

Variables Aleatorias I

Hasta ahora nuestros sucesos han sido de varios tipos: $\{C, +\}$ en la moneda, nombres de periódicos, ángulos en una ruleta, número de veces que sale cara en el lanzamiento de una moneda etc. . . .

Necesitamos estandarizar de alguna manera todos estos sucesos. Una solución es asignar a cada suceso un cierto conjunto de números reales, es decir, convertir todos los sucesos en **sucesos de números reales** para trabajar con ellos de forma unificada.

Para conseguirlo utilizaremos unas funciones que transformen los elementos del espacio muestral en números; estas funciones son las variables aleatorias.

Definición de variable aleatoria

Comenzaremos dando una definición práctica de variable aleatoria.

Definición

Definición práctica de **variable aleatoria** (v.a.) es una aplicación que toma valores numéricos determinados por el resultado de un experimento aleatorio

$$X : \Omega \rightarrow \mathbb{R}$$

Notación:

- Normalmente representaremos las v.a. por letras mayúsculas $X, Y, Z \dots$
- Los valores que “**toman**” las v.a. los representaremos por letras minúsculas (las mismas en principio) $x, y, z \dots$

Ejemplo

Lanzamos un dado convencional de parchís el espacio muestral del experimento es

$$\Omega = \{\square, \begin{smallmatrix} \square \\ \bullet \end{smallmatrix}, \begin{smallmatrix} \square & \square \\ \bullet & \bullet \end{smallmatrix}, \begin{smallmatrix} \square & \square & \square \\ \bullet & \bullet & \bullet \end{smallmatrix}, \begin{smallmatrix} \square & \square & \square & \square \\ \bullet & \bullet & \bullet & \bullet \end{smallmatrix}, \begin{smallmatrix} \square & \square & \square & \square & \square \\ \bullet & \bullet & \bullet & \bullet & \bullet \end{smallmatrix}\}$$

y una v.a $X : \Omega \rightarrow \mathbb{R}$ sobre este espacio queda definida por

$$X(\square) = 1, X(\begin{smallmatrix} \square \\ \bullet \end{smallmatrix}) = 2, X(\begin{smallmatrix} \square & \square \\ \bullet & \bullet \end{smallmatrix}) = 3,$$

$$X(\begin{smallmatrix} \square & \square & \square \\ \bullet & \bullet & \bullet \end{smallmatrix}) = 4, X(\begin{smallmatrix} \square & \square & \square & \square \\ \bullet & \bullet & \bullet & \bullet \end{smallmatrix}) = 5, X(\begin{smallmatrix} \square & \square & \square & \square & \square \\ \bullet & \bullet & \bullet & \bullet & \bullet \end{smallmatrix}) = 6.$$

Ahora el suceso $A = \{\begin{smallmatrix} \square & \square \\ \bullet & \bullet \end{smallmatrix}, \begin{smallmatrix} \square & \square & \square \\ \bullet & \bullet & \bullet \end{smallmatrix}, \begin{smallmatrix} \square & \square & \square & \square \\ \bullet & \bullet & \bullet & \bullet \end{smallmatrix}\}$, es decir “salir número par”, es equivalente a $\{X = 2, X = 4, X = 6\}$.

El suceso $B = \{\square, \begin{smallmatrix} \square \\ \bullet \end{smallmatrix}, \begin{smallmatrix} \square & \square \\ \bullet & \bullet \end{smallmatrix}\}$, es decir “salir un número inferior o igual a 3” es en términos de la v.a. $\{X = 1, X = 2, X = 3\}$ o también $\{X \leq 3\}$.

Consideremos el experimento lanzar una anilla al cuello de una botella. Si acertamos a ensartar la anilla en la botella el resultado del experimento es **éxito** y **fracaso** en caso contrario.

El espacio muestral asociado a este experimento será $\Omega = \{\text{éxito}, \text{fracaso}\}$. Construyamos la siguiente variable aleatoria:

$$X : \{\text{éxito}, \text{fracaso}\} \rightarrow \mathbb{R}$$

definida por

$$X(\text{éxito}) = 1 \text{ y } X(\text{fracaso}) = 0.$$

Hay dos tipos fundamentales de variables aleatorias, las discretas y las continuas. Damos a continuación una definición informal de estos tipos.

Definición

- a) Una variable aleatoria es **discreta** si sólo puede tomar una cantidad numerable de valores con probabilidad positiva.
- b) Las variables aleatorias **continuas** toman valores en intervalos.
- c) Variables aleatorias **mixtas**; con una parte discreta y otra continua.

Son variables **aleatorias discretas**:

- Número de artículos defectuosos en un cargamento.
- Número de clientes que llegan a una ventanilla de un banco en una hora.
- Número de errores detectados en las cuentas de una compañía.
- Número de reclamaciones de una póliza de un seguro médico.

Son variables **aleatorias continuas**:

- Renta anual de una familia.
- Cantidad de petróleo importado por un país
- Variación del precio de las acciones de una compañía de telecomunicaciones.
- Porcentaje de impurezas en un lote de productos químicos.

Distribuciones de probabilidad para v.a. discretas.

- Pasamos ahora a describir el comportamiento de la v.a. Para ello utilizaremos distintas funciones que nos darán algunas probabilidades de la variable aleatoria.
- En el caso discreto estas funciones son la de probabilidad, y la función de distribución o de probabilidad acumulada.
- En el caso discreto la función de probabilidad es la que nos da las probabilidades de los sucesos elementales de la v.a. que definimos a continuación.

Definición

La **función de probabilidad** (*probability mass function* o incluso abusando de notación *probability density function*) de una variable aleatoria discreta X a la que denotaremos por $P_X(x)$ está definida por

$$P_X(x) = P(X = x)$$

es decir la probabilidad de que X tome el valor x . Si X no asume ese valor entonces $P_X(x) = 0$.

El conjunto

$$D_X = \{x \in \mathbb{R} \mid P_X(x) > 0\}$$

recibe el nombre de **dominio** de la v.a. y son los valores posibles de esta variable.

En el caso discreto lo más habitual es que $X(\Omega) = D_X$.

Ejemplo

Lanzamos un dado de parchís una vez, en esta ocasión representaremos los sucesos elementales por el número de puntos de la cara obtenida, tenemos que

$$\Omega = \{1, 2, 3, 4, 5, 6\}$$

y la variables aleatoria $X : \Omega \rightarrow \mathbb{R}$ viene definida por

$$X(i) = i \text{ para } i = 1, 2, 3, 4, 5, 6.$$

Supongamos que el dado está bien balanceado. Entonces

$$P_X(1) = P_X(2) = P_X(3) = P_X(4) = P_X(5) = P_X(6) = \frac{1}{6}$$

Concretamente:

$$P_X(x) = \begin{cases} \frac{1}{6} & \text{si } x = 1, 2, 3, 4, 5, 6 \\ 0 & \text{en otro caso} \end{cases}$$

Su dominio es

$$D_X = \{1, 2, 3, 4, 5, 6\}.$$

Ejemplo

Variables
AleatoriasVariables aleatorias
IDistribuciones de
probabilidad para
v.a. discretas.Función de
probabilidad de una
variable aleatoria
discretaPropiedades de la
función de
probabilidadFunción de
distribuciónMomentos de
variables aleatorias
discretas

Sea X la v.a. asociada al lanzamiento de una moneda. SU espacio muestra es $\Omega = \{c, +\}$, la v.a. queda definida por:

$$X(\omega) = \begin{cases} 1 & \text{si } \omega = c \\ 0 & \text{si } \omega = + \end{cases}$$

entonces su función de probabilidad es:

$$P_X(x) = P(X = x) = \begin{cases} \frac{1}{2} & \text{si } x = 0, 1 \\ 0 & \text{en otro caso} \end{cases}$$

Finalmente su dominio es $D_X = \{0, 1\}$.

Ejemplo

Tenemos una urna con tres bolas rojas, una negra y dos blancas. Realizamos una extracción y observamos el color de la bola entonces un espacio muestral es

$$\Omega = \{roja, blanca, negra\}.$$

Una variable aleatoria asociada al experimento es:

$$X(\omega) = \begin{cases} 1 & \text{si } \omega = \textit{roja} \\ 2 & \text{si } \omega = \textit{negra} \\ 3 & \text{si } \omega = \textit{blanca} \end{cases}$$

entonces

$$P_X(x) = \begin{cases} \frac{3}{6} & \text{si } x = 1 \\ \frac{1}{6} & \text{si } x = 2 \\ \frac{2}{6} & \text{si } x = 3 \\ 0 & \text{en otro caso} \end{cases}$$

El dominio de X es $D_X = \{1, 2, 3\}$.

Sea X una v.a. discreta $X : \Omega \rightarrow \mathbb{R}$ con dominio D_X . Su función de probabilidad P_X verifica las siguientes propiedades:

- a) $0 \leq P_X(x) \leq 1$ para todo $x \in \mathbb{R}$
- b) $\sum_{x \in D_X} P_X(x) = 1$

Lanzamos al aire tres veces, de forma independiente, una moneda perfecta. El espacio muestral de este experimento es

$$\Omega = \{ccc, cc+, c+c, +cc, c++, +c+, ++c, +++\}$$

(expresados en orden de aparición).

Este espacio tiene todos los sucesos elementales equiprobables.

Consideremos la variable aleatoria asociada a este experimento $X =$ número de caras en los tres lanzamientos.

Ejemplo

Variables
Aleatorias

Variables aleatorias
I

Distribuciones de
probabilidad para
v.a. discretas.

Función de
probabilidad de una
variable aleatoria
discreta

Propiedades de la
función de
probabilidad

Función de
distribución

Momentos de
variables aleatorias
discretas

Entonces

$$P(X = 0) = P(\{+++ \}) = \frac{1}{8}$$

$$P(X = 1) = P(\{c++ , +c+ , ++c \}) = \frac{3}{8}$$

$$P(X = 2) = P(\{cc+ , c+c , +cc \}) = \frac{3}{8}$$

$$P(X = 3) = P(\{ccc \}) = \frac{1}{8}$$

La función de probabilidad de X es:

$$P_X(x) = \begin{cases} \frac{1}{8} & \text{si } x = 0, 3 \\ \frac{3}{8} & \text{si } x = 1, 2 \\ 0 & \text{en otro caso} \end{cases}$$

Definición

La función de **distribución de probabilidad** (acumulada) de la v.a. X (de cualquier tipo; discreta o continua) $F_X(x)$ representa la probabilidad de que X tome un menor o igual que x es decir

$$F_X(x) = P(X \leq x)$$

Esta función también se denomina función de **distribución de probabilidad o simplemente función de distribución** de una v.a., y en inglés **cumulative distribution function** por lo que se abrevia con el acrónimo **cdf**.

Sea X una v.a. y F_X su función de distribución:

1) $P(X > x) = 1 - P(X \leq x) = 1 - F_X(x)$

2) Sea a y b tales que $a < b$,

$$P(a < X \leq b) = P(X \leq b) - P(X \leq a) = F_X(b) - F_X(a)$$

Demostración:

$$1) \overline{\{X > x\}} = \{X \leq x\}.$$

$$P(X > x) = 1 - P(\overline{\{X > x\}}) = 1 - P(X \leq x) = 1 - F_X(x)$$

$$2) \{a < X \leq b\} = \{X \leq b\} - \{X \leq a\}$$

$$P(a < X \leq b) = P(\{X \leq b\} - \{X \leq a\}) =$$

$$P(\{X \leq b\}) - P(\{X \leq a\}) = F_X(b) - F_X(a).$$

Propiedades

Sea F_X la función de distribución de una v.a. X entonces:

- a) $0 \leq F_X(x) \leq 1$.
- b) La función F_X es no decreciente.
- c) La función F_X es continua por la derecha.
- d) Si denotamos por $F_X(x_0^-) = \lim_{x \rightarrow x_0^-} F(x)$, entonces se cumple que $P(X < x_0) = F_X(x_0^-)$ y que $P(X = x_0) = F_X(x_0) - F_X(x_0^-)$.
- e) Se cumple que $\lim_{x \rightarrow \infty} F_X(x) = 1$; $\lim_{x \rightarrow -\infty} F_X(x) = 0$.
- f) Toda función F verificando las propiedades anteriores es función de distribución de alguna v.a. X .
- g) $P(X > x) = 1 - F_X(x)$
- h) Dados $a, b \in \mathbb{R}$ con $a < b$

$$P(a < X \leq b) = F_X(b) - F_X(a).$$

En las propiedades anteriores no se pueden cambiar en general las desigualdades de estrictas o no estrictas, veamos que propiedades tenemos cuando se cambian estas desigualdades. Sea F_X una función de distribución de la v.a. X y denotamos por $F_X(x_0^-) = \lim_{x \rightarrow x_0^-} F_X(x)$, entonces.

- a) $P(X = x) = F_X(x) - F_X(x^-)$
- b) $P(a < X < b) = F_X(b^-) - F_X(a)$
- c) $P(a \leq X < b) = F_X(b^-) - F_X(a^-)$
- d) $P(X < a) = F_X(a^-)$
- e) $P(a \leq X \leq b) = F_X(b) - F_X(a^-)$
- f) $P(X \geq a) = 1 - F_X(a^-)$

- a) Si F_X es continua en x se tiene que $P(X = x) = 0$. Así que si la v.a. es continua
- $$P(X \leq a) = P(X < a) + P(X = a) = P(X < a) \text{ y propiedades similares.}$$
- b) Sea X una variable aleatoria discreta que con dominio D_X y que tiene por función de probabilidad $P_X(x)$ entonces su función de distribución $F_X(x_0)$ es

$$F_X(x_0) = \sum_{x \leq x_0} P_X(x)$$

donde $\sum_{x \leq x_0}$ indica que sumamos todos los $x \in D_X$ tales que $x \leq x_0$

Demostración:

a) Si X es continua

$$P(X = a) = F(a) - F(a^-) = F(a) - F(a) = 0$$

por lo tanto

$$\begin{aligned} P(X \leq a) &= P(X < a) + P(X = a) \\ &= P(X < a) + 0 = P(X < a). \end{aligned}$$

b)

$$\begin{aligned} F_X(x_0) &= P(X \leq x_0) = P\left(\bigcup_{x \leq x_0; x \in D_X} \{x\}\right) \\ &= \sum_{x \leq x_0} P(X = x) = \sum_{x \leq x_0} P_X(x). \end{aligned}$$

Ejemplo

En el experimento del dado se tiene que:

$$P_X(x) = \begin{cases} \frac{1}{6} & \text{si } x = 1, 2, 3, 4, 5, 6 \\ 0 & \text{en el resto de casos} \end{cases},$$

por lo tanto

$$F_X(x) = P(X \leq x) = \begin{cases} 0 & \text{si } x < 1 \\ \frac{1}{6} & \text{si } 1 \leq x < 2 \\ \frac{2}{6} & \text{si } 2 \leq x < 3 \\ \frac{3}{6} & \text{si } 3 \leq x < 4 \\ \frac{4}{6} & \text{si } 4 \leq x < 5 \\ \frac{5}{6} & \text{si } 5 \leq x < 6 \\ 1 & \text{si } 6 \leq x \end{cases}$$

Variables
Aleatorias

Variables aleatorias
I

Distribuciones de
probabilidad para
v.a. discretas.

Función de
probabilidad de una
variable aleatoria
discreta

Propiedades de la
función de
probabilidad

Función de
distribución

Momentos de
variables aleatorias
discretas

Ejemplo

Calculemos más detalladamente algún valor de F_X , por ejemplo:

$$\begin{aligned}F_X(3.5) &= P(X \leq 3.5) = P(\{X = 1\} \cup \{X = 2\} \cup \{X = 3\}) \\&= P(\{X = 1\}) + P(\{X = 2\}) + P(\{X = 3\}) \\&= \frac{1}{6} + \frac{1}{6} + \frac{1}{6} = \frac{3}{6} = \frac{1}{2},\end{aligned}$$

o de otra forma

$$\begin{aligned}F_X(3.5) &= \sum_{x \leq 3.5} P_X(x) = \sum_{x=1}^3 P(X = x) \\&= \sum_{x=1}^3 \frac{1}{6} = 3 \cdot \frac{1}{6} = \frac{1}{2}.\end{aligned}$$

Propiedades de la función de distribución

Variables
Aleatorias

Variables aleatorias
I

Distribuciones de
probabilidad para
v.a. discretas.

Función de
probabilidad de una
variable aleatoria
discreta

Propiedades de la
función de
probabilidad

Función de
distribución

Momentos de
variables aleatorias
discretas

Sea X una variable con función de distribución F_X entonces:

- a) $0 \leq F_X(x) \leq 1$ para todo x
- b) Si $x < x'$ entonces

$$F_X(x) \leq F_X(x').$$

Es una función creciente, no necesariamente estrictamente creciente.

- c) $\lim_{x \rightarrow -\infty} F_X(x) = 0$ y $\lim_{x \rightarrow +\infty} F_X(x) = 1$
- d) Es continua por la derecha $\lim_{x \rightarrow x_0^+} F_X(x) = F_X(x_0)$.

Momentos de variables aleatorias discretas

Variables
Aleatorias

Variables aleatorias
I

Distribuciones de
probabilidad para
v.a. discretas.

Momentos de
variables aleatorias
discretas

Esperanza para
variables aleatorias
discretas

Esperanzas de
funciones de variables
aleatorias discretas

Momentos de una
variable aleatoria

Varianza de una
variable aleatoria

- Al igual que en estadística descriptiva utilizamos distintas medidas para resumir los valores centrales y para medir la dispersión de una muestra, podemos definir las correspondiente medidas para variables aleatorias.
- Estas medidas se les suele añadir el adjetivo poblacionales mientras que a las que provienen de la muestra se las adjetiva como muestrales.

Por ejemplo podemos buscar un valor que resuma toda la variable. Este valor es el que “**esperamos**” que se resuma la v.a. o esperamos que las realizaciones de la v.a. queden cerca de él. Veamos su definición formal.

Definición

El valor **esperado o esperanza** (*expected value* en inglés) $E(X)$ de una v.a. discreta X , se define como

$$E(X) = \sum_{x \in X(\Omega)} x P_X(x)$$

En ocasiones se le domina **media** (*mean* en inglés *mitjana* en catalán) poblacional o simplemente media y muy frecuentemente se la denota $\mu_X = E(X)$ o simplemente $\mu = E(X)$.

Variables
AleatoriasVariables aleatorias
IDistribuciones de
probabilidad para
v.a. discretas.Momentos de
variables aleatorias
discretasEsperanza para
variables aleatorias
discretasRelación de la
esperanza para
variables aleatorias
discretas con la
media aritméticaEsperanzas de
funciones de variables
aleatorias discretasMomentos de una
variable aleatoriaVarianza de una
variable aleatoria

Supongamos que lanzamos un dado n veces y obtenemos unas frecuencias absolutas n_i para el resultado i con $i = 1, \dots, 6$. Sea X la v.a. que nos representa el valor de una tirada del dado.

Calculemos la media aritmética (o media muestral) de los datos

$$\bar{X} = \frac{1 \cdot n_1 + 2 \cdot n_2 + 3 \cdot n_3 + 4 \cdot n_4 + 5 \cdot n_5 + 6 \cdot n_6}{n} = \sum_{x=1}^6 x \frac{n_x}{n}.$$

Variables
Aleatorias

Variables aleatorias
I

Distribuciones de
probabilidad para
v.a. discretas.

Momentos de
variables aleatorias
discretas

Esperanza para
variables aleatorias
discretas

Relación de la
esperanza para
variables aleatorias
discretas con la
media aritmética

Esperanzas de
funciones de variables
aleatorias discretas

Momentos de una
variable aleatoria

Varianza de una
variable aleatoria

Si $n \rightarrow \infty$ se tiene que

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{n_x}{n} = P_X(x).$$

Por lo tanto

$$E(X) = \lim_{n \rightarrow \infty} \sum_{x=1}^6 x \frac{n_x}{n}.$$

Entonces el valor esperado en una v.a. discreta puede entenderse como el valor promedio que tomaría una v.a. en un número grande de repeticiones.

Ejemplo

Variables
Aleatorias

Variables aleatorias
I

Distribuciones de
probabilidad para
v.a. discretas.

Momentos de
variables aleatorias
discretas

Esperanza para
variables aleatorias
discretas

Relación de la
esperanza para
variables aleatorias
discretas con la
media aritmética

Esperanzas de
funciones de variables
aleatorias discretas

Momentos de una
variable aleatoria
Varianza de una
variable aleatoria

Sea X = número de erratas en una página de un texto con dominio $D_X = \{0, 1, 2\}$, y resulta que

$$P(X = 0) = 0.42, P(X = 1) = 0.4, P(X = 2) = 0.18.$$

entonces

$$E(X) = 0 \cdot 0.42 + 1 \cdot 0.4 + 2 \cdot 0.18 = 0.76.$$

Elegida una página del texto al azar esperamos encontrar 0.76 errores.

Ejemplo

Variables
Aleatorias

Variables aleatorias
I

Distribuciones de
probabilidad para
v.a. discretas.

Momentos de
variables aleatorias
discretas

Esperanza para
variables aleatorias
discretas

Esperanzas de
funciones de variables
aleatorias discretas

Momentos de una
variable aleatoria
Varianza de una
variable aleatoria

Supongamos que en el ejemplo anterior el editor nos paga 2 euros por cada página que encontremos con 1 error y 3 euros por cada página con dos errores (y nada por las páginas correctas) ¿Cuánto esperamos cobrar si analizamos una página?

$$0 \cdot 0.42 + 2 \cdot 0.4 + 3 \cdot 0.18 = 1.34$$

Esperanzas de funciones de variables aleatorias discretas

Variables
Aleatorias

Variables aleatorias
I

Distribuciones de
probabilidad para
v.a. discretas.

Momentos de
variables aleatorias
discretas

Esperanza para
variables aleatorias
discretas

Esperanzas de
funciones de variables
aleatorias discretas

Momentos de una
variable aleatoria
Varianza de una
variable aleatoria

Definición

Sea X una v.a. discreta con función de probabilidad P_X y de distribución F_X . Entonces el **valor esperado de una función** $g(x)$ es :

$$E(g(X)) = \sum_x g(x)P_X(x).$$

Propiedades de los valores esperados

Variables
Aleatorias

Variables aleatorias
I

Distribuciones de
probabilidad para
v.a. discretas.

Momentos de
variables aleatorias
discretas

Esperanza para
variables aleatorias
discretas

Esperanzas de
funciones de variables
aleatorias discretas

Momentos de una
variable aleatoria

Varianza de una
variable aleatoria

- a) $E(k) = k$. para cualquier constante k .
- b) Si $a \leq X \leq b$ entonces $a \leq E(X) \leq b$.
- c) Si X es una v.a. discreta que toma valores enteros no negativos entonces $E(X) = \sum_{x=0}^{+\infty} (1 - F_X(x))$.

Ejemplo

Variables
Aleatorias

Variables aleatorias
I

Distribuciones de
probabilidad para
v.a. discretas.

Momentos de
variables aleatorias
discretas

Esperanza para
variables aleatorias
discretas

Esperanzas de
funciones de variables
aleatorias discretas

Momentos de una
variable aleatoria

Varianza de una
variable aleatoria

Supongamos que estamos sentados delante de nuestro ordenador con un amigo y le decimos que en dos minutos podemos programar una paleta para poner colores a unos gráficos.

Queremos la que paleta tenga dos botones con las opciones color rojo y color azul. Como hemos programado a gran velocidad resulta que el programa tiene un error; cada vez que se abre la paleta los colores se colocan al azar (con igual probabilidad) en cada botón, así que no sabemos en que color hemos de pinchar.

Además, como nos sobraron 15 segundos para hacer el programa y pensando en la comodidad del usuario, la paleta se cierra después de haber seleccionado un color y hay que volverla a abrir de nuevo.

La pregunta es ¿cuál es el valor esperado del número de veces que hemos pinchar el botón de color azul antes de obtener este color?

Ejemplo

Variables
AleatoriasVariables aleatorias
IDistribuciones de
probabilidad para
v.a. discretas.Momentos de
variables aleatorias
discretasEsperanza para
variables aleatorias
discretasEsperanzas de
funciones de variables
aleatorias discretasMomentos de una
variable aleatoria
Varianza de una
variable aleatoria

Llamemos X al número de veces que pinchamos en el botón azul (y nos sale rojo) hasta obtener el primer azul. La variable X toma valores en los enteros no negativos. Su función de probabilidad queda determinada por

$$P_X(x) = P(X = x) = P(\overbrace{\text{rojo, rojo, } \dots, \text{rojo}}^{x \text{ veces}}, \text{azul}) = \left(\frac{1}{2}\right)^{x+1}$$

Propiedades de las series geométricas

Recordemos conceptos básicos de las series geométricas.

- Una progresión geométrica es una sucesión de la forma

$$r^0, r^1, \dots, r^n, \dots$$

El valor r recibe el nombre de razón de la progresión geométrica.

- La serie geométrica es la suma de todos los valores de

la progresión geométrica $\sum_{k=0}^{+\infty} r^k$.

- Las sumas parciales desde el término n_0 al n de una progresión geométrica son $\sum_{k=n_0}^n r^k = \frac{r^{n_0} - r^{n+1}}{1-r}$.

- Si $|r| < 1$ la serie geométrica es convergente y

$$\sum_{k=0}^{+\infty} r^k = \frac{1}{1-r}. \text{ En el caso en que se comience en } n_0 \text{ se}$$

$$\text{tiene que } \sum_{k=n_0}^{+\infty} r^k = \frac{r^{n_0}}{1-r}.$$

Variables
AleatoriasVariables aleatorias
IDistribuciones de
probabilidad para
v.a. discretas.Momentos de
variables aleatorias
discretasEsperanza para
variables aleatorias
discretasEsperanzas de
funciones de variables
aleatorias discretasMomentos de una
variable aleatoriaVarianza de una
variable aleatoria

- Si $|r| < 1$ también son convergentes las derivadas, respecto de r , de la serie geométrica y convergen a la derivada correspondiente. Así tenemos que

$$\begin{aligned}\left(\sum_{k=0}^{+\infty} r^k\right)' &= \sum_{k=1}^{+\infty} k r^{k-1} \\ &= \left(\frac{1}{1-r}\right)' = \frac{1}{(1-r)^2} \cdot \\ \left(\sum_{k=0}^{+\infty} r^k\right)'' &= \sum_{k=2}^{+\infty} k(k-1) r^{k-2} \\ &= \left(\frac{1}{1-r}\right)'' = \frac{2}{(1-r)^3} \cdot\end{aligned}$$

Ejemplo

Su esperanza es

$$\begin{aligned} E(X) &= \sum_{x=0}^{+\infty} xP(X=x) = \sum_{x=0}^{+\infty} x \left(\frac{1}{2}\right)^{x+1} \\ &= \left(\frac{1}{2}\right)^2 \sum_{x=1}^{+\infty} x \left(\frac{1}{2}\right)^{x-1} = \left(\frac{1}{2}\right)^2 \frac{1}{\left(1 - \frac{1}{2}\right)^2} = 1. \end{aligned}$$

Ahora calculemos su función de distribución

$$\begin{aligned} F_X(x) &= P(X \leq x) = \sum_{k=0}^x P(X=k) = \sum_{k=0}^x \left(\frac{1}{2}\right)^{k+1} \\ &= \frac{\frac{1}{2} - \frac{1}{2}^{x+1} \frac{1}{2}}{1 - \frac{1}{2}} = 1 - \left(\frac{1}{2}\right)^{x+1}. \end{aligned}$$

Variables
Aleatorias

Variables aleatorias
I

Distribuciones de
probabilidad para
v.a. discretas.

Momentos de
variables aleatorias
discretas

Esperanza para
variables aleatorias
discretas

Esperanzas de
funciones de variables
aleatorias discretas

Momentos de una
variable aleatoria

Varianza de una
variable aleatoria

Ejemplo

Variables
AleatoriasVariables aleatorias
IDistribuciones de
probabilidad para
v.a. discretas.Momentos de
variables aleatorias
discretasEsperanza para
variables aleatorias
discretasEsperanzas de
funciones de variables
aleatorias discretasMomentos de una
variable aleatoria
Varianza de una
variable aleatoria

Como la variable toma valores enteros positivos, podemos calcular su valor esperado de esta otra manera

$$E(X) = \sum_{x=0}^{+\infty} (1 - F_X(x)) = \sum_{x=0}^{+\infty} \left(\frac{1}{2}\right)^{x+1} = \frac{1}{2} \frac{1}{1 - \frac{1}{2}} = 1.$$

Como ejercicio calculad el valor esperado de la variable

Y = número de intentos para conseguir el color azul.

Definición

- Llamaremos **momento de orden r** respecto al punto C a $E((X - C)^m)$.
- Cuando $C = 0$ los momentos reciben el nombre de **momentos respecto al origen**.
- Cuando $C = E(X)$ reciben el nombre de **momentos centrales o respecto de la media**

Luego la esperanza es el momento de orden 1 respecto al origen. Estos momentos son la versión poblacional de los momentos que vimos en el capítulo de estadística descriptiva, recibiendo estos último el nombre de momentos muestrales.

- Hemos descrito el comportamiento aleatorio de una v.a. discreta mediante sus funciones P_X y F_X .
- También tenemos un valor central; el valor esperado $E(X)$.
- Como medida básica nos queda definir una medida de lo lejos que están los datos del valor central $E(X)$ una de estas medidas es la varianza de X .

Definición

Sea X una v.a. Llamaremos **varianza** de X a

$$Var(X) = E((X - E(X))^2)$$

Por lo tanto la varianza es el momento central de orden 2.
De forma frecuente se utiliza la notación

$$\sigma_X^2 = Var(X).$$

A la raíz cuadrada positiva de la varianza

$$\sigma_X = \sqrt{Var(X)}$$

se la denomina desviación típica o estándar de X .

Propiedades de la varianza

Variables
Aleatorias

Variables aleatorias
I

Distribuciones de
probabilidad para
v.a. discretas.

Momentos de
variables aleatorias
discretas

Esperanza para
variables aleatorias
discretas

Esperanzas de
funciones de variables
aleatorias discretas

Momentos de una
variable aleatoria

Varianza de una
variable aleatoria

Esperanza y varianza
de transformaciones
lineales

- a) Si X es una v.a. discreta con función de probabilidad P_X su varianza es

$$\sigma_X^2 = \text{Var}(X) = E((X - E(X))^2) = \sum_x (x - E(X))^2 P_X(x).$$

- b) Sea X una v.a.

$$\text{Var}(X) = E(X^2) - (E(X))^2 = \sum_x x^2 P_X(X) - (E(X))^2$$

Demostración de b)

$$\begin{aligned}
 \text{Var}(X) &= \sum_x (x - E(X))^2 P_X(x) \\
 &= \sum_x (x^2 - 2xE(X) + (E(X))^2) P_X(x) \\
 &= \sum_x x^2 P_X(x) - E(X) \sum_x 2x P_X(x) \\
 &\quad + (E(X))^2 \sum_x P_X(x) \\
 &= E(X^2) - 2E(X)E(X) + (E(X))^2 \\
 &= E(X^2) - (E(X))^2.
 \end{aligned}$$

Ejemplo

Variables
Aleatorias

Variables aleatorias
I

Distribuciones de
probabilidad para
v.a. discretas.

Momentos de
variables aleatorias
discretas

Esperanza para
variables aleatorias
discretas

Esperanzas de
funciones de variables
aleatorias discretas

Momentos de una
variable aleatoria

Varianza de una
variable aleatoria

Esperanza y varianza
de transformaciones
lineales

Valculemos en el ejemplo anterior la varianza del número de errores. Recordemos que:

$$P(X = 0) = 0.42, \quad P(X = 1) = 0.4, \quad P(X = 2) = 0.18$$

y que

$$E(X) = 0.76$$

Entonces:

$$\text{Var}(X) = E(X^2) - (E(X))^2 = E(X^2) - (0.76)^2$$

Ejemplo

Variables
Aleatorias

Variables aleatorias
I

Distribuciones de
probabilidad para
v.a. discretas.

Momentos de
variables aleatorias
discretas

Esperanza para
variables aleatorias
discretas

Esperanzas de
funciones de variables
aleatorias discretas

Momentos de una
variable aleatoria

Varianza de una
variable aleatoria

Esperanza y varianza
de transformaciones
lineales

Ahora necesitamos calcular

$$E(X^2) = 0^2(0.41) + 1^2(0.4) + 2^2(0.18) = 0.4 + 0.72 = 1.12$$

y por lo tanto

$$Var(X) = E(X^2) - (0.76)^2 = 1.12 - 0.5776 = 0.542$$

y

$$\sqrt{Var(X)} = \sqrt{0.542}$$

En resumen $\sigma_X^2 = 0.542$ y $\sigma_X = \sqrt{0.542}$

Propiedades de la varianza

- $Var(X) \geq 0$
- $Var(cte) = E(cte^2) - (E(cte))^2 = cte^2 - cte^2 = 0$
- El mínimo de $E((X - C)^2)$ se alcanza cuando $C = E(X)$ y es $Var(X)$. Esta propiedad es una de las que hace útil a la varianza como medida de dispersión.

Demostración:(ejercicio)

Esperanza y varianza de transformaciones lineales. Propiedades

Variables
Aleatorias

Variables aleatorias
I

Distribuciones de
probabilidad para
v.a. discretas.

Momentos de
variables aleatorias
discretas

Esperanza para
variables aleatorias
discretas

Esperanzas de
funciones de variables
aleatorias discretas

Momentos de una
variable aleatoria

Varianza de una
variable aleatoria

Esperanza y varianza
de transformaciones
lineales

Definición

Un **cambio de variable lineal** o **transformación lineal** de una v.a. X es otra v.a. $Y = a + bX$ donde $a, b \in \mathbb{R}$.

Sea X una v.a. con $E(X) = \mu_X$ y $Var(X) = \sigma_X^2$ y $a, b \in \mathbb{R}$.

Entonces si $Y = a + bX$:

- a) $E(Y) = E(a + bX) = a + bE(X) = a + b\mu_X$.
- b) $Var(Y) = Var(a + bX) = b^2 Var(X) = b^2 \sigma_X^2$
- c) $\sigma_Y = \sqrt{Var(Y)} = \sqrt{b^2 Var(X)} = |b| \sigma_X$

Demostración:

$$\begin{aligned} E(Y) &= E(a + bX) = \sum_x (a + b \cdot X) \cdot P_X(x) \\ &= a \sum_x P_X(x) + b \sum_x x \cdot P_X(x) \\ &= a + b \cdot E(X) = a + b\mu_X \end{aligned}$$

Las demostración de las demás propiedades queda como ejercicio.