1 Оценка объема

Задание.

Методом Монте-Карло оценить объем части тела $\{F(\tilde{x}) \leqslant c\}$, заключенной в k-мерном кубе с ребром $[0, 1]$. Функция имеет вид $F(\tilde{x}) = f(x_1) + f(x_2) + \ldots + f(x_k)$. Для выбранной надежности $\gamma \geqslant 0.95$ указать асимптотическую точность оценивания и построить асимптотический доверительный интервал для истинного значения объема. Используя объем выборки $n = 10^4$ и $n = 10^6$ оценить скорость сходимости и показать, что доверительные интервалы пересекаются.

Вариант 9

- $f(x) = 7^x$
- $k = 10$
- $c = 40.4$

Код:

```
pkg load statistics;

function calc_volume(n)
  c = 40.4;
  y = 0.95;
  k = 10;
  T = norminv((y + 1) / 2);
  X = rand(k, n);
  F_x = sum(power(7, X));
  V = mean(F_x <= c);
  interval = T * sqrt(V * (1 - V) / n);
  printf("N=%d\n",n);
  printf("S=%g (from %d to %g)\n",V, V - interval, V + interval);
  printf("Delta=%g\n\n", interval);
endfunction

clc
clear
calc_volume(10^4);
calc_volume(10^6);
```

Выход:

```
  N=10000
  S=0.959 (from 0.955114 to 0.962886)
  Delta=0.00388642

  N=1000000
  S=0.958263 (from 0.957871 to 0.958655)
  Delta=0.000391968

```

Вывод:

Доверительный интервал при $n = 10^6$ содержится в интервале при $n = 10^4$.
При увеличении числа итераций в 100 раз ширина доверительного интервала уменьшилось в 10 раз.

2 Оценка интегралов

Задание. Построить оценку интегралов (представить интеграл как математическое ожидание функции, зависящей от случайной величины с известной плотностью) и для выбранной надежности $\gamma \geqslant 0.95$ указать асимптотическую точность оценки и построить асимптотический доверительный интервал для истинного значения интеграла.

1. $\int\limits_0^\infty \frac{x+1}{x+2} \cdot exp(-3x)dx$

   Код:

```
pkg load statistics;

function [res] = g(x)
  res = (x .+ 1) ./ (x .+ 2);
endfunction

function [res] = f(x)
    res = g(x) .* exp(-3 .* x);
endfunction

function calc_integral(n)
  lambda = 3;
  y = 0.95;

  T = norminv((y + 1) / 2);
  X = exprnd(1 / lambda, 1, n);
  F_x = g(X) .* 1/3;
  V = mean(F_x);
  d = (std(F_x) * T) / sqrt(n);
  printf("N = %d\n", n);
  printf("Value=%g (from %g to %g)\n", V, V - d, V + d);
  printf("Delta=%g\n\n", d);
endfunction

clc
clear
printf("Sample=%g\n\n", quad(@f, 0, inf));
calc_integral(10^4);
calc_integral(10^6);
```

   Выход:

```
    Sample=0.188066

    N = 10000
    Value=0.187873 (from 0.187538 to 0.188207)
    Delta=0.000334562

    N = 1000000
    Value=0.188058 (from 0.188024 to 0.188092)
    Delta=3.3727e-005

```

2. $\int\limits_{-3}^{4} \frac{\cos x}{x+5} dx$

   Код:

```
pkg load statistics;

function res = f(x)
```

```
    res = cos(x)./(x+5);
endfunction

function calc_integral(n)
  a = -3;
  b = 4;
  y = 0.95;

  T = norminv((y + 1) / 2);
  X = unifrnd(a, b, 1, n);
  F_x = f(X) * (b-a);
  V = mean(F_x);

  d = (std(F_x) * T) / sqrt(n);
  printf("N = %d\n", n);
  printf("Value=%g (from %g to %g)\n", V, V - d, V + d);
  printf("Delta=%g\n\n", d);
endfunction

clc
clear
printf("Sample=%g\n\n", quad(@f, -3, 4));
calc_integral(10^4);
calc_integral(10^6);
```

Выход:

```
    Sample=-0.161462

    N = 10000
    Value=-0.16733 (from -0.190966 to -0.143695)
    Delta=0.0236355

    N = 1000000
    Value=-0.160921 (from -0.163237 to -0.158606)
    Delta=0.00231553

```

Вывод:

Во всех случаях значение интеграла содержится в доверительных интервалах. При увеличении числа итераций в 100 раз, ширина доверительного интервала уменьшилась в 10 раз.