Variables aleatòries contínues

Variables aleatòries contínues

Una variable aleatòria $X : \Omega \to \mathbb{R}$ és contínua quan la seva funció de distribució $F_X : \mathbb{R} \to [0, 1]$ és contínua

Observau que, en aquest cas, $F_X(x^-) = F_X(x)$ i per tant

$$P(X = x) = F_X(x) - F_X(x^-) = 0 \text{ per a tot } x \in \mathbb{R}$$

A les v.a. contínues:

- $P(X = x) = 0$ per a tot x, i per tant probabilitat 0 no significa impossible
- $P(X < a) = P(X \leqslant a)$, $P(X > a) = P(X \geqslant a)$, etc.

Exemple

Suposem que volem escollir de manera "equiprobable" un nombre a l'atzar dins l'interval $]0,1[$. Sigui X la v.a. que ens dóna aquest nombre.

Per a cada $0 < x < 1$, tenim que

$$P(X \leqslant x) = \frac{\text{longitud casos favorables}}{\text{longitud casos possibles}} = \frac{x-0}{1-0} = x$$

Per tant, la funció de distribució és

$$F_X(x) = \begin{cases} 0 & \text{si } x \leqslant 0 \\ x & \text{si } 0 < x < 1 \\ 1 & \text{si } x \geqslant 1 \end{cases}$$

Densitat

Una funció $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ és una funció de densitat (o densitat) quan satisfà les dues condicions següents:

1. $f(x) \geqslant 0$ per a tot $x \in \mathbb{R}$
2. $$\int_{-\infty}^{+\infty} f(t)\, dt = 1$$

Una funció de densitat pot tenir punts de discontinuïtat

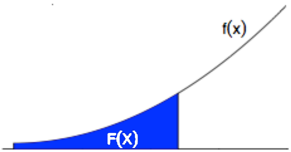
Variables aleatòries contínues

Tota v.a. X amb funció de distribució

$$F_X(x) = \int_{-\infty}^{x} f_X(t)\,dt \quad \text{per a tot } x \in \mathbb{R}$$

per a qualque densitat f_X, és contínua

Direm llavors que f_X és la funció de densitat de X



A partir d'ara, només considerarem v.a. contínues que tenen funció de densitat

Propietats

Si X és una v.a. contínua amb funció de distribució F_X i densitat f_X:

- F_X és contínua
- El domini de X és $D_X := \{x \mid f_X(x) > 0\}$
- Si A és un interval (de qualsevol tipus) amb extrems $a < b$, aleshores $P(X \in A) = \int_a^b f_X(x)\,dx$

  Per exemple

$$P(a < X \leqslant b) = P(X \in]a, b]) = \int_a^b f_X(x)\,dx$$

$$P(a \leqslant X) = P(X \in [a, \infty[) = \int_a^\infty f_X(x)\,dx$$

Exemple

La v.a. que ens dóna un nombre escollit a l'atzar dins $]0,1[$ té distribució

$$F_X(x) = \begin{cases} 0 & \text{si } x \leqslant 0 \\ x & \text{si } 0 < x < 1 \\ 1 & \text{si } x \geqslant 1 \end{cases}$$

La seva densitat és

$$f_X(x) = \begin{cases} 1 & \text{si } 0 < x < 1 \\ 0 & \text{si } x \leqslant 0 \text{ o } x \geqslant 1 \end{cases}$$

perquè

$$F_X(x) = \int_{-\infty}^{x} f_X(t)\, dt$$

Exemple

En efecte:

- Si $x \leqslant 0$, aleshores

$$F_X(x) = \int_{-\infty}^{x} 0\,dt = 0$$

- Si $0 < x < 1$, aleshores

$$F_X(x) = \int_{-\infty}^{0} 0\,dt + \int_{0}^{x} 1\,dt = 0 + \Big[t\Big]_0^x = x$$

- Si $x \geqslant 1$, aleshores

$$F_X(x) = \int_{-\infty}^{0} 0\,dt + \int_{0}^{1} 1\,dt + \int_{1}^{x} 0\,dt = 0+1+0 = 1$$

Exercici

Sigui X una v.a. contínua amb densitat

$$f_X(x) = \begin{cases} kx^2 + \frac{1}{3} & \text{si } 0 < x < 1 \\ 0 & \text{si } x \leqslant 0 \text{ o } x \geqslant 1 \end{cases}$$

amb $k \in \mathbb{R}$.

(a) Què val k?

(b) Qui és F_X?

(c) Què val $P(0.2 \leqslant X \leqslant 1.2)$?

(d) Què val $P(X = 0.2)$?

Exercici

$$f_X(x) = \begin{cases} kx^2 + \frac{1}{3} & \text{si } 0 < x < 1 \\ 0 & \text{si } x \leqslant 0 \text{ o } x \geqslant 1 \end{cases}$$

Perquè sigui densitat:

$$1 = \int_{-\infty}^{\infty} f_X \, dx$$

Exercici

$$f_X(x) = \begin{cases} kx^2 + \frac{1}{3} & \text{si } 0 < x < 1 \\ 0 & \text{si } x \leqslant 0 \text{ o } x \geqslant 1 \end{cases}$$

Perquè sigui densitat:

$$1 = \int_{-\infty}^{\infty} f_X \, dx = \int_{-\infty}^{0} 0 \, dx + \int_0^1 \left(kx^2 + \frac{1}{3}\right) dx + \int_1^{\infty} 0 \, dx$$

$$= 0 + \left[k\frac{x^3}{3} + \frac{1}{3}x\right]_0^1 + 0 = k\frac{1}{3} + \frac{1}{3}$$

i per tant

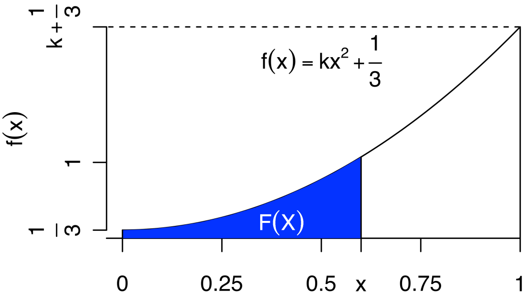
$$1 = \frac{k+1}{3} \Rightarrow k = 2$$

Exercici

$$f_X(x) = \begin{cases} 2x^2 + \frac{1}{3} & \text{si } 0 < x < 1 \\ 0 & \text{si } x \leqslant 0 \text{ o } x \geqslant 1 \end{cases}$$

Distribució?

$$F_X(x) = \int_{-\infty}^{x} f_X(t)\, dt$$



Exercici

$$f_X(x) = \begin{cases} 2x^2 + \frac{1}{3} & \text{si } 0 < x < 1 \\ 0 & \text{si } x \leqslant 0 \text{ o } x \geqslant 1 \end{cases}$$

Distribució?

- $x \leqslant 0$:

$$F_X(x) = \int_{-\infty}^{x} f_X(t)\,dt = \int_{-\infty}^{x} 0\,dt = 0$$

Exercici

$$f_X(x) = \begin{cases} 2x^2 + \frac{1}{3} & \text{si } 0 < x < 1 \\ 0 & \text{si } x \leqslant 0 \text{ o } x \geqslant 1 \end{cases}$$

Distribució?

- $0 \leqslant x \leqslant 1$:

$$\begin{aligned} F_X(x) &= \int_{-\infty}^{x} f_X(t)\,dt = \int_{-\infty}^{0} 0\,dt + \int_{0}^{x} \left(2t^2 + \frac{1}{3}\right) dt \\ &= 0 + \left[2\frac{t^3}{3} + \frac{1}{3}t\right]_0^x = 2\frac{x^3}{3} + \frac{1}{3}x = \frac{2x^3 + x}{3} \end{aligned}$$

Exercici

$$f_X(x) = \begin{cases} 2x^2 + \frac{1}{3} & \text{si } 0 < x < 1 \\ 0 & \text{si } x \leqslant 0 \text{ o } x \geqslant 1 \end{cases}$$

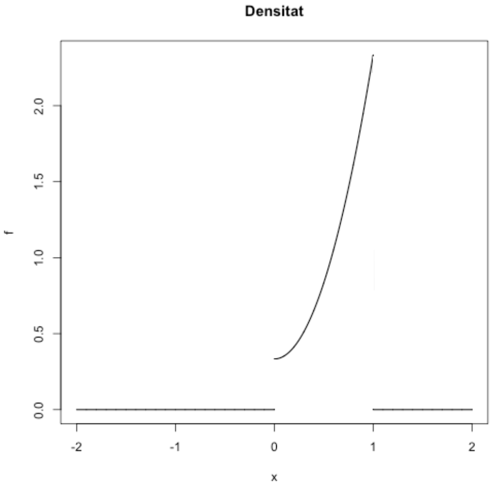
Distribució?

- $1 \leqslant x$:

$$\begin{aligned} F_X(x) &= \int_{-\infty}^{x} f_X(t)\,dt \\ &= \int_{-\infty}^{0} 0\,dt + \int_0^1 \left(2t^2 + \frac{1}{3}\right) dt + \int_1^x 0\,dt \\ &= 0 + 1 + 0 = 1 \end{aligned}$$

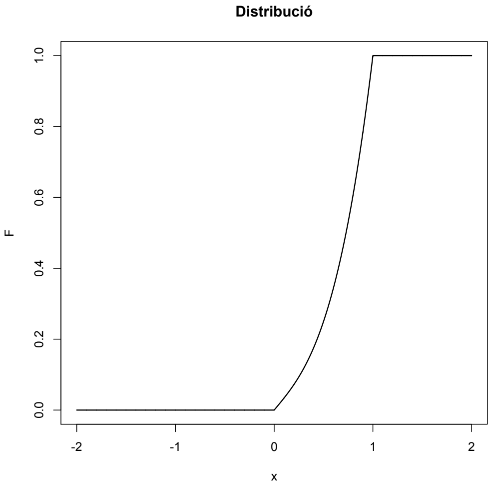
Exercici

$$f_X(x) = \begin{cases} 2x^2 + \dfrac{1}{3} & \text{si } 0 < x < 1 \\ 0 & \text{si } x \leqslant 0 \text{ o } x \geqslant 1 \end{cases}$$



Exercici

$$F_X(x) = \begin{cases} 0 & \text{si } x \leqslant 0 \\ \dfrac{2x^3 + x}{3} & \text{si } 0 \leqslant x \leqslant 1 \\ 1 & \text{si } x \geqslant 1 \end{cases}$$



Exercici

$$F_X(x) = \begin{cases} 0 & \text{si } x \leqslant 0 \\ \dfrac{2x^3 + x}{3} & \text{si } 0 \leqslant x \leqslant 1 \\ 1 & \text{si } x \geqslant 1 \end{cases}$$

$P(0.2 \leqslant X \leqslant 1.2)$?

Exercici

$$F_X(x) = \begin{cases} 0 & \text{si } x \leqslant 0 \\ \dfrac{2x^3 + x}{3} & \text{si } 0 \leqslant x \leqslant 1 \\ 1 & \text{si } x \geqslant 1 \end{cases}$$

$P(0.2 \leqslant X \leqslant 1.2)$?

$$\begin{aligned} P(0.2 \leqslant X \leqslant 1.2) &= P(X \leqslant 1.2) - P(X < 0.2) \\ &= P(X \leqslant 1.2) - P(X \leqslant 0.2) \\ &= F_X(1.2) - F_X(0.2) \\ &= 1 - \frac{2 \cdot 0.2^3 + 0.2}{3} = 0.928 \end{aligned}$$

Exercici

$$F_X(x) = \begin{cases} 0 & \text{si } x \leqslant 0 \\ \dfrac{2x^3 + x}{3} & \text{si } 0 \leqslant x \leqslant 1 \\ 1 & \text{si } x \geqslant 1 \end{cases}$$

$P(0.2 \leqslant X \leqslant 1.2)$?

$$\begin{aligned} P(0.2 \leqslant X \leqslant 1.2) &= P(X \leqslant 1.2) - P(X < 0.2) \\ &= P(X \leqslant 1.2) - P(X \leqslant 0.2) \\ &= F_X(1.2) - F_X(0.2) \\ &= 1 - \frac{2 \cdot 0.2^3 + 0.2}{3} = 0.928 \end{aligned}$$

$P(X = 0.2)$?

Exercici

$$F_X(x) = \begin{cases} 0 & \text{si } x \leqslant 0 \\ \dfrac{2x^3 + x}{3} & \text{si } 0 \leqslant x \leqslant 1 \\ 1 & \text{si } x \geqslant 1 \end{cases}$$

$P(0.2 \leqslant X \leqslant 1.2)$?

$$\begin{aligned} P(0.2 \leqslant X \leqslant 1.2) &= P(X \leqslant 1.2) - P(X < 0.2) \\ &= P(X \leqslant 1.2) - P(X \leqslant 0.2) \\ &= F_X(1.2) - F_X(0.2) \\ &= 1 - \frac{2 \cdot 0.2^3 + 0.2}{3} = 0.928 \end{aligned}$$

$P(X = 0.2)$? $P(X = 0.2) = 0$ perquè X és contínua

Esperança d'una v.a. contínua

Sigui X una v.a. contínua amb densitat f_X

L'esperança (mitjana, valor esperat) de X és

$$E(X) = \int_{-\infty}^{\infty} x \cdot f_X(x)\,dx$$

Si el domini D_X de X és un interval amb extrems $a < b$,

$$E(X) = \int_{a}^{b} x \cdot f_X(x)\,dx$$

Sovint també indicarem $E(X)$ amb μ

$E(X)$ "és" (quasi segurament) el límit de la mitjana dels valors de X si efectuam l'experiment n vegades i fem $n \to \infty$

Exemple

Considerem la v.a. X amb funció de densitat:

$$f_X(x) = \begin{cases} 2x^2 + \frac{1}{3} & \text{si } 0 < x < 1 \\ 0 & \text{si } x \leqslant 0 \text{ o } x \geqslant 1 \end{cases}$$

El seu valor esperat és

$$E(X) = \int_0^1 x\left(2x^2 + \frac{1}{3}\right) dx = \int_0^1 \left(2x^3 + \frac{1}{3}x\right) dx$$

$$= \left[2\frac{x^4}{4} + \frac{1}{3} \cdot \frac{x^2}{2}\right]_0^1 = \frac{1}{2} + \frac{1}{6} = \frac{2}{3}$$

Esperança d'una funció d'una v.a.

Sigui X una v.a. contínua amb densitat f_X i sigui $g : D_X \to \mathbb{R}$ una funció contínua. L' esperança de la v.a. $g(X)$ és

$$E(g(X)) = \int_{-\infty}^{+\infty} g(x) f_X(x) dx$$

Si el domini D_X de X és un interval amb extrems $a < b$, aleshores

$$E(g(X)) = \int_{a}^{b} g(x) f_X(x) dx$$

Exemple

Considerem la v.a. X amb funció de densitat:

$$f_X(x) = \begin{cases} 2x^2 + \frac{1}{3} & \text{si } 0 < x < 1 \\ 0 & \text{si } x \leqslant 0 \text{ o } x \geqslant 1 \end{cases}$$

El valor esperat de la v.a. $Y = X^2$ és

$$\begin{aligned} E(Y) &= E(X^2) = \int_0^1 x^2 \left(2x^2 + \frac{1}{3}\right) dx \\ &= \int_0^1 \left(2x^4 + \frac{1}{3}x^2\right) dx = \left[2\frac{x^5}{5} + \frac{1}{3} \cdot \frac{x^3}{3}\right]_0^1 \\ &= \frac{2}{5} + \frac{1}{9} = \frac{23}{45} \end{aligned}$$

Variància d'una v.a. contínua

Com al cas discret, la variància d'una v.a. contínua X és

$$Var(X) = E((X - E(X))^2)$$

i es pot demostrar que

$$Var(X) = E(X^2) - E(X)^2$$

Sovint també indicarem la variància amb σ^2

La desviació típica d'una v.a. X és $\sigma = \sqrt{Var(X)}$

La variància i la desviació típica mesuren com de variats són els resultats de l'experiment (respecte del valor mitjà)

Exemple

Considerem la v.a. X amb funció de densitat:

$$f_X(x) = \begin{cases} 2x^2 + \frac{1}{3} & \text{si } 0 < x < 1 \\ 0 & \text{si } x \leqslant 0 \text{ o } x \geqslant 1 \end{cases}$$

Ja hem calculat

$$E(X) = \frac{2}{3}, \quad E(X^2) = \frac{23}{45}$$

Per tant

$$Var(X) = E(X^2) - E(X)^2 = \frac{23}{45} - \left(\frac{2}{3}\right)^2 = \frac{1}{15}$$

Propietats

Tenim les mateixes propietats que en el cas discret:

a) $E(a) = a$, on a és una constant real

b) $E(aX + b) = aE(X) + b$

c) $E(X + Y) = E(X) + E(Y)$

d) Si $a < X < b$, aleshores $a < E(X) < b$

e) Si $X \geqslant 0$, aleshores $E(X) \geqslant 0$

f) Si $g(X) \leqslant h(X)$, aleshores $E(g(X)) \leqslant E(h(X))$

g) $Var(aX + b) = a^2 Var(X)$, on a, b són constants reals

h) $Var(a) = 0$, on a és una constant real

i) $Var(X + Y) = Var(X) + Var(Y)$ si X, Y són independents

Distribució uniforme

Una v.a. contínua X té distribució uniforme sobre l'interval real $]a, b[$ $(a < b)$, i ho indicarem amb $U(a, b)$, si la seva funció de densitat és

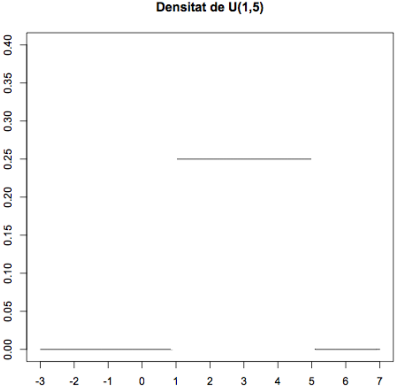
$$f_X(x) = \begin{cases} \dfrac{1}{b-a} & \text{si } a < x < b \\ 0 & \text{si } x \leqslant a \text{ o } x \geqslant b \end{cases}$$

Una variable $U(a, b)$ modela el triar un element dins $]a, b[$ de manera equiprobable

Amb `R`, és `unif`

Distribució uniforme

$$U(1,5): \quad f_X(x) = \begin{cases} \dfrac{1}{4} & \text{si } 1 < x < 5 \\ 0 & \text{si } x \leqslant 1 \text{ o } x \geqslant 5 \end{cases}$$

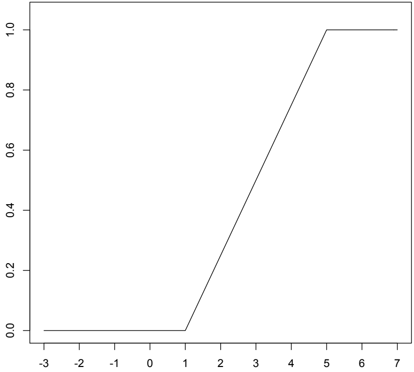


Distribució uniforme

Integrant, la funció de distribució surt:

$$F_X(x) = \begin{cases} 0 & \text{si } x \leqslant a \\ \dfrac{x-a}{b-a} & \text{si } a < x < b \\ 1 & \text{si } b \leqslant x \end{cases}$$

Distribució de U(1,5)



Resum de propietats

Sigui X una v.a. $U(a,b)$.

- Domini: $D_X =]a,b[$
- Densitat: $f_X(x) = \begin{cases} \dfrac{1}{b-a} & \text{si } a < x < b \\ 0 & \text{si } x \leqslant a \text{ o } x \geqslant b \end{cases}$
- Distribució: $F_X(x) = \begin{cases} 0 & \text{si } x \leqslant a \\ \dfrac{x-a}{b-a} & \text{si } a \leqslant x \leqslant b \\ 1 & \text{si } b \leqslant x \end{cases}$
- Esperança: $E(X) = \dfrac{a+b}{2}$
- Variància: $Var(X) = \dfrac{(b-a)^2}{12}$

Esperança i variància

Sigui X una v.a. $U(a,b)$

$$E(X) = \int_{-\infty}^{+\infty} x \cdot f_X(x)\, dx = \int_a^b x \frac{1}{b-a}\, dx$$

$$= \left[\frac{x^2}{2(b-a)}\right]_a^b = \frac{b+a}{2}$$

$$E(X^2) = \int_{-\infty}^{+\infty} x^2 \cdot f_X(x)\, dx = \int_a^b x^2 \frac{1}{b-a}\, dx$$

$$= \left[\frac{x^3}{3(b-a)}\right]_a^b = \frac{b^3-a^3}{3(b-a)} = \frac{b^2+ab+a^2}{3}$$

$$Var(X) = E(X^2) - (E(X))^2 = \frac{b^2+ab+a^2}{3} - \left(\frac{b+a}{2}\right)^2$$

$$= \frac{(b-a)^2}{12}$$

Distribució normal

Una v.a. X segueix una llei normal o gaussiana de paràmetres μ i σ, i ho indicarem amb $N(\mu, \sigma)$, quan té funció de densitat

$$f_X(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma} e^{-(x-\mu)^2/(2\sigma^2)} \text{ per a tot } x \in \mathbb{R}$$

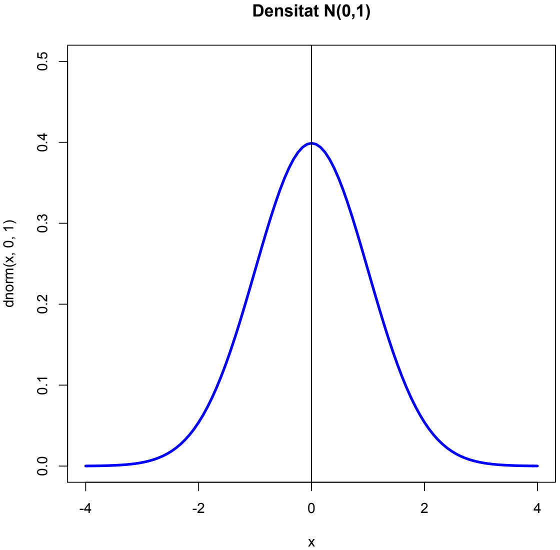
Quan $\mu = 0$ i $\sigma = 1$, direm que la v.a. normal és estàndard, i la indicarem usualment Z

$$f_Z(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-x^2/2} \text{ per a tot } x \in \mathbb{R}$$

Amb R, és `norm`

Distribució normal

La gràfica de f_X és la coneguda campana de Gauss



Distribució normal

La distribució normal és una de les més importants en estadística, perquè aproxima molt bé molts fenòmens naturals:

- Alçades, intel·ligència,...
- Notes, encerts, errors de mesura, ...

A més,

- Moltes variables aleatòries consistents en prendre una mostra de N elements i calcular qualque cosa (per exemple, la mitjana) tenen distribució aproximadament normal quan N és gran, encara que la distribució dels elements individuals no ho sigui

Propietats

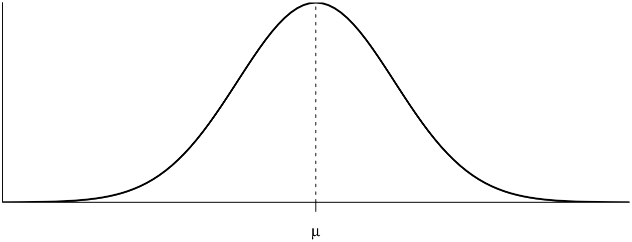
Sigui X una v.a. $N(\mu, \sigma)$

- f_X és simètrica respecte de $x = \mu$:

$$f_X(\mu - x) = f_X(\mu + x)$$

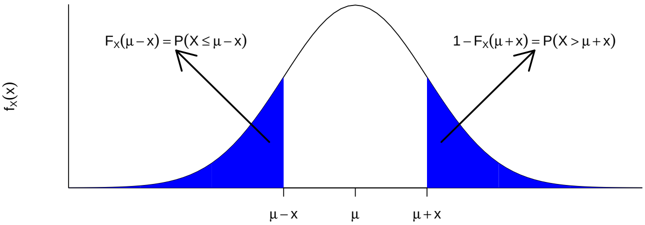
  i té el màxim a $x = \mu$

  En particular, si Z es una $N(0,1)$, aleshores $f_Z(-x) = f_Z(x)$, i f_Z pren el valor màxim a $x = 0$



Propietats

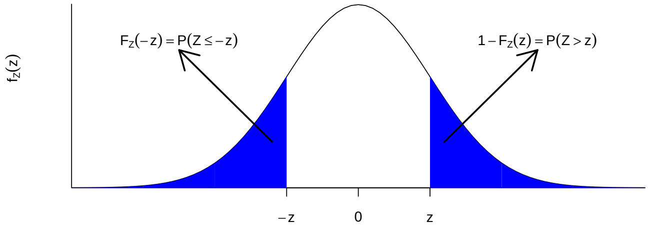
- Aquesta simetria fa iguals les àrees a l'esquerra de $\mu - x$ i a la dreta de $\mu + x$



$$\begin{aligned} F_X(\mu - x) &= P(X \leqslant \mu - x) \\ &= P(X \geqslant \mu + x) = 1 - F_X(\mu + x) \end{aligned}$$

Propietats

- A $N(0,1)$, aquesta simetria fa iguals les àrees a l'esquerra de $-z$ i a la dreta de z



$$F_Z(-z) = P(Z \leqslant -z) = P(Z \geqslant z) = 1 - F_Z(z)$$

Propietats

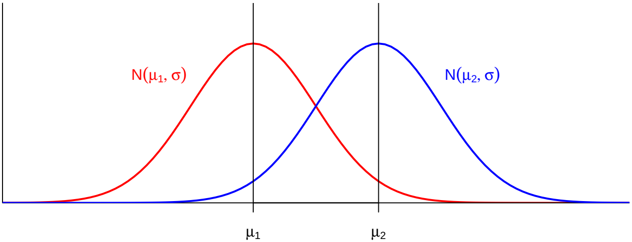
Sigui X una v.a. $N(\mu, \sigma)$

- $E(X) = \mu$
- $Var(X) = \sigma^2$
- La seva desviació típica és σ

En particular, si Z és una normal estàndard, $E(Z) = 0$ i $Var(Z) = 1$.

Distribució normal

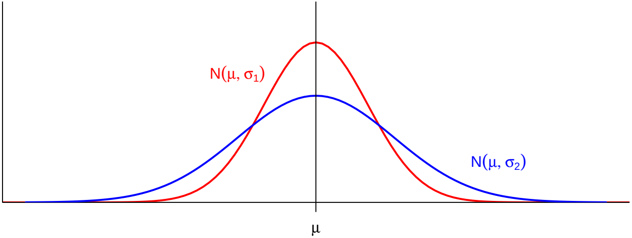
Augmentar la μ desplaça a la dreta el màxim, i amb ell tota la corba



$$\mu_1 < \mu_2$$

Distribució normal

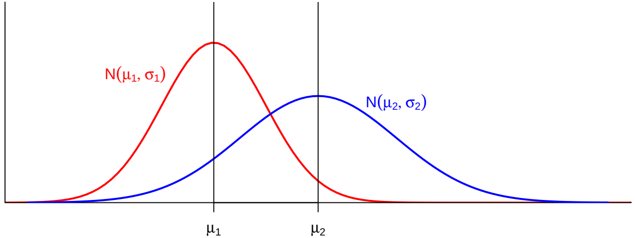
Augmentar la σ aplata la corba: en augmentar la variància, els valors s'allunyen més del valor mitjà



$$\sigma_1 < \sigma_2$$

Distribució normal

L'efecte combinat



$$\mu_1 < \mu_2, \ \sigma_1 < \sigma_2$$

Estandardització d'una v.a. normal

Teorema

Si X és una v.a. $N(\mu,\sigma)$, aleshores $Z=\dfrac{X-\mu}{\sigma}$ és $N(0,1)$.

Les probabilitats d'una normal estàndard Z determinen les de qualsevol X de tipus $N(\mu,\sigma)$:

$$P(X\leqslant x) = P\left(\frac{X-\mu}{\sigma}\leqslant\frac{x-\mu}{\sigma}\right) = P\left(Z\leqslant\frac{x-\mu}{\sigma}\right)$$

$$P(y\leqslant X\leqslant x) = P\left(\frac{y-\mu}{\sigma}\leqslant\frac{X-\mu}{\sigma}\leqslant\frac{x-\mu}{\sigma}\right) = P\left(\frac{y-\mu}{\sigma}\leqslant Z\leqslant\frac{x-\mu}{\sigma}\right)$$

Càlcul de probabilitats

F_Z no té expressió coneguda. La podeu calcular amb R (`pnorm`) o altres programes (hi ha Apps per iPhone o Android), o, a mà, amb taules. Les taules per calcular F_Z són al fitxer `tablasnormal.pdf` a Campus Extens.

z	0.0	0.01	0.02	0.03	0.04	0.05	0.06	0.07	0.08	0.09
0.0	0.5000	0.5040	0.5080	0.5120	0.5160	0.5199	0.5239	0.5279	0.5319	0.5359
0.1	0.5398	0.5438	0.5478	0.5517	0.5557	0.5596	0.5636	0.5675	0.5714	0.5753
0.2	0.5793	0.5832	0.5871	0.5910	0.5948	0.5987	0.6026	0.6064	0.6103	0.6141
0.3	0.6179	0.6217	0.6255	0.6293	0.6331	0.6368	0.6406	0.6443	0.6480	0.6517
0.4	0.6554	0.6591	0.6628	0.6664	0.6700	0.6736	0.6772	0.6808	0.6844	0.6879
0.5	0.6915	0.6950	0.6985	0.7019	0.7054	0.7088	0.7123	0.7157	0.7190	0.7224
0.6	0.7257	0.7291	0.7324	0.7357	0.7389	0.7422	0.7454	0.7486	0.7517	0.7549
0.7	0.7580	0.7611	0.7642	0.7673	0.7704	0.7734	0.7764	0.7794	0.7823	0.7852
0.8	0.7881	0.7910	0.7939	0.7967	0.7995	0.8023	0.8051	0.8078	0.8106	0.8133
0.9	0.8159	0.8186	0.8212	0.8238	0.8264	0.8289	0.8315	0.8340	0.8365	0.8389
1.0	0.8413	0.8438	0.8461	0.8485	0.8508	0.8531	0.8554	0.8577	0.8599	0.8621

Càlcul de probabilitats

F_Z no té expressió coneguda. La podeu calcular amb R (`pnorm`) o altres programes (hi ha Apps per iPhone o Android), o, a mà, amb taules. Les taules per calcular F_Z són al fitxer `tablasnormal.pdf` a Campus Extens.

z	0.0	0.01	0.02	0.03	0.04	0.05	0.06	0.07	0.08	0.09
0.0	0.5000	0.5040	0.5080	0.5120	0.5160	0.5199	0.5239	0.5279	0.5319	0.5359
0.1	0.5398	0.5438	0.5478	0.5517	0.5557	0.5596	0.5636	0.5675	0.5714	0.5753
0.2	0.5793	0.5832	0.5871	0.5910	0.5948	0.5987	0.6026	0.6064	0.6103	0.6141
0.3	0.6179	0.6217	0.6255	0.6293	0.6331	0.6368	0.6406	0.6443	0.6480	0.6517
0.4	0.6554	0.6591	0.6628	0.6664	0.6700	0.6736	0.6772	0.6808	0.6844	0.6879
0.5	0.6915	0.6950	0.6985	0.7019	0.7054	0.7088	0.7123	0.7157	0.7190	0.7224
0.6	0.7257	0.7291	0.7324	0.7357	0.7389	0.7422	0.7454	0.7486	0.7517	0.7549
0.7	0.7580	0.7611	0.7642	0.7673	0.7704	0.7734	0.7764	0.7794	0.7823	0.7852
0.8	0.7881	0.7910	0.7939	0.7967	0.7995	0.8023	0.8051	0.8078	0.8106	0.8133
0.9	0.8159	0.8186	0.8212	0.8238	0.8264	0.8289	0.8315	0.8340	0.8365	0.8389
1.0	0.8413	0.8438	0.8461	0.8485	0.8508	0.8531	0.8554	0.8577	0.8599	0.8621

$$F_Z(0.75) = 0.7734,$$

Càlcul de probabilitats

F_Z no té expressió coneguda. La podeu calcular amb R (`pnorm`) o altres programes (hi ha Apps per iPhone o Android), o, a mà, amb taules. Les taules per calcular F_Z són al fitxer `tablasnormal.pdf` a Campus Extens.

z	0.0	0.01	0.02	0.03	0.04	0.05	0.06	0.07	0.08	0.09
0.0	0.5000	0.5040	0.5080	0.5120	0.5160	0.5199	0.5239	0.5279	0.5319	0.5359
0.1	0.5398	0.5438	0.5478	0.5517	0.5557	0.5596	0.5636	0.5675	0.5714	0.5753
0.2	0.5793	0.5832	0.5871	0.5910	0.5948	0.5987	0.6026	0.6064	0.6103	0.6141
0.3	0.6179	0.6217	0.6255	0.6293	0.6331	0.6368	0.6406	0.6443	0.6480	0.6517
0.4	0.6554	0.6591	0.6628	0.6664	0.6700	0.6736	0.6772	0.6808	0.6844	0.6879
0.5	0.6915	0.6950	0.6985	0.7019	0.7054	0.7088	0.7123	0.7157	0.7190	0.7224
0.6	0.7257	0.7291	0.7324	0.7357	0.7389	0.7422	0.7454	0.7486	0.7517	0.7549
0.7	0.7580	0.7611	0.7642	0.7673	0.7704	0.7734	0.7764	0.7794	0.7823	0.7852
0.8	0.7881	0.7910	0.7939	0.7967	0.7995	0.8023	0.8051	0.8078	0.8106	0.8133
0.9	0.8159	0.8186	0.8212	0.8238	0.8264	0.8289	0.8315	0.8340	0.8365	0.8389
1.0	0.8413	0.8438	0.8461	0.8485	0.8508	0.8531	0.8554	0.8577	0.8599	0.8621

$$F_Z(0.75) = 0.7734,\ \ F_Z(1.02) = 0.8461,$$

Càlcul de probabilitats

F_Z no té expressió coneguda. La podeu calcular amb R (`pnorm`) o altres programes (hi ha Apps per iPhone o Android), o, a mà, amb taules. Les taules per calcular F_Z són al fitxer `tablasnormal.pdf` a Campus Extens.

z	0.0	0.01	0.02	0.03	0.04	0.05	0.06	0.07	0.08	0.09
0.0	0.5000	0.5040	0.5080	0.5120	0.5160	0.5199	0.5239	0.5279	0.5319	0.5359
0.1	0.5398	0.5438	0.5478	0.5517	0.5557	0.5596	0.5636	0.5675	0.5714	0.5753
0.2	0.5793	0.5832	0.5871	0.5910	0.5948	0.5987	0.6026	0.6064	0.6103	0.6141
0.3	0.6179	0.6217	0.6255	0.6293	0.6331	0.6368	0.6406	0.6443	0.6480	0.6517
0.4	0.6554	0.6591	0.6628	0.6664	0.6700	0.6736	0.6772	0.6808	0.6844	0.6879
0.5	0.6915	0.6950	0.6985	0.7019	0.7054	0.7088	0.7123	0.7157	0.7190	0.7224
0.6	0.7257	0.7291	0.7324	0.7357	0.7389	0.7422	0.7454	0.7486	0.7517	0.7549
0.7	0.7580	0.7611	0.7642	0.7673	0.7704	0.7734	0.7764	0.7794	0.7823	0.7852
0.8	0.7881	0.7910	0.7939	0.7967	0.7995	0.8023	0.8051	0.8078	0.8106	0.8133
0.9	0.8159	0.8186	0.8212	0.8238	0.8264	0.8289	0.8315	0.8340	0.8365	0.8389
1.0	0.8413	0.8438	0.8461	0.8485	0.8508	0.8531	0.8554	0.8577	0.8599	0.8621

$F_Z(0.75) = 0.7734,\ F_Z(1.02) = 0.8461,\ F_Z(0.06) =$

Càlcul de probabilitats

F_Z no té expressió coneguda. La podeu calcular amb R (`pnorm`) o altres programes (hi ha Apps per iPhone o Android), o, a mà, amb taules. Les taules per calcular F_Z són al fitxer `tablasnormal.pdf` a Campus Extens.

z	0.0	0.01	0.02	0.03	0.04	0.05	0.06	0.07	0.08	0.09
0.0	0.5000	0.5040	0.5080	0.5120	0.5160	0.5199	0.5239	0.5279	0.5319	0.5359
0.1	0.5398	0.5438	0.5478	0.5517	0.5557	0.5596	0.5636	0.5675	0.5714	0.5753
0.2	0.5793	0.5832	0.5871	0.5910	0.5948	0.5987	0.6026	0.6064	0.6103	0.6141
0.3	0.6179	0.6217	0.6255	0.6293	0.6331	0.6368	0.6406	0.6443	0.6480	0.6517
0.4	0.6554	0.6591	0.6628	0.6664	0.6700	0.6736	0.6772	0.6808	0.6844	0.6879
0.5	0.6915	0.6950	0.6985	0.7019	0.7054	0.7088	0.7123	0.7157	0.7190	0.7224
0.6	0.7257	0.7291	0.7324	0.7357	0.7389	0.7422	0.7454	0.7486	0.7517	0.7549
0.7	0.7580	0.7611	0.7642	0.7673	0.7704	0.7734	0.7764	0.7794	0.7823	0.7852
0.8	0.7881	0.7910	0.7939	0.7967	0.7995	0.8023	0.8051	0.8078	0.8106	0.8133
0.9	0.8159	0.8186	0.8212	0.8238	0.8264	0.8289	0.8315	0.8340	0.8365	0.8389
1.0	0.8413	0.8438	0.8461	0.8485	0.8508	0.8531	0.8554	0.8577	0.8599	0.8621

$$F_Z(0.75) = 0.7734,\ \ F_Z(1.02) = 0.8461,\ \ F_Z(0.06) = 0.5239$$

Càlcul de probabilitats

F_Z no té expressió coneguda. La podeu calcular amb R (`pnorm`) o altres programes (hi ha Apps per iPhone o Android), o, a mà, amb taules. Les taules per calcular F_Z són al fitxer `tablasnormal.pdf` a Campus Extens.

z	0.0	0.01	0.02	0.03	0.04	0.05	0.06	0.07	0.08	0.09
0.0	0.5000	0.5040	0.5080	0.5120	0.5160	0.5199	0.5239	0.5279	0.5319	0.5359
0.1	0.5398	0.5438	0.5478	0.5517	0.5557	0.5596	0.5636	0.5675	0.5714	0.5753
0.2	0.5793	0.5832	0.5871	0.5910	0.5948	0.5987	0.6026	0.6064	0.6103	0.6141
0.3	0.6179	0.6217	0.6255	0.6293	0.6331	0.6368	0.6406	0.6443	0.6480	0.6517
0.4	0.6554	0.6591	0.6628	0.6664	0.6700	0.6736	0.6772	0.6808	0.6844	0.6879
0.5	0.6915	0.6950	0.6985	0.7019	0.7054	0.7088	0.7123	0.7157	0.7190	0.7224
0.6	0.7257	0.7291	0.7324	0.7357	0.7389	0.7422	0.7454	0.7486	0.7517	0.7549
0.7	0.7580	0.7611	0.7642	0.7673	0.7704	0.7734	0.7764	0.7794	0.7823	0.7852
0.8	0.7881	0.7910	0.7939	0.7967	0.7995	0.8023	0.8051	0.8078	0.8106	0.8133
0.9	0.8159	0.8186	0.8212	0.8238	0.8264	0.8289	0.8315	0.8340	0.8365	0.8389
1.0	0.8413	0.8438	0.8461	0.8485	0.8508	0.8531	0.8554	0.8577	0.8599	0.8621

$F_Z(0.75) = 0.7734,\ \ F_Z(1.02) = 0.8461,\ \ F_Z(0.06) = 0.5239$

$F_Z(-0.75) = 1 - F_Z(0.75) = 0.2266,$

Càlcul de probabilitats

F_Z no té expressió coneguda. La podeu calcular amb R (`pnorm`) o altres programes (hi ha Apps per iPhone o Android), o, a mà, amb taules. Les taules per calcular F_Z són al fitxer `tablasnormal.pdf` a Campus Extens.

z	0.0	0.01	0.02	0.03	0.04	0.05	0.06	0.07	0.08	0.09
0.0	0.5000	0.5040	0.5080	0.5120	0.5160	0.5199	0.5239	0.5279	0.5319	0.5359
0.1	0.5398	0.5438	0.5478	0.5517	0.5557	0.5596	0.5636	0.5675	0.5714	0.5753
0.2	0.5793	0.5832	0.5871	0.5910	0.5948	0.5987	0.6026	0.6064	0.6103	0.6141
0.3	0.6179	0.6217	0.6255	0.6293	0.6331	0.6368	0.6406	0.6443	0.6480	0.6517
0.4	0.6554	0.6591	0.6628	0.6664	0.6700	0.6736	0.6772	0.6808	0.6844	0.6879
0.5	0.6915	0.6950	0.6985	0.7019	0.7054	0.7088	0.7123	0.7157	0.7190	0.7224
0.6	0.7257	0.7291	0.7324	0.7357	0.7389	0.7422	0.7454	0.7486	0.7517	0.7549
0.7	0.7580	0.7611	0.7642	0.7673	0.7704	0.7734	0.7764	0.7794	0.7823	0.7852
0.8	0.7881	0.7910	0.7939	0.7967	0.7995	0.8023	0.8051	0.8078	0.8106	0.8133
0.9	0.8159	0.8186	0.8212	0.8238	0.8264	0.8289	0.8315	0.8340	0.8365	0.8389
1.0	0.8413	0.8438	0.8461	0.8485	0.8508	0.8531	0.8554	0.8577	0.8599	0.8621

$F_Z(0.75) = 0.7734,\ F_Z(1.02) = 0.8461,\ F_Z(0.06) = 0.5239$

$F_Z(-0.75) = 1 - F_Z(0.75) = 0.2266,\ F_Z(-0.88) =$

Càlcul de probabilitats

F_Z no té expressió coneguda. La podeu calcular amb R (`pnorm`) o altres programes (hi ha Apps per iPhone o Android), o, a mà, amb taules. Les taules per calcular F_Z són al fitxer `tablasnormal.pdf` a Campus Extens.

z	0.0	0.01	0.02	0.03	0.04	0.05	0.06	0.07	0.08	0.09
0.0	0.5000	0.5040	0.5080	0.5120	0.5160	0.5199	0.5239	0.5279	0.5319	0.5359
0.1	0.5398	0.5438	0.5478	0.5517	0.5557	0.5596	0.5636	0.5675	0.5714	0.5753
0.2	0.5793	0.5832	0.5871	0.5910	0.5948	0.5987	0.6026	0.6064	0.6103	0.6141
0.3	0.6179	0.6217	0.6255	0.6293	0.6331	0.6368	0.6406	0.6443	0.6480	0.6517
0.4	0.6554	0.6591	0.6628	0.6664	0.6700	0.6736	0.6772	0.6808	0.6844	0.6879
0.5	0.6915	0.6950	0.6985	0.7019	0.7054	0.7088	0.7123	0.7157	0.7190	0.7224
0.6	0.7257	0.7291	0.7324	0.7357	0.7389	0.7422	0.7454	0.7486	0.7517	0.7549
0.7	0.7580	0.7611	0.7642	0.7673	0.7704	0.7734	0.7764	0.7794	0.7823	0.7852
0.8	0.7881	0.7910	0.7939	0.7967	0.7995	0.8023	0.8051	0.8078	0.8106	0.8133
0.9	0.8159	0.8186	0.8212	0.8238	0.8264	0.8289	0.8315	0.8340	0.8365	0.8389
1.0	0.8413	0.8438	0.8461	0.8485	0.8508	0.8531	0.8554	0.8577	0.8599	0.8621

$$F_Z(0.75) = 0.7734,\ F_Z(1.02) = 0.8461,\ F_Z(0.06) = 0.5239$$

$$F_Z(-0.75) = 1 - F_Z(0.75) = 0.2266,\ F_Z(-0.88) = 0.1894$$

Càlcul de probabilitats

z	-0.09	-0.08	-0.07	-0.06	-0.05	-0.04	-0.03	-0.02	-0.01	0

$\vdots$

tabla2.jpg

Càlcul de probabilitats

z	0.0	0.01	0.02	0.03	0.04	0.05	0.06	0.07	0.08	0.09
0.0	0.5000	0.5040	0.5080	0.5120	0.5160	0.5199	0.5239	0.5279	0.5319	0.5359
0.1	0.5398	0.5438	0.5478	0.5517	0.5557	0.5596	0.5636	0.5675	0.5714	0.5753
0.2	0.5793	0.5832	0.5871	0.5910	0.5948	0.5987	0.6026	0.6064	0.6103	0.6141
0.3	0.6179	0.6217	0.6255	0.6293	0.6331	0.6368	0.6406	0.6443	0.6480	0.6517
0.4	0.6554	0.6591	0.6628	0.6664	0.6700	0.6736	0.6772	0.6808	0.6844	0.6879
0.5	0.6915	0.6950	0.6985	0.7019	0.7054	0.7088	0.7123	0.7157	0.7190	0.7224
0.6	0.7257	0.7291	0.7324	0.7357	0.7389	0.7422	0.7454	0.7486	0.7517	0.7549
0.7	0.7580	0.7611	0.7642	0.7673	0.7704	0.7734	0.7764	0.7794	0.7823	0.7852
0.8	0.7881	0.7910	0.7939	0.7967	0.7995	0.8023	0.8051	0.8078	0.8106	0.8133
0.9	0.8159	0.8186	0.8212	0.8238	0.8264	0.8289	0.8315	0.8340	0.8365	0.8389
1.0	0.8413	0.8438	0.8461	0.8485	0.8508	0.8531	0.8554	0.8577	0.8599	0.8621

$$
\begin{aligned}
P(0.25 < Z < 0.75) &= P(Z < 0.75) - P(Z < 0.25) \\
&= 0.7734 - 0.5987 = 0.1747
\end{aligned}
$$

Càlcul de probabilitats

z	0.0	0.01	0.02	0.03	0.04	0.05	0.06	0.07	0.08	0.09
0.0	0.5000	0.5040	0.5080	0.5120	0.5160	0.5199	0.5239	0.5279	0.5319	0.5359
0.1	0.5398	0.5438	0.5478	0.5517	0.5557	0.5596	0.5636	0.5675	0.5714	0.5753
0.2	0.5793	0.5832	0.5871	0.5910	0.5948	0.5987	0.6026	0.6064	0.6103	0.6141
0.3	0.6179	0.6217	0.6255	0.6293	0.6331	0.6368	0.6406	0.6443	0.6480	0.6517
0.4	0.6554	0.6591	0.6628	0.6664	0.6700	0.6736	0.6772	0.6808	0.6844	0.6879
0.5	0.6915	0.6950	0.6985	0.7019	0.7054	0.7088	0.7123	0.7157	0.7190	0.7224
0.6	0.7257	0.7291	0.7324	0.7357	0.7389	0.7422	0.7454	0.7486	0.7517	0.7549
0.7	0.7580	0.7611	0.7642	0.7673	0.7704	0.7734	0.7764	0.7794	0.7823	0.7852
0.8	0.7881	0.7910	0.7939	0.7967	0.7995	0.8023	0.8051	0.8078	0.8106	0.8133
0.9	0.8159	0.8186	0.8212	0.8238	0.8264	0.8289	0.8315	0.8340	0.8365	0.8389
1.0	0.8413	0.8438	0.8461	0.8485	0.8508	0.8531	0.8554	0.8577	0.8599	0.8621

$$\begin{aligned} P(0.25 < Z < 0.75) &= P(Z < 0.75) - P(Z < 0.25) \\ &= 0.7734 - 0.5987 = 0.1747 \end{aligned}$$

$$P(-0.3 < Z < 0.3) =$$

Càlcul de probabilitats

z	0.0	0.01	0.02	0.03	0.04	0.05	0.06	0.07	0.08	0.09
0.0	0.5000	0.5040	0.5080	0.5120	0.5160	0.5199	0.5239	0.5279	0.5319	0.5359
0.1	0.5398	0.5438	0.5478	0.5517	0.5557	0.5596	0.5636	0.5675	0.5714	0.5753
0.2	0.5793	0.5832	0.5871	0.5910	0.5948	0.5987	0.6026	0.6064	0.6103	0.6141
0.3	0.6179	0.6217	0.6255	0.6293	0.6331	0.6368	0.6406	0.6443	0.6480	0.6517
0.4	0.6554	0.6591	0.6628	0.6664	0.6700	0.6736	0.6772	0.6808	0.6844	0.6879
0.5	0.6915	0.6950	0.6985	0.7019	0.7054	0.7088	0.7123	0.7157	0.7190	0.7224
0.6	0.7257	0.7291	0.7324	0.7357	0.7389	0.7422	0.7454	0.7486	0.7517	0.7549
0.7	0.7580	0.7611	0.7642	0.7673	0.7704	0.7734	0.7764	0.7794	0.7823	0.7852
0.8	0.7881	0.7910	0.7939	0.7967	0.7995	0.8023	0.8051	0.8078	0.8106	0.8133
0.9	0.8159	0.8186	0.8212	0.8238	0.8264	0.8289	0.8315	0.8340	0.8365	0.8389
1.0	0.8413	0.8438	0.8461	0.8485	0.8508	0.8531	0.8554	0.8577	0.8599	0.8621

$$
\begin{aligned}
P(0.25 < Z < 0.75) &= P(Z < 0.75) - P(Z < 0.25) \\
&= 0.7734 - 0.5987 = 0.1747
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
P(-0.3 < Z < 0.3) &= P(Z < 0.3) - P(Z < -0.3) \\
&= P(Z < 0.3) - 1 + P(Z < 0.3) \\
&= 2P(Z < 0.3) - 1 = 0.2358
\end{aligned}
$$

Càlcul de quantils

Les taules també es poden emprar per "calcular" quantils (amb R, `qnorm`).

Si volem saber el valor de z tal que $P(Z \leqslant z) = q$, cercam a la taula l'entrada q (o el més proper) i miram a quin z correspon.

z	0.0	0.01	0.02	0.03	0.04	0.05	0.06	0.07	0.08	0.09
0.0	0.5000	0.5040	0.5080	0.5120	0.5160	0.5199	0.5239	0.5279	0.5319	0.5359
0.1	0.5398	0.5438	0.5478	0.5517	0.5557	0.5596	0.5636	0.5675	0.5714	0.5753
0.2	0.5793	0.5832	0.5871	0.5910	0.5948	0.5987	0.6026	0.6064	0.6103	0.6141
0.3	0.6179	0.6217	0.6255	0.6293	0.6331	0.6368	0.6406	0.6443	0.6480	0.6517
0.4	0.6554	0.6591	0.6628	0.6664	0.6700	0.6736	0.6772	0.6808	0.6844	0.6879
0.5	0.6915	0.6950	0.6985	0.7019	0.7054	0.7088	0.7123	0.7157	0.7190	0.7224
0.6	0.7257	0.7291	0.7324	0.7357	0.7389	0.7422	0.7454	0.7486	0.7517	0.7549
0.7	0.7580	0.7611	0.7642	0.7673	0.7704	0.7734	0.7764	0.7794	0.7823	0.7852
0.8	0.7881	0.7910	0.7939	0.7967	0.7995	0.8023	0.8051	0.8078	0.8106	0.8133
0.9	0.8159	0.8186	0.8212	0.8238	0.8264	0.8289	0.8315	0.8340	0.8365	0.8389
1.0	0.8413	0.8438	0.8461	0.8485	0.8508	0.8531	0.8554	0.8577	0.8599	0.8621

Quin és el valor z tal que $P(Z \leqslant z) = 0.7357$? $z = 0.63$

Càlcul de quantils

z	0.0	0.01	0.02	0.03	0.04	0.05	0.06	0.07	0.08	0.09
0.0	0.5000	0.5040	0.5080	0.5120	0.5160	0.5199	0.5239	0.5279	0.5319	0.5359
0.1	0.5398	0.5438	0.5478	0.5517	0.5557	0.5596	0.5636	0.5675	0.5714	0.5753
0.2	0.5793	0.5832	0.5871	0.5910	0.5948	0.5987	0.6026	0.6064	0.6103	0.6141
0.3	0.6179	0.6217	0.6255	0.6293	0.6331	0.6368	0.6406	0.6443	0.6480	0.6517
0.4	0.6554	0.6591	0.6628	0.6664	0.6700	0.6736	0.6772	0.6808	0.6844	0.6879
0.5	0.6915	0.6950	0.6985	0.7019	0.7054	0.7088	0.7123	0.7157	0.7190	0.7224
0.6	0.7257	0.7291	0.7324	0.7357	0.7389	0.7422	0.7454	0.7486	0.7517	0.7549
0.7	0.7580	0.7611	0.7642	0.7673	0.7704	0.7734	0.7764	0.7794	0.7823	0.7852
0.8	0.7881	0.7910	0.7939	0.7967	0.7995	0.8023	0.8051	0.8078	0.8106	0.8133
0.9	0.8159	0.8186	0.8212	0.8238	0.8264	0.8289	0.8315	0.8340	0.8365	0.8389
1.0	0.8413	0.8438	0.8461	0.8485	0.8508	0.8531	0.8554	0.8577	0.8599	0.8621

Quin és el valor z tal que $P(Z \leqslant z) = 0.8357$?

Càlcul de quantils

z	0.0	0.01	0.02	0.03	0.04	0.05	0.06	0.07	0.08	0.09
0.0	0.5000	0.5040	0.5080	0.5120	0.5160	0.5199	0.5239	0.5279	0.5319	0.5359
0.1	0.5398	0.5438	0.5478	0.5517	0.5557	0.5596	0.5636	0.5675	0.5714	0.5753
0.2	0.5793	0.5832	0.5871	0.5910	0.5948	0.5987	0.6026	0.6064	0.6103	0.6141
0.3	0.6179	0.6217	0.6255	0.6293	0.6331	0.6368	0.6406	0.6443	0.6480	0.6517
0.4	0.6554	0.6591	0.6628	0.6664	0.6700	0.6736	0.6772	0.6808	0.6844	0.6879
0.5	0.6915	0.6950	0.6985	0.7019	0.7054	0.7088	0.7123	0.7157	0.7190	0.7224
0.6	0.7257	0.7291	0.7324	0.7357	0.7389	0.7422	0.7454	0.7486	0.7517	0.7549
0.7	0.7580	0.7611	0.7642	0.7673	0.7704	0.7734	0.7764	0.7794	0.7823	0.7852
0.8	0.7881	0.7910	0.7939	0.7967	0.7995	0.8023	0.8051	0.8078	0.8106	0.8133
0.9	0.8159	0.8186	0.8212	0.8238	0.8264	0.8289	0.8315	0.8340	0.8365	0.8389
1.0	0.8413	0.8438	0.8461	0.8485	0.8508	0.8531	0.8554	0.8577	0.8599	0.8621

Quin és el valor z tal que $P(Z \leqslant z) = 0.8357$?
Entre 0.97 i 0.98

```
> qnorm(0.8357)
[1] 0.9769377
```

Amb les normals no estàndard. . .

z	0.0	0.01	0.02	0.03	0.04	0.05	0.06	0.07	0.08	0.09
0.0	0.5000	0.5040	0.5080	0.5120	0.5160	0.5199	0.5239	0.5279	0.5319	0.5359
0.1	0.5398	0.5438	0.5478	0.5517	0.5557	0.5596	0.5636	0.5675	0.5714	0.5753
0.2	0.5793	0.5832	0.5871	0.5910	0.5948	0.5987	0.6026	0.6064	0.6103	0.6141
0.3	0.6179	0.6217	0.6255	0.6293	0.6331	0.6368	0.6406	0.6443	0.6480	0.6517
0.4	0.6554	0.6591	0.6628	0.6664	0.6700	0.6736	0.6772	0.6808	0.6844	0.6879
0.5	0.6915	0.6950	0.6985	0.7019	0.7054	0.7088	0.7123	0.7157	0.7190	0.7224
0.6	0.7257	0.7291	0.7324	0.7357	0.7389	0.7422	0.7454	0.7486	0.7517	0.7549
0.7	0.7580	0.7611	0.7642	0.7673	0.7704	0.7734	0.7764	0.7794	0.7823	0.7852
0.8	0.7881	0.7910	0.7939	0.7967	0.7995	0.8023	0.8051	0.8078	0.8106	0.8133
0.9	0.8159	0.8186	0.8212	0.8238	0.8264	0.8289	0.8315	0.8340	0.8365	0.8389
1.0	0.8413	0.8438	0.8461	0.8485	0.8508	0.8531	0.8554	0.8577	0.8599	0.8621

Sigui X una v.a. $N(1,2)$. Què val $P(X \leqslant 2)$?

$$P(X \leqslant 2) = P\left(Z \leqslant \frac{2-1}{2} = 0.5\right) = 0.6915$$

Amb les normals no estàndard...

z	0.0	0.01	0.02	0.03	0.04	0.05	0.06	0.07	0.08	0.09
0.0	0.5000	0.5040	0.5080	0.5120	0.5160	0.5199	0.5239	0.5279	0.5319	0.5359
0.1	0.5398	0.5438	0.5478	0.5517	0.5557	0.5596	0.5636	0.5675	0.5714	0.5753
0.2	0.5793	0.5832	0.5871	0.5910	0.5948	0.5987	0.6026	0.6064	0.6103	0.6141
0.3	0.6179	0.6217	0.6255	0.6293	0.6331	0.6368	0.6406	0.6443	0.6480	0.6517
0.4	0.6554	0.6591	0.6628	0.6664	0.6700	0.6736	0.6772	0.6808	0.6844	0.6879
0.5	0.6915	0.6950	0.6985	0.7019	0.7054	0.7088	0.7123	0.7157	0.7190	0.7224
0.6	0.7257	0.7291	0.7324	0.7357	0.7389	0.7422	0.7454	0.7486	0.7517	0.7549
0.7	0.7580	0.7611	0.7642	0.7673	0.7704	0.7734	0.7764	0.7794	0.7823	0.7852
0.8	0.7881	0.7910	0.7939	0.7967	0.7995	0.8023	0.8051	0.8078	0.8106	0.8133
0.9	0.8159	0.8186	0.8212	0.8238	0.8264	0.8289	0.8315	0.8340	0.8365	0.8389
1.0	0.8413	0.8438	0.8461	0.8485	0.8508	0.8531	0.8554	0.8577	0.8599	0.8621

Sigui X una v.a. $N(1,2)$. Per a quin x es té que $P(X \leqslant x) = 0.7939$?

$$0.7939 = P(X \leqslant x) = P\left(Z \leqslant \frac{x-1}{2}\right)$$
$$\Rightarrow \frac{x-1}{2} = 0.82 \Rightarrow x = 2.64$$

Amb les normals no estàndard. . .

z	0.0	0.01	0.02	0.03	0.04	0.05	0.06	0.07	0.08	0.09
0.0	0.5000	0.5040	0.5080	0.5120	0.5160	0.5199	0.5239	0.5279	0.5319	0.5359
0.1	0.5398	0.5438	0.5478	0.5517	0.5557	0.5596	0.5636	0.5675	0.5714	0.5753
0.2	0.5793	0.5832	0.5871	0.5910	0.5948	0.5987	0.6026	0.6064	0.6103	0.6141
0.3	0.6179	0.6217	0.6255	0.6293	0.6331	0.6368	0.6406	0.6443	0.6480	0.6517
0.4	0.6554	0.6591	0.6628	0.6664	0.6700	0.6736	0.6772	0.6808	0.6844	0.6879
0.5	0.6915	0.6950	0.6985	0.7019	0.7054	0.7088	0.7123	0.7157	0.7190	0.7224
0.6	0.7257	0.7291	0.7324	0.7357	0.7389	0.7422	0.7454	0.7486	0.7517	0.7549
0.7	0.7580	0.7611	0.7642	0.7673	0.7704	0.7734	0.7764	0.7794	0.7823	0.7852
0.8	0.7881	0.7910	0.7939	0.7967	0.7995	0.8023	0.8051	0.8078	0.8106	0.8133
0.9	0.8159	0.8186	0.8212	0.8238	0.8264	0.8289	0.8315	0.8340	0.8365	0.8389
1.0	0.8413	0.8438	0.8461	0.8485	0.8508	0.8531	0.8554	0.8577	0.8599	0.8621

Sigui X una v.a. $N(0.5, 1.5)$.

Què val $P(X \leqslant 1.5)$?

Per a quin x es té que $P(X \leqslant x) = 0.834$?

Distribució exponencial

Una v.a. contínua X té distribució exponencial de paràmetre λ, i ho indicarem amb $Exp(\lambda)$, si la seva funció de densitat és

$$f_X(x) = \begin{cases} 0 & \text{si } x \leqslant 0 \\ \lambda e^{-\lambda x} & \text{si } x > 0 \end{cases}$$

És densitat:

$$\int_0^\infty \lambda e^{-\lambda t}\, dt = \lim_{x\to\infty} \Big[-e^{-\lambda t}\Big]_0^x = \lim_{x\to\infty} -e^{-\lambda x} + 1 = 1$$

Amb R és `exp`

Distribució exponencial

La distribució exponencial és l'equivalent continu de la distribució geomètrica discreta

Si X és una v.a. que mesura el temps entre dues ocurrències d'un determinat esdeveniment, i el temps que pugui trigar l'esdeveniment a passar a partir d'ara és independent del que duguem esperant fins ara, aleshores X és exponencial.

- Temps que tarda una partícula radioactiva a desintegrar-se
- Temps que espera un malalt a la cua del servei d'urgències

Distribució exponencial

Teorema

Si tenim un procés de Poisson de paràmetre λ per unitat de temps, el temps que passa entre dos esdeveniments consecutius és una v.a. $Exp(\lambda)$

Sabem que la v.a. X_t que dóna el nombre d'esdeveniments en l'interval de temps $]0, t]$ és $Po(\lambda t)$

Considerem la v.a. T que dóna el temps transcorregut entre dos esdeveniments consecutius

$$\begin{aligned} P(T > t) &= P(0 \text{ esdeveniments en l'interval }]0, t]) \\ &= P(X_t = 0) = \frac{(\lambda t)^0}{0!} e^{-\lambda t} = e^{-\lambda t} \end{aligned}$$

Distribució exponencial

Per tant

$$F_T(t) = \begin{cases} 0 & \text{si } t \leqslant 0 \\ P(T \leqslant t) = 1 - P(T > t) = 1 - e^{-\lambda t} & \text{si } t > 0 \end{cases}$$

Derivant

$$f_T(t) = F_T'(t) = \begin{cases} 0 & \text{si } t \leqslant 0 \\ \lambda e^{-\lambda t} & \text{si } t > 0 \end{cases}$$

És $Exp(\lambda)$

Resum de propietats

Sigui X una v.a. $Exp(\lambda)$.

- Domini: $D_X =]0, \infty[$
- Densitat: $f_X(x) = \begin{cases} 0 & \text{si } x \leqslant 0 \\ \lambda e^{-\lambda x} & \text{si } x > 0 \end{cases}$
- Distribució: $F_X(x) = \begin{cases} 0 & \text{si } x \leqslant 0 \\ 1 - e^{-\lambda x} & \text{si } x > 0 \end{cases}$
- Esperança: $E(X) = \dfrac{1}{\lambda}$
- Variància: $Var(X) = \dfrac{1}{\lambda^2}$

Propietat de la manca de memòria

Teorema

Si és X una v.a. $Exp(\lambda)$, aleshores

$$P(X > s + t | X > s) = P(X > t) \text{ per a tots } s, t > 0$$

La probabilitat que, a partir d'un cert moment, calgui més de t perquè passi l'esdeveniment que mira X, no depèn del temps que duguem esperant.

Exemple

Suposem que en un determinat organisme el nombre de cèl·lules que es divideixen en un interval de temps és un procés de Poisson, i que de mitjana es divideix una cèl·lula cada 2 minuts.

Si X_t és el nombre de cèl·lules que es divideixen en t minuts, X_t és $Po(\lambda t)$, amb λ el nombre mitjà de cèl·lules que es divideixen en un minut: $\lambda = \frac{1}{2}$.

Sigui T el temps entre dues divisions cel·lulars consecutives. Pel que hem vist, T és $Exp(\frac{1}{2})$.

Exemple

Acabam d'observar una divisió cel·lular. Quina és la probabilitat que hàgim d'esperar més de 5 minuts fins la propera?

Exemple

Acabam d'observar una divisió cel·lular. Quina és la probabilitat que hàgim d'esperar més de 5 minuts fins la propera?

$$\begin{aligned} P(T > 5) &= 1 - P(T \leqslant 5) = 1 - F_T(5) \\ &= 1 - (1 - e^{-\frac{1}{2}\cdot 5}) = e^{-\frac{5}{2}} = 0.0821 \end{aligned}$$

Exemple

Acabam d'observar una divisió cel·lular. Quina és la probabilitat que hàgim d'esperar més de 5 minuts fins la propera?

$$
\begin{aligned}
P(T>5) &= 1-P(T\leqslant 5) = 1-F_T(5)\\
&= 1-\left(1-e^{-\frac{1}{2}\cdot 5}\right) = e^{-\frac{5}{2}} = 0.0821
\end{aligned}
$$

Acabam d'observar una divisió cel·lular. Quina és la probabilitat que hàgim d'esperar entre 5 i 10 minuts fins la propera?

Exemple

Acabam d'observar una divisió cel·lular. Quina és la probabilitat que hàgim d'esperar més de 5 minuts fins la propera?

$$\begin{aligned} P(T>5) &= 1-P(T\leqslant 5) = 1-F_T(5) \\ &= 1-(1-e^{-\frac{1}{2}\cdot 5}) = e^{-\frac{5}{2}} = 0.0821 \end{aligned}$$

Acabam d'observar una divisió cel·lular. Quina és la probabilitat que hàgim d'esperar entre 5 i 10 minuts fins la propera?

$$\begin{aligned} P(5<T<10) &= P(T<10)-P(T<5) \\ &= F_T(10)-F_T(5) \\ &= (1-e^{-\frac{1}{2}\cdot 10})-(1-e^{-\frac{1}{2}\cdot 5}) \\ &= e^{-\frac{5}{2}}-e^{-5} \end{aligned}$$

Exemple

Quin és el valor esperat i la desviació típica del temps que transcorre entre dues divisions successives?

L'esperança és

$$E(T) = \frac{1}{\lambda} = \frac{1}{\frac{1}{2}} = 2$$

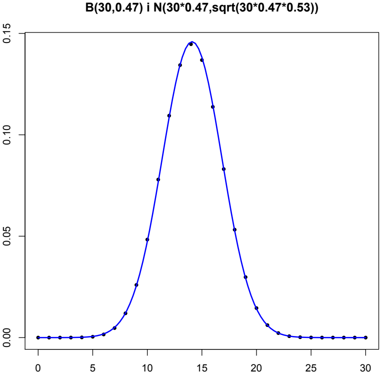
La desviació típica és

$$\sigma_T = \sqrt{Var(T)} = \sqrt{\frac{1}{\lambda^2}} = \frac{1}{\lambda} = 2$$

Aproximació d'una binomial per una normal

Sigui X una v.a. $B(n,p)$, de manera que $E(X) = np$ i $Var(X) = npq$ (on $q = 1 - p$)

Si n és gran i p no és prop de 0 o 1, aleshores X és aproximadament $N(np, \sqrt{npq})$



Aproximació d'una binomial per una normal

Teorema

Sigui X una v.a. $B(n,p)$, amb n gran i p que no estigui prop de 0 o 1. Sigui Y una v.a. $N(np, \sqrt{npq})$. Aleshores

$$P(X=k) \approx P\left(k-0.5 \leqslant Y \leqslant k+0.5\right)$$

De la suma ± 0.5 per corregir l'efecte que té aproximar una v.a. discreta per una contínua se'n diu correcció de continuïtat de Fisher.

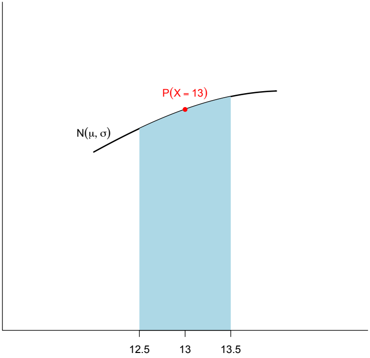
Hi ha diverses heurístiques per decidir què vol dir "n gran i p no a prop de 0 o 1". Per exemple:

$$n \geqslant 20, np \geqslant 10 \text{ i } n(1-p) \geqslant 10$$

Aproximació d'una binomial per una normal

Sigui $X \sim B(30, 0.47)$: $\mu = 30 \cdot 0.47$ i $\sigma = \sqrt{30 \cdot 0.47 \cdot 0.53}$

```
> dbinom(13,30,0.47)
[1] 0.134361
> PY=function(x){pnorm(x,30*0.47,sqrt(30*0.47*0.53))}
> PY(13.5)-PY(12.5)
[1] 0.1339606
```



Aproximació d'una binomial per una normal

Si X és una v.a. $B(n,p)$ amb n gran i p que no estigui prop de 0 o 1,

$$\frac{X-E(X)}{\sqrt{Var(X)}}=\frac{X-np}{\sqrt{npq}}$$

s'aproxima per una normal estàndard Z:

$$P(X=k)\approx P\left(\frac{k-0.5-np}{\sqrt{npq}}\leqslant Z\leqslant\frac{k+0.5-np}{\sqrt{npq}}\right)$$

Aproximació d'una binomial per una normal

Si X és una v.a. $B(n, p)$ amb n gran i p que no estigui prop de 0 o 1, i Z és una v.a. normal estàndard:

$$P(X \leqslant k) \approx P\left(Z \leqslant \frac{k + 0.5 - np}{\sqrt{npq}}\right)$$

$$P(X \geqslant k) \approx P\left(\frac{k - 0.5 - np}{\sqrt{npq}} \leqslant Z\right)$$

$$P(a \leqslant X \leqslant b) \approx P\left(\frac{a - 0.5 - np}{\sqrt{npq}} \leqslant Z \leqslant \frac{b + 0.5 - np}{\sqrt{npq}}\right)$$

Exemple

Llençam 100 vegades una moneda amb probabilitat de cara $\frac{1}{2}$. Probabilitat de treure entre 40 i 49 cares?

X=nombre de cares en 100 llançaments d'una moneda

X és $B(100, 0.5)$

Demanen $P(40 \leqslant X \leqslant 49)$

```
> pbinom(49,100,0.5)-pbinom(39,100,0.5)
[1] 0.4426053
```

Exemple

I si no tenim R? Podem emprar la taula de $N(0,1)$:

$$X \sim B(100, 0.5) \Rightarrow E(X) = np = 50,\ \sigma_X = \sqrt{npq} = 5$$

$$Z = \frac{X-50}{5} \sim N(0,1)$$

$$\begin{aligned}
P(40 \leqslant X \leqslant 49) \\
&\approx P\left(\frac{40-0.5-50}{5} \leqslant Z \leqslant \frac{49+0.5-50}{5}\right) \\
&= P(-2.1 \leqslant Z \leqslant -0.1) \\
&= F_Z(-0.1) - F_Z(-2.1) \\
&= 1 - F_Z(0.1) - 1 + F_Z(2.1) \\
&= F_Z(2.1) - F_Z(0.1) = 0.9821 - 0.5398 = 0.4423
\end{aligned}$$