье — поняли, что в скалярке выжило только одно слагаемое (так как мы движемся вдоль оси x_i, поэтому $\gamma'(t)$ везде, кроме i, содержит нули), четвертое — заменили в интеграле t на ct.

Таким образом поняли, что эта f нам подходит, так как $V=\operatorname{grad} f$. ∎

Теорема (необходимое условие потенциальности). $V\colon O\to\mathbb{R}^m$, *гладкое потенциальное векторное поле. Тогда* $\forall x\in O:\ \dfrac{\partial V_i}{\partial x_j}(x)=\dfrac{\partial V_j}{\partial x_i}(x)$

Доказательство. $\dfrac{\partial V_i}{\partial x_j}(x)=\dfrac{\partial^2 f}{\partial x_i\partial x_j}(x)=\dfrac{\partial^2 f}{\partial x_j\partial x_i}(x)=\dfrac{\partial V_j}{\partial x_i}(x)$ ∎

Теорема (лемма Пуанкаре). O — *открытая выпуклая область,* $V\in C^1(O,\mathbb{R}^m)$, *удовлетворяет необходимому условию потенциальности. Тогда* V *потенциально.*

Доказательство. O содержит начало координат. Тогда $\forall x\in O$ путь $\gamma_x(t)=tx\in O$. $f(x)=I(V,\gamma_x)$. Поймем, что подошло. $f(x)=\int_0^1\langle V(\gamma_x(t)),\gamma_x'(t)\rangle\,dt=\sum_{i=1}^m x_k\int_0^1 V_i(tx)dt$.

Дифференцируем по x_j (в каждом слагаемом ровно один раз он встретится, кроме того, где $i = j$) (интегралы дифференцируем по правилу лейбница): $\dfrac{\partial f}{\partial x_j}(x) = \sum_{i=1}^m x_k \int_0^1 t \dfrac{\partial V_i}{\partial x_j}(tx)dt + \int_0^1 V_j(tx)dt = \int\limits_0^1 \left(V_j(tx) + t\sum_{i=1}^m x_i \dfrac{\partial V_j}{\partial x_i}\right) dt = \int_0^1 (tV_j(tx))'_t\,dt = V_j(x).$ ∎

N.B. *Из выпуклости мы пользовались только "звездностью" относительно центра координат. Очевидно, это более слабое условие и теорема верна для таких областей тоже.*

Определение. $V\colon O \to \mathbb{R}^m$ — *локально потенциальное, если* $\forall\, x \in O\ \exists\, U(x)$, *что* $V|_{U(x)}$ *потенциально.*

Следствие. *Гладкое поле локально потенциально тогда и только тогда, когда выполнено необходимое условие потенциальности.*

Теорема (лемма о гусенице). $O \subset \mathbb{R}^m$, $\forall\, x \in O$ *определили* $U(x)$, $\gamma\colon [a,b] \to O$ *непрерывный. Тогда существует дробление* $a = t_0 < t_1 < \ldots < t_{n-1} < t_n = b$ *и шары* $B_k(z_k, r_k) \subset U(z_k) :\ \forall\, k \in [1..n]\ \gamma|_{[t_{k-1}, t_k]} \subset B_k$

Доказательство. Выберем $c \in [a,b]$. Для него определим $B_c \coloneqq B(\gamma(c), r_c)$, чтобы $B_c \subset U(\gamma(c))$, а также момент входа и выхода пути в него (с прохождения центра):
$\overline{\alpha_c} \coloneqq \inf\{\alpha \in [a,b] : \gamma|_{[}\alpha, c] \subset B_c\}$; $\overline{\beta_c} \coloneqq \sup\{\beta \in [a,b] : \gamma|_{[}\beta, c] \subset B_c\}$. Так как $\overline{\alpha_c} < c < \overline{\beta_c}$, то выберем такие α_c и β_c, что $\overline{\alpha_c} < \alpha_c < c < \beta_c < \overline{\beta_c}$.

При $c = a$ или $c = b$ выберем α_a и β_b так, чтобы соответствующие отрезки покрывали a и b (немного сдвинув).

Мы получили открытое покрытие отрезка $[a,b]$: $\bigcup\limits_c (\alpha_c, \beta_c)$. Нам дали конечное покрытие. "Прочистим" его — если есть интервал, который покрывается объединением каких-то других, то его удалим. Теперь для каждого интервала можно выбрать d_i, которая лежит только в нем. Отсортируем отрезки по возрастанию d_i.

Возьмем интервал i_1 с d_1. Он покрывает все, что левее d_1 (иначе его покрывал бы другой интервал i_j, правый конец которого не может находиться левее правого конца i_1 — иначе бы его выкинули. Ну тогда d_j левее d_1). Возьмем следующий интервал i_2, его левая граница находится левее правой границы i_1 (аналогично: тогда это покрывает какойто интервал i_j, причем d_j правее d_2, да к тому же правее всего i_2, то есть он полностью накрывает i_2).

Таким образом, мы поняли, что i_k правым концом налегает на i_{k+1}, и крайние интервалы покрывают концы отрезка. Тогда в качестве t_k берем любое число из $(i_{k+1}.\mathrm{left}, i_k.\mathrm{right})$, ну и $t_0 = a$, $t_n = b$, а в качестве шаров — B_k. Если точка x принадлежит интервалу i_k, то $\gamma(x) \in B_k$ — что и хотели. ∎

Определение. *Эту штуку (разбиение с соответствующими шарами) назовем гусеницей. Два пути* ***похожи****, если есть общая гусеница (важны только шары, разбиения могут быть и разные).*

Теорема (лемма о равенстве интегралов по похожим путям). V — *локально потенциальное векторное поле.* $\gamma, \overline{\gamma}$ — *похожие кусочно-гладкие пути. Тогда* $I(V,\gamma) = I(V,\overline{\gamma})$.

Доказательство. Пусть f_1 — потенциал в B_1. Выберем потенциал f_2 (а мы можем, их же много, все на константу отличаются) в B_2, чтобы $f_1(\gamma(t_1)) = f_2(\gamma(t_1))$, и так для всех дальше. Тогда (ведь $[t_{i-1}, t_i] \subset B_i$) $I(V,\gamma)$ разобьется в сумму интегралов на отрезках разбиения, которые, в свою очередь, равны разности потенциалов. Из-за телескопического эффекта останется разность потенциалов в точках a и b. Как и для второго пути. ∎

Теорема (о похожести путей, близких к данному). γ — *путь. Тогда* $\exists\, \delta(\gamma, \{B_i\})$, *что если пути* γ_1, γ_2 *близки, то есть* $\forall\, t \in [a,b] : \ |\gamma(t) - \gamma_1(t)| < \delta, |\gamma(t) - \gamma_2(t)| < \delta$, *то* $\gamma, \gamma_1, \gamma_2$ *похожи.*

Доказательство. $\delta_k \coloneqq \mathrm{dist}()$ ∎

Определение. *Есть поверхность* $\Phi\colon E \subset \mathbb{R}^{m+n} \to \mathbb{R}^n = 0$ *и функция* $f\colon E \to \mathbb{R}$. *Тогда точка* $x_0 \in E$ *— точка относительного локального максимума функции* f, *если* $\exists\, U(x_0)\ \forall\, x \in U(x_0) \cap E,\ \Phi(x) = 0\colon f(x) \leqslant f(x_0)$.
Минимум аналогично. А экстремум — это когда или мин, или макс.

Теорема (необходимое условие относительного локального экстремума)**.** f *и* Φ *гладкие. Пусть* $a \in E$, $\Phi(a) = 0$, a *— точка относительного локального экстремума.*
$\operatorname{rank}\Phi'(a) = n$. *Тогда* $\exists\,\lambda \in \mathbb{R}^n\colon \begin{cases} f'(a) = \lambda \cdot \Phi'(a) \\ \Phi(a) = 0 \end{cases}$

Доказательство. $a = (a_x, a_y)$. Ранг реализуется на последних n столбцах. Тогда по теореме о неявном отображении $\exists\,\phi\colon U(x_0) \to V(y_0)$, что $\forall\, x \in U(a_x)\ \Phi(x, \phi(x)) = 0$. $g(x) \coloneqq f(x, \phi(x))$, ее локальный экстремум a_x.
Тогда $f'_x(a) + f'_y(a) \cdot \phi'(a_x) = 0$ (необходимое условие локального экстремума). Тогда $(f'_x(a) + \lambda\Phi'_x(a)) + (f'_y(a) + \lambda\Phi'_y(a)) \cdot \phi'(a_x) = 0$ (сложили два выражения, равные нулю, домножив второе на λ). $\lambda \coloneqq -(f'_y(a))(\Phi'_y(a))^{-1}$, тогда обе скобки обнулятся. ■

Теорема (достаточное условие экстремума)**.** f, Φ *гладкие.* $a \in E$, Φ *не вырождена в* a. *И выполнено необходимое условие. Из* $\phi'_x dx + \phi'_y dy = 0$ *выражаем* dy. *Подставляем в второй дифференциал формы Лагранжа. Получится квадратичная форма, если определенно положительна/отрицательна — минимум/максимум, если неопределенная — как повезет.*

Теорема (вычисление нормы линейного оператора с помощью собственных чисел)**.** A *— линейный оператор. Тогда* $\|A\| = \max\limits_{\lambda_i}\{\sqrt{\lambda}\}$, *где* λ_i *— собственное число* $A^T A$.

Доказательство. $\|A\|^2 = \max|x| = 1\|Ax\|^2 = \max\limits_{|x|=1}\langle Ax, Ax\rangle = \max\limits_{|x|=1}\langle A^T Ax, x\rangle$. Там видимо только при собственных числах косинус будет 1. ■