Matemàtiques III del Grau de Matemàtiques i de la doble titulació GMIT

Taules de contrastos d'hipòtesi més usuals I: Una mostra

En aquest document recollim els contrastos d'hipòtesis paramètrics més usuals per a una mostra que es poden portar a terme "a mà." Per a cada contrast donam: les condicions, l'estadístic de contrast, la regió crítica, l'interval de confiança i el p-valor.

En la definició dels l'estadístics hem emprat la notacions següents:

- Z: Distribució normal estàndard $N(0,1)$.
- t_n: Distribució t de Student amb n graus de llibertat.
- χ_n^2: Distribució khi-quadrat amb n graus de llibertat.
- X_α: Indica l'α-quantil de la variable aleatòria X, és a dir (si X és contínua, que és sempre el cas en aquest document), el valor on la funció de distribució de X val α: $P(X \leqslant X_\alpha) = \alpha$.

  Recordau la traducció als quantils de les propietats de simetria de Z i t:

  - Simetria de la normal: $z_\alpha = -z_{1-\alpha}$.
  - Simetria de la t de Student: $t_{n,\alpha} = -t_{n,1-\alpha}$.

Els contrastos paramètrics amb `R` els estudiarem més endavant a una lliçó del manual de `R`.

Tipus de contrast i condicions				
Hipòtesi nul·la	**Condicions**	**Mostra**	**Hipòtesi alternativa**	**Cas**
$H_0 : \mu = \mu_0$	Població normal o n gran. σ coneguda.	n observacions independents.	$H_1 : \mu \neq \mu_0$	**I**
			$H_1 : \mu < \mu_0$	**II**
			$H_1 : \mu > \mu_0$	**III**
	Població normal. σ desconeguda.	n observacions independents.	$H_1 : \mu \neq \mu_0$	**IV**
			$H_1 : \mu < \mu_0$	**V**
			$H_1 : \mu > \mu_0$	**VI**
	Població qualsevol. σ desconeguda. n gran.	n observacions independents.	$H_1 : \mu \neq \mu_0$	**VII**
			$H_1 : \mu < \mu_0$	**VIII**
			$H_1 : \mu > \mu_0$	**IX**
$H_0 : p = p_0$	Població Bernoulli. $n \geqslant 100$, $n\widehat{p} \geqslant 10$, $n(1-\widehat{p}) \geqslant 10$	n observacions independents.	$H_1 : p \neq p_0$	**X**
			$H_1 : p < p_0$	**XI**
			$H_1 : p > p_0$	**XII**
$H_0 : \sigma^2 = \sigma_0^2$	Població Normal. μ desconeguda	n observacions independents.	$H_1 : \sigma^2 \neq \sigma_0^2$	**XIII**
			$H_1 : \sigma^2 < \sigma_0^2$	**XIV**
			$H_1 : \sigma^2 > \sigma_0^2$	**XV**

Detalls del test				
Cas	Estadístic	Regió crítica	Interval confiança	p-valor
I	$Z=\frac{\overline{X}-\mu_0}{\frac{\sigma}{\sqrt{n}}}$	$\{Z\leqslant -z_{1-\frac{\alpha}{2}}\}\cup\{Z\geqslant z_{1-\frac{\alpha}{2}}\}$	$\left]\overline{X}-z_{1-\frac{\alpha}{2}}\cdot\frac{\sigma}{\sqrt{n}},\overline{X}+z_{1-\frac{\alpha}{2}}\cdot\frac{\sigma}{\sqrt{n}}\right[$	$2P(Z\geqslant\|z\|)$
II	és $N(0,1)$	$\{Z\leqslant z_{\alpha}\}$	$\left]-\infty,\overline{X}-z_{\alpha}\cdot\frac{\sigma}{\sqrt{n}}\right[$	$P(Z\leqslant z)$
III		$\{Z\geqslant z_{1-\alpha}\}$	$\left]\overline{X}-z_{1-\alpha}\cdot\frac{\sigma}{\sqrt{n}},\infty\right[$	$P(Z\geqslant z)$
IV	$T=\frac{\overline{X}-\mu_0}{\frac{\tilde{S}}{\sqrt{n}}}$	$\{T\leqslant -t_{n-1,1-\frac{\alpha}{2}}\}\cup\{T\geqslant t_{n-1,1-\frac{\alpha}{2}}\}$	$\left]\overline{X}-t_{n-1,1-\frac{\alpha}{2}}\cdot\frac{\tilde{S}}{\sqrt{n}},\overline{X}+t_{n-1,1-\frac{\alpha}{2}}\cdot\frac{\tilde{S}}{\sqrt{n}}\right[$	$2P(t_{n-1}\geqslant\|T\|)$
V		$\{T\leqslant t_{n-1,\alpha}\}$	$\left]-\infty,\overline{X}-t_{n-1,\alpha}\cdot\frac{\tilde{S}}{\sqrt{n}}\right[$	$P(t_{n-1}\leqslant T)$
VI	és t_{n-1}	$\{T\geqslant t_{n-1,1-\alpha}\}$	$\left]\overline{X}-t_{n-1,1-\alpha}\cdot\frac{\tilde{S}}{\sqrt{n}},\infty\right[$	$P(t_{n-1}\geqslant T)$
VII	$Z=\frac{\overline{X}-\mu_0}{\frac{\tilde{S}}{\sqrt{n}}}$	$\{Z\leqslant -z_{1-\frac{\alpha}{2}}\}\cup\{Z\geqslant z_{1-\frac{\alpha}{2}}\}$	$\left]\overline{X}-z_{1-\frac{\alpha}{2}}\cdot\frac{\tilde{S}}{\sqrt{n}},\overline{X}+z_{1-\frac{\alpha}{2}}\cdot\frac{\tilde{S}}{\sqrt{n}}\right[$	$2P(Z\geqslant\|z\|)$
VIII	és aprox.	$\{Z\leqslant z_{\alpha}\}$	$\left]-\infty,\overline{X}-z_{\alpha}\cdot\frac{\tilde{S}}{\sqrt{n}}\right[$	$P(Z\leqslant z)$
IX	$N(0,1)$	$\{Z\geqslant z_{1-\alpha}\}$	$\left]\overline{X}-z_{1-\alpha}\cdot\frac{\tilde{S}}{\sqrt{n}},\infty\right[$	$P(Z\geqslant z)$
X	$Z=\frac{\widehat{p}-p_0}{\sqrt{\frac{p_0(1-p_0)}{n}}}$	$\{Z\leqslant z_{\frac{\alpha}{2}}\}\cup\{Z\geqslant z_{1-\frac{\alpha}{2}}\}$	$\left]\widehat{p}+z_{\frac{\alpha}{2}}\sqrt{\frac{\widehat{p}(1-\widehat{p})}{n}},\widehat{p}+z_{1-\frac{\alpha}{2}}\sqrt{\frac{\widehat{p}(1-\widehat{p})}{n}}\right[$	$2P(Z\geqslant\|z\|)$
XI	és $N(0,1)$	$\{Z\leqslant z_{\alpha}\}$	$\left]-\infty,\widehat{p}-z_{\alpha}\sqrt{\frac{\widehat{p}(1-\widehat{p})}{n}}\right[$	$P(Z\leqslant z)$
XII		$\{Z\geqslant z_{1-\alpha}\}$	$\left]\widehat{p}-z_{1-\alpha}\sqrt{\frac{\widehat{p}(1-\widehat{p})}{n}},\infty\right[$	$P(Z\geqslant z)$
XIII[1]	$\chi^2=\frac{(n-1)\tilde{S}^2}{\sigma_0^2}$	$\{\chi^2\leqslant\chi^2_{n-1,\frac{\alpha}{2}}\}\cup\{\chi^2\geqslant\chi^2_{n-1,1-\frac{\alpha}{2}}\}$	$\left]\frac{(n-1)\tilde{S}^2}{\chi^2_{n-1,1-\frac{\alpha}{2}}},\frac{(n-1)\tilde{S}^2}{\chi^2_{n-1,\frac{\alpha}{2}}}\right[$	$2\min\{P(\chi^2_{n-1}\leqslant\chi^2),$ $P(\chi^2_{n-1}\geqslant\chi^2\}$
XIV	és χ^2_{n-1}	$\{\chi^2\leqslant\chi^2_{n-1,\alpha}\}$	$\left]0,\frac{(n-1)\tilde{S}^2}{\chi^2_{n-1,\alpha}}\right[$	$P(\chi^2_{n-1}\leqslant\chi^2)$
XV		$\{\chi^2\geqslant\chi^2_{n-1,1-\alpha}\}$	$\left]\frac{(n-1)\tilde{S}^2}{\chi^2_{n-1,1-\alpha}},\infty\right[$	$P(\chi^2_{n-1}\geqslant\chi^2)$

[1] En aquest cas (**XIII**), si μ és coneguda, es pot emprar l'estadístic $\chi^2=\frac{\sum_{i=1}^{n}(X_i-\mu)^2}{\sigma_0^2}$, que tendrà distribució χ^2_n.