Probabilidades básicas

Definiciones básicas

Experimento aleatorio: experimento que repetido en las mismas condiciones puede dar resultados diferentes, pero que a largo plazo son predecibles

Ejemplo: tirar un dado y contar los puntos de la cara superior

Suceso elemental: cada uno de los posibles resultados del experimento aleatorio

Ejemplo: ⚀, ⚁, ⚂, ⚃, ⚄, ⚅

Espacio muestral: el conjunto Ω formado por todos los sucesos elementales del experimento aleatorio

Ejemplo: $\Omega = \{$⚀, ⚁, ⚂, ⚃, ⚄, ⚅$\}$

Definiciones básicas

Suceso: cualquier subconjunto del espacio muestral.

Ejemplo: Alguno sucesos:

{⚀, ⚁, ⚂, ⚃, ⚄, ⚅} (suceso seguro o cierto)

$\emptyset$ (suceso imposible)

{⚅}

{⚀, ⚂, ⚄}

$\mathcal{P}(\Omega)$: conjunto de todos los sucesos del experimento aleatorio (conjunto de todos los subconjuntos de Ω)

Ejemplo

Experimento aleatorio: escoger al azar un 3-grama (tres letras consecutivas contando los blancos de inicio y final de palabra) de la palabra "_Baleares_"

Espacio muestral: $\Omega = \{\_Ba, Bal, ale, lea, are, res, es\_\}$

Algunos sucesos:

$\{ale, are\}$ (3-gramas que empiezan por a)

$\{\_Ba, es\_\}$ (3-gramas de inicio y final de palabra)

$\{Bal, ale, lea\}$ (3-gramas que contengan una ele)

Operaciones con sucesos

$A, B \subseteq \Omega$:

- Ω: suceso total o seguro
- $\emptyset$:suceso vacío o imposible
- $A \cup B$: suceso unión; el que ocurre si sucede A o B
- $A \cap B$: suceso intersección; el que ocurre si sucede A y B
- A^c: suceso complementario el que sucede si NO sucede A.
- $A - B = A \cap B^c$: suceso diferencia (el que acontece si sucede A y NO sucede B.

A y B son incompatibles (o disjuntos) cuando $A \cap B = \emptyset$

Ejemplo

Supongamos que el sexo se divide entre Mujeres y Hombres.
Ω ={Estudiantes de esta clase}
A ={Mujeres de esta clase}
B ={Estudiantes que son zurdos}

- $A \cup B$ ={Est. que son mujeres o que son zurdos}
- $A \cap B$ ={Mujeres de esta clase que son zurdas}
- A^c ={Hombres de esta clase}
- $A - B$ ={Mujeres de la clases que no son zurdas}
- $B - A$ ={Hombres de la clase que son zurdos}
- No son incompatibles ☺

Propiedades

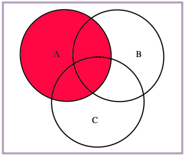
(a) Conmutativas: $A \cup B = B \cup A$, $A \cap B = B \cap A$

(b) Asociativas: $A \cup (B \cup C) = (A \cup B) \cup C$,
$A \cap (B \cap C) = (A \cap B) \cap C$

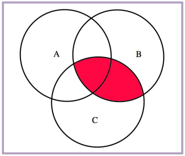
(c) Distributivas: $A \cap (B \cup C) = (A \cap B) \cup (A \cap C)$,
$A \cup (B \cap C) = (A \cup B) \cap (A \cup C)$

Propiedades: gráficos

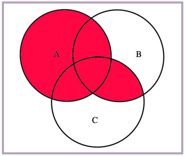
A



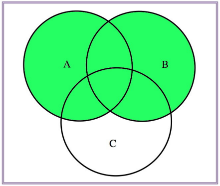
$B \cap C$



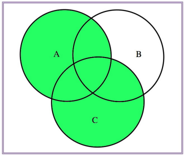
$A \cup (B \cap C)$



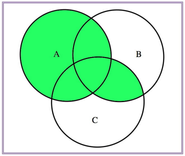
$A \cup B$



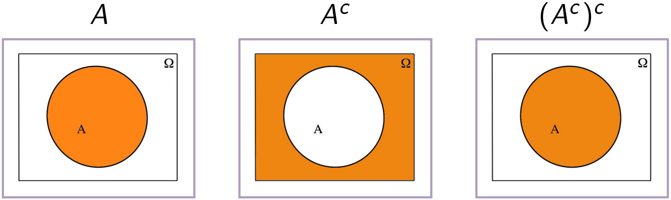
$A \cup C$



$(A \cup B) \cap (A \cup C)$

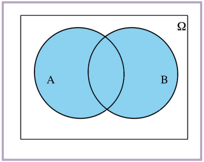


(d) complementario del complementario: $(A^c)^c = A$

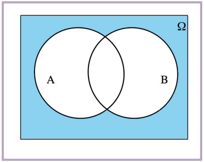


(e) Leyes de De Morgan: $(A \cup B)^c = A^c \cap B^c$, $(A \cap B)^c = A^c \cup B^c$

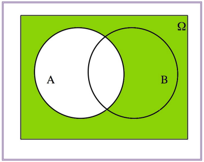
$A \cup B$



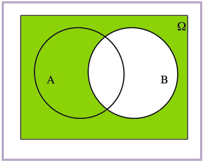
$(A \cup B)^c$



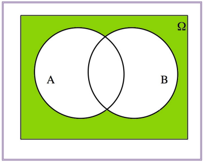
A^c



B^c

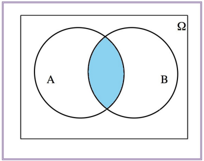


$A^c \cap B^c$

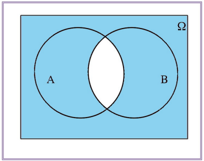


(e) Leyes de De Morgan: $(A \cup B)^c = A^c \cap B^c$, $(A \cap B)^c = A^c \cup B^c$

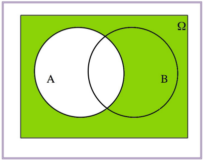
$A \cap B$



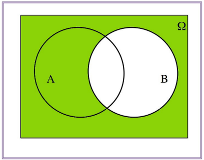
$(A \cap B)^c$



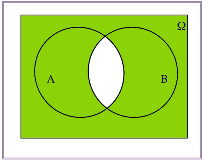
A^c



B^c



$A^c \cup B^c$



Definición de probabilidad

La probabilidad de un suceso es una puntuación (*score*) numérico entre 0 y 1 que mide la verosimilitud de que este evento se produzca.

Esta verosimilitud puede estar justificada por

- Estimación personal
- Estimación de expertos
- La frecuencia con la que se da
- Cálculo formal

Definición de probabilidad

Sea Ω el espacio muestral de un experimento aleatorio.
Supongamos que el número de posibles resultados, por el momento, es finito.
Una probabilidad sobre Ω es una aplicación

$$P : \mathcal{P}(\Omega) \to [0, 1]$$

con las siguientes propiedades:

a) $0 \leqslant P(A) \leqslant 1$, para todo suceso A
b) $P(\Omega) = 1$
c) Si $\{A_1, A_2, \ldots, A_n\}$ son sucesos disjuntos dos a dos, entonces

$$P(A_1 \cup A_2 \cup \cdots \cup A_n) = P(A_1) + P(A_2) + \cdots + P(A_n)$$

Si $a \in \Omega$ es un suceso elemental cometeremos el abuso de notación de poner $P(a)$ en lugar de $P(\{a\})$

Ejemplo

En la página de la Fundación Banco de Sangre y Tejidos de las Islas Baleares podemos encontrar información sobre los porcentajes de tipos de sangre de los donantes de las Islas Baleares:

A: 46%; B: 7.5%; AB: 3.5%; O: 43%

¿Cuál es la probabilidad de que un balear donante de sangre no sea del tipo 0?

Experimento aleatorio: tipo de sangre de un paciente humano

$\Omega = \{A,B,AB,O\}$

Probabilidad de un suceso: se asimila al porcentaje observado de individuos

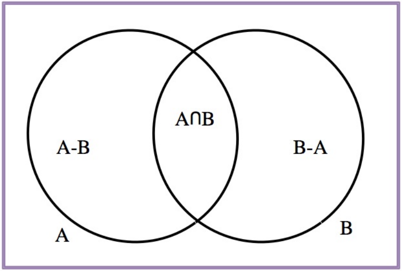
Suceso: $\{O\}^c = \{A,B,AB\}$

$P(\{O\}^c) = P(\{A,B,AB\}) = P(A) + P(B) + P(AB) = 0.55$

Propiedades

(a) $P(\emptyset) = 0$

(b) $P(A - B) = P(A) - P(A \cap B)$
porque $P(A) = P(A - B) + P(A \cap B)$



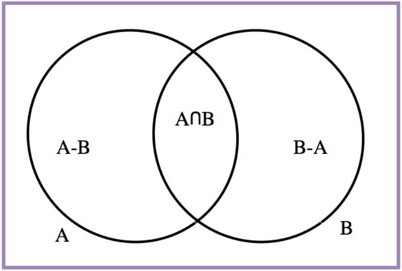
(c) Si $B \subseteq A$, entonces $0 \leqslant P(B) \leqslant P(A)$

(d) $P(A^c) = 1 - P(A)$

Propiedades

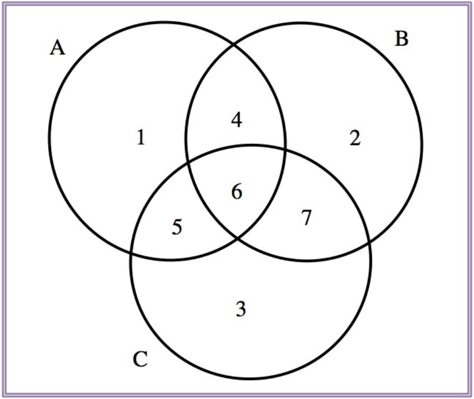
(e) $P(A \cup B) = P(A) + P(B) - P(A \cap B)$ porque

$$P(A) + P(B) - P(A \cap B) = P(A - B) + P(A \cap B)$$
$$+P(B - A) + P(A \cap B) - P(A \cap B)$$
$$= P(A - B) + P(A \cap B) + P(B - A) = P(A \cup B)$$



Propiedades

(f) $$P(A \cup B \cup C) = P(A) + P(B) + P(C) - P(A \cap B) - P(A \cap C) - P(B \cap C) + P(A \cap B \cap C)$$



$$P(A \cup B \cup C) = P(1) + P(2) + P(3) + P(4) + P(5) + P(6) + P(7)$$

Probabilidad
Definiciones básicas
Operaciones
Probabilidad
Probabilidad condicionada
Bayes
Independencia

Propiedades

(g) Si $A = \{a_1, a_2, \ldots, a_k\}$, entonces

$$P(A) = P(a_1) + P(a_2) + \cdots + P(a_k)$$

(h) Si todos los sucesos elementales tienen la misma probabilidad,

$$P(A) = \frac{|A|}{|\Omega|} \left(= \frac{\text{casos favorables}}{\text{casos posibles}} \right)$$

Ejemplos

Los porcentajes de vocales de un determinado idioma (de alfabeto latino) son:

A: 18.7%; E: 26.1%; I: 25.7%; O: 24.4% U: 5.1%

¿Cuál es la probabilidad que vocal escogida al azar de este idioma sea una E o una O?

$\Omega = \{A, E, I, O, U\}$

Suceso$= \{E, 0\}$

$P(\{E, I\}) = P(E) + P(O) = 0.261 + 0.244 = 0.505$

Ejemplo

En un control especial de la policía el 0.1% de todos los conductores analizados en un control de tráfico dan positivo en un el test en cocaína, y el 1% da positivo en cannabis. Un 1.05% da positivo en alguno de los dos test.

¿Cuál es la probabilidad que un individuo analizado en el control de drogas escogido al azar no de positivo en ninguno de lo dos test?

A: dar positivo en cocaína; $P(A) = 0.001$

B: dar positivo en cannabis; $P(B) = 0.01$

$A \cup B$: dar positivo en alguno de los dos test;
$P(A \cup B) = 0.0105$

$(A \cup B)^c$: no dar positivo en ninguno de los test

$$P((A \cup B)^c) = 1 - P(A \cup B) = 1 - 0.0105 = 0.9895$$

Ejemplos

En un control especial de la policía el 0.1% de todos los conductores analizados en un control de tráfico dan positivo en un el test en cocaína, y el 1% da positivo en cannabis. Un 1.05% da positivo en alguno de los dos test.

¿Cuál es la probabilidad que un analizado al azar de positivo en los dos test en cocaína y cannabis?

A: dar positivo en cocaína; $P(A) = 0.001$

B: dar positivo en cannabis; $P(B) = 0.01$

$A \cup B$: dar positivo en algún de los dos test; $P(A \cup B) = 0.0105$

$A \cap B$: dar positivo en los dos test

$$\begin{aligned} P(A \cap B) &= P(A) + P(B) - P(A \cup B) \\ &= 0.001 + 0.01 - 0.0105 = 0.0005 \end{aligned}$$

Ejemplos

En un control especial de la policía el 0.1% de todos los conductores analizados en un control de tráfico dan positivo en un el test en cocaína, y el 1% da positivo en cannabis. Un 1.05% da positivo en alguno de los dos test.

¿Cuál es la probabilidad de que un conductor analizado de positivo en cocaína pero no en cannabis?

A: dar positivo en cocaína; $P(A) = 0.001$

B: dar positivo en cannabis; $P(B) = 0.01$

$A \cap B$: dar positivo en los dos test; $P(A \cap B) = 0.0005$

$B - A$: dar positivo en cocaína pero no en cannabis

$$P(B - A) = P(B) - P(A \cap B) = 0.01 - 0.0005 = 0.0095$$

Probabilidad condicionada

Dados dos sucesos A y B, con $P(A) > 0$, la probabilidad $P(B|A)$ de B condicionado a A es la probabilidad

- de que suceda B suponiendo que pasa A
- de que si pasa A, entonces suceda B
- de que un resultado de A también pertenezca a B

Se calcula así:

$$P(B|A) = \frac{P(A \cap B)}{P(A)}$$

Ejemplo

En una clase de 20 hombres y 30 mujeres, 15 hombres y 18 mujeres llevan gafas.

(1) ¿Cuál es la probabilidad de que un alumno lleve gafas?

$$\frac{33}{50}$$

(2) ¿Cuál es la probabilidad de que un alumno sea mujer y lleve gafas?

$$\frac{18}{50}$$

Ejemplo

En una clase de 20 hombres y 30 mujeres, 15 hombres y 18 mujeres llevan gafas.

(3) ¿Cuál es la probabilidad de que un chica lleve gafas?

$$\frac{18}{30} = \frac{18/50}{30/50} = \frac{P(\text{mujer y gafas})}{P(\text{mujer})}$$

(4) Si escogemos un estudiante al azar ¿Cuál es la probabilidad que si es mujer, entonces lleve gafas?

$$\frac{18}{30}$$

Ejemplo

En una clase de 20 hombres y 30 mujeres, 15 hombres y 18 mujeres llevan gafas.

(5) ¿Cuál es la probabilidad de que un alumno que lleve gafas sea mujer?

$$\frac{18}{33} = \frac{18/50}{33/50} = \frac{P(\text{mujer y gafas})}{P(\text{gafas})}$$

(6) Si escogemos un estudiante al azar ¿Cuál es la probabilidad de que si lleva gafas, entonces sea mujer?

$$\frac{18}{33}$$

Alerta

Hay que distinguir bien entre

- $P(A \cap B)$: probabilidad de A y B

  Probabilidad de que sea mujer y lleve gafas

- $P(A|B)$: probabilidad de que si pasa B, entonces pase A

  Probabilidad de que, si es mujer, lleve gafas

Cuando utilizamos probabilidad condicional $P(A|B)$ estamos restringiendo el espacio muestral a B

Probabilidad condicionada. Propiedades

La probabilidad condicionada es una probabilidad

Propiedades

Sea $A \subseteq \Omega$ un suceso tal que $P(A) > 0$. entonces

$$
\begin{array}{rccc}
P(-|A): & \mathcal{P}(\Omega) & \to & [0,1] \\
 & B & \mapsto & P(B|A)
\end{array}
$$

satisface las propiedades de las probabilidades

Por ejemplo:

$$
\begin{array}{l}
P(B^c|A) = 1 - P(B|A) \\
P(B_1 \cup B_2|A) = P(B_1|A) + P(B_2|A) - P(B_1 \cap B_2|A)
\end{array}
$$

Ejemplos

Un 15% de los adultos son hipertensos, un 25% de los adultos creen que son hipertensos, y un 9% de los adultos son hipertensos y creen que lo son.

Si un adulto cree que es hipertenso, cuál es la probabilidad que lo sea?

A: ser hipertenso; $P(A) = 0.15$

B: creer ser hipertenso; $P(B) = 0.25$

$A \cap B$: ser hipertenso y creerlo; $P(A \cap B) = 0.09$

$$P(A|B) = \frac{P(A \cap B)}{P(B)} = \frac{0.09}{0.25} = 0.36$$

Ejemplo

Un 15% de los adultos son hipertensos, un 25% de los adultos creen que son hipertensos, y un 9% de los adultos son hipertensos y creen que lo son.

Si un adulto es hipertenso, ¿cuál es la probabilidad que crea que lo es?

A: ser hipertenso; B: creer ser hipertenso

$P(B|A)$?

$$P(B|A) = \frac{P(A \cap B)}{P(A)} = \frac{0.09}{0.15} = 0.6$$

Ejemplos

Un dígito de control de error toma el valor 0 en el 99% de los casos en que hay un error. Si la probabilidad de error en un mensaje es del 0.5%. ¿cuál es la probabilidad de que el mensaje sea erróneo y el código de error tenga valor 0?

B: mensaje con error; $P(B) = 0.005$

A: código de error vale 0; $P(A|B) = 0.99$

$$P(A \cap B) = P(B) \cdot P(A|B) = 0.005 \cdot 0.99 = 0.00495$$

Ejemplos

Un 50% de correos recibidos en un servidor llevan adjuntos y un 65% son publicidad no deseada (SPAM). Sólo un 15% de estos correos no llevan adjuntos y no son SPAM.

- ¿Cuál es la probabilidad que un correo lleve adjunto si es SPAM?
- ¿Cuál es la probabilidad que un correo no tenga adjuntos si no es SPAM?

Ejemplos

Un 50% de correos recibidos en un servidor llevan adjuntos y un 65% son publicidad no deseada (SPAM). Sólo un 15% de estos correos no llevan adjuntos y no son SPAM.

- ¿Cuál es la probabilidad de que un correo tenga adjuntos si es SPAM?

A: llevar adjuntos; $P(A) = 0.5$

S: SPAM; $P(S) = 0.65$

$A^c \cap S^c = (A \cup S)^c$: no llevar adjunto y no ser SPAM; $P((A \cup S)^c) = 0.15$

$$P(A|S) = \frac{P(A \cap S)}{P(S)} = ?$$

Ejemplos

Un 50% de correos recibidos en un servidor que llevan adjuntos y un 65% son publicidad no deseada (SPAM). Sólo un 15% de estos correos no llevan adjuntos y no son SPAM.

- ¿Cuál es la probabilidad que un correo lleve adjuntos si es SPAM?

$P(A) = 0.5, P(S) = 0.65,$
$P(A^c \cap S^c) = P((A \cup S)^c) = 0.15$

$$P(A \cup S) = 1 - P((A \cup S)^c) = 0.85$$

$$P(A \cap S) = P(A) + P(S) - P(A \cup S) = 0.3$$

$$P(A|S) = \frac{P(A \cap S)}{P(S)} = \frac{0.3}{0.65} \approx 0.46$$

Ejemplos

Un 50% de correos recibidos en un servidor que llevan adjuntos y un 65% son publicidad no deseada (SPAM). Sólo un 15% de estos correos no llevan adjuntos y no son SPAM.

- ¿Cuál es la probabilidad de que un correo no lleve adjuntos si no es SPAM?

$P(A) = 0.5, P(S) = 0.65,$
$P(A^c \cap S^c) = P((A \cup S)^c) = 0.15$

$$P(A^c|S^c) = \frac{P(A^c \cap S^c)}{P(S^c)} = \frac{P(A^c \cap S^c)}{1 - P(S)} = \frac{0.15}{0.35} \approx 0.43$$

Teorema de la probabilidad total

Teorema

Dados dos sucesos A y B se tiene que

$$\begin{aligned} P(B) &= P(B \cap A) + P(B \cap A^c) \\ &= P(A) \cdot P(B|A) + P(A^c) \cdot P(B|A^c) \end{aligned}$$

Teorema de la probabilidad total

Los sucesos $A_1, A_2, \ldots, A_n$ son una partición del espacio muestral Ω de un determinado experimento aleatorio, si cumplen las condiciones siguientes:

- $A_1 \cup A_2 \cup \ldots \cup A_n = \Omega$
- $A_1, A_2, \ldots, A_n$ son incompatibles dos a dos $(A_i \cap A_j = \emptyset)$

Teorema

Sea $A_1, A_2, \ldots, A_n$ una partición de Ω. Sea B un suceso cualquiera. Entonces

$$\begin{aligned} P(B) &= P(B \cap A_1) + \cdots + P(B \cap A_n) \\ &= P(A_1) \cdot P(B|A_1) + \ldots + P(A_n) \cdot P(B|A_n) \end{aligned}$$

Ejemplos

Un dígito de control de error toma el valor 0 en un 99% de los casos en que hay un error y en un 5% de los mensajes sin error. La probabilidad de error en un mensaje es del 0.5% ¿Cuál es la probabilidad de que un mensaje escogido al azar tenga el dígito de control a 0?

B: mensaje con error; $P(B) = 0.005$

A: código de error vale 0; $P(A|B) = 0.99$

$P(A|B) = 0.99, P(A|B^c) = 0.05$

$$\begin{aligned} P(A) &= P(B) \cdot P(A|B) + P(B^c) \cdot P(A|B^c) \\ &= 0.005 \cdot 0.99 + 0.995 \cdot 0.05 = 0.0547 \end{aligned}$$

Clasificación o Diagnósticos

Consideremos alguna de las siguientes situaciones:

- Un algoritmo detecta si una transacción con tarjeta de crédito es fraude o no.
- Un algoritmo detecta si tiene o no que mostrar un anuncio en una web.
- Un prueba de embarazo.
- Una prueba médica para una enfermedad concreta.

Clasificación o Diagnósticos

Nos ceñiremos a la casuística más elemental el algoritmo de clasificación o la diagnosis solo da dos resultado Positivo (sí tienes la enfermedad, sí es un fraude) o Negativo (en caso contrario).

En todas estas situaciones podemos calcular lo que se llama matriz de confusión que representa todas las situaciones posibles:

	Test Positivo	Test Negativo
Es del tipo	Correcto	Error
No Es del tipo	Error	Correcto

En general los modelos y algoritmos de clasificación suelen aportar puntuaciones (scores) que determinan el grado de pertenencia a una clase, o que miden si dos objetos están en la misma clase.
Así el resultado del clasificador o del diagnóstico puede ser:

- un número real, en cuyo caso debe clasificador entre cada clase debe determinarse por un valor umbral (threshold) por ejemplo para determinar si una persona está estresado podemos dar un scores entre 0 y 1 (1 máximo estrés 0 estrés nulo):
- o podemos dar un resultado discreto que indica directamente una de las clases (esto es necesario si es un algoritmo que debe decidir qué hacer con el objeto.
- Buen momento para un vídeo: Is Hot Dog.

Clasificación o Diagnósticos

En un diagnósticos de una cierta condición (por Ejemplo, test embarazo, test de enfermedad), tenemos dos tipos de sucesos:

- T: el test da positivo
- M: el sujeto satisface la condición

entonces

- Falsos positivos $T \cap M^c$: El test da positivo, pero la condición no es da
- Coeficiente de falsos positivos: $P(T|M^c)$
- Falsos negativos $T^c \cap M$: El test da negativo, pero la condición sí que se da
- Coeficiente de falsos negativos: $P(T^c|M)$

Ejemplos

Un test diseñado para diagnosticar una determinada enfermedad tiene un coeficiente de falsos negativos de 0.06, y un coeficiente de falsos positivos de 0.04. En un estudio masivo se observa que un 15% de la población da positivo al test.
¿Cuál es la probabilidad que una persona escogida aleatoriamente tenga esta enfermedad?

T: dar positivo al test; $P(T) = 0.15$

M: tener la enfermedad

$P(T) = 0.15$, $P(T^c|M) = 0.06$, $P(T|M^c) = 0.04$

$P(M)$?

Ejemplos

$$P(T) = 0.15,\ P(T^c|M) = 0.06,\ P(T|M^c) = 0.04$$

$$P(T) = P(M) \cdot P(T|M) + P(M^c) \cdot P(T|M^c)$$

donde

$$P(T|M) = 1 - P(T^c|M) = 0.94$$
$$P(M^c) = 1 - P(M)$$

Por lo tanto

$$\begin{aligned} 0.15 &= P(M) \cdot 0.94 + (1 - P(M)) \cdot 0.04 \\ &= 0.04 + 0.9P(M) \\ P(M) &= \frac{0.11}{0.9} \approx 0.1222. \end{aligned}$$

Fórmula de Bayes

Teorema (Teorema de Bayes)

Sean A y B dos sucesos. Si $P(B) > 0$, entonces

$$\begin{aligned} P(A|B) &= \frac{P(A)\cdot P(B|A)}{P(B)} \\ &= \frac{P(A)\cdot P(B|A)}{P(A)\cdot P(B|A) + P(A^c)\cdot P(B|A^c)} \end{aligned}$$

Motivo: $P(A|B) = \dfrac{P(A\cap B)}{P(B)} = \cdots$

Fórmula de Bayes

Teorema (Teorema de Bayes)

Sea $A_1, A_2, \ldots, A_n$ una partición de Ω. Sea B un suceso tal que $P(B) > 0$. entonces(para cualquier $i = 1, 2, \ldots, n$):

$$\begin{aligned} P(A_i|B) &= \frac{P(A_i) \cdot P(B|A_i)}{P(B)} \\ &= \frac{P(A_i) \cdot P(B|A_i)}{P(A_1) \cdot P(B|A_1) + \cdots + P(A_n) \cdot P(B|A_n)} \end{aligned}$$

Motivo: $P(A_i|B) = \dfrac{P(A_i \cap B)}{P(B)} = \cdots$

Ejemplos

Un test para detección de VIH da positivo un 99% de los casos en los que está presente y en un 5% de los casos en los que el virus está ausente. En una población con un 0.5% de infectados por VIH, cuál es la probabilidad que un individuo que haya dado positivo en el test esté infectado?

A: individuo infectado

B: el test da positivo

$$
\begin{aligned}
P(A|B) &= \frac{P(B|A)\cdot P(A)}{P(B|A)\cdot P(A) + P(B|A^c)\cdot P(A^c)} \\
&= \frac{0.99\cdot 0.005}{0.005\cdot 0.99 + 0.995\cdot 0.05} = 0.09
\end{aligned}
$$

Ejemplos

Un test para detección de VIH da positivo un 99% de los casos en los que está presente y en un 5% de los casos en los que el virus está ausente. En una población con un 0.5% de infectados por VIH, ¿cuál es la probabilidad de que un individuo que haya dado negativo en el test no esté infectado?

A: individuo infectado

B: el test da positivo

$$\begin{aligned} P(A^c|B^c) &= \frac{P(B^c|A^c)\cdot P(A^c)}{P(B^c|A)\cdot P(A) + P(B^c|A^c)\cdot P(A^c)} \\ &= \frac{0.95\cdot 0.995}{0.01\cdot 0.005 + 0.95\cdot 0.995} = 0.999947 \end{aligned}$$

Ejemplos

Se ha observado que los cientes de una empresa de ventas por internet son de tres tipos, A, B y C, disjuntos dos a dos. La probabilidad que ser de cualquiera de cada uno de los tipos es $1/3$, pero la probabilidad de compra de cada tipo es diferente: si es de tipo A compra un 50% de las veces, si de tipo B, un 75% de las veces, y de tipo C, un 60%.

Supongamos que llega un cliente ¿cuál es la probabilidad de que si ha comprado sea del tipo B?

Ejemplos

A: el cliente es de tipo A; B: el cliente es de tipo B; C: el cliente es de tipo C;

$P(A) = P(B) = P(C) = 1/3$

E: el cliente compra

$P(E|A) = 0.5, P(E|B) = 0.75, P(E|C) = 0.6$

$$P(B|E) = \frac{P(E|B)\cdot P(B)}{P(E|A)\cdot P(A) + P(E|B)\cdot P(B) + P(E|C)\cdot P(C)} = \ldots$$

Ejemplos

Un test de detección precoz de abandono de clientes de una empresa de telefonía da positivo el 97.5% de las ocasiones en las que, posteriormente, el cliente se da de baja, y un 12% de las veces en que no se dio de baja. La probabilidad que un cliente escogido al azar se dé de baja es de un 2%.

1. ¿Cuál es la probabilidad que un individuo escogido al azar de positivo en el test?
2. ¿Cuál es la probabilidad que un individuo escogido al azar se de de baja y dé positivo en el test?
3. ¿Cuál es la probabilidad que un individuo que dé negativo en el test se dé de baja?

Ejemplos

Un test de detección precoz de abandono de clientes de una entidad bancaria da positivo el 97.5% de las ocasiones en las que posteriormente el cliente de da de baja, y un 12% de las veces en que no se dio de baja. La probabilidad que un cliente escogido al azar se dé de baja es de un 2%.

T: Dar positivo al test

B: darse de baja; $P(M) = 0.02$

$P(T|B) = 0.975, P(T|B^c) = 0.12$

Ejemplos

$$P(B) = 0.02,\ P(T|B) = 0.975,\ P(T|B^c) = 0.12$$

¿Cuál es la probabilidad que un individuo escogido al azar de positivo en el test?

$$\begin{aligned} P(T) = \quad & P(B)\cdot P(T|B) + P(B^c)\cdot P(T|B^c) \\ & = 0.02\cdot 0.975 + 0.98\cdot 0.12 = 0.1371 \end{aligned}$$

Ejemplos

$P(B) = 0.02$, $P(T) = 0.1371$, $P(T|B) = 0.975$, $P(T|B^c) = 0.12$

¿Cuál es la probabilidad que un individuo escogido al azar se de de baja y dé positivo en el test?

$$P(B \cap T) = P(B) \cdot P(T|B) = 0.02 \cdot 0.975 = 0.0195$$

Ejemplos

$P(B) = 0.02$, $P(T) = 0.1371$, $P(T|B) = 0.975$, $P(T|B^c) = 0.12$

¿Cuál es la probabilidad que un individuo que dé negativo en el test se dé de baja?

$$P(B|T^c) = \frac{P(B \cap T^c)}{P(T^c)} = \frac{P(B) - P(B \cap T)}{1 - P(T)} = \frac{0.02 - 0.0195}{1 - 0.1371} \approx 0.00058$$

Ejemplos

$P(B) = 0.02$, $P(T) = 0.1371$, $P(T|B) = 0.975$, $P(T|B^c) = 0.12$

¿Cuál es la probabilidad que un individuo que dé negativo en el test se dé de baja?

O también se obtiene así

$$P(B|T^c) = \frac{P(T^c|B) \cdot P(B)}{P(T^c|B) \cdot P(B) + P(T^c|B^c) \cdot P(B^c)}$$

donde

$$P(T^c|B) = 1 - P(T|B) = 0.025,$$

$$P(T^c|B^c) = 1 - P(T|B^c) = 0.88$$

Sucesos independientes

Diremos que los sucesos A y B son independientes si $P(A \cap B) = P(A) \cdot P(B)$

$A_1, \ldots, A_n$ son sucesos independientes cuando, para toda subfamilia $A_{i_1}, \ldots, A_{i_k}$,

$$P(A_{i_1} \cap \cdots \cap A_{i_k}) = P(A_{i_1}) \cdots P(A_{i_k})$$

Propiedades

Dados dos sucesos A y B con $P(A), P(B) > 0$, las siguientes afirmaciones son equivalentes:

(a) *A y B son independientes*

(b) $P(A|B) = P(A)$

(c) $P(B|A) = P(B)$

Sucesos independientes

Propiedades

Las siguientes afirmaciones son equivalentes:

a) A *y* B *son independientes.*

b) A^c *y* B *son independientes.*

c) A *y* B^c *son independientes.*

d) A^c *y* B^c *son independientes.*

Ejemplos

En la web de viajes LTravel, el 55% de los clientes compra billete de avión, el 20% alojamiento en hotel, y el 60% billete de avión o alojamiento en hotel. ¿Son los sucesos comprar billete de avión y comprar alojamiento en hotel independientes?

A: comprar billete de avión; $P(A) = 0.55$

B: comprar alojamiento; $P(B) = 0.2$

$$\begin{aligned} P(A \cap B) &= P(A) + P(B) - P(A \cup B) \\ &= 0.55 + 0.2 - 0.6 = 0.15 \\ P(A) \cdot P(B) &= 0.55 \cdot 0.2 = 0.11 \end{aligned}$$

Son dependientes