ESTADÍSTICA DESCRIPTIVA UNIVARIANTE

1.- Una cadena de franquicias de restaurantes de 1991 a 1995 tuvo 4, 8, 16, 26 y 82 restaurantes respectivamente. Un modelo estadÃŋstico estima que el nÃžmero de restaurantes entre 1991 y 1997 es 4, 8, 16, 33, 140, 280, y 586. Representar los datos en un diagrama de barras combinado.

2.- Determinar la media (aritmÃľtica) la mediana y la moda del siguiente conjunto de datos:

$$\begin{array}{cccccccccc} 3, & 5, & 7, & 8, & 8, & 8, & 10, & 11, & 12, & 12 \\ 13, & 14, & 14, & 15, & 16, & 18, & 19, & 21, & 23, & 25 \end{array}$$

3.- Estimar la media la mediana y la moda de los siguientes datos continuos agrupados en intervalos:

Intervalo de clase	Frecuencia
de 0 a 9	50
de 10 a 19	150
de 20 a 29	100
de 30 a 40	50

4.- Ídem que en el anterior para la tabla:

Intervalo de clase	Frecuencia
$[-0.5, 9.5)$	50
$[9.5, 19.5)$	150
$[19.5, 29.5)$	100
$[29.5, 40.5)$	50

5.- ¿Son diferentes los resultados de los dos ejercicios anteriores, por quÃľ?

6.- Discutir el significado de las distintas medidas de centralizaciÃşn en cada uno de los casos siguientes:

a) Datos sobre el nÃžmero de empleados anuales de una compaÃśÃŋa fundada en 1920.

b) Datos de localidades preferidas por las grandes empresas para celebrar sus reuniones anuales.

c) Datos sobre el coste medio de una pensiÃşn de jubilaciÃşn.

d) Datos de una muestra de 100 batidoras domÃľsticas de una poblaciÃşn de 10000 batidoras.

7.- Una editorial tiene 4000 tÃŋtulos en catÃąlogo. Podemos clasificar los distintos libros en novelas, biografÃŋas y otros tipos de libros de venta mÃąs preferente en librerÃŋas. De los siguientes datos de nÃžmero de copias vendidas, estimar las ventas medias por tÃŋtulo.

Intervalo de unidades vendidas	Frecuencia
0-999	500
1000-4999	800
5000-24999	700
25000- 49999	1500
50000 o mÃąs	500

8.- Con los datos del ejercicio anterior. Si el tÃŋtulo de mayores ventas vendiÃş 1000000 de copias en el aÃśo en que se recogieron los datos ¿cuÃąl es la desviaciÃşn estÃąndar estimada para las ventas por tÃŋtulo?

9.- A 50 aspirantes a un determinado puesto de trabajo se les sometiÃş a una prueba. Las puntuaciones obtenidas fueron:

4	4	2	10	1	9	5	3	4	5
6	6	7	6	8	7	6	8	7	6
5	4	4	4	5	6	6	7	5	6
6	7	5	6	6	7	5	6	4	3
2	6	6	7	7	8	8	9	8	7

a) Construir la tabla de frecuencias y la representaciÃşn grÃąfica correspondiente.

b) Encontrar la puntuaciÃşn que seleccione al 20% de los mejores candidatos.

10.- En la poblaciÃşn de estudiantes de la facultad, se seleccionÃş una muestra de 20 alumnos y se obtuvieron las siguientes tallas en cm.:

162,168,174,168,166,170,168,166,170,172,
188,182,178,180,176, 168,164, 166,164,172

Se pide:

a) DescripciÃşn numÃľrica y representaciÃşn grÃąfica.

b) Media aritmÃľtica, mediana y moda.

11.- Agrupando los datos del ejercicio anterior en intervalos de amplitud 10 cm., se pide:

a) DescripciÃşn numÃľrica y representaciÃşn grÃąfica.

b) Media aritmÃľtica, mediana y moda.

c) Analizar los cÃąlculos hechos y los errores de agregaciÃşn comparÃąndolos con el ejercicio anterior.

12.- Las tres factorÃŋas de una industria han producido en el Ãžltimo aÃśo el siguiente numero de motocicletas por trimestre:

	factorÃŋa 1	factorÃŋa 2	factorÃŋa 3
1º. trimestre	600	650	550
2º. trimestre	750	1200	900
3º. trimestre	850	1250	1050
4º. trimestre	400	800	650

Obtener:

a) ProducciÃşn media trimestral de cada factorÃŋa y de toda la industria.

b) ProducciÃşn media diaria de cada factorÃŋa y de toda la industria teniendo en cuenta que durante el primer trimestre hubieron 68 dÃŋas laborables, el segundo, 78, el tercero, 54 y el cuarto, 74.

13.- Una empresa ha pagado por un cierto articulo: 225, 250, 300 y 200 pts. de precio. Determinar el precio medio en las siguientes hipÃştesis:

a) Compraba por valor de 38250, 47500, 49500 y 42000 pts. respectivamente.

b) Compraba cada vez un mismo importe global.

c) Compraba 174, 186, 192 y 214 unidades respectivamente.

14.- Sobre una muestra de 56 tiendas distintas, se obtuvieron los siguientes precios de venta de un determinado articulo:

3260	3510	3410	3180	3300	3540	3320
3450	3840	3760	3340	3260	3720	3430
3320	3460	3600	3700	3670	3610	3910
3610	3610	3620	3150	3520	3430	3330
3370	3620	3750	3220	3400	3520	3360
3300	3340	3410	3600	3320	3670	3420
3320	3290	3550	3750	3710	3530	3500
3290	3410	3100	3860	3560	3440	3620

Se pide:

a) Agrupar la informaciÃşn en seis intervalos de igual amplitud y hacer la representaciÃşn grÃąfica correspondiente

b) Media aritmÃľtica y desviaciÃşn tÃŋpica

c) DesviaciÃşn media respecto de la media aritmÃľtica y la mediana.

15.- La siguiente distribuciÃşn corresponde al capital pagado por las 420 empresas de la construcciÃşn con domicilio fiscal en una regiÃşn determinada:

Capital (millones de pts.)	NÃžmero de empresas
menos de 5	12
de 5 a 13	66
de 13 a 20	212
de 20 a 30	84
de 30 a 50	30
de 50 a 100	14
mÃąs de 100	2

a) Haciendo servir como marcas de clase del primer y Ãžltimo intervalo 4 y 165 respectivamente, encontrar la media aritmÃľtica y la desviaciÃşn tÃŋpica

b) Calcular la moda y la mediana

c) Estudiar grÃąficamente su simetrÃŋa

16.- La distribuciÃşn de los ingresos en EspaÃśa en el inicio y final del segundo plan de desarrollo (1967-70) era:

Ingresos medios(en miles de pts)	% Hogares 1967	% Hogares 1970
hasta a 60	20.02	13.87
de 60 a 120	49.46	39.20
de 120 a 180	17.27	24.31
de 180 a 240	6.48	11.44
de 240 a 500	5.14	8.54
de 500 a 1000	1.46	1.42
de 1000 a 2000	0.88	0.80
de 2000 a 5000	0.21	0.30
mÃąs de 5000	0.08	0.12

Utilizando el Q_1 (percentil 25) y Q_3 (percentil 75) como umbrales de pobreza y riqueza entre los que se encuentra la clase media de la poblaciÃşn y usarlo en la clasificaciÃşn siguiente:

Intervalo al que pertenecen	clase
hasta Q_1	baja
de Q_1 a M_e (Media)	media baja
de M_e a Q_3	media alta
mÃąs de Q_3	alta

Discutir la veracidad de los siguientes conclusiones relativas al segundo plan de desarrollo:

a) La diferencia entre les clase baja y alta aumentÃş.

b) El recorrido entre las clases media baja y media alta tambiÃĺn aumentÃş, siendo menor el incremento en el primer caso que en el segundo.

17.- La siguiente tabla muestra la distribuciÃşn de les cargas mÃąximas que soportan los hilos producidos en una cierta fÃąbrica:

Carga mÃąxima(Tm)	NÃžmero de hilos
9.25-9.75	2
9.75-10.25	5
10.25-10.75	12
10.75-11.25	17
11.25-11.75	14
11.75-12.25	6
12.25-12.75	3
12.75-13.25	1

Encontrar la media y la varianza. Dar un intervalo donde estÃĺn al menos el 90% de los datos.

18.- Las calificaciones finales de 20 estudiantes de estadÃŋstica son:

$$59, 60, 62, 68, 68, 71, 73, 73, 75, 75,$$
$$76, 79, 82, 84, 85, 88, 88, 90, 93, 93.$$

Hacer la distribuciÃşn de frecuencias, y los histogramas de frecuencias relativas y relativas acumuladas en tantos por cien.

19.- La siguiente tabla muestra los precios por persona y noche en hoteles y pensiones del Ãąrea metropolitana de una ciudad espaÃśola en pts:

6500	3800	5450	2795	2500	3200	8400	4700	4500	3295
7000	3700	6400	2600	4000	4500	3400	4700	6100	6600
4300	4600	6200	5600	4700	5200	2800	2800	2600	3200
9400	4000	5700	3600	3000	5400	6000	2395	2395	2395
2395	2525	5000	6500	3495	6000	3200	3200	2600	2500
3300	10000								

a) Realizar el diagrama de Ãąrbol y hojas (*stem-and-leaf*) de los datos anteriores (con profundidad), en cientos de pesetas (despreciando decimales).

b) Calcular la distribuciÃşn de frecuencias (agrupando de forma oportuna) de los precios.

c) Dibujar el histograma de frecuencias absolutas y absolutas acumuladas y sus polÃŋgonos asociados.

d) Dibujar el histograma de frecuencias relativas y relativas acumuladas y sus polÃŋgonos asociados.

e) Dibujar el diagrama de caja asociado a los datos.

f) Dibujar el diagrama de tarta de los precios.

g) Comentar todos los grÃąficos.

20.- Supongamos que seis vendedores necesitan vender un total de 50 aspiradoras en un mes. El seÃśor A vende 7 durante los primeros 4 dÃŋas; el seÃśor B vede 10 durante los siguientes 5 dÃŋas; el seÃśor C vende 12 durante los siguientes 5 dÃŋas; el seÃśor D vende 10 durante los siguientes 4 dÃŋas; el seÃśor E vende 6 durante los siguientes 3 dÃŋas y el seÃśor F vende 5 durante los siguientes 3 dÃŋas. Encontrar el promedio de aspiradoras vendidas por dÃŋa.

21.- Consideremos la siguiente variable discreta que nos da el numero de veces que la gente se examina para aprobar el examen de conducir. Los resultados, dada una muestra de 30 aspirantes, son:

$$\begin{array}{cccccccccc} 4, & 3, & 1, & 1, & 1, & 1, & 2, & 2, & 2, & 3, \\ 2, & 1, & 2, & 2, & 1, & 2, & 1, & 1, & 1, & 2, \\ 2, & 3, & 1, & 3, & 3, & 3, & 2, & 1, & 4, & 1, \end{array}$$

Encontrar $\overline{X}$ y s_X^2.

22.- Los pesos en Kg. de 120 langostas compradas en una pescaderÃŋa fueron:

0.66	0.47	0.58	0.68	0.56	0.52	0.54	0.59	0.56	0.72	0.63
0.59	0.56	0.56	0.49	0.63	0.53	0.56	0.55	0.50	0.75	0.56
0.59	0.66	0.61	0.56	0.52	0.48	0.56	0.68	0.77	0.59	0.53
0.56	0.65	0.51	0.59	0.49	0.62	0.54	0.56	0.56	0.61	0.50
0.61	0.45	0.65	0.55	0.54	0.61	0.64	0.56	0.71	0.59	0.56
0.59	0.64	0.49	0.56	0.48	0.64	0.56	0.62	0.54	0.53	0.55
0.56	0.63	0.56	0.52	0.66	0.68	0.62	0.56	0.59	0.54	0.50
0.56	0.62	0.49	0.56	0.64	0.60	0.53	0.55	0.64	0.59	0.60
0.52	0.56	0.66	0.54	0.68	0.59	0.56	0.48	0.54	0.56	0.67
0.63	0.46	0.48	0.68	0.61	0.56	0.54	0.49	0.65	0.56	0.61
0.45	0.73	0.60	0.68	0.65	0.56	0.54	0.55	0.60	0.60	

a) Realizar el diagrama de tallo y hojas (*stem-and-leaf*) de los datos anteriores (con profundidad), gramos.

b) Calcular la distribuciÃşn de frecuencias (agrupando de forma oportuna) de los pesos.

c) Dibujar el histograma de frecuencias absolutas y absolutas acumuladas y sus polÃŋgonos asociados.

d) Dibujar el histograma de frecuencias relativas y relativas acumuladas y sus polÃŋgonos asociados.

e) Dibujar el diagrama de caja asociado a los datos.

f) Dibujar el diagrama de tarta de los precios.

g) Comentar todos los grÃąficos.

23.- Los siguientes pesos en Kg. corresponden a langostas compradas en la misma pescaderÃŋa pero en un mes distinto:

0.76	0.81	0.72	0.80	0.57	0.52	0.67	0.59	0.67	0.85	1.10
0.60	0.82	1.19	0.61	0.77	0.83	1.15	0.56	0.75	0.96	0.57
0.95	0.81	0.97	0.64	0.62	0.86	0.70	0.79	1.00	0.70	1.06
0.79	0.67	0.95	0.81	0.53	0.92	0.73	0.64	0.65	0.71	0.68
0.92	0.56	0.76	1.04	0.61	0.62	0.93	0.81	0.87	0.76	0.77
0.75	0.89	0.53	0.82	0.95	0.88	0.65	0.85	0.76	0.85	0.64
0.84	0.74	0.76	0.90	0.96	0.94	1.10	0.69	0.62	0.58	0.52
0.57	0.88	0.69	0.79	0.66	0.92	0.93	0.74	1.17	0.67	0.61
0.81	0.87	1.15	0.66	0.87	0.87	0.68	0.49	0.89	1.21	0.92
0.72	0.48	1.03	1.05	0.70	0.58	0.70	1.04	0.76	0.65	0.68
0.52	0.79	1.03	0.77	0.99	1.24	0.59	0.91	0.66	0.71	

Realizar un estudio comparativo de los dos grupos de langostas mediante grÃąficas.

ESTADÍSTICA DESCRIPTIVA BIVARIANTE

24.- Las puntuaciones obtenidas por 26 concursantes a un puesto de trabajo en las pruebas de procesador de textos (PT) y hoja de cÃąlculo (C) han sido, en este orden:

$$(1,2)\ (1,3)\ (2,1)\ (2,3)\ (2,2)\ (2,1)\ (1,2)\ (2,1)\ (1,3)\ (3,2)\ (2,2)\ (2,3)\ (1,3)$$
$$(3,1)\ (3,2)\ (1,1)\ (3,2)\ (2,1)\ (3,3)\ (1,1)\ (2,1)\ (1,3)\ (1,2)\ (2,2)\ (2,1)\ (1,3)$$

Calcular la tabla de contingencia $n_{i,j}$.

25.- Un servicio regular de transportes a larga distancia dispone del siguiente modelo relativo a las variables:

X = retraso en horas sobre la hora de llegada prevista,
Y = velocidad modal en el recorrido.

$X \backslash Y$	$40-50$	$50-60$	$60-80$
$0-1$	0	0	0,32
$1-2$	0	0,13	0,08
$2-3$	0,16	0,10	0
$3-4$	0,15	0,06	0

Estudiar la independencia entre X e Y calcular el coeficiente de contingencias de Pearson C_P.

26.- En un proceso de manufacturaciÃşn de un artÃŋculo de vestir se han controlado dos caracterÃŋsticas: tiempo empleado y perfeccionamiento en el acabado, teniendo la siguiente distribuciÃşn de frecuencias conjunta sobre una muestra de 120 unidades:

Errors encontrados\minutos empleados	3	4	5	6
0	2	5	10	12
1	6	10	28	8
2	15	12	6	6

Se pide:

a) Distribuciones marginales.

b) Media aritmÃľtica, moda y desviaciÃşn tÃŋpica de las distribuciones marginales.

27.- Las 130 agencias de una entidad bancaria presentaban, en el ejercicio 1984, las observaciones siguientes:

X = tipo de cuenta (corriente, a plazo fijo,...)/total de cuentas,
Y = saldo medio de las cuentas a 31-XII (en cientos de euros.).

$Y\backslash X$	menos de 0,1	de 0,1 a 0,3	mÃąs de 0,3
menos de 20	48	0	0
de 20 a 50	21	11	0
de 50 a 100	14	8	2
de 100 a 250	7	5	1
mÃąs de 250	6	6	1

Se pide:

a) Distribuciones marginales.

b) Mediana de Y y tercer cuartil de X.

c) DistribuciÃşn de las agencies segÃžn Y,cuando el ratio X esta entre $0,1$ y $0,3$.

28.- De una muestra de 24 puestos de venta en un mercado de provisiones se recogiÃş informaciÃşn sobre X : nÃžmero de balanzas e Y : nÃžmero de dependientes.

$X\backslash Y$	1	2	3	4
1	1	2	0	0
2	1	2	3	1
3	0	1	2	6
4	0	0	2	3

Calcular la covarianza entre estas dos caracterÃŋsticas.

29.- La siguiente distribuciÃşn corresponde a los controls a los que han sido sometidas 42 piezas por dos secciones del equipo de control de calidad:

Controles secciÃşn 2\Controles secciÃşn 1	0	1	2	3
0	0	3	6	6
1	2	4	3	4
2	6	2	0	0
3	3	2	1	0

Se pide:

a) DistribuciÃşn de los controles efectuados por la secciÃşn 2, media, moda y mediana.

b) Coeficiente de correlaciÃşn lineal entre estas variables.

30.- Las seis cooperativas agrarias de una comarca presentaban las siguientes cifras correspondientes a las variables:

X = stock medio diario en naves de almacenamiento (miles de euros.)
Y = cifra comercializada diariamente (en miles de euros.)
Z = empleados fijos en plantilla.
V = empleados eventuales.

Cooperativa	X	Y	Z	V
A	26	146	6	8
B	33	167	8	6
C	12	92	6	8
D	18	125	8	6
E	18	118	10	4
F	25	132	10	4

Calcular el coeficiente de correlaciÃşn lineal entre las variables (X,Y), (Y,Z) y (Z,V).

31.- Se pidiÃş a dos usuarios de detergentes que clasificaran 6 detergentes de acuerdo con sus preferencias. Los resultados fueron:

Detergente	Usu. A	Usu. B
A	2	3
B	4	2
C	5	4
D	1	1
E	6	6
F	3	5

Calcular el coeficiente de correlaciÃşn de Spearman, e interpretar el resultado.

32.- Los siguientes datos corresponden a las calificaciones otorgadas a 18 empleados despuÃľs de unos cursillos de especializaciÃşn realizados por una agencia de ventas:

empleado	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14	15	16	17	18
persuasiÃşn	0	0	1	2	1	2	0	1	2	1	1	1	2	1	0	1	1	0
retentiva	1	0	1	0	1	0	2	1	0	1	2	1	1	2	0	1	1	2
prudencia	1	1	1	2	2	1	0	1	2	0	1	1	0	0	0	1	1	2

Se pide:

a) DistribuciÃşn de las puntuaciones de retentiva y prudencia.

b) DistribuciÃşn de las puntuaciones en persuasiÃşn y prudencia para aquellos que no han obtenido un cero en retentiva.

c) DistribuciÃşn de las puntuaciones en persuasiÃşn de aquellos que han sacado un 1 en las pruebas de retentiva y prudencia.

33.- Una cartera de valores puede estar compuesta por dos tipos d e acciones con una rentabilidad dada por la siguiente distribuciÃşn conjunta, segÃžn una escala subjetiva que les concedemos "a priori":

Rentabilidad $X_2 \backslash$ Rentabilidad X_1	De 5 a 10	De 10 a 15
De 0 a 5	$0,06$	$0,02$
De 5 a 10	$0,14$	$0,38$
De 10 a 15	$0,30$	$0,10$

Se pide:

a) ¿CuÃąl de las dos acciones presenta mayor rentabilidad media esperada?

b) ¿CuÃąl de las dos acciones presenta menos varianza en su rentabilidad?

c) Calcular la covarianza entre las rentabilidades.

PROBABILIDAD

34.- En una carrera en la que participan diez caballos ¿de cuÃąntas maneras diferentes se pueden dar los cuatro primeros lugares?

35.- Una empresa de reciente creaciÃşn encarga a un diseÃśador grÃąfico la elaboraciÃşn del su logotipo, indicando que ha de seleccionar exactamente tres colores de una lista de seis. ¿CuÃąntos grupos tienen para elegir el diseÃśador?

36.- ¿CuÃąntas palabras diferentes, de cuatro letras, se pueden formar con la palabra **byte**?

37.- ¿De cuantas maneras diferentes se pueden elegir el director y el subdirector de un departamento formado por 50 miembros?

38.- Con once empleados ¿cuÃąntos comitÃľs de empresa de cinco personas se pueden formar?

39.- ¿CuÃąntas maneras distintas hay de colocar quince libros diferentes en una estanterÃŋa si queremos que el de Probabilidades estÃľ el primero y el de EstadÃŋstica en el tercero?

40.- ¿CuÃąntos caracteres diferentes podemos formar utilizando a lo sumo a tres sÃŋmbolos de los utilizados en el alfabeto Morse?

41.- Un supermercado organiza una rifa con un premio de una botella de cava para todas las papeletas que tengan las dos Ãžltimas cifras iguales a las correspondientes dos Ãžltimas cifras del nÃžmero premiado en el sorteo de Navidad. Supongamos que todos los dÃľcimos tienen cuatro cifras y que existe un Ãžnico dÃľcimo de cada numeraciÃşn ¿CuÃąntas botellas repartirÃą el supermercado?

42.- ¿CuÃąntas palabras diferentes podemos formar con todas las letras de la palabra estadÃŋstica?

43.- En una tienda de regalos hay relojes de arena con cubetas de colores, y no hay diferencia alguna entre las dos cubetas que forman cada reloj. Si hay cuatro colores posibles y el color de los dos recipientes puede coincidir ¿cuÃąntos modelos de reloj de arena puede ofrecer el establecimiento?

44.- En una partida de parchÃŋs gana aquel jugador que consigue alcanzar antes con sus cuatro fichas la llegada. Si hay cuatro jugadores y la partida continua hasta que todos han

[34] Sol.: **5040**
[35] Sol.: **20**
[36] Sol.: **24**
[37] Sol.: **2450**
[38] Sol.: **462**
[39] Sol.: **6227020800**
[40] Sol.: **14**
[41] Sol.: **100**
[42] Sol.: **2494800**
[43] Sol.: **10**

completado el recorrido¿cuÃąntos Ãşrdenes de llegadas hay para la diecisÃľis fichas?

45.- Se han de repartir cinco becas entre diez espaÃśoles y seis extranjeros, de manera que se den tres a espaÃśoles y dos a extranjeros ¿De cuÃąntas maneras se puede hacer el reparto?

46.- ¿Cuantas fichas tiene un dominÃş?

47.- Calcular la probabilidad de que al lanzar a la vez 5 dados se obtenga:

a) repÃşker (5 resultados iguales);

b) pÃşker (4 resultados iguales);

c) full (3 resultados iguales y los otros distintos pero iguales entre si);

d) trio (3 resultados iguales y los otros dos diferentes);

e) doble pareja (2 resultados iguales, otros 2 iguales y diferentes de los anteriores y el restante diferente);

f) pareja (exactamente 2 resultados iguales);

g) nada (5 resultados distintos).

48.- Tenemos 12 radios de las que 5 son defectuosas. Elegimos 3 radios al azar. ¿CuÃąl es la probabilidad de que sÃşlo una de las 3 sea defectuosa?

49.- Lanzamos al aire 6 dados.

a) ¿CuÃąl es la probabilidad de que todos ellos den resultados distintos?

b) ¿CuÃąl es la probabilidad de obtener 3 parejas?

50.- Supongamos que en una empresa de fabricaciÃşn de componentes electrÃşnicos se sabe que en un lote de 550 almacenados el 2% son defectuosos ¿CuÃąl es la probabilidad de encontrar 2 de defectuosos si cogemos de forma equiprobable 25?

51.- Si mezclamos suficientemente una baraja de 52 cartas ¿cuÃąl es la probabilidad de que los 4 ases queden colocados consecutivamente?

---

[44] Sol.: **63063000**
[45] Sol.: **1800**
[46] Sol.: **28**
[47] Sol.: a) $\mathbf{6/6^5}$; b) $\mathbf{150/6^5}$;c) $\mathbf{300/6^5}$; d) $\mathbf{1200/6^5}$; e) $\mathbf{1800/6^5}$; f) $\mathbf{3600/6^5}$; g) $\mathbf{720/6^5}$
[48] Sol.: **21/44**
[49] Sol.: a)$\mathbf{120/6^5}$; b) $\mathbf{300/6^5}$
[50] Sol.: **0.074**
[51] Sol.: **24/132600**

52.- Una forma de incrementar la fiabilidad de un sistema es la introducciÃşn de una copia de los componentes en una configuraciÃşn paralela. Supongamos que la N:A.S.A. quiere un vuelo con una probabilidad no inferior a 0.99999 de que el transbordador espacial entre en Ãşrbita alrededor de la Tierra con Ãľxito. ¿CuÃąntos motores se han de montar en paralelo para que se alcance esta fiabilidad, si se sabe que la probabilidad de que cada uno de los motores funcione adecuadamente es 0.95? Suponer que los motores funcionan de manera independiente entre si.

53.- ¿CuÃąl es la probabilidad de que entre n personas, que no han nacido el 29 de febrero, haya como a mÃŋnimo dos que hayan nacido el mismo dÃŋa del aÃśo? (no necesariamente del mismo aÃśo). Calcular la probabilidad para los siguientes valores de $n : 10, 15, 22, 23, 30, 40, 50, 55$.

54.- Cuatro cartas numeradas de 1 a 4 estÃąn colocadas boca abajo sobre una mesa. Una persona, supuestamente clarividente, irÃą adivinando los valores de las 4 cartas una a una. Si suponemos que es un farsante y que lo que hace es decir los cuatro nÃžmeros al azar ¿cuÃąl es la probabilidad de que acierte como mÃŋnimo una ? (Obviamente, no repite ningÃžn nÃžmero)

55.- En una loterÃŋa hay 500 billetes y 5 premios. Si una persona compra 10 billetes ¿cuÃąl es la probabilidad de obtener?:

a) el primer premio?

b) como mÃŋnimo un premio?

c) exactamente un premio?

56.- Se elige de forma equiprobable un nÃžmero del 1 al 6000. Calcular la probabilidad de que sea mÃžltiplo de 2 o de 3 o de 4 o de 5.

57.- Si elegimos un nÃžmero de entre los 120 primeros enteros positivos ¿cuÃąl es la probabilidad de que sea mÃžltiplo de 3, no sea divisible por 5, y sea divisible por 4 o por 6?

58.- Una cuarta parte de la poblaciÃşn ha sido vacunada contra una enfermedad contagiosa. Durante una epidemia, se observa que de uno de entre cada cuatro enfermos ha sido vacunado.

a) ¿Ha tenido alguna eficacia la vacuna?

b) Por otra parte, se sabe que hay un enfermo entre cada 12 personas vacunadas ¿CuÃąl es la probabilidad de que estÃľ enferma una persona que no se ha vacunado?

[52]Sol.: **4**
[53]Sol.: **0**.12; 0.25; 0.48; 0.51; 0.71; 0.89; 0.97; 0.99
[54]Sol.: **15/24**
[55]Sol.: **0.02; 0.096; 0.093**
[56]Sol.: **0.73**
[57]Sol.: **2/15**
[58]Sol.: a) **SÃŋ**; b) **1/9**

59.- La probabilidad de que un estudiante acabe una carrera determinada es 0.4. Dado un grupo de 5 estudiantes de esta carrera, calcular la probabilidad de que:

a) ninguno acabe la carrera,

b) sÃşlo uno acabe la carrera,

c) al menos dos acaben la carrera;

d) todos la acaben.

60.- Un mensaje se ha codificado con un alfabeto de dos sÃŋmbolos A y B para poder transmitirse a travÃľs de un canal de comunicaciÃşn. La codificaciÃşn es tal que A aparece el doble de veces que B en el mensaje codificado. El ruido del canal es tal que cuando A se transmite, se recibe A con una probabilidad de 0.8 y B con una probabilidad de 0.2; cuando se transmite B se recibe B con una probabilidad de 0.7 y se recibe A con probabilidad 0.3.

a) ¿CuÃąl es la frecuencia relativa de A en el mensaje recibido?

b) Si Ãžltima letra del mensaje recibido es una A ¿cuÃąl es la probabilidad de que se haya enviado una A?

61.- En una ciudad se publican 3 diarios A, B y C. El 30% de la poblaciÃşn lee A, el 20% lee B y el 15% lee C; el 12% lee A y B, el 9% lee A y C, y el 6% lee B y C; finalmente, el 3% lee A, B y C. Calcular:

a) El porcentaje de gente que lee al menos uno de los tres diarios.

b) El porcentaje de gente que sÃşlo lee A.

c) El porcentaje de gente que lee B o C, pero no A.

d) El porcentaje de gente que lee A o no lee ni B ni C.

62.- Supongamos que en un dado la probabilidad de cada una de sus seis caras es proporcional al nÃžmero inscrito en ella. Calcular la probabilidad de obtener un nÃžmero par.

63.- En una reuniÃşn, n personas ($n \geq 3$) lazan una moneda al aire. Si una de ellas da diferente de todas las otras, su propietario paga una ronda ¿CuÃąl es la probabilidad de que pase esto?

[59] Sol.: **a) 0.07776; b) 0.2592; c) 0.66304; d) 0.01024**

[60] Sol.: **a) 0.633; b) 0.84**

[61] Sol.: **a) 0.41 ; b) 0.12; c) 0.11; d) 0.89**

[62] Sol.: **4/7**

[63] Sol.: $(\mathbf{n} \cdot (\frac{1}{2})^{\mathbf{n-1}})$

64.- Un matrimonio planifica su descendencia considerando los siguientes esquemas (se supone que tener una varÃşn o una hembra es equiprobable):

Esq. A) Tener 3 varones.

Esq. B) Tener varones hasta que nazca la primera hembra, o ya tengan tres niÃśos (lo que pase primero).

Esq. C) Tener niÃśos hasta que tengan una pareja de ambos sexos, o ya tengan tres niÃśos (lo que pase primero).

Sea B_i el suceso han nacido i niÃśos ($i = 1, 2, 3$) y C el suceso tener mÃąs varones que hembras.

1) Calcular $p(B_1)$ y $p(C)$ en cada uno de los tres esquemas.

2) Calcular $p(B_2)$ y $p(B_3)$ en cada uno de los tres esquemas.

3) Sea E el suceso que la familia completa tenga igual nÃžmero de varones que de hembras. Encontrar $p(E)$ en cada uno de los tres esquemas.

65.- Un comerciante ha de viajar en aviÃşn de Bangkok a Bagdad. Preocupado, pide a la compaÃśÃŋa aÃľrea cuÃąl es la probabilidad de que haya como mÃŋnimo una bomba en el aviÃşn y le dicen que es de 0.1. MÃąs preocupado aÃžn pide cuÃąl es la probabilidad de que haya como mÃŋnimo dos bombas y le dicen que es 0.01. MÃąs tranquilo, decide llevar una bomba en su equipaje. Haciendo las suposiciones adicionales oportunas ¿quÃľ valoraciÃşn estadÃŋstica podemos hacer de su decisiÃşn?

66.- Dos sistemas con cuatro componentes independientes con fiabilidades respectivas p_1, p_2, p_3 y p_4 se configuran de las dos maneras siguientes: En el sistema A, la combinaciÃşn en serie de los components 1 y 2 se configura en paralelo con la combinaciÃşn en serie de los componentes 3 y 4; en el sistema B, la combinaciÃşn en paralelo de 1 y 3 se configura en serie con la combinaciÃşn en paralelo de 2 y 4. Determinar el sistema mÃąs fiable.

67.- Si un sistema que consiste en tres components independientes con la misma fiabilidad ($p_1 = p_2 = p_3$) tiene una fiabilidad de 0.8, determinar p_1 en los siguientes casos:

a) el componente 3 estÃą configurado en serie con la combinaciÃşn en paralelo 1 y 2.

b) el componente 3 estÃą configurado en paralelo con la combinaciÃşn en serie de 1 y 2.

[64] Sol.: a) $(\mathbf{p(B_1) = 3/8, 1/4, 5/8; p(C) = 1/2, 1/2, 1/4})$; b) $(\mathbf{p(B_2) = 3/8, 1/8, 1/8; p(B_3) = 1/8, 1/8, 1/8})$; c) $(\mathbf{0, 1/4, 1/2})$.

[65] Sol.: **DecisiÃşn absurda por sentido comÃžn y estadÃŋsticamente.**

[66] Sol.: **B**

[67] Sol.: **a) 0.825; b) 0.652**

VARIABLES ALEATORIAS

68.- En los ocho problemas siguientes determinar la funciÃşn de probabilidad y la de distribuciÃşn de las variables aleatorias que aparezcan

a) Consideremos el experimento consistente en lanzar simultÃąneamente dos dados; repetimos el experimento dos veces. Sea X la variable aleatoria que da el nÃžmero de lanzamientos en que los dos dados han mostrado un nÃžmero par. Sea Y la variable aleatoria que nos da el nÃžmero de lanzamientos en que la suma de los dos dados es par.

b) Supongamos que tenemos almacenadas 10 piezas, de las que sabemos que hay 8 del tipo I y 2 del tipo II; se toman dos al azar de forma equiprobable. Sea X la variable aleatoria que da el nÃžmero de piezas de tipo I que hemos cogido.

c) Supongamos que un estudiante realiza el tipo de examen siguiente: El profesor le va formulando preguntas hasta que el estudiante falla una (no os preguntÃľis como se evalÃža ni yo lo sÃľ). La probabilidad de que el estudiante acierte una pregunta cualquiera es 0.9 (examen fÃącil). Sea X la variable aleatoria que nos da el nÃžmero de preguntas formuladas por el profesor ¿CuÃąl es el nÃžmero mÃąs probable de preguntas formuladas?

d) Consideremos dos caÃśones que van disparando alternativamente hacia el mismo objetivo. El primer caÃśÃşn tiene una probabilidad de acertar el objetivo de 0.3 mientas que en el segundo es de 0.7. El primer caÃśÃşn comienza la serie de lanzamientos y no se detienen hasta que uno de los caÃśones desintegre el blanco (es suficiente darle una vez). Sea X la variable aleatoria que nos da el nÃžmero de proyectiles lanzados por el primer caÃśÃşn e Y la que nos da los proyectiles lanzados por el segundo caÃśÃşn.

e) En la misma situaciÃşn que en el Ãŋtem anterior, considerar la variable aleatoria X que da el nÃžmero de proyectiles lanzados por el primer caÃśÃşn condicionado a que gana y sea Y la variable aleatoria que cuenta el nÃžmero de proyectiles lanzados por segundo caÃśÃşn cuando gana.

f) Supongamos que se hace una tirada de 100000 ejemplares de un determinado libro . La probabilidad de que una encuadernaciÃşn sea incorrecta es 0.0001 ¿CuÃąl es la probabilidad de que haya 5 libros de la tirada mal encuadernados?

g) Dos compaÃśeros de estudios se encuentran en un conocido bar de copas de Palma y deciden jugar a dardos de una manera especial: LanzarÃąn consecutivamente un dardo cada hasta que uno de los dos acierte el triple 10 (centro de la diana). El que lanza en primer lugar tiene una probabilidad de 0.7de acertar y el que lo hace en segundo lugar 0.8. Sea X la variable aleatoria que da el nÃžmero total de lanzamientos de dardos hechos por los dos compaÃśeros.

h) Un examen tipo test consta de 5 preguntas, cada una con tres opciones de respuesta, sÃşlo hay una opciÃşn correcta. Un estudiante contesta al azar a las 5 cuestiones. Sea X la variable aleatoria que da el nÃžmero de puntos obtenidos por el alumno.

   i) Si les respuestas errÃşneas no restan puntos.

   ii) Si cada respuesta errÃşnea resta 1 punto.

69.- Un coche tiene que pasar por cuatro semÃąforos. En cada uno de ellos el coche tiene la misma probabilidad de seguir su marcha que de detenerse. Hallar la funciÃşn de distribuciÃşn del nÃžmero de semÃąforos que pasa el coche sin detenerse.

70.- Un individuo quiere invertir un capital de medio millÃşn de euros en un negocio que tiene una rentabilidad del 50%, pero con el riesgo de perder toda la inversiÃşn. Su asesor financiero le informa que este negocio tiene una probabilidad de ser rentable del 0.8 ¿CuÃąl es el beneficio esperado? (**100000**)

71.- Un juego se dice justo si la ganancia esperada de cada jugador es 0. Dos jugadores A y B tiran un dado por turnos, y gana el primero que obtiene un 5. Cada jugador apuesta una cantidad c_j $(j = 1, 2)$, y el total se lo queda el ganador. Si suponemos que comienza a jugar A ¿quÃľ relaciÃşn tienen que verificar c_1 y c_2 para que el juego sea justo?

72.- Supongamos que jugamos a la ruleta en un casino. Sea $p < 1/2$ la probabilidad de que salga un nÃžmero rojo. Supongamos que apostamos a la par (lo que quiere decir, que si apostamos k dÃşlares, cuando sale rojo nos dan k dÃşlares mÃąs los que hemos entregado al apostar y perdemos los k dÃşlares que hemos apostado si no sale rojo). La primera apuesta es de 1 dÃşlar. Si ganamos, nos retiramos. Si perdemos, hacemos una segunda apuesta de 2 dÃşlares. Si ganamos, nos retiramos. Si perdemos, apostamos 2^2 dÃşlares, y asÃŋ sucesivamente. La n-Ãľsima apuesta serÃą de 2^{n-1} dÃşlares.

a) Probar que con este sistema es seguro que ganamos 1 dÃşlar.

b) Calcular el importe esperado de la apuesta ganadora. (∞)

Supongamos ahora que la casa tiene un lÃŋmite de 2^L dÃşlares (el mÃąximo que estÃą permitido apostar), de manera que, si no hemos ganado antes, esa serÃą nuestra apuesta final.

a) ¿CuÃąl es la ganancia esperado cuando paramos de jugar? $(\mathbf{1-(2(1-p))^{L+1}})$

b) ¿QuÃľ es mejor un lÃŋmite alto o bajo? **(bajo)**

73.- Se venden 5000 billetes de loterÃŋa a 100 pts. cada uno, para un sorteo con un premio de 300000 pts. ¿CuÃąl es la ganancia (pÃľrdida) esperada de una persona que compra tres billetes? ($\mathbf{-120}$ pts)

74.- Un sistema de transmisiÃşn emite los dÃŋgitos -1, 0, 1. Cuando se transmite el sÃŋmbolo i, se recibe el sÃŋmbolo j con las probabilidades siguientes: $P(r_1/t_1) = 1$, $P(r_{-1}/t_{-1}) = 1$, $P(r_1/t_0) = 0.1$, $P(r_{-1}/t_0) = 0.1$, $P(r_0/t_0) = 0.8$. Se dice que en este caso se ha producido una distorsiÃşn $(i-j)^2$. ¿CuÃąl es el valor medio de la distorsiÃşn? (**1/15**)

75.- Una fuente binaria emite de manera equiprobable e independiente un bloque de 3 dÃŋgitos (0 Ãş 1) cada segundo. De cada bloque se envÃŋa a una canal de transmisiÃşn un 0 si en el bloque hay mÃąs ceros que unos y un 1 en caso contrario. El canal transmite el dÃŋgito con una probabilidad de error p. El receptor reconstruye la terna de dÃŋgitos repitiendo tres veces el dÃŋgito que ha recibido ¿CuÃąl es el nÃžmero medio de bits errÃşneos por bloque? ($\mathbf{\frac{3}{4} + \frac{3 \cdot p}{2}}$) ¿CuÃąl tendrÃŋa que ser la probabilidad p para que este valor medio no fuera mÃąs grande que 1? ($\mathbf{p \leq 1/6}$)

76.- Dos personas juegan a cara o cruz, y han decidido continuar la partida hasta que se obtengan como mÃŋnimo 3 caras y 3 cruces. Hallar la probabilidad de que el juego no se acabe en 10 tiradas y el nÃžmero esperado de tiradas.

77.- (Opcional) Es un buen ejercicio calcular la esperanza y la varianza de todas las variables que aparecen en el problema 68.

Variables aleatorias continuas

78.- Sea X una variable aleatoria continua con funciÃşn de densidad $f(x)$ dada por:

$$f(x) = \begin{cases} k \cdot (1 + x^2) & \text{si } x \in (0,3) \\ 0 & \text{si } x \notin (0,3) \end{cases}$$

a) Calcular la constante k y la funciÃşn de distribuciÃşn de X.

b) Calcular la probabilidad de que X estÃľ comprendida entre 1 y 2

c) Calcular la probabilidad de que X sea menor que 1.

d) Sabiendo que X es mayor que 1, calcular la probabilidad de que sea menor que 2.

79.- La funciÃşn de densidad de una variable aleatoria continua es:

$$f(x) = \begin{cases} a \cdot x^2 + b & \text{si } x \in (0,3) \\ 0 & \text{si } x \notin (0,3) \end{cases}$$

.

Determinar a y b , sabiendo que $P(1 < X \leq 2) = 2/3$.

80.- La duraciÃşn en minutos de unas ciertas comunicaciones telefÃşnicas es una variable aleatoria con funciÃşn de distribuciÃşn:

$$F(x) = \begin{cases} 0 & \text{si } x \leq 0 \\ 1 - \frac{1}{2}e^{-x/3} - \frac{1}{2}e^{-R[x/3]} & \text{si } x > 0 \end{cases}$$

donde $R[x]$ es la parte entera de x. Calcular la probabilidad de la comunicaciÃşn dure:

a) MÃąs de 6 minutos.

b) Menos de 4 minutos.

c) Exactamente 3 minutos.

d) Menos de 9 minutos, sabiendo que ha durado mÃąs de 5.

e) MÃąs de 5 minutos, sabiendo que ha durado menos de 9.

---

[76]Sol.: $\mathbf{\frac{7}{64} = 0.109375}$; $\mathbf{E(X) = \frac{63}{8}}$.
[78]Sol.: a)$\mathbf{k = 1/12}$; b) $\mathbf{5/18}$; c)$\mathbf{1/9}$; e) $\mathbf{5/16}$
[79]Sol.: $\mathbf{a = -1/2, b = 11/6}$
[80]Sol.: a)$\mathbf{e^{-2}}$; b)$\mathbf{1 - \frac{1}{2}e^{-4/3} - \frac{1}{2}e^{-1}}$; c) $\mathbf{\frac{1}{2}(1 - e^{-1})}$

81.- Sea X una variable aleatoria continua con densidad:

$$f(x) = \begin{cases} 1 - |x| & \text{si } |x| \leq 1 \\ 0 & \text{en caso contrario} \end{cases}$$

a) Encontrar la funciÃşn de distribuciÃşn de X.

b) Calcular $P(X \geq 0)$ y $P(|X| < 1/2)$.

82.- Se llama **distribuciÃşn triangular** a cualquier distribuciÃşn continua tal que su densidad es cero salvo en un cierto intervalo (a, b), en el que su grÃąfica tiene forma de triÃąngulo isÃşsceles. Hallar la funciÃşn de densidad y de distribuciÃşn de una distribuciÃşn triangular.

83.- Sea X una variable aleatoria continua con densidad (Laplaciana)

$$f(x) = \frac{1}{2}e^{-|x|} \text{ si } x \in \mathbb{R}$$

a) Calcular $P(|X| > 2)$.

b) Calcular $E(X)$ y $Var(X)$.

84.- Consideremos $f : I\!R \to I\!R$ dada por

$$f(x) = \begin{cases} 0 & \text{si } x \leq 0 \\ a(1 + x) & \text{si } 0 < x \leq 1 \\ 2/3 & \text{si } 1 < x \leq 2 \\ 0 & \text{si } x > 2 \end{cases}$$

a) Determinar el valor de a para que f sea una densidad.

b) En este caso, si X es una variable aleatoria continua con densidad f, calcular $P(1/2 < X \leq 3/2)$.

c) Calcular, para el valor de a encontrado $E(X)$ y $Var(X)$.

---

[81]Sol.: b) $\mathbf{1/2, 3/4}$

[83]Sol.: $\mathbf{e^{-2}}$

[83]Sol.: $E(X) = 0$, $Var(X) = 2$.

[84]Sol.: a)$\mathbf{a = 2/9}$; b) $\mathbf{19/36}$; c) $E(X) = \frac{32}{27}$, $Var(X) = \frac{409}{1458}$.

TransformaciÃşn de variables aleatorias

85.- Sea X la variable que nos da la puntuaciÃşn obtenida al lanzar un dado. Calcular la distribuciÃşn de las variables $Y = X^2$, $Z = X^2 - 6x + 6$. Calcular las esperanzas y las varianzas de las variables Y y Z.

86.- Conocida la funciÃşn de distribuciÃşn de una variable aleatoria continua X, hallar la funciÃşn de densidad de $Y = X^2$ y de $Z = e^X$.

87.- La funciÃşn de distribuciÃşn de una variable aleatoria X es:

$$F_X(x) = \begin{cases} 0 & \text{si } x \leq 0 \\ 1 - e^{-x^2} & \text{si } x > 0 \end{cases}$$

Encontrar la funciÃşn de densidad de la variable aleatoria $Y = \ln(X+1)$.

88.- La funciÃşn de densidad de una variable aleatoria X es:

$$f_X(x) = \begin{cases} x+1 & \text{si } x \in (-1,0] \\ -x+1 & \text{si } x \in (0,1] \\ 0 & \text{si } x \in (-\infty,-1] \cup (1,\infty) \end{cases}$$

Definimos la variable aleatoria $Y = g(X)$, donde g es la funciÃşn

$$g(x) = \begin{cases} 1 & \text{si } x \in (1/2,\infty) \\ 0 & \text{si } x \in (-1/2,1/2] \\ -1 & \text{si } x \in (-\infty,-1/2] \end{cases}$$

Determinar la funciÃşn de masa de probabilidad y la de distribuciÃşn de Y. Calcular las esperanzas y varianzas de X e Y.

89.- El precio por estacionar un vehÃŋculo en un aparcamiento es de 75 pts. por la primera hora o fracciÃşn, y de 60 pts. a partir de la segunda hora o fracciÃşn. Supongamos que el tiempo, en horas, que un vehÃŋculo cualquiera permanece en el aparcamiento se modeliza segÃžn la siguiente funciÃşn de densidad

$$f_X(x) = \begin{cases} e^{-x} & \text{si } x \geq 0 \\ 0 & \text{si } x < 0 \end{cases}.$$

Calcular el ingreso medio por vehÃŋculo. (**109.919**)

90.- Calcular $E(X)$ y $Var(X)$ para una v.a. X que tiene por funciÃş de densidad f_X dada por:

$$f_X(x) = \begin{cases} \frac{1}{2\sqrt{x}} & \text{si } x \in (0,1) \\ 0 & \text{si } x \notin (0,1) \end{cases}$$

(**1/3**, **4/45**)

91.- Consideremos una variable aleatoria X con funciÃşn de densidad:

$$f_X(x) = \begin{cases} 1/2 & \text{si } 0 < x < 2 \\ 0 & \text{en caso contrario} \end{cases}$$

determinar $E(Y)$, donde $Y = \ln(X)$. ($\mathbf{-0.3069}$)

92.- Sea X una variable aleatoria con funciÃşn de densidad:

$$f_X(x) = \begin{cases} 2x & \text{si } x \in (0,1) \\ 0 & \text{si } x \notin (0,1) \end{cases}$$

a) Determinar $E(\sqrt{X})$ a partir de $f_{\sqrt{X}}$. ($\mathbf{4/5}$)

b) Hacer lo mismo a partir de f_X.

Desigualdad Chebychef

93.- Sea X una variable aleatoria que toma los valores $-k, 0, k$ con probabilidades $\frac{1}{8}, \frac{3}{4}$ y $\frac{1}{8}$ respectivamente.

a) Calcular $P(|X-\mu| \geq 2\sigma)$ $(\mu = E(X), \sigma^2 = Var(X))$. ($\mathbf{1/4}$)

b) Obtener una cota superior de la probabilidad anterior utilizando la desigualdad de Chebychef. ($\mathbf{1/4}$)

94.- Sea X una variable aleatoria con funciÃşn de densidad

$$f(x) = \begin{cases} 1-|x| & \text{si } |x| < 1 \\ 0 & \text{si } |x| \geq 1 \end{cases}$$

a) Calcular $P(|X| \geq k)$, donde $0 < k < 1$. ($\mathbf{(1-k)^2}$)

b) Obtener una cota superior de la probabilidad anterior utilizando la desigualdad de Chebychef. ($\mathbf{\frac{1}{6k^2}}$)

c) Comparar los dos resultados anteriores para $k = 0.1, 0.2, \ldots, 0.9$

95.- El nÃžmero de periÃşdicos vendidos en un kiosko es una variable aleatoria de media 200 y desviaciÃşn tÃŋpica 10. ¿CuÃąntos ejemplares diarios tiene que encargar el dueÃśo del kiosko para tener una seguridad de que el menos el 99% de los dÃŋas no se quedarÃą sin existencias?

96.- El nÃžmero de dÃŋas al aÃśo que un trabajador de un pequeÃśo comercio estÃą de baja por enfermedad es una variable aleatoria de media 10 y desviaciÃşn tÃŋpica 2. Si cada

[95] Sol.: (**300**).

uno de estos dÃŋas la empresa pierde 10000 pts., determinar los lÃŋmites inferior y superior de las pÃľrdidas anuales por trabajador con un grado de fiabilidad no inferior a 95%.

97.- El ayuntamiento de una ciudad ha decido establecer una zona de aparcamiento limitado, en la que aparcan 500 vehÃŋculos diarios por termino medio. Si al menos el 99% de los dÃŋas el nÃžmero de coches que utilizan esta servicio estÃą entre 475 y 525, estimar la desviaciÃşn tÃŋpica de la variable aleatoria que da el nÃžmero de vehÃŋculos diarios que ocupan plazas de estacionamiento limitado.

98.- Probar que $E((X - C)^2)$ toma el valor mÃŋnimo respecto de un valor real C para $C = \mathrm{E}(X)$. ¿CuÃąl es el valor del mÃŋnimo?

99.- El nÃžmero medio de personas que van a un local es 1000, con una desviaciÃşn tÃŋpica de 20 ¿CuÃąl es el nÃžmero de sillas necesarias para que sea seguro, con una probabilidad no inferior a 0.75 , que todos los asistentes podrÃąn sentarse?

---

[96] Sol.: (**10.560**) y (**189.440**) pts.
[97] Sol.: (**2.5**)
[99] Sol.: (**1040**)

DISTRIBUCIONES NOTABLES

100.- Usar la desigualdad de Chebychef para estimar el nÃžmero de veces que se tiene que lanzar al aire una moneda bien balanceada si queremos tener un probabilidad de al menos 0.9 de que la frecuencia relativa de caras estÃľ comprendida entre 0.45 y 0.55 (**1000**)

101.- Sea X el nÃžmero de Ãľxitos en n repeticiones independientes de un experimento con probabilidad de Ãľxito p.

a) Si k es el valor mÃąs probable de X, probar que

$$(n+1)p - 1 \leq k \leq (n+1)p$$

b) Si lanzamos 10 veces un dado bien balanceado, ¿cuÃąl es el nÃžmero de veces mÃąs probable en el que obtendremos un 2.

102.- Una cadena de producciÃşn da salida a 10000 unidades diarias, el nÃžmero medio de unidades incorrectas es 200. Una vez al dÃŋa, se inspecciona un lote de 100 unidades. Determinar la probabilidad de que el lote contenga mÃąs de 3 unidades incorrectas

a) Utilizando la distribuciÃşn binomial.

b) Utilizando la aproximaciÃşn de Poisson.

103.- En una planta de fabricaciÃşn de circuitos integrados, la proporciÃşn de circuitos defectuosos es p. Supongamos que la incidencia de circuitos defectuosos es completamente aleatoria.

a) Determinar la distribuciÃşn del nÃžmero X de circuitos aceptables producidos antes del primer circuito defectuoso.

b) ¿CuÃąl es la longitud media de una cadena de producciÃşn exitosa? si $p = 0.05$.

104.- Un servidor de mensajerÃŋa esta en funcionamiento. Los clientes acceden a Ãľl de forma independiente. La probabilidad de que el servidor caiga cuando accede el cliente es p. Calcular la distribuciÃşn de probabilidad del nÃžmero de clientes a los que se darÃą servicio antes de que el servidor caiga.

a) Calcular el valor esperado y la varianza de esta variable.

b) ¿CuÃąl es la probabilidad de que se de servicio a mÃąs de 1000 clientes sin que se caiga el servidor?

[101]Sol.: b) (**1**)
[102]Sol.: a) (**0.1410**) ; b) (**0.1429**)
[103]Sol.: b) (**19**)

105.- Un sistema informÃątico dispone de un sistema de seguridad compuesto por tres claves de 3 dÃŋgitos (del 0 al 9) cada una. Para entrar en el sistema hay que averiguar la primera clave, luego la segunda y por Ãžltimo la tercera. Un pirata informÃątico intenta entrar ilegalmente en el sistema, para ello va introduciendo al azar distintas claves de forma independiente, olvidando las que ha introducido antes. Calcular el valor esperado y la varianza del nÃžmero de intentos antes de romper el sistema.

Comparar el resultado anterior cuando se ataca el sistema de forma similar pero cuando el sistema de seguridad sÃşlo consta de una clave de 9 dÃŋgitos. ¿CuÃąl es el sistema mÃąs seguro, desde el punto de vista del nÃžmero de intentos necesarios para violarlo?

106.- De un grupo de 10 personas se eligen 5 de forma equiprobable y se les pregunta si estÃąn a favor de una cierta ley. Sea X la variable aleatoria que cuenta el nÃžmero de personas a favor de la ley entre las 5. Supongamos que hay una persona a favor por cada nueve en contra.

a) Calcular la funciÃşn de probabilidad de X.

b) Calcular la esperanza y la varianza de X.

c) Supongamos ahora que la poblaciÃşn es de tamaÃśo 10000 ¿podemos suponer un modelo binomial para X?, en este caso ¿varÃŋa mucho la esperanza y la varianza con respecto al modelo hipergeomÃľtrico?

107.- Los taxis llegan aleatoriamente (segÃžn un proceso Poisson) a la terminal de un aeropuerto con un ritmo medio de un taxi cada 3 minutos. ¿CuÃąl es la probabilidad de que el Ãžltimo pasajero de una cola de 4 tenga que esperar un taxi mÃąs de un cuarto de hora?

108.- La variable aleatoria X sigue una ley $N(\mu, \sigma^2)$. Sabemos que $\mu = 5\sigma$, y que $P(X < 6) = 0.8413$.

a) Determinar la esperanza y la varianza de X.

b) ¿CuÃąl es la funciÃşn de distribuciÃşn de $Y = 3 - X^2$ y su esperanza?

109.- Consideremos una variable aleatoria X con funciÃşn de densidad f_X dada por:

$$f_X(x) = \begin{cases} 1/2 & \text{si } 0 < x < 2 \\ 0 & \text{en otro caso} \end{cases}$$

determinar $\mathrm{E}(Y)$, donde $Y = \ln X$.

[104]Sol.: a) $(\mathbf{\frac{q}{p}};\ \mathbf{\frac{q^2}{p}})$ b) $(\mathbf{q^{1001}})$
[107]Sol.: $(\mathbf{0.265})$
[108]Sol.: a)$(\mathbf{5},\quad \mathbf{1})$; b) $\mathbf{E(Y)} = -\mathbf{23}$
[109]Sol.: $(-\mathbf{0.3069})$

110.- Sea X una variable aleatoria continua con distribuciÃşn uniforme sobre el intervalo $(0,1)$.

a) Encontrar las funciones de densidad de las variables aleatorias $Y = g(X)$ y $Z = h(X)$, donde $g(x) = 8x^3$ y $h(x) = (x - 1/2)^2$.

b) Calcular la esperanza de las variables aleatorias Y y Z como esperanzas de v.a. y como esperanzas de funciones de la v.a. X.

111.- El percentil 90 de una variable aleatoria X es el valor x_{90} para el que $F_X(x_{90}) = P(X \leq x_{90}) = 0.9$. De manera similar, el percentil 50 es el valor x_{50} que satisface $P(X \leq x_{50}) = 0.5$ que recibe el nombre de **mediana** (poblacional). Determinar estos dos valores para una variable aleatoria exponencial de valor medio 10.

112.- Usar la desigualdad de Chebyshef para estimar el nÃžmero de veces que hay que lanzar una moneda, no trucada, al aire si queremos tener una probabilidad de al menos el 90% de que la frecuencia de caras este comprendida entre 0.45 y 0.55.

113.- Una centralita recibe llamadas telefÃşnicas con un ritmo medio de μ llamadas por minuto. Calcular la probabilidad de que el intervalo entre dos llamadas consecutivas supere al intervalo medio en mÃąs de dos desviaciones tÃŋpicas, comparar este resultado con la cota superior dada por la desigualdad de Chebyshef .

[110]Sol.: b) (**2**, **1/12**)
[111]Sol.: (**23.0585**, **6.93147**)
[112]Sol.: (**1000**)
[113]Sol.: **0.05**, **0.25**

Variables aleatorias vectoriales

114.- Los estudiantes de una universidad se clasifican de acuerdo a sus aÃśos en la universidad (X) y el nÃžmero de visitas a un museo el Ãžltimo aÃśo($Y = 0$ si no hizo ninguna visita $Y = 1$ si hizo una visita, $Y = 2$ si hizo mÃąs de una visita). En la tabla siguiente aparecen la probabilidades conjuntas que se estimaron para estas dos variables:

NÃžm. de Visitas (Y)	NÃžm. de aÃśos (X)			
	1	2	3	4
0	0.07	0.05	0.03	0.02
1	0.13	0.11	0.17	0.15
2	0.04	0.04	0.09	0.10

a) Hallar la probabilidad de que un estudiante elegido aleatoriamente no haya visitado ningÃžn museo el Ãžltimo aÃśo.

b) Hallar las medias de las variables aleatoria X e Y.

c) Hallar e interpretar la covarianza y la correlaciÃşn entre las variables aleatorias X e Y.

115.- Un vendedor de libros de texto realiza llamadas a los despachos de lo profesores, y tiene la impresiÃşn que ÃĺstOS suelen ausentarse mÃąs de los despachos los viernes que cualquier otro dÃŋa laborable. Un repaso a las llamadas, de las cuales un quinto se realizan los viernes, indica que para el 16% de las llamadas realizadas en viernes, el profesor no estaba en su despacho, mientras que esto ocurre sÃşlo para el 12% de llamadas que se realizan en cualquier otro dÃŋa laborable. Definamos las variables aleatorias siguientes:

$$X = \begin{cases} 1 & \text{si la llamada es realizada el viernes} \\ 0 & \text{en cualquier otro caso} \end{cases}$$

$$Y = \begin{cases} 1 & \text{si el profesor estÃą en el despacho} \\ 0 & \text{en cualquier otro caso} \end{cases}$$

a) Hallar la funciÃşn de probabilidad conjunta de X e Y.

b) Hallar la funciÃşn de probabilidad condicional de Y, dado que $X = 0$.

c) Hallar las funciones de probabilidad marginal de X e Y.

d) Hallar e interpretar la covarianza de X e Y.

[114] Sol.: a) 0.17; b) $E(X) = 2.59$, $E(Y) = 1,10$; c) $Cov(X,Y) = 0.191$, r_{XY}=0.259291

116.- Se lanzan al aire dos dados de diferente color, uno es blanco y el otro rojo. Sea X la variable aleatoria "nÃžmero de puntos obtenidos con el dado blanco, e Y la variable aleatoria "nÃžmero mÃąs grande de puntos obtenido entre los dos dados".

a) Determinar la funciÃşn de probabilidad conjunta.

b) Obtener las funciones de probabilidad marginales.

c) ¿Son independientes? (**No**)

117.- Si X_1 y X_2 son dos variables aleatorias con distribuciÃşn Poisson, independientes y con medias respectivas α y β, probar que $Y = X_1 + X_2$ tambiÃľn una variable aleatoria Poisson (con media $\alpha + \beta$).

118.- Las variables aleatorias continuas X e Y tienen por funciÃşn de densidad

$$f(x,y) = \begin{cases} k(3x^2 + 2y) & \text{si } 0 \leq x \leq 1 \text{ y } 0 \leq y \leq 1 \\ 0 & \text{en cualquier otro caso} \end{cases}$$

Se pide:

a) El valor de la constante k.

b) Las funciones de densidad marginales.

c) Las probabilidades $P(X \leq 0.5)$ y $P(Y \leq 0.3)$

d) Las medias y las varianzas de X y de Y.

e) La covarianza de X e Y.

f) La matriz de varianzas-covarianzas y la de correlaciones.

119.- Los gastos X e ingresos Y de una familia se consideran como una variable bidimensional con funciÃşn de densidad dada por:

---

[115]Sol.:

	X		
Y	0	1	$P_Y(y)$
0	0.096	0.032	0.128
1	0.704	0.168	0.872
$P_X(x)$	0.8	0.2	1

; b)

Y	0	1
$P_{Y/X}(y\|0)$	0.12	0.88

d) $Cov(X,Y) = -0.0064$

[118]Sol.: a) $k = \frac{1}{2}$; b) $f_X(x) = \begin{cases} \frac{1}{2}(3x^2+1) & \text{si } 0 \leq x \leq 1 \\ 0 & \text{en el resto de casos} \end{cases}$; $f_Y(y) = \begin{cases} \frac{1}{2}(1+2y) & \text{si } 0 \leq y \leq 1 \\ 0 & \text{en el resto de casos} \end{cases}$; c) $P(X \leq 0.5) = 0.312$ y $P(Y \leq 0.3) = 0.195$; d) $E(X) = \frac{5}{8}$; $E(Y) = \frac{7}{12}$; $Var(X) = \frac{73}{960}$; $Var(Y) = \frac{11}{144}$. e) $Cov(X,Y) = \frac{-1}{96}$; f) $\begin{pmatrix} \frac{73}{960} & \frac{-1}{96} \\ \frac{-1}{96} & \frac{11}{144} \end{pmatrix}$

$$f(x,y) = \begin{cases} k(x+y) & \text{si } 0 \le x \le 100 \text{ y } 0 \le y \le 100 \\ 0 & \text{en cualquier otro caso} \end{cases}$$

Se pide:

a) El valor de la constante k para que $f(x, y)$ sea densidad.

b) La probabilidad $P(0 \le X \le 60, 0 \le Y \le 50)$

c) Las funciones de densidad marginales.

d) Los gastos e ingresos medios.

e) La covarianza de X e Y.

f) La matriz de varianzas-covarianzas.

g) **Opcional.** La densidad (condicionada) de los gastos de las familias con ingresos $Y = 50$. La esperanza de los gastos condicionados a que los ingresos valen $Y = 50$.

120.- Dos amigos desayunan cada maÃśana en una cafeterÃŋa entre la 8 y las 8:30 de la maÃśana. La distribuciÃşn conjunta de sus tiempos de llegada es uniforme en dicho intervalo, es decir (y para simplificar tomando el tiempo en minutos):

$$f(x,y) = \begin{cases} k & \text{si } 0 \le x \le 30 \text{ y } 0 \le y \le 30 \\ 0 & \text{en el resto de casos} \end{cases} .$$

Si los amigos esperan un mÃąximo de 10 minutos, calcular la probabilidad de que se encuentren (sugerencia: resolverlo grÃąficamente). Calcular las distribuciones marginales.

121.- La variable X representa la proporciÃşn de errores tipo A en ciertos documentos y la variable Y la proporciÃşn de errores de tipo B. Se verifica que $X + Y \le 1$ (es decir puede haber mÃąs tipos de errores posibles) y la densidad conjunta de ambas variables es

$$f(x,y) = \begin{cases} k & \text{si } 0 \le x \le 1;\ 0 \le y \le 1 \text{ y } x + y \le 1 \\ 0 & \text{en el resto de casos} \end{cases} .$$

a) Calcular el valor de la constante k.

b) **Opcional.** Calcular la densidad condicional de X a $Y = y_0$ con $0 < y_0 < 1$.

---

[119]Sol.: a) $k = \frac{1}{100^3}$; b) 0.165; c) $f_X(x) = \begin{cases} \frac{x+50}{100^2} & \text{si } 0 < x < 100 \\ 0 & \text{en el resto de casos} \end{cases}$, la de Y es similar; d)$E(X) = E(Y) = \frac{175}{3}$; e) $Cov(X,Y) = \frac{-625}{9}$; f) $\begin{pmatrix} \frac{6875}{9} & \frac{-625}{9} \\ \frac{-625}{9} & \frac{6875}{9} \end{pmatrix}$; g) $f_{X/Y}(x|50) = \begin{cases} \frac{1}{100^2}(x+50) & \text{si } 0 \le x \le 100 \\ 0 & \text{en cualquier otro caso} \end{cases}$; $E(X/Y = 50) = \frac{175}{3}$

[120]Sol.: (Para la soluciÃşn completa vÃľase Daniel PeÃśa "*EstadÃŋstica Modelos y MÃľtodos. Vol 1. 2 Ed pÃąg.160*) $\frac{5}{9}$; las marginales son uniformes en el intervalo $(0, 30)$

c) **Opcional.** Calcular la esperanza de la variable condicionada del apartado anterior.

d) Calcular el vector de medias y la matriz de correlaciones de (X, Y)

122.- La funciÃşn de densidad conjunta de dos variables aleatorias continuas es:

$$f(x,y) = \begin{cases} k(x+xy) & \text{si } (x,y) \in (0,1)^2 \\ 0 & \text{en otro caso} \end{cases}$$

a) Determinar k. (**4/3**)

b) Encontrar las funciones de densidad marginales.

c) ¿Son independientes? (**SÃŋ**)

123.- Las variables aleatorias X_1 y X_2 son independientes y ambas tienen la misma densidad

$$f(x) = \begin{cases} 1 & \text{si } 0 \leq x \leq 1 \\ 0 & \text{en caso contrario} \end{cases}$$

a) Determinar la densidad de $Y = X_1 + X_2$.

b) Determinar la densidad de $Z = X_1 - X_2$.

c) Calcular la esperanza y varianza de Y y de Z.

124.- Un proveedor de servicios informÃątico tiene una cantidad X de cientos de unidades de un cierto producto al principio de cada mes. Durante el mes se venden Y cientos de unidades del producto. Supongamos que X e Y tienen una densidad conjunta dada por

$$f(x,y) = \begin{cases} 2/9 & \text{si } 0 < y < x < 3 \\ 0 & \text{en caso contrario} \end{cases}$$

a) Comprobar que f es una densidad.

b) Determinar $F_{X,Y}$.

c) **Opcional.** Calcular la probabilidad de que al final de mes se hayan vendido como mÃŋnimo la mitad de las unidades que habÃŋa inicialmente. (**1/2**)

d) **Opcional.** Si se han vendido 100 unidades, ¿cuÃąl es la probabilidad de que hubieran, como mÃŋnimo 200 a principio de mes? (**1/2**)

[121]Sol.: a) $k = 2$; b) Dado $0 < y_0 < 1$ la densidad condicional de X a $Y = y_0$ es $f_{X|Y}(x|y_0) = \begin{cases} \frac{1}{(1-y)} & \text{si } 0 < x < 1 \text{y } x < 1 - y_0 \\ 0 & \text{en el resto de casos} \end{cases}$; c) $\frac{1}{3}$

125.- Opcional. Sean X e Y dos variables aleatorias conjuntamente absolutamente continuas. Supongamos que

$$f_X(x) = \begin{cases} 4x^3 & \text{si } 0 < x < 1 \\ 0 & \text{en caso contrario} \end{cases}$$

y que

$$f_Y(y|x) = \begin{cases} \frac{2y}{x^2} & \text{si } 0 < y < x \\ 0 & \text{en caso contrario} \end{cases}$$

a) Determinar $f_{X,Y}$.

b) Obtener la distribuciÃşn de Y.

c) Calcular $f_X(x|y)$.

126.- Sea $W = X + Y + Z$, donde X, Y y Z son variables aleatorias con media 0 y varianza 1,

a) Sabiendo que $Cov(X,Y) = 1/4, Cov(X,Z) = 0, Cov(Y,Z) = -1/4$. calcular la esperanza y la varianza de W. (Sol.:$\mathbf{0}; \mathbf{3}$)

b) Sabiendo que X, Y y Z son incorreladas calcular la esperanza y la varianza de W. (Sol.:$\mathbf{0}; \mathbf{3}$)

c) Calcular la esperanza y la varianza de W si $Cov(X,Y) = 1/4, Cov(X,Z) = 1/4, Cov(Y,Z) = 1/4$. (Sol.:$\mathbf{0}; \mathbf{15/4}$)

d) Sabiendo que X, Y y Z con independientes calcular $Var(W)$ y $E(W)$.

Teorema del LÃŋmite Central

127.- En cierta fabricaciÃşn mecÃąnica el 96% de las piezas resultan con longitudes admisibles (dentro de las toleradas), un 3% defectuosas cortas y un 1% defectuosas largas. Calcular la probabilidad de:

a) En un lote de 250 piezas sean admisibles 242 o mÃąs

b) En un lote de 500 sean cortas 10 o menos.

c) En 1000 piezas haya entre 6 y 12 largas.

128.- Una organizaciÃşn de investigaciÃşn de mercados ha encontrado que el 40% de los clientes de un supermercado no quieren contestar cuando son encuestados. Si se pregunta a 1000 clientes, ¿cuÃąl es la probabilidad de que menos de 500 de ellos se nieguen a contestar?

[128]Sol.: Aproximando por el T.C.L. prÃącticamente es 1

129.- Un servicio de grÃža de auxilio en carretera recibe diariamente una media de 70 llamadas. Para un dÃŋa cualquiera, ¿cuÃąl es la probabilidad de que se reciban menos de 50 llamadas?

130.- Supongamos que el 10% de los votantes, de un determinado cuerpo electoral, estÃąn a favor de una cierta legislaciÃşn. Se hace una encuesta entre la poblaciÃşn y se obtiene una frecuencia relativa $f_n(A)$ que estima la proporciÃşn poblacional anterior. Determinar, aplicando la desigualdad de Cheb. Â£CuÃąntos votantes se tendrÃŋan que encuestar para que la probabilidad de que $f_n(A)$ difiera de 0.1 menos de 0.02 sea al menos de 0.95? (Sol.:**4500**.)¿QuÃľ podemos decir si no conocemos el valor de la proporciÃşn? (Sol.:**12500**) Repetir el ejercicio pero aplicando el T.L.C. (Sol.:**865** si sabemos que $\mathbf{p = 0.1}$ y **2401** en otro caso)

131.- Se lanza al aire una dado regular 100 veces. Aplicar la desigualdad de Cheb. para obtener una cota de la probabilidad de que el nÃžmero total de puntos obtenidos estÃľ entre 300 y 400. (Sol.:**0.883**). ¿CuÃąl es la probabilidad que se obtiene aplicando el T.L.C? (Sol.:**0.9964**)

132.- Se sabe que, en una poblaciÃşn, la altura de los individuos machos adultos es una variable aleatoria X con media $\mu_x = 170$ cm y desviaciÃşn tÃŋpica $\sigma_x = 7$ cm. Se toma una muestra aleatoria de 140 individuos. Calcular la probabilidad de que la media muestral $\overline{x}$ difiera de μ_x en menos de 1 cm. (Sol.:**0.909**)

133.- ¿CuÃąntas veces hemos de lanzar un dado bien balanceado para tener como mÃŋnimo un 95% de certeza de que la frecuencia relativa del salir "6" diste menos de 0.01 de la probabilidad teÃşrica 1/6? (Sol.:**5336**)

134.- Se lanza al aire una moneda sin sesgo n veces. Estimar el valor de n de manera que la frecuencia relativa del nÃžmero de caras difiera de 1/2 en menos de 0.01 con probabilidad 0.95. (Sol.:**9604**)

135.- El nÃžmero de mensajes llegan a un multiplexor es una variable aleatoria que sigue una ley Poisson con una media de 10 mensajes por segundo. Estimar la probabilidad de que lleguen mÃąs de 650 mensajes en un minuto. (Ind.: Utilizar el teorema del lÃŋmite central) (Sol.: El valor exacto es **0.0207**, aproximando por el TLC con correcciÃşn de continuidad **0.0197**, aproximando por TLC sin correciÃşn de continuidad **0.0206**.)

[129] Sol.: Aproximadamente 0.3897

Muestreo. Distribuciones muestrales

136.- El precio medio del m^2 en la venta de casas nuevas durante el Ãžltimo aÃśo en una determinada ciudad fue de 115000 pts. La desviaciÃşn tÃŋpica de la poblaciÃşn fue de 25000 pts. Se toma una muestra aleatoria de 100 casas nuevas de esta ciudad.

a) ¿CuÃąl es la probabilidad de que la media muestral de los precios de venta sea menor que 110000 pts?

b) ¿CuÃąl es la probabilidad de que la media muestral de los precios de venta estÃľ entre 113000 pts. y 117000 pts.??

c) ¿CuÃąl es la probabilidad de que la media muestral de los precios de venta estÃľ entre 114000 pts. y 116000 pts.?

d) Sin hacer cÃąlculos, razonar en cuÃąl de los siguientes rangos resulta mÃąs probable que se encuentre la media muestral de los precios de venta:

113000 pts-	115000 pts
114000 pts-	116000 pts
115000 pts-	117000 pts
116000 pts-	118000 pts

137.- Se ha tomado una muestra de 16 directores de oficina de corporaciones de una gran ciudad, con el fin de estimar el tiempo medio que emplean en desplazarse para ir a su trabajo. Supongamos que la distribuciÃşn de dichos tiempos en la poblaciÃşn sigue una normal con media 87 minutos y desviaciÃşn tÃŋpica 22.

a) ¿CuÃąl es el error estÃąndar de la media muestral de los tiempos de desplazamiento?

b) ¿CuÃąl es la probabilidad de que la media muestral sea inferior a 100 minutos?

c) ¿CuÃąl es la probabilidad de que la media muestral sea superior a 80 minutos?

d) ¿CuÃąl es la probabilidad de que la media muestral estÃľ entre 85 y 95 minutos?

e) Supongamos que se toma una segunda muestra de quince directores, independiente de la anterior. Sin hacer los cÃąlculos, razonar si la probabilidades calculadas en los apartados b), c) y d) serÃąn mayores, menores o iguales para esta segunda muestra. Utilizar grÃąficos para ilustrar las respuestas.

138.- Una compaÃśÃŋa produce cereales para el desayuno. La media del peso que contienen las cajas de estos cereales es de doscientos gramos y su desviaciÃşn tÃŋpica de seis gramos. La distribuciÃşn de los pesos de la poblaciÃşn es normal. Se eligen cuatro cajas, que pueden considerarse como una muestra aleatoria del total de la producciÃşn.

[136] Sol.: a) 0.0228; b) 0.5762; c) 0.3108: d) el intervalo 114000 pts-116000 pts

[137] Sol.: a) 5.5 ; b) 0.9909; c) 0.8980; d) 0.5671; e) es menor en los tres casos.

a) ¿CuÃąl es el error estÃąndar de la media muestral del peso de las cuatro cajas?

b) ¿CuÃąl es la probabilidad de que la media del peso de esas cuatro cajas sea inferior que 197 gramos?

c) ¿CuÃąl es la probabilidad , en media, el peso de estas cuatro cajas estÃľ entre 105 y 195 gramos?

d) ¿CuÃąl es la probabilidad de que la suma del peso de estas cuatro cajas sea menor de 800 gr.?

e) Se eligen al azar dos de estas cuatro cajas ¿CuÃąl es la probabilidad de que, en media, el contenido de estas dos cajas pese entre 195 y 200 gramos?

139.- La tasa de rentabilidad de ciertos tipos de acciones sigue una distribuciÃşn con desviaciÃşn tÃŋpica 3.8. Se extrae una muestra de tales acciones con el fin de estimar el precio medio.

a) ¿QuÃľ tamaÃśo ha de tener la muestra para asegurarnos que la probabilidad de que la media muestral difiera de la media poblacional en una cantidad superior a 1 sea menor que 0.1?

b) Sin realizar los cÃąlculos razonar si serÃą preciso un tamaÃśo muestral mayor o menor que el requerido en el apartado a) para garantizar que la probabilidad de que la media muestral difiera de la media poblacional en mÃąs de 1 sea inferior a 0.05.

c) Sin realizar los cÃąlculos razonar si serÃą preciso un tamaÃśo muestral mayor o menor que el requerido en el apartado a) para garantizar que la probabilidad de que la media muestral difiera de la media poblacional en mÃąs de 1.5 sea inferior a 0.1.

140.- De acuerdo con los datos del ministerio de EconomÃŋa y Hacienda, el 15% de las declaraciones del IRPF del Ãžltimo aÃśo darÃąn lugar a una devoluciÃşn. Se toma una muestra aleatoria de 10 declaraciones.

a) ¿CuÃąl es la media de la distribuciÃşn en el muestreo de la proporciÃşn muestral de declaraciones que darÃąn lugar a una devoluciÃşn?

b) ¿CuÃąl es la varianza de la proporciÃşn muestral?

c) ¿CuÃąl es el error estÃąndar de la proporciÃşn muestral?

d) ¿CuÃąl es la probabilidad de que la proporciÃşn muestral sea mayor que 0.8?

[138]Sol.: a) 3; b) 0.1587; c) 0.0475; d) 0.5; e) 0.3810

[139]Sol.: a) $n \geq 40$; b) mayor; c) menor

141.- El dueÃśo de una portal de ventas de discos por internet ha comprobado que el 20% de los clientes que acceden a su portal realizan una compra. Cierta maÃśana entraron en el portal 180 personas, que pueden ser consideradas como una muestra aleatoria de todos sus clientes.

a) ¿CuÃąl serÃą la media de la proporciÃşn muestral de clientes que realizaron alguna compra?

b) ¿CuÃąl es la varianza de la proporciÃşn muestral?

c) ¿CuÃąl es el error estÃąndar de la proporciÃşn muestral?

d) ¿CuÃąl es la probabilidad de que la proporciÃşn muestral sea mayor que 0.15?

142.- El administrador de una gran cadena de hospitales opina que, de entre todos sus pacientes, el 30% generarÃą facturas que se pagarÃąn con mÃąs de dos meses de retraso. Se toma una muestra aleatoria de 200 pacientes.

a) ¿CuÃąl es el error estÃąndar de la proporciÃşn muestral de pacientes con facturas cuyo pago se retrasarÃą dos meses?

b) ¿CuÃąl es la probabilidad de que la proporciÃşn muestral sea inferior a 0.25?

c) ¿CuÃąl es la probabilidad de que la proporciÃşn muestral sea mayor que 0.33?

d) ¿CuÃąl es la probabilidad de que la proporciÃşn muestral estÃľ entre 0.27 y 0.33?

e) Sin realizar los cÃąlculos, razonar en cuÃąl de los siguientes intervalos es mÃąs probable que se encuentre la proporciÃşn muestral: 0.29-0.31; 0.30-0.32; 0.31-0.33; 0.32-0.34.

f) Supongamos que se toma al azar una muestra de 500 pacientes. Sin realizar los cÃąlculos razonar si las probabilidades de los apartados b), c) y d) resultarÃąn en este caso mayores, menores o iguales que las calculadas para la muestra anterior.

143.- Se toma una muestra aleatoria de 100 votantes con el fin de estimar la proporciÃşn de los mismos que estÃąn a favor de un aumento en los impuestos sobre la gasolina para contar asÃŋ con un ingreso adicional para reparaciones de las autopistas. ¿CuÃąl es el mayor valor que puede tomar el error estÃąndar de la proporciÃşn muestral de esta medida?

144.- Continuando en la situaciÃşn del problema anterior, se decide que una muestra de 100 votantes es muy pequeÃśa para obtener una estimaciÃşn de la proporciÃşn poblacional que

---

[140]Sol.: a) 0.15; b) 0.01275; c) 0.1129; d) casi nula.
[141]Sol.: a) 0.2; b) $\approx$ 0.0009; c) 0.03; d) 0.9525
[142]Sol.: a) 0.0324; b) 0.0618; c) 0.1762; d) 0.6476; e) 0.29-0.31; f) menor, menor, mayor
[143]Sol.: 0.05

resulte suficientemente creÃŋble. Se decide exigir que la probabilidad de que la proporciÃşn muestral difiera de la proporciÃşn poblacional (cualquiera que sea su valor) en mÃąs de 0.03 no debe ser superior a 0.05. ¿QuÃľ tamaÃśo ha de tener la muestra para poder garantizar que se cumple este requisito?

145.- Una compaÃśÃŋa quiere estimar la proporciÃşn de personas que son posibles compradores de mÃąquinas de afeitar elÃľctricas que ven retransmisiones partidos de La Liga de Campeones. Se toma una muestra de 120 individuos que se identificaron como posibles compradores de afeitadoras elÃľctricas. Supongamos que la proporciÃşn de posibles compradores de afeitadoras elÃľctricas en la poblaciÃşn que ven estas retransmisiones es 0.25.

a) 0.10 es la probabilidad de que la proporciÃşn muestral exceda a la proporciÃşn poblacional ¿en quÃľ valor?

b) 0.05 es la probabilidad de que la proporciÃşn muestral estÃľ por debajo de la proporciÃşn poblacional ¿en quÃľ cantidad?

c) 0.30 es la probabilidad de que la proporciÃşn muestral difiera de la proporciÃşn poblacional ¿en menos de quÃľ cantidad?

146.- Supongamos que el 50% de los espaÃśoles adultos opina que es necesaria una revisiÃşn del sistema nacional pÃžblico de hospitales. ¿CuÃąl es la probabilidad de que mÃąs del 56% de los componentes de una muestra de 150 espaÃśoles adultos tenga esa opiniÃşn?

147.- Las rentabilidades mensuales de cierto tipo de acciones son independientes unas de otras, y siguen una distribuciÃşn normal con desviaciÃşn tÃŋpica 1,7. Se toma una muestra de 12 meses.

a) Hallar la probabilidad de que la desviaciÃşn tÃŋpica muestral sea menor que 2.5.

b) Hallar la probabilidad de que la desviaciÃşn tÃŋpica muestral sea mayor que 1.

148.- El nÃžmero de horas que dedican a ver la televisiÃşn los estudiantes en la semana anterior a los exÃąmenes finales sigue una distribuciÃşn normal con una desviaciÃşn tÃŋpica de 4.5 horas. Se toma una muestra aleatoria de 30 estudiantes.

a) La probabilidad de que la desviaciÃşn tÃŋpica muestral sea mayor que 3.5 horas, ¿es mayor que 0.95?

b) La probabilidad de que la desviaciÃşn tÃŋpica muestral sea menor que seis horas, ¿es mayor que 0.95?

[144]Sol.: $n \geq 757$
[145]Sol.: a) 0.0506; b) 0.0648; c) 0.0154
[146]Sol.: 0.0708
[147]Sol.: a) 0.8; b) 0.975

149.- Se extrae una muestra aleatoria de 15 economistas y se les pregunta acerca de su predicciÃşn sobre la tasa de inflaciÃşn para el prÃşximo aÃśo. Supongamos que las predicciones para la poblaciÃşn completa de economistas sigue una distribuciÃşn normal con una desviaciÃşn tÃŋpica de 1.8.

a) 0.01 es la probabilidad de que la desviaciÃşn tÃŋpica sea mayor que ¿quÃľ nÃžmero?

b) 0.025 es la probabilidad de que la desviaciÃşn tÃŋpica sea menor que ¿quÃľ nÃžmero?

c) Encontrar una par de nÃžmeros, a y b, tales que la probabilidad de que la desviaciÃşn tÃŋpica muestral se encuentre entre ellos sea 0.9.

---

[148] Sol.: a) SÃŋ; b) SÃŋ

[149] Sol.: a) 2.5969; b) 1.1415; c) 1.2331; 2.341

EstimaciÃşn puntual

150.- Se toma una muestra de ocho lotes de un producto quÃŋmico para comprobar la concentraciÃşn de impurezas. Los niveles porcentuales de impurezas encontrados en la muestra fueron

3.2 4.3 2.1 2.8 3.2 3.6 4.0 3.8

a) Hallar la media y la varianza muestrales. Hallar la proporciÃşn muestral de lotes con nivel porcentual de impurezas mayor que 3.75%.

b) ¿Para quÃľ parÃąmetros poblacionales se han hallado en la parte a) estimadores por procedimientos insesgados?

151.- Sea $\hat{\theta}_1$ un estimador insesgado de θ_1, y $\hat{\theta}_2$ un estimador insesgado de θ_2.

a) Probar que $(\hat{\theta}_1 + \hat{\theta}_2)$ es un estimador insesgado de $(\theta_1 + \theta_2)$.

b) Probar que $(\hat{\theta}_1 - \hat{\theta}_2)$ es un estimador insesgado de $(\theta_1 - \theta_2)$.

152.- Sea X_1 y X_2 una muestra aleatoria de dos observaciones independientes de una poblaciÃşn con media μ y varianza σ^2. Considerar los siguientes tres estimadores puntuales de μ:

$$\overline{X} = \tfrac{1}{2}X_1 + \tfrac{1}{2}X_2$$
$$\hat{\mu}^{(1)} = \tfrac{1}{4}X_1 + \tfrac{3}{4}X_2$$
$$\hat{\mu}^{(2)} = \tfrac{1}{3}X_1 + \tfrac{2}{3}X_2$$

a) Probar que los tres estimadores son insesgados.

b) ¿CuÃąl de los tres estimadores es mÃąs eficiente?

c) Hallar la eficiencia relativa de $\overline{X}$ con respecto a los otros estimadores.

153.- A una clase de estadÃŋstica asisten estudiantes de InformÃątica de GestiÃşn y de Sistemas. En una muestra de diez estudiantes de GestiÃşn se observaron las siguientes calificaciones en el examen final

62 57 85 59 64 63 71 58 77 72

En una muestra independiente de ocho estudiantes de Sistemas se observaron las siguientes calificaciones en el mismo examen

73 79 85 73 62 51 60 57

[150]Sol.: a) $\overline{X} = 3.375$; $S^2_X = 0.4993$; $\hat{p} = 0.3557$; b) para todos.

[152]Sol.: b) $\overline{X}$; c) $\frac{Var(\overline{X})}{Var(\hat{\mu}^{(1)})} = 0.8$; $\frac{Var(\overline{X})}{Var(\hat{\mu}^{(2)})} = 0.9$

a) Utilizar un mÃľtodo de estimaciÃşn insesgado para obtener una estimaciÃşn puntual de la diferencia de las calificaciones medias entre los estudiantes de GestiÃşn y los de Sistemas. (IndicaciÃşn: Utilizar el problema 151)

b) Utilizar un mÃľtodo de estimaciÃşn insesgado para obtener una estimaciÃşn puntual de la diferencia entre la proporciÃşn poblacional de estudiantes que obtuvieron una calificaciÃşn mayor que 70 en el grupo de estudiantes de GestiÃşn y el grupo de Sistemas. (IndicaciÃşn: Utilizar el problema 151)

154.- Se toma una muestra aleatoria $X_1, X_2, \ldots, X_n$ de una poblaciÃşn con media μ y varianza σ^2. Se considera el siguiente estimador de μ :

$$\hat{\mu} = \frac{2}{n(n+1)}(X_1 + 2X_2 + 3X_3 + \ldots + nX_n)$$

a) Probar que $\hat{\mu}$ es un estimador insesgado de μ.

b) Hallar la eficiencia relativa de $\hat{\mu}$ respecto a $\overline{X}$, la media muestral.

155.-

a) (Examen junio 2003) Calcular el estimador mÃąximo verosÃŋmil (MLE[1]) para el parÃąmetro λ de una poblaciÃşn que sigue una ley $Exp(\lambda)$ para una muestra aleatoria simple de tamaÃśo n.

b) (Examen septiembre 2004) Calcular el MLE para el parÃąmetro λ de una poblaciÃşn que sigue una ley $Po(\lambda)$ para una muestra aleatoria simple de tamaÃśo n.

c) Calcular el MLE para el parÃąmetro μ de una poblaciÃşn que sigue una ley $N(\mu, \sigma^2)$ para una muestra aleatoria simple de tamaÃśo n.

d) Calcular el MLE para el parÃąmetro σ^2 de una poblaciÃşn que sigue una ley $N(\mu, \sigma^2)$ para una muestra aleatoria simple de tamaÃśo n.

e) Estudiar si los estimadores MLE de los apartados anteriores son insesgados.

EstimaciÃşn por intervalos

156.- De una poblaciÃşn de barras de hierro se extrae una muestra de 64 barras y se calcula la resistencia a la rotura por tracciÃşn se obtiene que $\overline{X} = 1012\ Kg/cm^2$. Se sabe por experiencia que en este tipo de barras $\sigma = 25$. Calcular un intervalo de confianza para μ al nivel 0.95.

---

[153]Sol.: a) 0.2444; b)$-\frac{1}{10}$

[154]Sol.: b) $Var(\hat{\mu}) = \left(\frac{2}{n(n+1)}\right)^2 \frac{n(n+1)(2n+1)}{6}\sigma^2$; $Eff.rel = \frac{Var(\hat{\mu})}{Var(\overline{X})} = \frac{2\,(1+2\,n)}{3\,(1+n)}$.

[1]Del inglÃľs “Maximun Likelihood Estimator”

[156]Sol.: $(1005.88, 1018.13)$

157.- Para investigar el C.I. medio de una cierta poblaciÃşn de estudiantes, se realiza un test a 400 estudiantes. La media y la desviaciÃşn tÃŋpica muestrales obtenidas son $\overline{x} = 86$ y $\tilde{s}_X = 10.2$. Calcular un intervalo para μ con un nivel de significaciÃşn del 98%.

158.- Para investigar un nuevo tipo de combustible para cohetes espaciales, se disparan cuatro unidades y se miden las velocidades iniciales. Los resultados obtenidos, expresados en Km/h, son :19600, 20300, 20500, 19800. Calcular un intervalo para la velocidad media μ con un nivel de confianza del 95%, suponiendo que las velocidades son normales. 20718.3

159.- Un fabricante de cronÃşmetros quiere calcular un intervalo de estimaciÃşn de la desviaciÃşn tÃŋpica del tiempo marcado en 100 horas por todos los cronÃşmetros de un cierto modelo. Para ello pone en marcha 10 cronÃşmetros del modelo durante 100 horas y encuentra que $\tilde{s}_X = 50$ segundos. Encontrar un intervalo para el parÃąmetro σ^2 con $\alpha = 0.01$, suponiendo que la poblaciÃşn del tiempo marcado por los cronÃşmetros es normal.

160.- Un auditor informÃątico quiere investigar la proporciÃşn de rutinas de un programa que presentan una determinada irregularidad. Para ello observa 120 rutinas, resultando que 30 de ellas presentan alguna irregularidad. Con estos datos buscar unos lÃŋmites de confianza para la proporciÃşn p de rutinas de la poblaciÃşn que presentan esa irregularidad con probabilidad del 95%.

161.- (Examen septiembre 2003) Una infecciÃşn por un virus puede haber perjudicado a muchos ordenadores con *Windwos*. Desde el Centro de Alerta Temprana (CAT) se quiere calcular la proporciÃşn de ordenadores infectados. El jefe del centro os pide que calculÃľis el tamaÃśo de una muestra para que el intervalo de confianza de la proporciÃşn muestral de ordenadores infectados tenga amplitud de a lo sumo 0.01 con una probabilidad del 90%.

162.- (Examen junio 2003) Se han medido los siguientes valores (en miles de personas) para la audiencia de un programa de televisiÃşn en distintos dÃŋas (supuestos igualmente distribuidos e independientes):

$$521, 742, 593, 635, 788, 717, 606, 639, 666, 624.$$

Construir un intervalo de confianza del 90%, para la audiencia poblacional media y otro para la varianza poblacional, bajo la hipÃştesis de que la poblaciÃşn de audiencias sigue una ley normal.

Nota Suma de las audiencias=6531, Suma de los cuadrados de las audiencias=4320401.

163.- Supongamos que la empresa para la que trabajamos estÃą en un proyecto de investigaciÃşn, financiado con fondos de la Comunidad Europea, que pretende extender una nueva aplicaciÃşn de las TIC. Una de las tareas del proyecto es realizar una encuesta de opiniÃşn

[157] Sol.: $(84.8117, 87.1883)$
[158] Sol.: $(19381.7, 20718.3)$
[159] Sol.: $(953.834, 12968.3)$
[160] Sol.: $(0.1725, 0.3275)$

sobre el grado de aceptaciÃşn que tendrÃŋa esta nueva tecnologÃŋa en el mercado europeo. De entre todas las universidades y empresas participantes en el proyecto, es a tu empresa a la que le toca hacer el protocolo de la encuesta, llevarla a cabo y redactar esta parte del informe final. Como eres el Ãžltimo que llegÃş a la empresa y el resto de miembros del equipo no se acuerda de la estadÃŋstica que vio en la carrera, te toca a ti cargar con la responsabilidad. Claro que el coste de la encuesta depende del nÃžmero n de entrevistas que se realicen y el error de las proporciones de las contestaciones disminuye cuando n aumenta. Como no sabes cuÃąnto dinero estÃą dispuesto a gastar tu jefe, tabula los tamaÃśos muestrales para los errores $\pm 5\%, \pm 3\%, \pm 2\%, \pm 1\%$, y para niveles de confianza 0.95 y 0.99, suponiendo el peor caso. AÃśade un comentario para que el equipo de direcciÃşn del proyecto, en el que hay componentes ignorantes en materia de encuestas, vea como quedarÃŋan redactado los datos tÃĪcnicos de la encuesta, y pueda decidir el tamaÃśo muestral leyendo tu informe.

164.- El nÃžmero de reservas semanales de billetes de cierto vuelo de una compaÃśÃŋa aÃĪrea sigue una distribuciÃşn aproximadamente normal. Se toma un muestra aleatoria de 81 observaciones de nÃžmeros de reservas de este vuelo: el nÃžmero medio de reservas muestral resulta ser 112, mientras que la desviaciÃşn tÃŋpica muestral es 36. AdemÃąs de estos 81 vuelos, 30 llegaron a su destino con un retraso de mÃąs de 15 minutos.

a) Calcular un intervalo de confianza del 95% para el nÃžmero medio poblacional de reservas en este vuelo.

b) Calcular un intervalo de confianza de 95% para la varianza poblacional de las reservas.

c) Calcular un intervalo de confianza del 95% para la proporciÃşn poblacional de vuelos que llegan con un retraso de mÃąs de 15 minutos.

d) Calcular el tamaÃśo muestral que asegura un intervalo de confianza de amplitud 0.1 para la proporciÃşn de vuelos que llegan con un retraso de mÃąs de 15 minutos al nivel de confianza 95%.

165.- Una empresa cervecera sabe que las cantidades de cerveza que contienen sus latas sigue una distribuciÃşn normal con desviaciÃşn tÃŋpica poblacional 0.03 litros.

a) Se extrae una muestra aleatoria de 25 latas y, a partir de la misma, un experto en estadÃŋstica construye un intervalo de confianza para la media poblacional del contenido en litros de las latas que discurre entre 0.32 y 0.34 ¿CuÃąl es el nivel de confianza de este intervalo?

b) Un gerente de esta empresa exige un intervalo de confianza del 99% que tenga una amplitud mÃąxima de 0.03 litros a cada lado de la media muestral ¿CuÃąntas observaciones son necesarias, como mÃŋnimo, para alcanzar este objetivo?

[164] Sol.: a) $(104.16, 119.84)$); b) $(972.343, 1814.08)$); c) $(0.265, 0.475)$); d) $n = 385$

[165] Sol.: a) 90.3%; b) $n = 7$

Contraste de hipÃştesis

166.- Siendo $\overline{x} = 63.5$ la media de una muestra aleatoria simple de tamaÃśo 36 extraÃŋda de una poblaciÃşn normal con $\sigma^2 = 144$, poner a prueba, con un nivel de significaciÃşn $\alpha = 0.05$, la hipÃştesis nula $\mu = 60$ y decir si se rechaza en favor de la alternativa $\mu < 60$. Calcular el p-valor.

167.- Siendo $\overline{x} = 72.5$ la media de una muestra aleatoria simple de tamaÃśo 100 extraÃŋda de una poblaciÃşn normal con $\sigma^2 = 900$, poner a prueba, con un nivel de significaciÃşn $\alpha = 0.10$, la hipÃştesis nula $\mu = 77$ y decir si se rechaza en favor de las hipÃştesis alternativas $\mu \neq 70$, $\mu > 70$, $\mu < 70$. Calcular el p-valor en cada caso.

168.- En un contraste bilateral, con $\alpha = 0.01$, ¿para quÃľ valores de $\overline{X}$ rechazarÃŋamos la hipÃştesis nula $H_0 : \mu = 70$, a partir de una muestra aleatoria simple de tamaÃśo 64 extraÃŋda de una poblaciÃşn normal con $\sigma^2 = 256$?

169.- El salario anual medio de 1600 personas, elegidas aleatoria e independientemente de cierta poblaciÃşn de economistas con $\sigma = 20000$ euros, ha valido 45000 euros ¿Es compatible con este resultado la hipÃştesis nula, $H_0 : \mu = 43500$, suponiendo $\alpha = .01$? ¿CuÃąl es el intervalo de confianza para μ? Calcular el p-valor.

170.- Con los datos del ejercicio anterior , ¿son compatibles con el resultado obtenido los siguientes contrastes?:

a) $\begin{cases} H_0 : \mu = 44000 \\ H_1 : \mu > 44000 \end{cases}$

b) $\begin{cases} H_0 : \mu = 46250 \\ H_1 : \mu > 46250 \end{cases}$

171.- El peso medio de los paquetes de cafÃľ puestos a la venta por la casa comercial CAFEINASA es supuestamente de 1 Kg. Para comprobar esta suposiciÃşn, elegimos una muestra aleatoria simple de 100 paquetes y encontramos que su peso medio es de 0.978 Kg. y su desviaciÃşn tÃŋpica $s = 0.10$ kg. Siendo $\alpha = 0.05$ ¿es compatible este resultado con la hipÃştesis nula $H_0 : \mu = 1$ frente a $H_1 : \mu \neq 1$? ¿Lo es frente a $H_1 : \mu > 1$? Calcular el p-valor.

172.- El fabricante de la marca de tornillos FDE afirma que el diÃąmetro medio de sus tornillos vale 20 mm. Para comprobar dicha afirmaciÃşn, extraemos aleatoria e independientemente 16 tornillos , y vemos que la media de sus diÃąmetros es 22 mm. y la desviaciÃşn tÃŋpica 4 mm. ¿Podemos aceptar la pretensiÃşn del fabricante, suponiendo $\alpha = 0.05$ y siendo el contraste bilateral? Calcular el p-valor.

173.- Para evitar basarse en su intuiciÃşn los jefes de admisiÃşn de personal de las grandes empresas discriminan mediante un test diseÃśado por un gabinete de psicÃşlogos, supuestamente especializado en selecciÃşn de personal, a los aspirantes a trabajar en la empresa. La varianza del test de selecciÃşn solÃŋa venir siendo 100. Aplicando un nuevo test a una muestra aleatoria simple de tamaÃśo $n = 31$, se obtiene que $S = 129$. Suponiendo que la poblaciÃşn se distribuye normalmente, ¿es compatible la hipÃştesis nula $H_0 : \sigma^2 = 100$, frente a la alternativa $H_1 : \sigma^2 > 100$, con $\alpha = 0.01$? Calcular el p-valor.

174.- Una mÃąquina produce cierto tipo de piezas mecÃąnicas. El tiempo en producirlas se distribuye normalmente con varianza desconocida σ^2. Elegida una muestra aleatoria simple de 21 de dichas piezas $(x_1, \ldots, x_{21})$, se obtiene que $\overline{x} = 30$ y $\sum_{i=1}^{21} x_i^2 = 19100$. Comprobar si es compatible la hipÃştesis nula $H_0 : \sigma^2 = 22$ frente $H_1 : \sigma^2 \neq 22$, con $\alpha = 0.1$, y construir un intervalo de confianza del $(1-\alpha)100\%$ para el verdadero valor de σ^2. Calcular el p-valor.

175.- A partir de las puntuaciones 15, 22, 20, 21, 19 ,23, construir el intervalo de confianza de σ^2 y decir si es compatible con estos resultado la hipÃştesis $H_0 : \sigma = 2$, siendo $\alpha = 0.01$ contra una H_1 bilateral. Decir si se utiliza alguna hipÃştesis adicional. Calcular el p-valor.

176.- Sabiendo que con $\hat{p} = 0.52$ ha sido rechazada $H_0 : p = 0.50$, al nivel de significaciÃşn $\alpha = 0.05$, ¿cuÃąl ha tenido que ser el tamaÃśo mÃŋnimo de la muestra mediante la cual fue rechazada H_0

a) frente a $H_1 : p \neq 0.5$?

b) frente a $H_1 : p > 0.5$?

177.- Lanzamos una moneda al aire 10 veces consecutivas . ¿Con quÃľ nÃžmero de caras rechazaremos la hipÃştesis nula de que la moneda estÃą bien balanceada, siendo $\alpha = 0.05$?

178.- Un fabricante de productos farmacÃľuticos tiene que mantener un estÃąndar de impurezas en el proceso de producciÃşn de sus pÃŋldoras. Hasta ahora el nÃžmero medio poblacional de impurezas es correcto pero estÃą preocupado porque las impurezas en algunas de las partidas se salen del rango admitido de forma que provocan devoluciones y posibles reclamaciones por daÃśos a la salud. El gabinete de control de calidad afirma que si la distribuciÃşn de las impurezas es normal y que si el proceso de producciÃşn mantiene una varianza inferior a 1 no tendrÃŋa que existir ningÃžn problema pues las pÃŋldoras tendrÃŋan una concentraciÃşn aceptable. Preocupado por esta tema la direcciÃşn encarga una prueba externa en la que se toma una muestra aleatoria de 100 de las partidas obteniÃľndose $S^2 = 1.1$. ¿Puede aceptar el director de la prueba externa que el proceso de producciÃşn cumple la recomendaciÃşn del gabinete de control?

179.- Un IAP estÃą preocupado por su estÃąndar de calidad y quiere compararlo con el medio europeo. El estÃąndar medio europeo dice que una empresa de este sector tiene una calidad aceptable si tiene un nÃžmero de quejas que no excede del 3%.

Se sabe que la varianza de las quejas es 0.16. Examinando 64 clientes escogidos al azar se encuentra con que el porcentaje de quejas es del 3.07%. Calcular el p-valor.

a) Contrastar al nivel de significaciÃşn del 5%, la hipÃştesis nula de que la media poblacional del porcentaje de quejas es del 3% frente a la alternativa de que es superior al 3%.

b) Hallar el p-valor del contraste.

c) Supongamos que la hipÃştesis alternativa fuese bilateral en lugar de unilateral(con hipÃştesis nula $H_0 : \mu = 3$). Deducir, sin hacer ningÃžn cÃąlculo, si el p-valor del contraste serÃŋa mayor, menor o igual que el del apartado anterior. Construir un grÃąfico para ilustrar el razonamiento.

d) En el contexto de este problema, explicar por quÃľ una hipÃştesis alternativa unilateral es mÃąs apropiada que una bilateral.

180.- A partir de una muestra aleatoria se contrasta:

$$\begin{cases} H_0 : \mu = \mu_0 \\ H_1 : \mu > \mu_0 \end{cases}$$

y se acepta la hipÃştesis nula al nivel de significaciÃşn del 5%.

a) ¿Implica esto necesariamente que μ_0 estÃą contenido en el intervalo de confianza del 95% para μ?

b) Si la media muestral observada es mayor que μ_0, ¿implica necesariamente que μ_0 estÃą contenido en el intervalo de confianza del 90% para μ?

181.- Una compaÃśÃŋa que se dedica a la venta de franquicias afirma que, por tÃľrmino medio, los delegados obtienen un redimiendo del 10% en sus inversiones iniciales. Una muestra aleatoria de diez de estas franquicias presentaron los siguientes rendimientos el primer aÃśo de operaciÃşn:

6.1, 9.2, 11.5, 8.6, 12.1, 3.9 , 8.4, 10.1, 9.4, 8.9

Asumiendo que los rendimientos poblacionales tienen distribuciÃşn normal, contrastar la afirmaciÃşn de la compaÃśÃŋa.

182.- Una distribuidora de bebidas refrescantes afirma que una buena fotografÃŋa de tamaÃśo real de un conocido actor, incrementarÃą las ventas de un producto en los supermercados en una media de 50 cajas semanales. Para una muestra de 20 supermercados, el incremento medio fue de 41.3 cajas con una desviaciÃşn tÃŋpica de 12.2 cajas. Contrastar al nivel de significaciÃşn $\alpha = 0.05$, la hipÃştesis nula de que la media poblacional del incremento en las ventas es al menos 50 cajas, indicando cualquier supuesto que se haga. Calcular el p-valor del contraste e interpretarlo.

Problemas de bondad de ajuste

183.- Una compaÃśÃŋa de gas afirma, basÃąndose en experiencias anteriores, que normalmente, al final del invierno, el 80% de las facturas han sido ya cobradas, un 10% se cobrarÃą con pago aplazado a un mes, un 6% se cobrarÃą a 2 meses y un 4% se cobrarÃą a mÃąs de dos meses. Al final del invierno actual, la compaÃśÃŋa selecciona una muestra aleatoria de 400 facturas, resultando que 287 de estas facturas cobradas, 49 a cobrar en un mes, 30 a cobrar en dos meses y 34 a cobrar en un periodo superior a dos meses. ¿Podemos concluir, a raÃŋz de los resultados, que la experiencia de aÃśos anteriores se ha vuelto a repetir este invierno?

184.- El Rector de una Universidad opina que el 60% de los estudiantes consideran los cursos que realizan como muy Ãžtiles, el 20% como algo Ãžtiles y el 20% como nada Ãžtiles. Se toma una muestra aleatoria de 100 estudiantes, y se les pregunta sobre la utilidad de los cursos. Resultando que 68 estudiantes consideran que los cursos son muy Ãžtiles, 18 consideran que son poco Ãžtiles y 14 consideran que no son nada Ãžtiles. Contrastar la hipÃştesis nula de que los resultados obtenidos se corresponden con la opiniÃşn personal del Rector.

185.- Considerense los fondos de inversiÃşn ordenados en funciÃşn de su rendimiento en el periodo 1995-99. Se realizÃş un seguimiento del rendimiento en los cinco aÃśos posteriores de una muestra aleatoria de 65 fondos entre el 25% mÃąs rentable del periodo 1995-99. En este segundo periodo se observÃş que 11 de los fondos de la muestra se hallan entre el 25% mÃąs rentable en este segundo periodo, 17 en el segundo 25%, 18 en el tercer 25% y 19 en el 25% menos rentable. Contrastar la hipÃştesis de que un fondo de inversiÃşn escogido azar del 25% mÃąs rentable en 1995-99 tenga la misma probabilidad de hallarse en cualquiera de las cuatro categorÃŋas de rendimiento en el periodo 2000-2004.

186.- A una muestra aleatoria de 502 consumidores se les preguntÃş la importancia que se le daba al precio a la hora de elegir un ordenador. Se les pidiÃş que valoraran entre: "ninguna importancia", "alguna importancia" y "principal importancia". El nÃžmero respectivo de respuestas en cada tipo fueron 169, 136 y 197. Contrastar la hipÃştesis nula de que la probabilidad de que un consumidor elegido al azar conteste cualquiera de las tres respuestas es la misma.

187.- Durante cien semanas se ha venido observando el nÃžmero de veces a la semana que se ha fuera de servicio un servidor de una pequeÃśa empresa de informÃątica, presentÃąndose los resultados de la siguiente tabla:

NÃžm. Fuera Servicio	0	1	2	3	4	5 o mÃąs
NÃžm. Semanas	10	24	32	23	6	5

El nÃžmero medio de veces que quedo fuera de servicio por semana durante este periodo fue de 2.1. Contrastar la hipÃştesis nula de que la distribuciÃşn de averÃŋas es una Poisson.

188.- A lo largo de 100 minutos, llegaron a una web de un periÃşdico 100 internautas. La siguiente tabla muestra la frecuencia de llegadas a lo largo de ese intervalo de tiempo.

NÃžm. llegadas/min.	0	1	2	3	4 o mÃąs
Frec. Observada	10	26	35	24	5

Contrastar la hipÃştesis nula de que la distribuciÃşn es Poisson.

KS test.

189.- Se quiere saber si el tiempo entre accesos, en una determinada franja horaria, a una cierta pÃągina web sigue una ley exponencial. Se dispone de la siguiente muestra de 25 intervalos entre tiempos de acceso:

$140.7, 13.7, 67.6, 7.8, 49.3, 128.5, 59.6, 234, 171.1, 205.8, 99.3, 199.8, 100.8, 13.5, 12, 33.9, 44.1, 12.3, 56.4,$

Resolver manualmente o utilizando R las siguientes cuestiones.

a) Contrastar la hipÃştesis de que la distribuciÃşn sigue una ley exponencial de parÃąmetro $\lambda = 100$, al nivel $\alpha = 0.05$.

b) Contrastar la hipÃştesis de que la distribuciÃşn sigue una ley Poisson de parÃąmetro $\lambda = 105$, al nivel $\alpha = 0.05$.

c) Contrastar la hipÃştesis de que la distribuciÃşn sigue una ley Poisson de parÃąmetro $\lambda = 110$, al nivel $\alpha = 0.05$.

d) Contrastar la hipÃştesis de que la distribuciÃşn sigue una ley Poisson, estimando el parÃąmetro parÃąmetro partir de la muestra, al nivel $\alpha = 0.05$.

190.- Resolver las mismas cuestiones que en el problema anterior para la muestra (decir si se viola algunas de las condiciones del test KS, pero resolver igualmente el ejercicio):

$$69.9, 31.5, 130.2, 80.5, 236.1, 151.2, 74.8, 13.8, 54.5, 147.6$$

En esta ocasiÃşn realizar los cÃąlculos manualmente.

191.- Nos hemos bajado un generador de nÃžmeros aleatorios normales de internet. Queremos contrastar si funciona correctamente. Para ello generamos una muestra de 10 nÃžmeros aleatorios de una normal estÃąndar:

$$-1.18, -0.77, -0.59, -0.27, -0.12, 0.27, 0.29, 0.40, 1.27, 1.60$$

a) Contrastar si provienen de una normal estÃąndar al nivel de significaciÃşn $\alpha = 0.05$ mediante el test KS. Decir si ha violado alguna de las suposiciones de este test.

b) Contrastar la hipÃştesis de normalidad contra una distribuciÃşn normal de media y varianza la estimadas a partir de la muestra.

192.- Con la muestra:

$$0.60, -1.42, 1.05, -0.14, 0.57, 0.11, -0.59, 1.11, -1.55, -1.41$$

Contrastar con un test KS si los datos provienen de una distribuciÃşn uniforme en el intervalo $(-2, 2)$ al nivel $\alpha = 0.05$

Contrastes de dos parÃąmetros.

ComparaciÃşn de medias.

Los siguientes problemas tratan de contrastes de parÃąmetros entre dos muestras. Para cada uno de los enunciados contratar contra las hipÃştesis unilaterales y bilaterales. Calcular tambiÃľn el intervalo de confianza para la diferencia o el cociente de los parÃąmetros. Tomar finalmente la decisiÃşn mÃąs correcta. Calcular todos los test e intervalos de confianza para $\alpha = 0.05$. Calcular el p-valor en cada caso.

193.- Para comparar la producciÃşn media de dos procedimientos de fabricaciÃşn de cierto elemento se toman dos muestras, una con los elementos fabricados durante 25 dÃŋas con el primer mÃľtodo y otra con los producidos durante 16 dÃŋas con el segundo mÃľtodo. Por experiencia se sabe que la varianza del primer procedimiento es $\sigma_1^2 = 12$ y al del segundo $\sigma_2^2 = 10$. De las muestras obtenemos que $\overline{X}_1 = 136$ para el primer procedimiento y $\overline{X}_2 = 128$ para el segundo.

194.- Estamos interesados en comparar la vida media, expresada en horas de dos tipos de componentes electrÃşnicos. Para ello se toma una muestra de cada tipo y se obtiene:

Tipo	tamaÃśo	$\overline{X}$	S
1	50	1260	20
2	100	1240	18

Suponer si es necesario las poblaciones aproximadamente normales.

195.- Para reducir la concentraciÃşn de Ãącido Ãžrico en la sangre se prueban dos drogas. La primera se aplica a un grupo de 8 pacientes y la segunda a un grupo de 10. Las disminuciones observadas en las concentraciones de Ãącido Ãžrico de los distintos pacientes expresadas en tantos por cien de concentraciÃşn despuÃľs de aplicado el tratamiento son:

droga 1	20	12	16	18	13	22	15	20		
droga 2	17	14	12	10	15	13	9	19	20	11

Suponer que las reducciones de Ãącido Ãžrico siguen una distribuciÃşn normal son independientes y de igual varianza. ÃŊdem pero suponiendo que las varianza son distintas.

196.- Para comparar la dureza media de dos tipos de aleaciones (tipo 1 y tipo 2) se hacen 5 pruebas de dureza con la de tipo 1 y 7 con la de tipo 2. ObteniÃľndose los resultados siguientes:

$$\overline{X}_1 = 18.2, \quad S_1 = 0.2 \text{ y}$$

$$\overline{X}_2 = 17.8; \quad S_2 = 0.5$$

Suponer que la poblaciÃşn de las durezas es normal y que las desviaciones tÃŋpicas no son iguales. Hacer lo mismo si las varianzas son distintas.

197.- Se encuestÃş a dos muestras independientes de internautas, una en Menorca y otra en Mallorca, sobre si utilizaban telefonÃŋa por intenet. La encuesta de Menorca tuvo un tamaÃśo $n_1 = 500$ y 100 usuarios mientras que en Mallorca se encuestarron a $n_2 = 750$ y se obtuvo un resultado de 138 usuarios.

198.- Se pregunta a un grupo de 100 personas elegido al azar asiste a una conferencia sobre tecnologÃŋas de la comunicaciÃşn. Antes de la conferencia se les pregunta si consideran a internet peligrosa, despuÃľs de la conferencia se les vuelve a preguntar cual es su opiniÃşn. Los resultados fueron los siguientes:

		DespuÃľs	
		SÃŋ es peligrosa	No es peligrosa
Antes	SÃŋ es peligrosa	50	30
	No es peligrosa	5	15

199.- Tenemos 10 ordenadores, deseamos optimizar su funcionamiento. Con este fin se piensa en ampliar su memoria. Se les pasa una prueba de rendimiento antes y despuÃľs de ampliar la memoria. Los resultados fueron:

	Ordenador									
Muestra/Tiempo	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
Antes ampliaciÃşn	98.70	100.48	103.75	114.41	97.82	91.13	85.42	96.8	107.76	112.94
DespuÃľs ampliaciÃşn	99.51	114.44	108.74	97.92	103.54	104.75	109.69	90.8	110.04	110.09

200.- Las siguientes muestras provienen de dos poblaciones independientes y supuestamente normales. Se desea comparar la igualdan de sus medias, pero antes debemos contrastar si podemos o no aceptar que sus varianza son iguales o distintas. Se pide hacer el contraste de las medias en el caso en que se se decida aceptar varianzas iguales o distintas al nivel de significaciÃşn $\alpha = 0.05$.

Contrastar tambien la hipÃştesis de igualdad de medias en el otro caso (es decir si se decide varianzas ditintas contrastar para iguales y viceversa).