

Определение. $\|A\| = \sup_{\|x\| \leq 1} \|Ax\| = \sup_{\|x\| \leq 1} (Ax, Ax)$ — непрерывная функция на компакте (достигается максимум).

Теорема. $\|Ax\| \leq \|A\| \cdot \|x\|$

Доказательство. $Ax = (A \frac{x}{\|x\|}) \cdot \|x\| \Rightarrow \|Ax\| = \|A \frac{x}{\|x\|}\| \cdot \|x\| \leq \|A\| \cdot \|x\|$ (справа максимум по всем элементам, слева — какой-то элемент) ■

Теорема. $\| \cdot \|$ — это норма.

Доказательство.

1. (про неотрицательность) Очевидно (если подумать и про равенство нулю)
2. (про однородность с модулем) Следует из свойств нормы вектора
3. $\|(A+B)x\| = \|Ax+Bx\| \leq \|Ax\| + \|Bx\| \leq \|A\| \cdot \|x\| + \|B\| \cdot \|x\| = (\|A\| + \|B\|) \cdot \|x\|$

Теорема. $A \in \text{Lin}(\mathbb{R}^m, \mathbb{R}^l)$, $B \in \text{Lin}(\mathbb{R}^l, \mathbb{R}^k)$. Тогда $\|BA\| \leq \|B\| \cdot \|A\|$

Доказательство. $\|BAx\| \leq \|B\| \cdot \|Ax\| \leq \|B\| \cdot \|A\| \cdot \|x\|$ ■

Теорема. $R = S \circ T$. T — дифференцируемо в a , S в $b = T(a)$. Тогда R — дифференцируемо в a и $R'(a) = S'(b) \cdot T'(a)$. И степень гладкости сохраняется.

Доказательство. $A := T'(a)$, $B := S'(b)$. Тогда

$$T(a+h_1) - T(a) = A(h_1) + \alpha(h_1) \cdot \|h_1\|; \quad S(b+h_2) - S(b) = B(h_2) + \beta(h_2) \cdot \|h_2\|$$

По непрерывности $\beta(0) = 0$. $h_2 := T(a+h_1) - T(a) : S(T(a+h_1)) - S(T(a)) = B(T(a+h_1) - T(a)) + \beta(T(a+h_1) - T(a)) \cdot \|T(a+h_1) - T(a)\| \Rightarrow R(a+h_1) - R(a) = B \cdot A(h_1) + \|h_1\| \cdot B(\alpha(h_1)) + \beta(T(a+h_1) - T(a)) \cdot \|T(a+h_1) - T(a)\|$.

Пусть $\gamma(h_1)$ — последние два слагаемых. Поймем, что она является б.м. относительно h_1 . $\|\gamma(h_1)\|/\|h\| \leq \|B\| \cdot \|\alpha(h_1)\| + \|T(a+h_1) - T(a)\|/\|h\| \cdot \|\beta(T(a+h_1) - T(a))\| \cdot \|T(a+h_1) - T(a)\| = \mathcal{O}(\|h\|)$, при $h \rightarrow 0$, $\beta(T(a+h_1) - T(a)) = \beta(h_2) \xrightarrow{h_1 \rightarrow 0} 0$. А то, что $T(a+h_1) - T(a) \xrightarrow{h_1 \rightarrow 0} 0$ — вроде логично.

Про степень гладкости по индукции. ■

Определение. Длина гладкого пути $\gamma \in C([a, b], \mathbb{R}^m)$: $l(\gamma) \stackrel{\text{def}}{=} \int_a^b |\gamma'(t)| dt$

Определение. (де)Градиент. $\phi: \mathbb{R}^m \rightarrow \mathbb{R}^m$: $\text{grad } \phi = \left(\frac{\partial \phi}{\partial x_1}, \dots, \frac{\partial \phi}{\partial x_m} \right)$

Определение. Область (в \mathbb{R}^m) — открытое и связное множество.

Определение. $f: O \subset \mathbb{R}^m \rightarrow \mathbb{R}^m$ — диффеоморфизм, если f — обратима, дифференцируема, f^{-1} — дифференцируема.

$$\text{N.B. } f^{-1} \cdot f = \text{id} \Rightarrow (f^{-1})'(f(x)) \cdot f'(x) = E \Rightarrow (f^{-1})'(y = f(x)) = (f')^{-1}(x).$$

Лемма (о почти состоявшейся локальной инъективности). Пусть $F: O \rightarrow \mathbb{R}^m$, дифференцируема в x_0 , $\det F'(x_0) \neq 0$. Тогда $\exists c, \delta > 0, \forall h: \|h\| < \delta: |F(x_0 + h) - F(x_0)| \geq c \cdot \|h\|$ (в частности, точки $F(x_0)$ и $F(x_0 + h)$ не склеиваются).

Доказательство.

$$\begin{aligned} \|F(x_0 + h) - F(x_0)\| &= \|F'(x_0) \cdot h + \alpha(h) \cdot \|h\|\| \geq \\ &\|F'(x_0) \cdot h\| - \|\alpha(h) \cdot \|h\|\| \geq (\tilde{c} - |\alpha(h)|) \cdot \|h\| \geq \tilde{c}/2 \cdot \|h\| \end{aligned}$$

При $\tilde{c} := \frac{1}{\|(F'(x_0))^{-1}\|}$ предпоследний знак верен: (по свойству $\|Ax\| \leq \|A\| \cdot \|x\|$).

$\|(F'(x_0))^{-1}\| \cdot \|F'(x_0) \cdot h\| \geq \|I \cdot h\| \Rightarrow |F'(x_0) \cdot h| \geq \tilde{c} \cdot \|h\|$. Тогда выбираем δ , чтобы на $\|h\| < \delta$ было $|\alpha(h)| < \tilde{c}/2$. Тогда верен и последний. $c := \tilde{c}/2$. ■

N.B. “ $\forall x \det F'(x) \neq 0$ ” \nRightarrow инъективность.

Пример. $F: \mathbb{R}^2 \setminus \{(0,0)\} \rightarrow \mathbb{R}^2, (x, y) \mapsto (x^2 - y^2, 2xy), F' = \begin{pmatrix} 2x & -2y \\ 2y & 2x \end{pmatrix} \Rightarrow \det F' \neq 0$. Но это возведение в квадрат комплексного числа, поэтому каждая точка является образом каких-то двух.

Теорема (о сохранении области). Пусть $F: O \subset \mathbb{R}^m \rightarrow \mathbb{R}^m, \forall x \in O \det F'(x) \neq 0$. Тогда $F(O)$ — открыто.

Доказательство. $x_0 \in O, y_0 = F(x_0)$. Покажем, что y_0 — внутренняя точка $F(O)$.

По лемме $\exists c, \delta: \forall h \in \overline{B(x_0, \delta)}$ (да, замкнутом): $|F(x_0 + h) - F(x_0)| \geq c \cdot \|h\|$ (образ сферы не проходит через y_0)

Пусть $r := 1/2 \cdot \text{dist}(y_0, F(S(x_0, \delta)))$, $\text{dist}(a, S) = \inf\{\rho(a, s), s \in S\}$. F — непрерывно, $S(x_0, \delta)$ — компакт, $\Rightarrow F(S(x_0, \delta))$ — компакт. ρ — непрерывна \Rightarrow на компакте по теореме Вейерштрасса достигается минимум. Который, как мы уже понимаем, положителен (истории про образ сферы и точку y_0) и равен R .

Хотим понять, что $B(y_0, R) \subset F(O)$. Пусть $y \in B(y_0, R)$, правда ли, что $\exists x: y = F(x), x \in B(x_0, \delta)$. Пусть $g(x) := |F(x) - y|$, определенная на шаре.

- На границе $(S(x_0, \delta))$ $g(x) \geq R$ (иначе $2R \leq \|y_0 - F(x)\| \leq \|F(x) - y\| + \|y_0 - y\| < 2R$)
- При $x := x_0: \|F(x_0) - y\| = \|y_0 - y\| < R \Rightarrow$ минимум внутри шара (хотелось бы, чтобы он был 0)

Понятно, что у $g(x)$ и у $(g(x))^2$ минимум там же. Раз минимум, то частные производные равны нулю: $L = \|(F(x) - y)\|^2 = (f_1(x_1, \dots, x_m) - y_1)^2 + (f_2(x_1, \dots, x_m) - y_2)^2 + \dots + (f_m(x_1, \dots, x_m) - y_m)^2$

$$\begin{array}{lcl} \text{дифф. по } x_1: & 2(f_1(x_1, \dots, x_m) - y_1) \cdot f'_{1x_1} & + \dots + 2(f_m(x_1, \dots, x_m) - y_m) \cdot f'_{mx_1} = 0 \\ \text{дифф. по } x_2: & 2(f_1(x_1, \dots, x_m) - y_1) \cdot f'_{1x_2} & + \dots + 2(f_m(x_1, \dots, x_m) - y_m) \cdot f'_{mx_2} = 0 \\ & \vdots & \\ \text{дифф. по } x_m: & 2(f_1(x_1, \dots, x_m) - y_1) \cdot f'_{1x_m} & + \dots + 2(f_m(x_1, \dots, x_m) - y_m) \cdot f'_{mx_m} = 0 \end{array}$$

(f'_{ix_j} — производная i -ой координатной функции по переменной x_j).

Тогда $2F'(x) \cdot (F(x) - y) = \vec{0}$, а $F'(x)$ невырожденна, $\Rightarrow F(x) = y$ ■

Следствие. Пусть $F: O \subset \mathbb{R}^m \rightarrow \mathbb{R}^l$, $l < m$. F — дифференцируема на O , $\forall x \text{ rank } F'(x) = l$. Тогда $F(O)$ — открыто в \mathbb{R}^l

Доказательство. Будем считать, что первые l столбцов лнз в точке x_0 и окрестности.

$$\text{Пусть } \tilde{F}: O \rightarrow \mathbb{R}^m := \begin{bmatrix} F \\ x_{l+1} \\ \vdots \\ x_m \end{bmatrix}, \text{ тогда } \tilde{F}' = \begin{pmatrix} F' & \dots \\ \emptyset & E \end{pmatrix} \Rightarrow \det \tilde{F}'(x_0) \neq 0 \Rightarrow \tilde{F}(B(x_0, r)) \text{ —}$$

открыто. $f(O) = \text{proj}_{\mathbb{R}^l} \tilde{F}(O)$ (подействовали непрерывной функцией). ■

Мемы про согнуть бумагу.

Теорема (о гладкости обратного отображения). $T \in C^r(O, \mathbb{R}^m)$, обратимо, $\forall x \det T'(x) \neq 0$. Тогда $T^{-1} \in C^r$ и $(T^{-1})'(y_0) = (T'(x_0))^{-1}$, где $y_0 = T(x_0)$

Доказательство. База: $r = 1$. $S := T^{-1}$. O — открытое $\Rightarrow S^{-1}(O)$ открытое (по теореме о сохранении области) $\Rightarrow S$ — непрерывно (видимо (топологическая непрерывность)).

$T(O) = O_1$, $y_0 \in O_1$, $y_0 = T(x_0)$, $\mathcal{A} = T'(x_0)$. Правда ли, что S — дифференцируема в y_0 ?

По лемме о почти инъективности: $\exists c, \delta > 0 : x \in B(x_0, \delta) \Rightarrow |T(x) - T(x_0)| \geq c \cdot \|x - x_0\|$.

- (знаем): $T(x) - T(x_0) = \mathcal{A}(x - x_0) + \alpha(x) \cdot \|x - x_0\|$
- ($x = S(y)$, $x_0 = S(y_0)$): $y - y_0 = \mathcal{A}(S(y) - S(y_0)) + \alpha(S(y)) \cdot \|S(y) - S(y_0)\|$
- ($\times \mathcal{A}^{-1}$, перенесем): $S(y) - S(y_0) = \mathcal{A}^{-1}(y - y_0) - \mathcal{A}^{-1}(\alpha(S(y))) \cdot \|S(y) - S(y_0)\|$

Покажем, что последняя штука — б.м. относительно $\|y - y_0\|$. S — непрерывно, можно положить $\|x - x_0\| = \|S(y) - S(y_0)\| < \delta$. Тогда $\|x - x_0\| \cdot \|\mathcal{A}^{-1}(\alpha(S(y)))\| \leq 1/c \|T(x) - T(x_0)\| \cdot \|\mathcal{A}^{-1}\| \cdot \|\alpha(S(y))\| = \|\mathcal{A}^{-1}\|/c \cdot \|y - y_0\| \cdot \|\alpha(S(y))\|$. $x = S(y) \rightarrow x_0 \Rightarrow \alpha(S(y)) \xrightarrow{y \rightarrow y_0} 0$ (S все еще непрерывна). Поэтому S — дифференцируема в y_0 . Более того, $S'(y_0) = \mathcal{A}^{-1} = (T'(x_0))^{-1}$

Про гладкость: $y \mapsto T^{-1}(y) = x \mapsto T'(x) = \mathcal{A} \xrightarrow{C^\infty} \mathcal{A}^{-1} = S'(y)$. Все эти преобразования непрерывны. Про первое было в начале базы, второе по условию, про третье еще поговорим, оно вообще из C^∞ . А композиция непрерывных — непрерывна. Значит, $S'(y)$ — непрерывна, значит $S \in C^1$

Да, последнее отображение из C^∞ . Оно так-то $\in \mathbb{R}^{m^2}$ и его координатные функции (которых m^2) — это то, что даст алгоритм при поиске обратной матрицы. А даст он достаточно (бесконечно) гладкие выражения — дроби, где в числителе элементы союзной матрицы (многочлены от элементов исходной), а в знаменателе — детерминант исходной. То есть коорд функции — дробно-рац штуки, которые бесконечно гладкие.

Переход: Все эти преобразования C^{r-1} гладкие. Тогда первый переход из C^{r-1} по предположению индукции, второй по условию, третий по жизни. А при композиции степень гладкости сохраняется. Значит, отображение $S'(y) \in C^{r-1} \Rightarrow S \in C^r$ ■

Теорема (лемма о приближении отображения его линеаризацией). $T \in C(O, \mathbb{R}^m)$, $x_0 \in O$. Тогда $|T(x_0 + h) - T(x_0) - T'(x_0)h| \leq M \cdot \|h\|$, $M = \sup_{z \in [x_0, x_0+h]} \|T'(z) - T'(x_0)\|$

Доказательство. $F(x) = T(x) - T'(x_0) \cdot x \Rightarrow F'(x) = T'(x) - T'(x_0)$,
 $|F(x) - F(x_0)| \leq \sup_{z \in [x_0, x]} \|F'(z)\| \cdot |x - x_0|$ ■

Теорема (о локальной обратимости). Пусть $T \in C^1(O, \mathbb{R}^m)$, $x_0 \in O$. Матрица $T'(x_0)$ обратима. Тогда $\exists U \subset O$ точки x_0 , что сужение T на U — диффеоморфизм.

Доказательство. Докажем, что сужение T на окрестность удовлетворяет $\forall x \det T'(x) \neq 0$ и обратимо. Тогда по теореме о сохранении области $T(U)$ открыто, T^{-1} той же гладкости (по теореме о гладкости обратного отображения).

$c := 1/\|(T'(x_0))^{-1}\|$. Выберем такой шар $U = B(x_0, r) \subset O$, чтобы $\det(T'(x)) \neq 0$ и $\|T'(x) - T'(x_0)\| \leq c/4$

Первое можем, так как $\det(T'(x)) \in C^1$ (как композиция $T'(x): \mathbb{R}^m \rightarrow \mathbb{R}^m$ (непрерывна по условию) и $\det: \mathbb{R}^{m^2} \rightarrow \mathbb{R}$ (непрерывен как многочлен от координат); а также $\det(T'(x_0)) \neq 0$.

Второе можем, так как норма — непрерывная функция, в точке x_0 значение $= 0$.

Поймем, почему эта окрестность подходит. Достаточно понять, что T взаимно однозначно на U .

$\forall h: \|T'(x_0)(h)\| \geq c \cdot \|h\|$ — так специально выбрали c .

$\forall x, z \in U: \|T'(x) - T'(z)\| \leq \|T'(x) - T'(x_0)\| + \|T'(x_0) - T'(z)\| \leq c/2$

Пусть $y = x + h$, $h \neq 0$:

$T(y) - T(x) = T(x + h) - T(x) = T'(x)(h) + (T'(x) - T'(x_0))(h) + T'(x_0)(h)$.

Тогда $\|T(y) - T(x)\| \geq \|T'(x_0)(h)\| - \|T(x + h) - T(x) - T'(x)(h)\| - \|(T'(x) - T'(x_0))(h)\| \geq c \cdot \|h\| - \sup_{z \in [x, y]} \|T'(z) - T'(x)\| \cdot \|h\| - \|T'(x) - T'(x_0)\| \cdot \|h\| > c \cdot \|h\| - c/2\|h\| - c/4\|h\| > 0$ ■

N.B (Формулировка в терминах систем уравнений). m уравнений $\{f_i(x_1, \dots, x_m) = y_i\}_{i=1}^m$, где $f_i: \mathbb{R}^m \rightarrow \mathbb{R}$, $f_i \in C^r$.

Если при $y = (b_1, \dots, b_m) \exists! x = (a_1, \dots, a_m)$ и $\det \left(\frac{\partial f_i}{\partial x_j}(x) \right) \neq 0$.

Тогда для всех y близких к (b_1, \dots, b_m) существует единственное решение, оно будет близкое к (a_1, \dots, a_m) , и зависимости этого решения от x — гладкие.

Пусть есть гладкое отображение $F: O \rightarrow \mathbb{R}^n$, O — открытое подмножество $\mathbb{R}^{n+m} = \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^m$, $z \in \mathbb{R}^{n+m} \leftrightarrow (x, y)$, $x = (x_1, \dots, x_m) \in \mathbb{R}^m$, $y = (y_1, \dots, y_n) \in \mathbb{R}^n$

Пусть F_1, \dots, F_n — координатные функции. Тогда

$$F'(x, y) = \begin{pmatrix} \frac{\partial F_1}{\partial x_1} & \dots & \frac{\partial F_1}{\partial x_m} & \frac{\partial F_1}{\partial y_1} & \dots & \frac{\partial F_1}{\partial y_n} \\ \vdots & & \vdots & \vdots & & \vdots \\ \frac{\partial F_n}{\partial x_1} & \dots & \frac{\partial F_n}{\partial x_m} & \frac{\partial F_n}{\partial y_1} & \dots & \frac{\partial F_n}{\partial y_n} \end{pmatrix}$$

Правая и левая часть — F'_x и F'_y соответственно.

Определение. P, Q — открытые в \mathbb{R}^m и \mathbb{R}^n соответственно, $p \times Q \subset O$. Уравнение $F(x, y) = 0$ определяет в $P \times Q$ неявное отображение, если $\exists f: P \rightarrow Q: F(x, f(x)) = 0 \forall x \in P$.

Уравнение определяет единственное неявное отображение тогда и только тогда, когда $\forall x \in P \exists! y \in Q: F(x, y) = 0$

Теорема (о неявном отображении). $F: O \subset \mathbb{R}^{n+m} \rightarrow \mathbb{R}^n$, $F \in C^r(O, \mathbb{R}^n)$, $(a, b) \in O$, $F(a, b) = 0$, $F'_y(a, b)$ — обратима.

Тогда

- $\exists P \in \mathbb{R}^m$, $a \in P$ (открытое)
- $\exists Q \in \mathbb{R}^n$, $b \in Q$ (открытое)
- $P \times Q \subset O$
- $\exists! f: P \rightarrow Q$, $f \in C^r$, что $F(x, f(x)) = 0$
- И к тому же $f'(x) = -(F'_y(x, f(x)))^{-1} \cdot F'_x(x, f(x))$

Доказательство. Пусть $\Phi: O \rightarrow \mathbb{R}^{m+n}: \Phi(x, y) = (x, F(x, y))$, $(x, y) \in O$. Тогда Φ — r -гладкое (уже на \mathbb{R}^{n+m}), $\Phi(a, b) = (a, 0)$. Оно переводит точки-решения в точки из $\mathbb{R}^m \times \{0\}$.

$\Phi'(x, y) = \begin{pmatrix} E & 0 \\ F'_x & F'_y \end{pmatrix}$. Тогда $\det \Phi'(x, y) \neq 0 \Rightarrow$ (по теореме о локальной обратимости)

найдется окрестность $\bar{U} = Q' \times Q$ точки (a, b) , что сужение Φ на \bar{U} есть диффеоморфизм. $O_0 = \Phi(\bar{U})$ — открыто и содержит $(a, 0) = \Phi(a, b)$. $\Psi = \left(\Phi \Big|_{\bar{U}} \right)^{-1}$.

Раз Φ не меняет первые m координат, то Ψ тоже. $\Psi(u, v) = (u, H(u, v))$, $H: O_0 \rightarrow \mathbb{R}^n$ $\exists P \subset \mathbb{R}^m$, $a \in P$, $P \subset (O_0 \cup \mathbb{R}^m)$ (ибо $O_0 \cap \mathbb{R}^m$ — открыто в \mathbb{R}^m) ((т.к. O_0 открытое)).

$f(x) \stackrel{\text{def}}{=} H(x, 0)$. Проверим:

- $\Psi(P \times \{0\}) \subset \Psi(O_0) = \bar{U} \Rightarrow f(P) \subset Q$ (когда забили на первые m координат)
- $f \in C^r(P, \mathbb{R}^n)$ ($\Psi \in C^r(O_0, \mathbb{R}^{m+n})$ по теореме о гладкости обратного отображения)
- $y = f(x): (x, F(x, y)) = \Phi(x, y) = \Phi(x, H(x, 0)) = \Phi(\Psi(x, 0)) = (x, 0) \Rightarrow F(x, y) = 0$

Дифференцируем. (как композицию): $g(x): \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^{n+m}$, $x \mapsto (x, f(x))$

$$(F(g(x)))' = F'(g(x)) \cdot g'(x) = (F'_x(x, f(x)), F'_y(x, y)) \cdot \begin{pmatrix} I \\ f'(x) \end{pmatrix}$$

$$\Rightarrow F'_x(x, f(x)) \cdot I + F'_y(x, f(x)) \cdot f'(x) = 0 \Rightarrow -(F'_y(x, f(x)))^{-1} \cdot F'_x(x, f(x)) = f'(x)$$

- Поч единственна. $\Phi(x, y) = (x, 0) \Rightarrow (x, y) = \Psi(\Phi(x, y)) = \Psi(x, 0) = (x, H(x, 0)) = (x, f(x)) \Rightarrow f(x)$ определена однозначно.

■

N.B (формулировка теоремы о неявном отображении в терминах системы уравнений).

Система уравнений $\{f_i(x_1, \dots, x_m, y_1, \dots, y_n) = 0\}_{i=1}^n$, все $f_i \in C^r$

$(x, y) = (a, b)$ — решение и $\det \left(\frac{\partial f_i}{\partial y_j}(a, b) \right) \neq 0$

Тогда $\exists P \in \mathbb{R}^m$, $Q \in \mathbb{R}^n$ открытые, содержащие a и b соответственно, что $\exists! \phi: P \rightarrow Q$, $\phi \in C^r$ и $\forall x \in P: (x, \phi(x))$ — решение.

Полезное.

N.B. Выведем теорему о локальной обратимости через теорему об обратном отображении (а не наоборот, как в докве последней).

Доказательство. Пусть дали $T: O \rightarrow \mathbb{R}^m$, $T \in C^r$, $T'(x_0)$ обратима. Рассмотрим $F: \mathbb{R}^m \times O \rightarrow \mathbb{R}^m$, $F(x, y) = T(y) - x$. Ее область определения открыта, она r -гладкая, $(a, b) = (T(x_0), x_0)$, $F(a, b) = 0$, $F'_y(a, b) = T'(a, b)$ обратима.

Тогда F подпадает под теорему о неявном отображении $\Rightarrow \exists P \in \mathbb{R}^m$, $Q \in O$, $T(x_0) \in P$, $x_0 \in Q$, на которых $\exists! f: P \rightarrow Q$, что $F(x, f(x)) = T(f(x)) - x = 0$.

Кажется, мы нашли окрестность точки x_0 и f — обратную функцию. Ну и понятно, что она гладкая и мы даже умеем ее дифференцировать (точно также, как и хотим). ■

Пример (Задача (с лекции)). Найти z'_x в точке $u = 1, v = 2$.

$$\begin{cases} x = u^2 - v^2 \\ y = 2uv \\ z = u + 3v \end{cases}$$

Решение. 3 уравнения \Rightarrow 3 функции. z точно функция, x точно переменная. Пусть u, v — еще две функции. $u = 1, v = 2 \Rightarrow x = -3, y = 4, z = 7$. Дифференцируем по x . Первые два содержат две неизвестные — u'_x и v'_x . Решаем эту систему 2×2 . (методом выписывания ответа, разумеется)

$$\begin{cases} (2u)u'_x - (2v)v'_x = 1 \\ (2v)u'_x + (2u)v'_x = 0 \\ u'_x + 3v'_x = z'_x \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} u'_x = \frac{2u}{4u^2 + 4v^2} \\ v'_x = \frac{-2v}{4u^2 + 4v^2} \end{cases} \xrightarrow{u=1, v=2} \begin{cases} u'_x = \frac{1}{10} \\ v'_x = \frac{-1}{5} \end{cases}$$

$$\Rightarrow z'_x = u'_x + 3v'_x = -1/2$$

Определение. O гомеоморфно M , если $\exists \phi$ (гомеоморфизм):

- $\phi: O \rightarrow M$
- ϕ — непрерывно, сюръекция
- ϕ обратимо и $(\phi)^{-1}$ непрерывно

Определение. ϕ — гомеоморфизм, если ϕ — биекция, ϕ и $(\phi)^{-1}$ непрерывны.

Определение. $M \subset \mathbb{R}^m$ — простое k -мерное многообразие в \mathbb{R}^m (непрерывное), если M гомеоморфно $O \subset \mathbb{R}^k$ ((видимо, $k \leq m$)).

Определение. $M \subset \mathbb{R}^m$ — простое k -мерное r -гладкое многообразие, если $\exists O \subset \mathbb{R}^k$ (открытое), $\exists \phi: O \rightarrow \mathbb{R}^m$ (гомеоморфизм), $\phi(O) = M$, $\phi \in C^r(O, \mathbb{R}^m)$, $\forall t \in O \text{ rank } \phi'(t) = k$

Определение. Эту функцию ϕ называют параметризацией.

Байка про полусферу. Говорят, это простое двумерное 2-гладкое многообразие.

Теорема (об эквивалентности определений). $M \subset \mathbb{R}^m$, $1 \leq k \leq \infty$, $1 \leq r \leq \infty$.

Тогда $\forall p \in M$ эквивалентны:

1. $\exists \mathcal{U} \subset \mathbb{R}^m$ — открытое, $p \in \mathcal{U}$, $M \cap \mathcal{U}$ — простое, k -мерное C^r -гладкое многообразие.
2. $\exists \bar{\mathcal{U}} \subset \mathbb{R}^m$ — открытое, $p \in \bar{\mathcal{U}}$, $\exists f_1, \dots, f_{m-k}: \bar{\mathcal{U}} \rightarrow \mathbb{R} \in C^r$ такие, что выполнено:
 $x \in M \cap \bar{\mathcal{U}} \Leftrightarrow \forall i: f_i(x) = 0, \{\text{grad } f_i(p)\}_{i=1}^{m-k} \text{ — ЛНЗ.}$

Доказательство. $1 \Rightarrow 2$. $\exists \phi \in C^r(O \subset \mathbb{R}^k, \mathbb{R}^m)$ — параметризация $M \cap \mathcal{U}$, ϕ_i — координатные функции. $\text{rank } \phi'(t_0) = k$, реализован на первых k строках. $p = \phi(t_0)$.

$L: \mathbb{R}^m \rightarrow \mathbb{R}^k: x \mapsto (x_1, \dots, x_k)$. $\det(L \circ \phi)'(t_0) = \text{первые } k \text{ столбцов у } \phi'(t_0) \Rightarrow \neq 0$

Мы попали под теорему о локальной обратимости. То есть $\exists W$ — окрестность t_0 , ($V := L \circ \phi(W)$), что $(L \circ \phi)|_W$ взаимно однозначно $\Rightarrow L|_{\phi(W)}$ взаимно однозначно.

То есть каждая точка x из $\phi(W)$ определяется первыми k координатами (пусть это будет вектор $x' = L(x) \in V$). То есть $\phi(W)$ — график (k координат — аргументы, $(m-k)$ — значение) $f: V \rightarrow \mathbb{R}^{m-k}$.

$\psi: V \rightarrow W$, $\psi := (L \circ \phi|_W)^{-1}$ (оно, как мы знаем, класса C^r). $\forall x' \in V$:

$L \circ \phi(\psi(x')) = x' = L(x', f(x')) \Rightarrow f(x') = \text{proj}_{\mathbb{R}^k}(\phi(\psi(x'))) \Rightarrow f \in C^r$ как композиция н гладких отображений. (так как $\phi(W)$ график, можно L в равенстве убрать).

Так как $\phi(W)$ открытое в $M \Rightarrow \exists \bar{\mathcal{U}} \subset \mathbb{R}^m$ — открытое, что $\phi(W) = M \cap \bar{\mathcal{U}}$, $\bar{\mathcal{U}} \subset V \times \mathbb{R}^{m-k}$ (если не так, то пересечем. да, получится не пустое, ибо $\phi(W) \subset V \times \mathbb{R}^m$).

$F_j(x) := f_j(L(x)) - x_{k+j}$

Тогда $x \in M \cap \bar{\mathcal{U}} \Leftrightarrow x \in \Gamma_f \Leftrightarrow F_j = 0$.

Про градиенты.
$$\begin{pmatrix} \text{grad } F_1 \\ \dots \\ \text{grad } F_{m-k} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{\partial 1}{\partial 1} & \dots & \frac{\partial 1}{\partial k} & -1 & \dots & 0 \\ \vdots & & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \frac{\partial m-k}{\partial 1} & \dots & \frac{\partial m-k}{\partial k} & 0 & \dots & -1 \end{pmatrix} \text{ — ЛНЗ.}$$

$2 \Rightarrow 1$. $p \leftrightarrow (a, b)$, $a \in \mathbb{R}^k$, $b \in \mathbb{R}^{m-k}$. Будем считать, что ранг реализуется на последних $(m - k)$ столбцах.

Есть $F: \mathbb{R}^m \rightarrow \mathbb{R}^{m-k}$, причем $F'_y(a, b) \neq 0$. Тогда по теореме о неявном отображении $\exists P \subset \mathbb{R}^k$, $Q \subset \mathbb{R}^{m-k}$ — открытые и с центрами в a и b соответственно, $\exists f \in C^r(P, \mathbb{R}^{m-k})$, такое что $x = (u, v) \in M \cap \mathcal{U} \Leftrightarrow v = f(u)$. Тогда $\Phi(u): u \mapsto (u, f(u))$ — параметризация в окрестности $M \cap \mathcal{U}$ точки p . К тому же $\Phi \in C^r(P, \mathbb{R}^m)$, ранг матрицы $\Phi' = k \forall x \in P$. Оно и логично, ведь $F'(u) = \begin{pmatrix} I \\ f'(u) \end{pmatrix}$ ■

Следствие (о двух параметризациях). $M \subset \mathbb{R}^m$ — k -мерное, простое r -гладкое многообразие. $p \in M$, \mathcal{U} — окрестность p . $\{\phi_i: O_i \subset \mathbb{R}^k \rightarrow \mathcal{U} \cap M \text{ (сюръекции)}\}_{i \in \{1,2\}}$.

Тогда $\exists \Psi: O_1 \rightarrow O_2$ — диффеоморфизм. Причем $\phi_1 = \psi(\phi_2)$

Доказательство. Считаем, что ранг реализован на первых k столбцах. Тогда $\phi_i \circ L$ — диффеоморфизмы в некоторых окрестностях p . $\phi_1 = \phi_2 \circ (L \circ \phi_2)^{-1} \circ (L \circ \phi_1) \Rightarrow \Psi := (L \circ \phi_2)^{-1} \circ (L \circ \phi_1)$. ■

Лемма. $\Phi: O \subset \mathbb{R}^k \rightarrow \mathbb{R}^m$ — C^r параметризация многообразия M в окрестности $U(p) \cap M$, $p \in M$, $\Phi(t_0) = p$. Тогда образ $\Phi'(t_0)$ при действии на \mathbb{R}^m — k -мерное подпространство, которое не зависит от Φ .

Доказательство. Φ — параметризация, значит $\text{rank } \Phi' = k \Rightarrow$ образ k -мерен. Пусть есть Φ_2 ($\Phi_2(t_0) = p = \Phi(t_0)$), тогда $\Phi_2 = \Phi \circ \Psi$, где Ψ — диффеоморфизм, а значит $\Phi_2'(t_0) = \Phi'(t_0) \circ \Psi'(t_0)$.

$$T_{p, \Phi_2} = \{\Phi_2'(t_0)v : v \in \mathbb{R}^k\} = \{\Phi'(t_0) \circ \Psi'(t_0)v : v \in \mathbb{R}^k\} = \{\Phi'(t_0)u : u \in \mathbb{R}^k\} = T_{p, \Phi} \quad \blacksquare$$

Определение. В условиях леммы $\Phi'(t_0)(\mathbb{R}^m)$ — аффинное касательное пространство $= T_p M$

N.B (касательное пространство в терминах векторов скорости гладких путей).

- $\forall v \in T_p M \exists \gamma: [-1, 1] \rightarrow \mathbb{R}^m$, $\gamma([-1, 1]) \subset M$ (гладкий путь), что $\gamma(0) = p$, $v = \gamma'(0)$
- Пусть $\gamma: [-\varepsilon, \varepsilon] \rightarrow M \subset \mathbb{R}^m$ — гладкий путь, причем $\gamma(0) = p \Rightarrow \gamma'(0) \in T_p M$

Доказательство.

- $v = \phi'(p)h$. Тогда пусть $\gamma(t) := \phi(p + th)$. Да, $\gamma(0) = p$ и $v = \gamma'(0)$.
- Рассмотрим $\psi: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}^k := \phi^{-1} \circ \gamma$. В окрестности 0 оно гладкое, как композиция пути и гладкой параметризации. Тогда $\gamma = \phi \circ \psi \Rightarrow \gamma'(0) = \phi'(p) \cdot \psi'(0) \in T_p M$

■

Пример (касательное пространство к графику функции и к поверхности уровня).

$f: \mathbb{R}^m \rightarrow \mathbb{R}$ гладкое, график $f = \{(x, y) | y = f(x)\}$.

Тогда $p = (x_0, f(x_0))$, $\phi(x) = \begin{pmatrix} x \\ f(x) \end{pmatrix}$, $\phi'(x) = \begin{pmatrix} E \\ f'_{x_1}(x) \dots f'_{x_m}(x) \end{pmatrix}$. Тогда касательное пространство будет $\phi'(p)(\mathbb{R}^m) = (h_1, \dots, h_m, f'_{x_1}(p)h_1 + \dots + f'_{x_m}(p)h_m)$. Что можно переписать как $y - f(x^0) = f'_{x_1}(x^0)(x_1 - x_1^0) + \dots + f'_{x_m}(x^0)(x_m - x_m^0)$. Даже походит на уравнение касательной плоскости.

(??? про поверхность. Ну видимо это тоже своего рода график, определенный неявной функцией. Но для красивой формулы понять бы, что л.ч = 0 ???)

Определение. $\{f_n(x)\}_{n=1}^{\infty} \xrightarrow{X} f(x)$, если $\forall x_0 \in X: \exists \lim_{n \rightarrow \infty} f_n(x_0) = f(x)$.

Определение. $\{f_n(x)\}_{n=1}^{\infty} \Rightarrow f(x)$ на X , если $\sup_{x \in X} |f(x) - f_n(x)| \xrightarrow{n \rightarrow \infty} 0$.

Ну или $\forall \varepsilon > 0 \exists N \forall n > N: \sup_{x \in X} |f_n(x) - f(x)| < \varepsilon$.

Функциональный ряд называется равномерно сходящимся на множестве X , если равномерно сходится на X последовательность его частичных сумм.

Теорема (Стокса–Зайдля о непрерывности). $\{f_n(x)\}_{n=1}^{\infty}$, $f_n \Rightarrow f$, $c \in X$, f_i непрерывны в окрестности c . Тогда f непрерывна в c .

Доказательство. $|f(x) - f(c)| \leq |f(x) - f_n(x)| + |f_n(x) - f_n(c)| + |f_n(c) - f(c)|$. Первое и последнее слагаемое можно сделать меньше $\varepsilon/3$ из-за поточечной сходимости (которая следует из равномерной). f_n непрерывна, поэтому для данного n (которое мы придумали, оценивая первое и последнее) мы можем найти окрестность, где второе слагаемое будет $< \varepsilon/3$. ■

N.B (1). Можно без метрики, а в топологической непрерывности то же самое сказать. (ну логично, да).

N.B (2!). Локально равномерно сходится на X , это когда $\forall x \in X \exists U(x): f_n \Rightarrow f$ на X .

Следствие. $f_n \in C(X)$, $f_n \Rightarrow f$ локально. Тогда $f \in C(X)$. (ну логично да, те же оценки работают)

Определение. Заведем метрику в пространстве (да-да, это пространство) непрерывных функций на $[a, b]$. А именно: $\rho(f, g) = \sup_{x \in [a, b]} |f(x) - g(x)|$.

N.B.

- Видимо, “sup” можно заменить на “max”.
- Да, это метрика (про равенство нулю и симметрию понятно)

Про треугольник:

$|f(x) - h(x)| \leq |f(x) - g(x)| + |g(x) - h(x)|$; возьмем максимум левой и правой части:

$$\sup_{x \in [a, b]} |f(x) - g(x)| \leq \sup_{x \in [a, b]} (|f(x) - g(x)| + |f(x) - g(x)|) \leq \sup_{x \in [a, b]} |f(x) - g(x)| + \sup_{x \in [a, b]} |f(x) - g(x)|,$$

$$\text{ведь } \max(a + b) \leq \max(a) + \max(b)$$

Теорема (метрика в пространстве непрерывных функций на компакте, его полнота). Пространство $C([a, b])$ с метрикой ρ из определения полно.

Доказательство. Предъявим функцию, к которой сходится. Зададим в каждой точке. Зафиксируем $x_0 \in [a, b]$: Последовательность f_n фундаментальна относительно $\rho \Rightarrow$ последовательность $\{f_n(x)\}$ фундаментальна, а так как она в \mathbb{R} , то имеет предел \bar{x} , то есть $f_n(x_0) \xrightarrow{n \rightarrow \infty} \bar{x} = f(x)$ поточечно. Задали. Как говорит высшая теория (а именно “Теорема Стокса–Зайдля о непрерывности предельной функций”) $f(x) \in C[a, b]$. ■

Определение. $V: O \rightarrow \mathbb{R}^m$ (O открыто) — векторное поле. Если не оговорено обратное, считаем, что $V \in C(O, \mathbb{R}^m)$

Определение. V — векторное поле, $\gamma: [a, b] \rightarrow \mathbb{R}^m$ — кусочно-гладкий путь. Интеграл векторного поля по кусочно-гладкому пути: $I(V, \gamma) \stackrel{\text{def}}{=} \int_a^b \langle V(\gamma(t)), \gamma'(t) \rangle dt$

Свойства. (Старые)

- $I(\alpha V + \beta U, \gamma) = \alpha I(V, \gamma) + \beta I(U, \gamma)$ (следует из линейности $\langle \cdot, \cdot \rangle$ и \int_a^b)
- $I(V, \gamma) = I(V, \gamma|_{[a, c]}) + I(V, \gamma|_{[c, b]})$ (следует из аддитивности для \int_a^b)
- $\phi \in C^1([\alpha, \beta] \xrightarrow{\text{ia}} [a, b])$, растёт, и к тому же $\phi(\alpha) = a$ и $\phi(\beta) = b$. Тогда $I(V, \gamma) = I(V, \gamma \circ \phi)$ ($\int_a^b \langle V(\gamma(t)), \gamma'(t) \rangle dt = \int_\alpha^\beta \langle V(\gamma(\phi(t))), \gamma'(\phi(t)) \cdot \phi'(t) \rangle dt$ — если учесть, что $\phi'(t)$ — число, которое ввиду линейности из скалярки можно вынести, то получится знакомая аналогичная теорема о замене параметра в интегрировании).

Определение. Произведение путей $\{\gamma_i: [a_i, b_i] \rightarrow \mathbb{R}^m\}_{i=1}^2$ ($b_1 = a_2$):

$$(\gamma_1 \gamma_2)(t) = \gamma(t) = \begin{cases} \gamma_1(t), & t \in [a, b] \\ \gamma_2(t - b + c), & t \in [b, b + d - c] \end{cases}$$

Определение. $t^{-1}: [a, b] \rightarrow \mathbb{R}^m := \gamma(b + a - t)$ — обратный путь.

Свойства. (Новые)

- $I(V, \gamma_1 \gamma_2) = I(V, \gamma_1) + I(V, \gamma_2)$ (логично да)
- $I(V, \gamma) = -I(V, \gamma^{-1})$ (t заменим на $b + a - t$, (-1) вылезет из-за этого)
- $I(V, \gamma) \leq \max_{x \in [a, b]} \|V(x)\| \cdot l(\gamma)$ (оценим скалярку по КБ(Ш), потом оценим сам интеграл и получим формулу длины пути:

$$I(V, \gamma) = \int_a^b \langle V(\gamma(t)), \gamma'(t) \rangle dt \leq \int_a^b \|V(\gamma(t))\| \cdot |\gamma'(t)| dt \leq \max_{x \in [a, b]} \|V(x)\| \cdot \int_a^b |\gamma'(t)| dt$$

Определение. Поле V — потенциально, если $\exists f \in C^1(O)$, что $V = \text{grad } f$. f — потенциал.

Теорема. Потенциал определен однозначно с точностью до константы.

Доказательство. $V = \text{grad } f_1 = \text{grad } f_2 \Rightarrow \text{grad}(f_1 - f_2) = 0$ (m -мерный) $\Rightarrow (f_1 - f_2)' = 0$ по любому направлению и в любой точке. Ну тогда $f_1 - f_2 = \text{const}$. ■

Определение. Интеграл не зависит от пути в области O , если он определяется только концами.

Определение. Петля — путь, где конец совпал с началом.

Теорема (характеризация потенциальных векторных полей в терминах интегралов). Три утверждения эквивалентны:

1. V — потенциальное
2. $I(V, \gamma)$ не зависит от пути

3. \forall кусочно-гладкой петли $I(V, \gamma) = 0$

Доказательство. (3) \Rightarrow (2). Пусть дали 2 конца $A, B \in O$ и два пути γ_1, γ_2 с этими концами. Пусть $\gamma = \gamma_1 \cdot \gamma_2^{-1}$ — вполне себе кусочно-гладкая петля.

Тогда $0 = I(V, \gamma) = I(V, \gamma_1) + I(V, \gamma_2^{-1}) = I(V, \gamma_1) - I(V, \gamma_2) \Rightarrow I(V, \gamma_1) = I(V, \gamma_2)$

(2) \Rightarrow (3). Дали контур, мы его разбили на два пути и провели те же рассуждения.

(1) \Rightarrow (2). Зафиксируем точки $A(x_1^0, \dots, x_m^0)$ и $B(x_1^1, \dots, x_m^1)$. Рассмотрим путь $\gamma(t) = (x_1(t), \dots, x_m(t))$ с концами в точках. Продифференцируем по t функцию $f(\gamma(t))$:

$$\frac{\partial f}{\partial t}(t) = \frac{\partial f}{\partial x_1}(\gamma(t)) \cdot \frac{\partial x_1}{\partial t}(t) + \dots + \frac{\partial f}{\partial x_m}(\gamma(t)) \cdot \frac{\partial x_m}{\partial t}(t)$$

Еще поймем, что такое $\langle V(\gamma(t)), \gamma'(t) \rangle$. Так как f — потенциал V , то $(V(x))_i = \frac{\partial f}{\partial x_i}(x) \Rightarrow$

$\langle V(\gamma(t)), \gamma'(t) \rangle = \frac{\partial f}{\partial x_1}(\gamma(t)) \cdot \frac{\partial x_1}{\partial t}(t) + \dots + \frac{\partial f}{\partial x_m}(\gamma(t)) \cdot \frac{\partial x_m}{\partial t}(t)$. Тогда

$$I(V, \gamma) = \int_a^b \langle V(\gamma(t)), \gamma'(t) \rangle dt = \int_a^b \frac{\partial f}{\partial t} dt = f(\gamma(b)) - f(\gamma(a))$$

Вот, от пути не зависит, только от концов. А еще эта формула называется “обобщенная формула Ньютона-Лейбница”

(2) \Rightarrow (1). Зафиксируем точку $A(x_1^0, \dots, x_m^0)$ и пусть $f: x \mapsto I(V, \gamma)$, где γ — путь из A в x . Так как (2), то определили f корректно.

Поймем, что $f(y) - f(x) = I(V, \gamma)$, где γ — путь от x до y . Ну логично, когда будем считать путь до y , выберем путь через x . Тогда $f(y) = f(x) + I(V, \gamma)$.

Докажем, что $\frac{\partial f}{\partial x_i} = V_i$. Посчитаем производную по определению: $\lim_{c \rightarrow 0} (f(x + ce_i) - f(x))/c$. $f(x + ce_i) - f(x) = I(V, \gamma) = \int_0^c \langle V(x + te_i), \gamma'(t) \rangle dt = \int_0^c V_i(x + te_i) dt = c \int_0^1 V_i(x + cte_i) dt$. Тогда $\frac{\partial f}{\partial x_i} = \lim_{c \rightarrow 0} \int_0^1 V_i(x + cte_i) dt = V_i(x)$

Первое равенство только что поняли, второе по определению, третье — поняли, что в скалярке выжило только одно слагаемое (так как мы движемся вдоль оси x_i , поэтому $\gamma'(t)$ везде, кроме i , содержит нули), четвертое — заменили в интеграле t на ct .

Таким образом поняли, что эта f нам подходит, так как $V = \text{grad } f$. ■

Теорема (необходимое условие потенциальности). $V: O \rightarrow \mathbb{R}^m$, гладкое потенциальное векторное поле. Тогда $\forall x \in O: \frac{\partial V_i}{\partial x_j}(x) = \frac{\partial V_j}{\partial x_i}(x)$

Доказательство. $\frac{\partial V_i}{\partial x_j}(x) = \frac{\partial^2 f}{\partial x_j \partial x_i}(x) = \frac{\partial^2 f}{\partial x_i \partial x_j}(x) = \frac{\partial V_j}{\partial x_i}(x)$ ■

Теорема (лемма Пуанкаре). O — открытая выпуклая область, $V \in C^1(O, \mathbb{R}^m)$, удовлетворяет необходимому условию потенциальности. Тогда V потенциально.

Доказательство. O содержит начало координат. Тогда $\forall x \in O$ путь $\gamma_x(t) = tx \in O$. $f(x) = I(V, \gamma_x)$. Поймем, что подошло. $f(x) = \int_0^1 \langle V(\gamma_x(t)), \gamma'_x(t) \rangle dt = \sum_{i=1}^m x_k \int_0^1 V_i(tx) dt$.

Дифференцируем по x_j (в каждом слагаемом ровно один раз он встретится, кроме того, где $i = j$) (интегралы дифференцируем по правилу Лейбница): $\frac{\partial f}{\partial x_j}(x) = \sum_{i=1}^m x_k \int_0^1 t \frac{\partial V_i}{\partial x_j}(tx) dt + \int_0^1 V_j(tx) dt = \int_0^1 \left(V_j(tx) + t \sum_{i=1}^m x_i \frac{\partial V_j}{\partial x_i} \right) dt = \int_0^1 (tV_j(tx))'_t dt = V_j(x)$. ■

Н.В. Из выпуклости мы пользовались только “звездностью” относительно центра координат. Очевидно, это более слабое условие и теорема верна для таких областей тоже.

Определение. $V: O \rightarrow \mathbb{R}^m$ — локально потенциальное, если $\forall x \in O \exists U(x)$, что $V|_{U(x)}$ потенциально.

Следствие. Гладкое поле локально потенциально тогда и только тогда, когда выполнено необходимое условие потенциальности.

Теорема (лемма о гусенице). $O \subset \mathbb{R}^m$, $\forall x \in O$ определили $U(x)$, $\gamma: [a, b] \rightarrow O$ непрерывный. Тогда существует дробление $a = t_0 < t_1 < \dots < t_{n-1} < t_n = b$ и шары $B_k(z_k, r_k) \subset U(z_k) : \forall k \in [1..n] \gamma|_{[t_{k-1}, t_k]} \subset B_k$

Доказательство. Выберем $c \in [a, b]$. Для него определим $B_c := B(\gamma(c), r_c)$, чтобы $B_c \subset U(\gamma(c))$, а также момент входа и выхода пути в него (c прохождения центра): $\bar{\alpha}_c := \inf\{\alpha \in [a, b] : \gamma|_{[\alpha, c]} \subset B_c\}$; $\bar{\beta}_c := \sup\{\beta \in [a, b] : \gamma|_{[\beta, c]} \subset B_c\}$. Так как $\bar{\alpha}_c < c < \bar{\beta}_c$, то выберем такие α_c и β_c , что $\bar{\alpha}_c < \alpha_c < c < \beta_c < \bar{\beta}_c$.

При $c = a$ или $c = b$ выберем α_a и β_b так, чтобы соответствующие отрезки покрывали a и b (немного сдвинув).

Мы получили открытое покрытие отрезка $[a, b]: \bigcup_c (\alpha_c, \beta_c)$. Нам дали конечное покрытие. “Прочистим” его — если есть интервал, который покрывается объединением каких-то других, то его удалим. Теперь для каждого интервала можно выбрать d_i , которая лежит только в нем. Отсортируем отрезки по возрастанию d_i .

Возьмем интервал i_1 с d_1 . Он покрывает все, что левее d_1 (иначе его покрывал бы другой интервал i_j , правый конец которого не может находиться левее правого конца i_1 — иначе бы его выкинули. Ну тогда d_j левее d_1). Возьмем следующий интервал i_2 , его левая граница находится левее правой границы i_1 (аналогично: тогда это покрывает какой-то интервал i_j , причем d_j правее d_2 , да к тому же правее всего i_2 , то есть он полностью накрывает i_2).

Таким образом, мы поняли, что i_k правым концом налегает на i_{k+1} , и крайние интервалы покрывают концы отрезка. Тогда в качестве t_k берем любое число из $(i_{k+1}.left, i_k.right)$, ну и $t_0 = a$, $t_n = b$, а в качестве шаров — B_k . Если точка x принадлежит интервалу i_k , то $\gamma(x) \in B_k$ — что и хотели. ■

Определение. Эту штуку (разбиение с соответствующими шарами) назовем гусеницей. Два пути похожи, если есть общая гусеница (важны только шары, разбиения могут быть и разные).

Теорема (лемма о равенстве интегралов по похожим путям). V — локально потенциальное векторное поле. $\gamma, \bar{\gamma}$ — похожие кусочно-гладкие пути. Тогда $I(V, \gamma) = I(V, \bar{\gamma})$.

Доказательство. Пусть f_1 — потенциал в B_1 . Выберем потенциал f_2 (а мы можем, их же много, все на константу отличаются) в B_2 , чтобы $f_1(\gamma(t_1)) = f_2(\gamma(t_1))$, и так для всех дальше. Тогда (ведь $[t_{i-1}, t_i] \subset B_i$) $I(V, \gamma)$ разобьется в сумму интегралов на отрезках разбиения, которые, в свою очередь, равны разности потенциалов. Из-за телескопического эффекта останется разность потенциалов в точках a и b . Как и для второго пути. ■

Теорема (о похожести путей, близких к данному). γ — путь. Тогда $\exists \delta(\gamma, \{B_i\})$, что если пути γ_1, γ_2 близки, то есть $\forall t \in [a, b] : |\gamma(t) - \gamma_1(t)| < \delta, |\gamma(t) - \gamma_2(t)| < \delta$, то $\gamma, \gamma_1, \gamma_2$ похожи.

Доказательство. $\delta_k := \text{dist}()$ ■

Определение. Есть поверхность $\Phi: E \subset \mathbb{R}^{m+n} \rightarrow \mathbb{R}^n = 0$ и функция $f: E \rightarrow \mathbb{R}$. Тогда точка $x_0 \in E$ — точка относительного локального максимума функции f , если $\exists U(x_0) \forall x \in U(x_0) \cap E, \Phi(x) = 0: f(x) \leq f(x_0)$.

Минимум аналогично. А экстремум — это когда или мин, или макс.

Теорема (необходимое условие относительного локального экстремума). f и Φ гладкие. Пусть $a \in E, \Phi(a) = 0$, a — точка относительного локального экстремума.

$$\text{rank } \Phi'(a) = n. \text{ Тогда } \exists \lambda \in \mathbb{R}^n: \begin{cases} f'(a) = \lambda \cdot \Phi'(a) \\ \Phi(a) = 0 \end{cases}$$

Доказательство. $a = (a_x, a_y)$. Ранг реализуется на последних n столбцах. Тогда по теореме о неявном отображении $\exists \phi: U(x_0) \rightarrow V(y_0)$, что $\forall x \in U(a_x) \Phi(x, \phi(x)) = 0$. $g(x) := f(x, \phi(x))$, ее локальный экстремум a_x .

Тогда $f'_x(a) + f'_y(a) \cdot \phi'(a_x) = 0$ (необходимое условие локального экстремума). Тогда $(f'_x(a) + \lambda \Phi'_x(a)) + (f'_y(a) + \lambda \Phi'_y(a)) \cdot \phi'(a_x) = 0$ (сложили два выражения, равные нулю, домножив второе на λ). $\lambda := -(f'_y(a))(\Phi'_y(a))^{-1}$, тогда обе скобки обнулятся. ■

Теорема (достаточное условие экстремума). f, Φ гладкие. $a \in E, \Phi$ не вырождена в a . И выполнено необходимое условие. Из $\phi'_x dx + \phi'_y dy = 0$ выражаем dy . Подставляем в второй дифференциал формы Лагранжа. Получится квадратичная форма, если определено положительна/отрицательна — минимум/максимум, если неопределенная — как повезет.

Теорема (вычисление нормы линейного оператора с помощью собственных чисел). A — линейный оператор. Тогда $\|A\| = \max_{\lambda_i} \{\sqrt{\lambda}\}$, где λ_i — собственное число $A^T A$.

Доказательство. $\|A\|^2 = \max_{|x|=1} |Ax|^2 = \max_{|x|=1} \langle Ax, Ax \rangle = \max_{|x|=1} \langle A^T A x, x \rangle$. Там видимо только при собственных числах косинус будет 1. ■