# Entrega de Problemas 1 de 2 Soluciones. Problemas MATIII

**Esta entrega de problemas se puntúa sobre 10. Aporta 1 punto a la nota final global y no es recuperable. La entrega es indivdual y se entrega en papel que proporciona el profesor ¡¡¡Suerte!!!**

**Problema 1.-** Un estuche contiene 2 lápices azules y 3 rojos. Se extraen dos lápices del estuche.

a. Escribe los resultados elementales que definen los sucesos. $M =$ "Solo ha salido un lápiz rojo" y $N =$ "El segundo lápiz extraído es azul". (**0.5 puntos**)
b. Halla las probabilidades de $M$, $N$ y $M \cap N$. (**1 punto.**)
c. ¿Son los sucesos M y N independientes? (**1 punto.**)

**Solución**

El espacio muestral que resuelve el problema puede tener varias formas.

**Forma 1** Tenemos 5 lápices en total de los que 2 son de color azul y 3 son rojos. Extraemos dos lápices (sí sin reponerlos hemos sacado dos)

Hemos elegido (hay otros modelos para definir el experimento que dan el mismo resultado) definir pares ordenados para el color del primer lápiz extraído y para el del segundo: por ejemplo $(Azul, Rojo)$ será que el primer lápiz es azul y el segundo (notemos que es sin reponer el lápiz en el estuche).

Así es espacio muestral es $\Omega = \{(Azul, Azul), (Azul, Rojo), (Rojo, Azul), (Rojo, Rojo)\}$.

Veamos las probabilidades de cada suceso elemental.

$P(\{(Azul, Azul)\}) = P(Primero \quad Azul) \cdot P(Segundo \quad Azul/PrimeroAzul) = \frac{2}{5} \cdot \frac{1}{4} = \frac{2}{20}$.

$P(\{(Azul, Rojo)\}) = P(Primero \quad Azul) \cdot P(Segundo \quad Rojo/Primero \quad Azul) = \frac{2}{5} \cdot \frac{3}{4} = \frac{6}{20}$.

$P(\{(Rojo, Azul)\}) = P(Primero \quad Rojo) \cdot P(Segundo \quad Azul/Primero \quad Rojo) = \frac{3}{5} \cdot \frac{2}{4} = \frac{6}{20}$.

$P(\{(Rojo, Rojo)\}) = P(Primero \quad Rojo) \cdot P(Segundo \quad Rojo/Primero \quad Rojo) = \frac{3}{5} \cdot \frac{2}{4} = \frac{6}{20}$.

El suceso "solo un lápiz rojo es" $M = \{(Azul, Rojo), (Rojo, Azul)\}$.

El suceso "el segundo lápiz es azul es" $N = \{(Rojo, Azul), (Azul, Azul)\}$

Por lo tanto

$$P(M) = P(\{(Azul, Rojo), (Rojo, Azul)\}) = P((Azul, Rojo)) + P((Rojo, Azul)) = \frac{12}{20} = \frac{3}{5} = 0.6.$$

$$P(N) = P(\{(Rojo, Azul), (Azul, Azul)\}) = P((Rojo, Azul)) + P((Azul, Azul)) = \frac{8}{20} = \frac{2}{5} = 0.4.$$

El suceso $M \cap N = \{(Azul, Rojo), (Rojo, Azul)\} \cup \{(Rojo, Azul), (Azul, Azul)\} = \{(Rojo, Azul)\}$

por lo tanto

$$P(M \cap N) = P(\{(Rojo), Azul)\}) = \frac{6}{20} = \frac{3}{10} = 0.3.$$

Para que $M$y $N$ sean independientes se tiene que cumplir que $P(M \cap N) = P(M) \cdot P(N)$, pero esto no sucede

$$\frac{6}{20} = 0.3 = P(M \cap N) \neq P(M) \cdot P(N) = \frac{12}{20} \cdot \frac{8}{20} = 0.12.$$

Al no cumplirse la anterior igualdad resulta los sucesos $M$ y $N$ no son independientes.

**Problema 2.-** En promedio, 3 servidores de cada 20 se bloquea durante una tormenta eléctrica. La compañía Amazonas tiene numerosos servidores repartidos en varios Data Centers. Responder, modelando con una distribución notable las siguientes cuestiones:

a. ¿Calcula la probabilidad de que menos de 5 servidores se bloqueen en un Data Center con 20 servidores? (**0.5 puntos.**)
b. ¿Calcula la probabilidad de que exactamente 5 servidores se hayan bloqueado en un Data Center de 20 servidores? (**1 punto.**)
c. En un Data Center de 60 servidores ¿Cuál es la probabilidad de más de 10 ($>10$) servidores se bloqueen? Hacerlo utilizando aproximación por una distribución de Poisson. (**1 punto.**)

**Solución**

La probabilidad de fallo en un servidor es $P(fallo) = \frac{3}{20} = 0.15$.

Sea $X$ la va.a que nos da el número de servidores que han fallado entre 20. Bajo estas condiciones $X$ sigue una ley $B(n = 20, p = \frac{3}{20} = 0.15)$.

En la pregunta a) nos piden $P(X < 5)$ así que $P(X < 5) = P(X \leq 4) = 0.8298$.

Donde la última igualdad se ha deducido utilizando las tablas de la distribución acumulada de una variable aleatoria $B(n = 20, p = 0.25)$. Con R es `round(pbinom(4,20,0.15))` que da el mismo resultado .

Para el apartado b)

$$\begin{aligned} P(X=5) &= \binom{20}{5} \cdot 0.15^5 \cdot (1-0.15)^{20-5} = \frac{20!}{(20-5)! \cdot 5!} \cdot 0.15^5 \cdot 0.85^{15} \\ &= \frac{16 \cdot 17 \cdot 18 \cdot 19 \cdot 20}{5 \cdot 4 \cdot 3 \cdot 2 \cdot 1} \cdot 0.15^5 \cdot 0.85^{15} = 0.1028452. \end{aligned}$$

**Problema 3.-** El profesor de estadística repite la palabra *muestra* a un ritmo de 20 veces por cada 60 minutos. Sea $X_t$ la variable que cuenta el número de veces que el profesor ha dicho *muestra* en $t$ minutos.

a. Modelizad $X_t$ mediante una distribución Poisson. De $X_t$ dad su parámetro, su valor esperado y varianza. (**0.5 puntos.**)
b. ¿Cuál es la probabilidad de que diga muestra más de 10 veces en media hora? (**1 punto.**)
c. Sea $T =$ el tiempo transcurrido entre la última vez que el profesor dice *muestra* hasta la siguiente vez ¿Cuál es la probabilidad de que $T > 15$? (**1 punto**)

**Solución** Sea la $\lambda$ el promedio de veces que dice "muestra" por minuto como lo dice 20 veces en 60 minutos tenemos que el número promedio de veces es $\lambda = \frac{1}{3}$. por minuto.

Sea $X_t =$ número de veces que dice muestra en $t$ minutos modelizado como un proceso Poisson será que $X_t \equiv Po(\lambda \cdot t = \frac{t}{3})$. Al ser una Poisson tenemos que $E(X_t) = Var(X_t) = \lambda \cdot t = \frac{t}{3}$.

$P$("diga muestra más de 10 veces en media hora") $= P(X_{30} > 10) = 1 - P(X_{30} \leq 10)$.

Ahora como $X_{30} \equiv Po(\frac{30}{3} = 10)$ consultando la distribución acumulada de una $Po(10)$ tenemos que $P(X_{30} \leq 10) = 0.583$, por lo tanto

$P$("diga muestra más de 10 veces en media hora") $= 1 - P(X_{30}) = 1 - 0.583 = 0.417$.

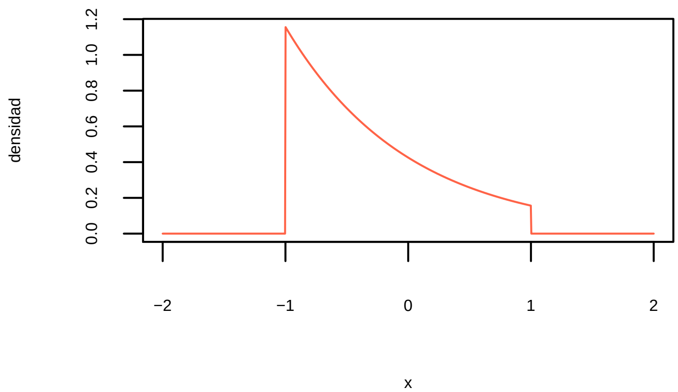
Sea $T =$ "tiempo en minutos que tarda en decir muestra desde la última vez que lo dijo". Como $X_t$ es una $Po(\frac{t}{3})$ sabemos que $T$ sigue una ley $Exp(\frac{1}{3})$ y por lo tanto

$$P(T > 15) = 1 - P(T \leq 15) = 1 - (1 - e^{-\frac{1}{3}\cdot 15}) = e^{-\frac{1}{3}\cdot 15} = 0.0067.$$

**Problema 4.-** Consideremos la va. $X$ con densidad, donde $\alpha$ es un parámetro real.

$$f(x) = \begin{cases} \alpha \cdot e^{1-x} & \text{si } -1 < x < 1 \\ 0 & \text{en otro caso} \end{cases}$$

a. Calculad $\alpha$ para que $f$ sea densidad. (**1 punto.**)
b. Calculad la función de distribución de $X$. (**1 punto.**)
c. Calculad $P(|X| > \frac{1}{2})$. (**0.5 puntos.**)
d. Calculad $E(X)$. (**Punto extra de esta entrega**. Indicación: hay que integrar por partes)




**Solución**

Calculemos el área bajo la densidad que debe ser 1.

$$\int_{-\infty}^{\infty} f(x)dx = \int_{-1}^{1} \alpha \cdot e^{1-x} dx = \left[-\alpha \cdot e^{1-x}\right]_{-1}^{1} = -\alpha \cdot e^{0} + \alpha \cdot e^{2} = \alpha \cdot (e^2 - 1).$$

Luego el valor de $\alpha$ para que sea densidad es la solución de $1 = \alpha \cdot (e^2 - 1)$ por tanto $\alpha = \frac{1}{e^2-1} \approx 0.1565$.

Por comodidad de la escritura seguiremos llamando $\alpha$ a esta constante.

Nos piden la función de distribución. Dado $x$ tal que $-1 < x < 1$ tenemos que la función de distribución de $X$ es

$$F(x) = P(X \leq x) = \int_{-\infty}^{x} f(t)dt = \int_{-1}^{x} \alpha \cdot e^{1-t} dt = \left[-\alpha \cdot e^{1-t}\right]_{-1}^{x} = -\alpha \cdot e^{1-x} + \alpha \cdot e^{2} = \alpha \cdot (e^2 - e^{1-x}).$$

Luego la función de distribución es

$$F(x) = P(X \leq x) = \begin{cases} 0 & \text{si } x \leq -1 \\ \alpha \cdot (e^2 - e^{1-x}) & \text{si } -1 < x < 1 \\ 1 & \text{si } 1 < x \end{cases}$$

Calculemos $P\left(|X| > \frac{1}{2}\right)$

$$\begin{aligned} P\left(|X| > \frac{1}{2}\right) &= 1 - P\left(|X| \leq \frac{1}{2}\right) = 1 - P\left(-\frac{1}{2} \leq X \leq \frac{1}{2}\right) = 1 - \left(F\left(\frac{1}{2}\right) - F\left(-\frac{1}{2}\right)\right) \\ &= 1 - \left(\alpha \cdot \left(e^2 - e^{1-\frac{1}{2}}\right) - \alpha \cdot \left(e^2 - e^{1+\frac{1}{2}}\right)\right) = 1 - \alpha \cdot \left(e^{\frac{1}{2}} - e^{\frac{3}{2}}\right) \\ &\approx 1 + 0.1565 \cdot \left(e^{\frac{1}{2}} - e^{\frac{3}{2}}\right) = 0.5566. \end{aligned}$$

Solo nos queda el cálculo del valor esperado (punto extra)

$$
\begin{aligned}
E(X) &= \int_{-\infty}^{+\infty} x \cdot f(x)dx = \int_{-1}^{1} 0.1565 \cdot x \cdot e^{1-x}dx = \left| \begin{array}{cc} u = x & du = dx \\ dv = e^{1-x}dx & v = -e^{1-x} \end{array} \right| \\
&= 0.1565 \cdot \left[ \left[x\left(-e^{1-x}\right)\right]_{-1}^{1} - \int_{-1}^{1} \left(-e^{1-x}\right) dx \right] \\
&= 0.1565 \cdot \left[ 1 \cdot \left(-e^{1-1}\right) - (-1) \cdot \left(e^{1-(-1)}\right) - \left[e^{1-x}\right]_{-1}^{1} \right] \\
&= 0.1565 \cdot \left[ -1 - e^{2} - \left(e^{1-1} - e^{1-(-1)}\right) \right] \\
&= 0.1565 \cdot \left[ -1 - e^{2} - 1 + e^{2} \right] \\
&= 0.1565 \cdot (-2) = -0.313.
\end{aligned}
$$