Ослабили. a, то $b \to a$

$a \to b \to a$

$b \to a$

Транзитивность следствия $a \to b$, $b \to c$, то $a \to c$

$(b \to c) \to a \to (b \to c)$

$a \to (b \to c)$

$(a \to b) \to (a \to b \to c) \to (a \to c)$

$a \to c$

A1-pro $\forall a \forall b \forall c. a = b \to a = c \to b = c$

$A = B' \to A = C \to B = C$

Контрапозиция $a \to b \equiv (\neg b \to \neg a)$

- $(\Rightarrow)$ $a \to b \to (\neg b \to \neg a)$ По т. о дедукции достаточно $a \to b, \neg b \vdash \neg a$
  $a \to b$
  $\neg b$
  $a \to \neg b$ (ослабили)
  $(a \to b) \to (a \to \neg b) \to \neg a$
  $\neg a$
- $(\Leftarrow)$ $(\neg b \to \neg a) \to (a \to b)$ По т. о дедукции достаточно $\neg b \to \neg a, a, \vdash b$
  $\neg b \to \neg a$
  a
  $\neg b \to a$ (ослабили)
  $(\neg b \to a) \to (\neg b \to \neg a) \to \neg\neg b$
  $\neg\neg b$
  $\neg\neg b \to b$
  b

Импликация == или.

$a \to b \equiv \neg a \vee b$

- $\neg a \vee b \to (a \to b)$ По т. о дедукции достаточно $\neg a \vee b, a \vdash b$
  a
  $a \vdash b$
  $a \to \neg a \to b$ (т. о дедукции+9акс)
  $\neg a \to b$
  $(\neg a \to b) \to (b \to b) \to (\neg a \vee b \to b)$
  $\neg a \vee b \to b$
- $(a \to b) \to (\neg a \vee b)$ По т. о дедукции достаточно $a \to b \vdash \neg a \vee b$
  $a \to b$
  $b \to \neg a \vee b$
  $a \to \neg a \vee b$
  $\neg a \to \neg a \vee b$

$(a \to \neg a \lor b) \to (\neg a \to \neg a \lor b) \to (a \lor \neg a \to (\neg a \lor b))$
$a \lor \neg a \to (\neg a \lor b)$
$a \lor \neg a$ ($\neg(a \lor \neg a)$ противоречива)
$\neg a \lor b$

Про эквивалентность.

- $a \equiv b \to \neg a \equiv \neg b$. Из контрапозиции $\neg b \to \neg a$ и $\neg a \to \neg b$.
- $b \to c$, то $a \land b \to a \land c$ (cool fact: if $a \to c$ this theorem right too)
  $a \to c \to a \land c$
  $a \land b \to (a \to c \to a \land c)$
  $(a \land b \to a) \to (a \land b \to a \to [c \to a \land c]) \to (a \land b \to [c \to a \land c])$
  $a \land b \to c \to a \land c$
  $a \land b \to c$
  $(a \land b \to c) \to (a \land b \to c \to a \land c) \to (a \land b \to a \land c)$
  $a \land b \to a \land c$
- $a \to c$, то $a \lor b \to c \lor b$
  $a \to c$
  $c \to c \lor b$
  $a \to c \lor b$
  $b \to c \lor b$
  $(a \to c \lor b) \to (b \to c \lor b) \to (a \lor b \to c \lor b)$
  $a \lor b \to c \lor b$
- Про импликацию 2 штуки.
  - $b \to a$, то $(a \to c) \to (b \to c)$
    $(a \to c) \to [b \to (a \to c)]$
    $(b \to a) \to (b \to a \to c) \to (b \to c)$
    $b \to a$
    $[b \to a \to c] \to (b \to c)$
    $(a \to c) \to (b \to c)$
  - $b \to a$, то $(c \to a) \to (c \to b)$
    $(c \to a \to b) \to (c \to a) \to (c \to b)$ (поменяли 2 посылки местами)
    $a \to b$
    $c \to a \to b$
    $(c \to a) \to (c \to b)$
- $a \to b$, то $\forall x.a \to \forall x.b$
  $a \to b$
  $\forall x.a \to a$
  $\forall x.a \to b$
  $\forall x.a \to \forall x.b$ (в 1 части x уже не свободная)
- $a \to b$, то $\exists x.a \to \exists x.b$
  $a \to b$
  $b \to \exists x.b$

$a \to \exists x.b$
$\exists x.a \to \exists x.b$ (во 2 части x уже не свободная)

45d.1 $\neg\forall x.P \to \exists x.\neg P$

По контрапозиции достаточно: $\neg\exists x.\neg P \to \neg\neg\forall x.P$

Достаточно: $\neg\exists x.\neg P \to \forall x.P$ (тк $a \to \neg\neg a$ 9 акс)

По т. о дедукции достаточно: $\neg\exists x.\neg P \vdash \forall x.P$

$\neg\exists x.\neg P$

$\neg P \to \neg\exists x.\neg P$ (ослабили)

$\neg P \to \exists x.\neg P$

$(\neg P \to \exists x.\neg P) \to (\neg P \to \neg\exists x.\neg P) \to \neg\neg P$

$\neg\neg P$

P

$T \to P$

$T \to \forall x.P$ (правило для кванторов по свободной переменной x в P, в 'T' ее нет, как и в гипотезе '$\neg\exists x.\neg P$')

$\forall x.P$

45d.2 $((\exists x.P) \to (\forall x.Q)) \to (\forall p.\forall q.P[x := p] \to Q[x := q])$

$$\begin{aligned}
((\exists x.P) \to (\forall x.Q)) \to \quad & //(a \to b) \to (\neg a \vee b) & / \\
(\neg\exists x.P \vee \forall x.Q) \to \quad & //a \to b\text{, то } a \vee c \to b \vee c\text{; и } \neg\exists x.P \to \forall x.\neg P & / \\
(\forall x.\neg P \vee \forall x.Q) \to \quad & //q \text{ и } q \text{ новые} & / \\
(\forall p.\neg P[x := p]) \vee (\forall q.Q[x := q]) \to \quad & //45b & / \\
\forall p.\forall q.\neg P[x := p] \vee Q[x := q] \to \quad & //a \to b\text{, то } \forall x.a \to \forall x.b\text{; } (\neg a \vee b) \to (a \to b) & / \\
\forall p.\forall q.P[x := p] \to Q[x := q] \quad &
\end{aligned}$$

Лемма 1

$\neg a \to a \to b$: По т. о дедукции достаточно: $a, \neg a \vdash b$

$(\neg b \to a) \to (\neg b \to \neg a) \to \neg\neg b$

$\neg\neg b$

b

Лемма 2

$a \vee b, \neg a \vdash b$:

$\neg a \to a \to b$ //По лемме 1/

$a \to b$

$b \to b$

$(a \to b) \to (b \to b) \to (a \vee b \to b)$

$a \vee b \to b$

b

46a $(\forall x.a \vee b) \to a \vee (\forall x.b)$

По контрапозиции достаточно: $\neg(a \vee \forall x.b) \to \neg(\forall x.a \vee b)$

Достаточно: $(\neg a \wedge \exists x.\neg b) \to \neg(\forall x.a \vee b)$

По т. о дедукции достаточно: $\neg a \wedge \exists x.\neg b \vdash \neg(\forall x.a \vee b)$

$\neg a \land \exists x.\neg b$
$\neg a$
$\exists x.\neg b$
$T \to \neg a$
$T \to \forall x.\neg a$
$\forall x.\neg a$
* $\forall x.(a \lor b)$ //Предположим, получим противоречие (9акс+т. о дедукции)/
* $a \lor b$
* b //По лемме 2/
* $T \to b$
* $T \to \forall x.b$ // Правило для x, ее нет в 'T', как и в гипотезе '$\neg a \land \exists x.\neg b$' — тут и пользуемся, что a не зависит от x
* $\forall x.b$
* $\neg\exists x.\neg b$ //Получили/
$\neg\forall x.(a \lor b)$

46c $\forall x.(P \land Q) \to (\forall x.P) \land (\forall x.Q)$
По т. о дедукции достаточно: $\forall x.(P \land Q) \vdash (\forall x.P) \land (\forall x.Q)$
$\forall x.P \land Q$
$P \land Q$
P
Q
$T \to P$
$T \to Q$
$T \to \forall x.P$
$T \to \forall x.Q$
$\forall x.P$
$\forall x.Q$
$\forall x.P \to \forall x.Q \to (\forall x.P) \land (\forall x.Q)$
$(\forall x.P) \land (\forall x.Q)$

46d.1 $\forall x.\neg P \to \neg\exists x.P$
По т. о дедукции достаточно: $\forall x.\neg P \vdash \neg\exists x.P$
$\forall x.\neg P$
$\neg P$
$T \to \neg P$ //ослабили (нет)/
$\neg\neg P \to \neg T$ //контрапозиция/
$P \to \neg T$ //$P \to \neg\neg P$/
$\exists x.P \to \neg T$ //Правило для квантора по свободной переменной x в P, в 'T' ее нет, как и в гипотезе '$\forall x.\neg P$'/
$\neg\neg T \to \neg\exists x.P$ //контрапозиция/
$T \to \neg\exists x.P$ //$T \to \neg\neg T$/

$\neg\exists x.P$

46d.2 $(\forall p.\forall q.P[x := p] \to Q[x := q]) \to ((\exists x.P) \to (\forall x.Q))$

$\forall p.\forall q.(P[x := p] \to Q[x := q]) \to$ $//(a \to b) \to (\neg a \vee b)$ /

$\forall p.\forall q.(\neg P[x := p] \vee Q[x := q]) \to$ $//46b$ /

$(\forall x.\neg P[x := p][p := x]) \vee (\forall x.Q[x := q][q := x]) \to$ $//P[x := p][p := x] == P$ как строки даже /

$(\forall x.\neg P) \vee (\forall x.Q) \to$ $//a \vee b \to (\neg a \to b)$ /

$(\neg\forall x.\neg P) \to (\forall x.Q) \to$ $//(\exists x.\neg\neg P) \to (\neg\forall x.\neg P)$ /

$(\exists x.\neg\neg P) \to (\forall x.Q) \to$ $//(\exists x.P) \to \exists x.\neg\neg P$ /

$(\exists x.P) \to (\forall x.Q)$

47.1 Внутрь: $\neg\exists x.P \to \forall x.\neg P$

По контрапозиции достаточно: $\neg\forall x.\neg P \to \neg\neg\exists x.P$

Достаточно: $\neg\forall x.\neg P \to \exists x.P$ $//a \to \neg\neg a/$

$\neg\forall x.\neg P \to \exists x.\neg\neg P$ //По 45d.1, для $P := \neg P$/

$\exists x.\neg\neg P \to \exists x.P$ $//\neg\neg P \to P/$

$\neg\forall x.\neg P \to \exists x.P$

47.1 Наружу: $\exists x.\neg P \to \neg\forall x.P$

По контрапозиции достаточно: $\neg\neg\forall x.P \to \neg\exists x.\neg P$

Достаточно: $\forall x.P \to \neg\exists x.\neg P$ $//\neg\neg a \to a/$

$\forall x.\neg\neg P \to \neg\exists x.\neg P$ //По 46d.1, для $P := \neg P$/

$\forall x.P \to \forall x.\neg\neg P$

$\forall x.P \to \neg\exists x.\neg P$

47.2 Внутрь: $(\exists x.P \vee Q) \to (\exists x.P) \vee (\exists x.Q)$

По контрапозиции достаточно: $\neg((\exists x.P) \vee (\exists x.Q)) \to \neg(\exists x.P \vee Q)$

$\neg((\exists x.P) \vee (\exists x.Q)) \to$ $//\neg(a \vee b) \to (\neg a \wedge \neg b)$ /

$\neg(\exists x.P) \wedge \neg(\exists x.Q) \to$ $//(\neg\exists x.a) \to \forall x.\neg a$; и если $a \to b$, то $a \wedge c \to b \wedge c$ /

$(\forall x.\neg P) \wedge (\forall x.\neg Q) \to$ //По 45c /

$\forall x.(\neg P \wedge \neg Q) \to$ $//(\neg a \wedge \neg b) \to \neg(a \vee b)$; и если $a \to b$, то $(\forall x.a) \to (\forall x.b)$ /

$\forall x.\neg(P \vee Q) \to$ $//(\forall x.\neg a) \to \neg\exists x.a$ /

$\neg(\exists x.P \vee Q)$

47.2 Наружу: $(\exists x.P) \vee (\exists x.Q) \to (\exists x.P \vee Q)$

По контрапозиции достаточно: $\neg(\exists x.P \vee Q) \to \neg((\exists x.P) \vee (\exists x.Q))$

$\neg(\exists x.P \vee Q) \to$ $//(\neg\exists x.a) \to (\forall x.\neg a)$ /

$\forall x.\neg(P \vee Q) \to$ //если $a \to b$, то $(\forall x.a) \to (\forall x.b)$; и $\neg(a \vee b) \to (\neg a \wedge \neg b)$ /

$\forall x.\neg P \wedge \neg Q \to$ 6c, $P := \neg P, Q := \neg Q$

$(\forall x.\neg P) \wedge (\forall x.\neg Q) \to$ $//a \wedge b \to \neg(\neg a \vee \neg b)$ /

$\neg(\neg(\forall x.\neg P) \vee \neg(\forall x.\neg Q)) \to$ $//(\exists x.\neg a) \to (\neg\forall x.a)$; и если $b \to a$, то $\neg(a \vee c) \to \neg(b \vee c)$ /

$\neg((\exists x.\neg\neg P) \vee (\exists x.\neg\neg Q)) \to$ $//P \to \neg\neg P$ и причины выше /

$\neg((\exists x.P) \vee (\exists x.Q))$

47.3 Наружу: $(\exists x.P) \wedge (\exists y.Q) \to (\exists p.\exists q.P[x := p] \wedge Q[y := q])$

По контрапозиции достаточно: $\neg(\exists p.\exists q.P[x := p] \wedge Q[y := q]) \to \neg((\exists x.P) \wedge (\exists y.Q))$

$$\begin{array}{rll}
\neg(\exists p.\exists q.P[x := p] \land Q[y := q]) \to & //\neg\exists p.a \to \forall p.\neg a & / \\
\forall p.\neg\exists q.(P[x := p] \land Q[y := q]) \to & //\text{Аналогично} & / \\
\forall p.\forall q.\neg(P[x := p] \land Q[y := q]) \to & //\neg(a \land b) \to \neg a \lor \neg b & / \\
\forall p.\forall q.\neg(P[x := p]) \lor \neg(Q[y := q]) \to & //\text{46b, где } \alpha := (\neg P[x := p]),\ \beta \ldots & / \\
(\forall x.(\neg(P[x := p]))[p := x]) \lor (\forall y.(\neg(Q[y := q]))[q := y]) \to & //(\neg(a[x := p]))[p := x] = \neg P & / \\
(\forall x.\neg P) \lor (\forall y.\neg Q) \to & //a \lor b \to \neg(\neg a \land \neg b) & / \\
\neg(\neg(\forall x.\neg P) \land \neg(\forall y.\neg Q)) \to & //(\exists x.P) \to (\neg\forall x.\neg P) & / \\
\neg((\exists x.P) \land (\exists y.Q)) & &
\end{array}$$

47.3 Внутрь: $(\exists p.\exists q.P[x := p] \land Q[y := q]) \to (\exists x.P) \land (\exists y.Q)$

По контрапозиции достаточно: $\neg((\exists x.P) \land (\exists y.Q)) \to \neg(\exists p.\exists q.P[x := p] \land Q[y := q])$

$$\begin{array}{rll}
\neg((\exists x.P) \land (\exists y.Q)) \to & // & / \\
\neg(\exists x.P) \lor \neg(\exists y.Q) \to & // & / \\
(\forall x.\neg P) \lor (\forall y.\neg Q) \to & //\text{По 45b} & / \\
\forall p.\forall q.(\neg P)[x := p] \lor (\neg Q)[y := q] \to & //(\neg P)[x := p] \text{ и } \neg(P[x := p]) \text{ равны как строки} & / \\
\forall p.\forall q.\neg(P[x := p]) \lor \neg(Q[y := q]) \to & // & / \\
\forall p.\forall q.\neg(P[x := p] \land Q[y := q]) \to & // & / \\
\forall p.\neg\exists q.(P[x := p] \land Q[y := q]) \to & // & / \\
\neg\exists p.\exists q.(P[x := p] \land Q[y := q]) \to & // & /
\end{array}$$

47.4 Наружу: $((\forall x.P) \to (\exists x.Q)) \to (\exists x.P \to Q)$

По контрапозиции достаточно: $\neg(\exists x.P \to Q) \to \neg((\forall x.P) \to (\exists x.Q))$

$$\begin{array}{rll}
\neg(\exists x.P \to Q) \to & //(\neg a \lor b) \to (a \to b) & / \\
\neg(\exists x.\neg P \lor Q) \to & // & / \\
\forall x.\neg(\neg P \lor Q) \to & //\neg(a \lor b) \to (\neg a \land \neg b) & / \\
\forall x.\neg\neg P \land \neg Q \to & //\neg\neg a \to a & / \\
\forall x.P \land \neg Q \to & //\text{По 46c} & / \\
(\forall x.P) \land (\forall x.\neg Q) \to & // & / \\
(\forall x.P) \land \neg(\exists x.Q) \to & //(a \land b) \to \neg(\neg a \lor \neg b) & / \\
\neg(\neg(\forall x.P) \lor \neg\neg(\exists x.Q)) \to & //a \to \neg\neg a & / \\
\neg(\neg(\forall x.P) \lor (\exists x.Q)) \to & //(a \to b) \to (\neg a \lor b) & / \\
\neg((\forall x.P) \to (\exists x.Q)) \to & // & /
\end{array}$$

47.5 Внутрь: $(\exists x.P \to Q) \to ((\forall x.P) \to (\exists x.Q))$

По контрапозиции достаточно: $\neg((\forall x.P) \to (\exists x.Q)) \to \neg(\exists x.P \to Q)$

$$\begin{array}{rll}
\neg((\forall x.P) \to (\exists x.Q)) \to & //(\neg a \lor b) \to (a \to b) & / \\
\neg(\neg(\forall x.P) \lor (\exists x.Q)) \to & //\neg(a \lor b) \to (\neg a \land \neg b) & / \\
\neg\neg(\forall x.P) \land \neg(\exists x.Q) \to & //\neg\neg a \to a & / \\
(\forall x.P) \land \neg(\exists x.Q) \to & //(\neg\exists x.a) \to (\forall x.\neg a) & / \\
(\forall x.P) \land (\forall x.\neg Q) \to & //\text{По 45c} & / \\
\forall x.(P \land \neg Q) \to & // & / \\
\forall x.\neg(\neg P \lor Q) \to & // & / \\
\forall x.\neg(P \to Q) \to & // & / \\
\neg\exists x.(P \to Q) & // & /
\end{array}$$

A1.pro $(\forall a.\forall b.\forall c.a = b \to a = c \to\to b = c)$ $(x = y \to x = z \to\to y = z)$, x, y, z уже не только числа.

54b $(\exists x.a + x = b) \to (\exists x.a' + x = b')$. Докажем $a + x = b \to a' + x = b'$. По т. о дедукции достаточно $a + x = b \vdash a' + x = b'$
$a + x = b$
$a + x = x + a$
$a + x = x + a \to a + x = b \to x + a = b$
$x + a = b$
$x + a = b \to (x + a)' = b'$
$(x + a)' = b'$
$(x + a)' = x + a'$
$(x + a)' = x + a' \to (x + a)' = b' \to x + a' = b'$
Правил для кванторов не было (кроме легальных для A1.pro), поэтому теоремой можно пользоваться.

Далее план такой: $(a \to b) \to ((\exists x.a) \to b) \to ((\exists x.a) \to (\exists x.b))$. (второе понятно, ибо $b \to \exists x.b$) Докажем первое. $(a \to b) \to ((\exists x.a) \to b)$. По т. о дедукции достаточно: $a \to b, \exists x.a \vdash b$
$a \to b$
$\exists x.a$
* $\neg b$ //Предположим, получим противоречие (9акс+т. о дедукции)/
* $\neg b \to \neg a$
* $\neg a$
* $\forall x.\neg a$
* $\neg\exists x.a$//(Получили)/
b

$(a \to b) \to ((\exists x.a) \to (\exists x.b))$
По т. о дедукции достаточно $a \vee b, (\exists x.a) \wedge (\exists x.b)$
$a \to b$
$\exists x.a$
$(a \to b) \to (\neg b \to \neg a)$ //Контрапозиция/
$\neg b \to \neg a$
* $\neg b$ //Предположим, получим противоречие (9акс+т. о дедукции)/
* $\neg a$ * $\forall x.\neg a$
* $\neg\exists x.\neg\neg a$
* $\neg\exists x.a$ //Получили/
b
$b \to (\exists x.b)$
$\exists x.b$

Разбор случаев

Если $\Gamma, a \vdash b$, и $\Gamma, \neg a \vdash b$, то $\Gamma \vdash b$

По теореме о дедукции нам уже доказали $a \to b$ и $\neg a \to b$

$a \to b$

$\neg a \to b$

$(a \to b) \to (\neg a \to b) \to (a \vee \neg a \to b)$

$a \vee \neg a \to b$//$a \vee \neg a$ уже умеем выводить (№21a)/

b

54d. $(\exists x.a + x = b) \vee (\exists x.b + x = a)$

$P(a) \coloneqq (\exists x.a + x = b) \vee (\exists x.b + x = a)$

$P(0) \coloneqq (\exists x.0 + x = b) \vee (\exists x.b + x = 0)$

Докажем $P(0)$.

//$\phi \coloneqq 0 + x = b$, тогда $\phi[x \coloneqq b] = 0 + b = b$//

$0 + b = b \to \exists x.0 + x = b$

$0 + b = b$

$\exists x.0 + x = b$

$\exists x.0 + x = b \to (\exists x.0 + x = b) \vee (\exists x.b + 0 = 0)$

$(\exists x.0 + x = b) \vee (\exists x.b + 0 = 0)$

Далее докажем $\Phi \coloneqq ((\exists x.a+x = b) \vee (\exists x.b+x = a)) \to ((\exists x.a'+x = b) \vee (\exists x.b+x = a'))$

По т. о дедукции достаточно: $(\exists x.a+x = b) \vee (\exists x.b+x = a) \vdash (\exists x.a'+x = b) \vee (\exists x.b+x = a')$

* $b + x = a$ //Разберем 2 случая, выведем $\exists x.b + x = a'$, тогда $(\ldots \vee \ldots), b + x = a \vdash (\exists x.a' + x = b) \vee (\exists x.b + x = a')$, ведь $a \to \exists x.a$ и вынесем квантор из ИЛИ по 7 номеру/
* $(b + x)' = a'$
* $(b + x)' = b + x'$
* $b + x' = a'$
* $\exists x.b + x = a'$ //$\phi = b + q = a'$, $\phi[q \coloneqq x'] = b + x' = a'$
* $b + x' = a' \to \exists x.b + x = a'$ // Доказали, теперь предположим $\neg b + x = a$

* $\neg b + x = a$ * $(\exists x.a + x = b) \vee (\exists x.b + x = a)$
* $\neg a + x = b \to b + x = a$//Уже знаем/
* $b + x = a$
* q

Истории про транзитивность $a+x=n, x=p' \vdash a+p'=n$ (квантор существования навесим, если нужно)
$a+x=n$
$p'=x$
$p'+a=x+a$ //53c
$p'+a=a+p'$ //Коммутативность сложения/
$x+a=a+p'$
$a+x=x+a$
$x+a=n$
$a+p'=n$

Транзитивность неравенства $(\exists x.a+x=b) \to (\exists x.a+x=b')$
Докажем: $\vdash (a \to b) \to ((\exists x.a) \to (\exists x.b))$ через посредника $a \to (\exists y.b[x:=y])$//$y$ новая
Первое следствие.
$b \to \exists y.b[x:=y]$
$(a \to b) \to (a \to \exists y.b[x:=y])$//Заменили на следствие в дизъюнкции/
Второе следствие.
$(a \to \exists y.b[x:=y]) \to \exists x.a \to (\exists y.b[x:=y])$//12 акс, в следствии нет x как свободной переменной/
$(\exists x.a \to (\exists y.b[x:=y])) \to ((\exists x.a) \to (\exists x.b))$//Вынесем следствие, так как не зависит, и переименуем переменную в кванторе

54e. $a \leqslant b \to a = 0 \vee a = 1 \vee \ldots \vee a = n$

По индукции по n покажем, что умеем доказывать утверждение задачи.

База (умеем доказывать формулу для $n = 0$): $a \leqslant 0 \to a = 0$

Достаточно: $a + x = 0 \to a = 0$. Потом навесим $(\exists x.)$ на посылку, ведь в "$a = 0$" нет переменной x.

По т. о дедукции достаточно: $a + x = 0 \vdash a = 0$

$a + x = 0$		
* $\neg(a = 0)$	//Предположим, получим противоречие	/
* $\exists p.p' = a$	//Следствие из Леммы Глеба, но у нас еще предположение про $a \neq 0$	/
* $\exists p.p' + x = 0$	//Истории про транзитивность	/
* $\exists p.p + x' = 0$	//Лемма о перекидывании штриха	/
* $\exists p.(p + x)' = 0$	//Аксиома про сложение+транзитивность	/
* $\neg\forall p.\neg(p + x)' = 0$	//Пробросили отрицание через квантор	/
* $\neg(p + x)' = 0$	//Мы уже умеем подставлять в аксиомы что угодно	/
* $\forall p.\neg(p + x)' = 0$	//Тоже умеем (p нет в гипотезе)	/
$a = 0$	//Получили противоречие	/

Переход. Научимся доказывать формулу для n.

Достаточно $a + x = n \to a = 0 \vee \ldots \vee a = n$. Квантор навесим как в базе.

По т. о дедукции достаточно: $a + x = n \vdash a = 0 \vee \ldots \vee a = n$

$a + x = n$		
1* $x = 0$	//Если $\Gamma, \alpha \vdash \beta$ и $\Gamma, \neg\alpha \vdash \beta$, то $\Gamma \vdash \beta$	/
1* $a + 0 = n$	//Истории про транзитивность	/
1* $a = n$	//Транзитивность	/
1* $a = 0 \vee \ldots \vee a = n$	//n раз 7-ую акс	/
2* $\neg x = 0$	//9 акс+т. о дедукции	/
2* $\exists p.p' = x$	//Следствие из Леммы Глеба	/
2* $\exists p.a + p' = n$	//Истории про транзитивность	/
2* $\exists p.(a + p)' = (n - 1)'$	//Определение n + аксиома про "+" + транз.	/
2* $\exists p.a + p = n - 1$		
2* $a \leqslant n - 1$	//Определение	/
2* $a \leqslant n - 1 \to a = 0 \vee \ldots \vee a = n - 1$	//По предположению умеем выводить	/
2* $a = 0 \vee \ldots \vee a = n - 1$		
2* $a = 0 \vee \ldots \vee a = n - 1 \vee a = n$	//6 акс	/
$a = 0 \vee \ldots \vee a = n - 1 \vee a = n$		

54f. $a = 0 \vee a = 1 \vee \ldots \vee a = n \to a \leqslant b$

По индукции по n покажем, что умеем доказывать утверждение задачи.

База (умеем выводить $a = 0 \to a \leqslant 0$)

Это 54a.

Переход. Научимся доказывать формулу для n.

По т. о дедукции достаточно: $a = 0 \vee a = 1 \vee \ldots \vee a = n \vdash \exists p.a + p = n$

$a = 0 \vee a = 1 \vee \ldots \vee a = n$	
1* $a = n$	//Если $\Gamma, \alpha \vdash \beta$ и $\Gamma, \neg\alpha \vdash \beta$, то $\Gamma \vdash \beta$ /
1* $a \leqslant n$	//54a /
2* $\neg a = n$	//9 акс+т. о дедукции /
2* $a = 0 \vee a = 1 \vee \ldots \vee a = n-1$	//$a \vee b, \neg b \vdash a$. $a \coloneqq \phi_{n-1}$ /
2* $a = 0 \vee a = 1 \vee \ldots \vee a = n-1 \to a \leqslant n-1$	//По предположению умеем выводить /
2* $a \leqslant n-1$	
2* $a \leqslant n-1 \to a \leqslant n$	//транзитивность неравенства /
2* $a \leqslant n$	
$a \leqslant n$	

65b. Из выразимости C_f следует представимость f.

Пусть C_f выразимо. Тогда есть формула $\beta(X, y)$, удовлетворяющая условиям:

$$\begin{cases} \vdash \beta(X, y), & X, y \in C_f \\ \vdash \neg\beta(X, y), & X, y \notin C_f \end{cases}$$

Тогда выполнено $\vdash \beta(X, f(X))$ и $y \neq f(X) \vdash \neg\beta(X, y)$ по построению.

Тогда в качестве $\alpha(X, y)$ выберем β. Докажем, что подойдет.

- $f(X) = y \to \vdash \alpha(X, y)$ и $f(X) \neq y \to \vdash \neg\alpha(X, y)$
  $f(X) = y \to (X, y) \in C_f \to \vdash \beta(X, y) \to \alpha(X, y)$; второе аналогично
- $\vdash \alpha(X, f(X))$
  $\vdash \alpha(X, f(X)) \to \exists y.\alpha(X, y)$
  $\exists y.\alpha(X, y)$
- $\forall a.\forall b.\alpha(X, a) \wedge \alpha(X, b) \to a = b$
  Достаточно: $\alpha(X, y) \to f(X) = y$ (дальше по транзитивности)
  $f(X) \neq y \to \neg\beta(X, y)$ //По построению + т. о дедукции/
  $\neg\neg\beta(X, y) \to \neg f(X) \neq y$ //Контрапозиция/
  $\beta(X, y) \to f(X) = y$ //По 63/

68. План. Цель — найти факториал с помощью представимых функций.

$T \coloneqq \langle x, P\rangle$, где $P = y_0 + xy_0 + \ldots + x^n y_n$.

Назовем число T подходящим, если $y_k = k!$ для всех $k \in [0..n]$. Если мы нашли подходящее T, то $f(n) = y \leftrightarrow y = get(T, n)$.

$get(T, n)$ — функция, возвращающая сохраненное y_n.

Если мы нашли такое минимальное T, то уже хорошо — нашли $n!$.

Начнем придумывать функцию.

$y = \min(verify)$	//$ans = \min\{T \mid T \text{ is OK}\}$. Байки про x /
$verify(T) \coloneqq (get(T, 0) = 1) \wedge (\forall i. i \leqslant n \to (get(T, i+1) = (i+1) \cdot get(T, i)))$	/
$get(T, i) \coloneqq second(T) \operatorname{div} (first(T)^i) \bmod first(T)$	//$x = T.first$, далее по i, берем одночлен /
$first(T) = \min(i \mapsto \exists j.\, makepair(i, j) = T)$	
$second(T) = \min(j \mapsto \exists i.\, makepair(i, j) = T)$	
$makepair(i, j) \coloneqq j + (i+j)(i+j+1)/2$	

Получилось что-то такое: $\text{ans} = \min\{T \mid (T.y_0 = 1) \land (T.y_{i+1} = (i+1) \cdot T.y_i)\}$
Теперь почему все они представимы.

- Мы представляем функции через композицию представимых. Докажем, что композиция $h = g(f_1(X), \ldots, f_k(X))$ представима: $\exists\, Z.g(Z) \land f_1(X, Z_1) \land \ldots \land f_k(X, Z_k)$
- Многие формулы выглядят как $a \land b$. Понятно, что $\neg a \vdash \neg(a \land b)$.
- Равенство, нестрогое неравенство, сложение, умножение и деление нацело (и остаток) представимы.
- makepair представима как арифметическое выражение (делим только на 2).
- $\min(p)$: $p(y) \land \forall z.z \leqslant y \to \neg p(z)$
- first(T), second(T) как композиции представимых. Предикаты, которые даем функции makepair, тоже представимы, ведь мы всего навесили квантор.
- get: арифметические операции + получение first и second.
- verify: как композиции представимых. (навесить предикат, взять логический оператор тоже можно)

В каком-то смысле мы перебираем все "output-ы"при шифровании последовательности из n чисел, удовлетворяющей условиям, расшифровываем, берем первую такую (а она найдется) и возвращаем ее n-ый член.

81a Выразимость R влечет представимость C_R.

Пусть R выразима с помощью α. Тогда выберем формулу $\beta(X, y) \equiv \alpha(X) \land y = 1 \lor \neg\alpha(X) \land y = 0$. Покажем, что с помощью нее можно представить C_R.

- Покажем, что $C_R(X) = y \leftrightarrow \vdash \beta(X, y)$.
  - $C_R(X) = 0$, $y = 0$. Тогда $\vdash \neg\alpha(X)$ и $\beta = \alpha(X) \land 0 = 1 \lor \neg\alpha(X) \land 0 = 0$.
    $0 = 0$
    $\neg\alpha(X)$
    $\neg\alpha(X) \land 0 = 0$
    $\alpha(X) \land 0 = 1 \lor \neg\alpha(X) \land 0 = 0$
  - $C_R(X) = 0$, $y = 1$. Тогда $\vdash \neg\alpha(X)$ и $\beta = \alpha(X) \land 1 = 1 \lor \neg\alpha(X) \land 1 = 0$.
    Докажем отрицание к $\beta(X, y)$ (а именно $\neg\alpha(X) \lor \neg 1 = 1 \land \neg\neg\alpha(X) \lor \neg 1 = 0$), тогда будет недоказуема $\beta(X, y)$:
    $\neg\alpha(X)$
    $\neg\alpha(X) \lor \neg 1 = 1$
    $\neg 0' = 0$
    $\neg 0' = 0 \lor \neg\neg\alpha(X)$
    $\neg\alpha(X) \lor \neg 1 = 1 \land \neg\neg\alpha(X) \lor \neg 1 = 0$
  - $C_R(X) = 1$, $y = 0$. Тогда $\vdash \alpha(X)$ и $\beta = \alpha(X) \land 0 = 1 \lor \neg\alpha(X) \land 0 = 0$.
    Докажем отрицание к $\beta(X, y)$ (а именно $\neg\alpha(X) \lor \neg 0 = 1 \land \neg\neg\alpha(X) \lor \neg 0 = 0$), тогда будет недоказуема $\beta(X, y)$:
    $\neg 0 = 0'$ //По контрапозиции $(0 = 0' \to 0' = 0) \to (\neg 0' = 0 \to \neg 0 = 0')$/
    $\neg\alpha(X) \lor \neg 0 = 0'$

$\alpha(X)$
$\neg\neg\alpha(X)$
$\neg\neg\alpha(X) \vee \neg 0 = 0$
$\neg\alpha(X) \vee \neg 0 = 1 \wedge \neg\neg\alpha(X) \vee \neg 0 = 0$

  - $C_R(X) = 1$, $y = 1$. Тогда $\vdash \alpha(X)$ и $\beta = \alpha(X) \wedge 1 = 1 \vee \neg\alpha(X) \wedge 1 = 0$.
    $\alpha(X)$
    $1 = 1$ //С лекции умеем/
    $\alpha(X) \wedge 1 = 1$
    $\alpha(X) \wedge 1 = 1 \vee \neg\alpha(X) \wedge 1 = 0$

- $\exists y.\alpha(X) \wedge y = 1 \vee \neg\alpha(X) \wedge y = 0$. Разберем два случая: $\vdash \alpha(X)$ и $\vdash \neg\alpha(X)$. X фиксирован, значит $\alpha(X)$ не имеет свободных переменных, поэтому вывод того, что можно разбирать случаи, будет как раньше.
  - $\alpha(X)$
    $\beta(X)[y \coloneqq 1]$ //Нетрудно понять/
    $\beta(X)[y \coloneqq 1] \to \exists y.\beta(X)$
    $\exists y.\beta(X)$
  - $\neg\alpha(X)$
    $\beta(X)[y \coloneqq 0]$ //Нетрудно понять/
    $\beta(X)[y \coloneqq 0] \to \exists y.\beta(X)$
    $\exists y.\beta(X)$

  $\forall a.\forall b.\beta(X, a) \wedge \beta(X, b) \to a = b$. Аналогично (X все еще фиксирован) разберем 2 случая:
  - $\alpha(X)$
    $\neg\neg\alpha(X) \vee \neg y = 0$
    $\neg(\neg\alpha(X) \wedge y = 0)$
    $\alpha(X) \wedge y = 1 \vee \neg\alpha(X) \wedge y = 0$
    $\alpha(X) \wedge y = 1$ $//a \vee b, \neg b \vdash a/$
    $y = 1$
    По теореме о дедукции получили $\beta(X, y) \to y = 1$.
    $\beta(X, a) \wedge \beta(X, b)$
    $\beta(X, a)$
    $\beta(X, b)$
    $a = 1$
    $b = 1$
    $a = b$
    По теореме о дедукции получили $\beta(X, a) \wedge \beta(X, b)$. Навесим с помощью T два квантора всеобщности и получим требуемое.
  - $\vdash \neg\alpha(X)$. Здесь все аналогично, только после первого применения т. о дедукции докажем $\beta(X, y) \to y = 0$.

81b. Представимость C_R влечет выразимость R.
Пусть C_R представима с помощью $\alpha(X, y)$. Тогда выберем формулу $\beta(X) \equiv \alpha(X, 1)$.

Покажем, что с помощью нее можно выразить R.

- $X \in R$ влечет $\vdash \beta(X)$. Пусть $X \in R$. Тогда $C_R(X) = 1$, тогда $\vdash \alpha(X, 1)$ по определению. А это и есть $\vdash \beta(X)$.
- $X \notin R$ влечет $\vdash \neg\beta(X)$. Пусть $X \notin R$. Тогда $C_R(X) = 0$, тогда $\vdash \alpha(X, 0)$. y может быть только 0 или 1. А по определению при $y = 1$ не выводится $\alpha(X, y)$. Из-за второго свойства это и получим.

  X фиксирован, значит $\alpha(X, 1)$ не имеет свободных переменных, поэтому вывод того, что можно разбирать случаи, будет как раньше.

  - $\neg\alpha(X, 1)$ //О, вывели/
  - $\alpha(X, 1)$
    $\alpha(X, 0)$
    $\forall a.\forall b.\alpha(X, a) \wedge \alpha(X, b) \rightarrow a = b$
    $\alpha(X, 0) \wedge \alpha(X, 1) \rightarrow 0 = 1$ //$(a, b) \mapsto (0, 1)$/
    $0 = 1$ $\neg 0 = 1$ //Противоречие, но мы же хотим в обоих случаях вывести $\neg\alpha(X, 1)$/
    $0 = 1 \rightarrow \neg 0 = 1 \rightarrow \neg\alpha(X, 1)$ //$\alpha \rightarrow \neg\alpha \rightarrow \beta$, уже было/
    $\neg\alpha(X, 1)$ //О, снова вывели/

$a \to a$	//... /
$a \to L$	//(6) /
$(a \to L) \to a \to (a \to L)$	//(1) /
$a \to a \to L$	//МП /
$(a \to a) \to (a \to a \to L) \to (a \to L)$	//(2) /
$(a \to a \to L) \to (a \to L)$	//МП /
$a \to L$	//МП /
$\neg L \to a \to \neg L$	//(1) /
$\neg L$	//Г /
$a \to \neg L$	//МП /
$L \to \neg L \to L \wedge \neg L$	//(5) /
$(L \to \neg L \to L \wedge \neg L) \to a \to (L \to \neg L \to L \wedge \neg L)$	//МП /
$a \to (L \to \neg L \to L \wedge \neg L)$	//МП /
$(a \to L) \to (a \to L \to (\neg L \to \text{Ł} \wedge \neg L)) \to (a \to (\neg L \to L \wedge \neg L))$	//(2) /
$(a \to L \to (\neg L \to \text{Ł} \wedge \neg L)) \to (a \to (\neg L \to L \wedge \neg L))$	//МП /
$a \to (\neg L \to L \wedge \neg L)$	//МП /
$(a \to \neg L) \to (a \to \neg L \to L \wedge \neg L) \to (a \to L \wedge \neg L)$	//(2) /
$(a \to \neg L \to L \wedge \neg L) \to (a \to L \wedge \neg L)$	//МП /
$a \to L \wedge \neg L$	//МП /

$\neg a \to \neg a$	//... /
$\neg a \to L$	//(7) /
$(\neg a \to L) \to \neg a \to (\neg a \to L)$	//(1) /
$\neg a \to \neg a \to L$	//МП /
$(\neg a \to \neg a) \to (\neg a \to \neg a \to L) \to (\neg a \to L)$	//(2) /
$(\neg a \to \neg a \to L) \to (\neg a \to L)$	//МП /
$\neg a \to L$	//МП /
$\neg L \to \neg a \to \neg L$	//(1) /
$\neg L$	//Г /
$\neg a \to \neg L$	//МП /
$L \to \neg L \to L \wedge \neg L$	//(5) /
$(L \to \neg L \to L \wedge \neg L) \to \neg a \to (L \to \neg L \to L \wedge \neg L)$	//МП /
$\neg a \to (L \to \neg L \to L \wedge \neg L)$	//МП /
$(\neg a \to L) \to (\neg a \to L \to (\neg L \to \text{Ł} \wedge \neg L)) \to (\neg a \to (\neg L \to L \wedge \neg L))$	//(2) /
$(\neg a \to L \to (\neg L \to \text{Ł} \wedge \neg L)) \to (\neg a \to (\neg L \to L \wedge \neg L))$	//МП /
$\neg a \to (\neg L \to L \wedge \neg L)$	//МП /
$(\neg a \to \neg L) \to (\neg a \to \neg L \to L \wedge \neg L) \to (\neg a \to L \wedge \neg L)$	//(2) /
$(\neg a \to \neg L \to L \wedge \neg L) \to (\neg a \to L \wedge \neg L)$	//МП /
$\neg a \to L \wedge \neg L$	//МП /