Contrastes de hipótesis: Introducción

Decisiones

Para que la estadística inferencial sea útil no solo necesitamos estimar un valor sino que además tendremos que tomar una decisión apoyada en los datos (muestras) que acepte o rechace alguna afirmación relativa al valor de un parámetro

Ejemplo: Los responsables de salud pública del gobierno han determinado que el número medio de bacterias por cc en las aguas en las que se practica la recogida de moluscos para el consumo humano tiene que ser $\leqslant 70$

Tomamos una serie de muestras de agua de una zona, y hemos de decidir so podemos recoger moluscos

Decisiones

Ejemplo: Una empresa de telecomunicaciones recibe una partida de 100 routers cada mes. El técnico que se encarga de la recepción del material tiene la orden de rechazar entera las partidas que contengan más de un 5 % de unidades defectuosas.

El técnico toma la decisión de aceptar o rechazar la partida basándose en el análisis de una muestra aleatoria de unidades

Estas afirmaciones reciben el nombre de hipótesis y el método estadístico de toma de una decisión sobre una hipótesis recibe el nombre de contraste de hipótesis

Decisiones

En un contraste de hipótesis, se contrastan dos hipótesis alternativas: la hipótesis nula H_0 y la hipótesis alternativa H_1

- La hipótesis alternativa H_1 es de la que buscamos evidencia
- La hipótesis nula H_0 es la que rechazaremos si obtenemos evidencia de la hipótesis alternativa
- Si no obtenemos evidencia a favor de H_1, no podemos rechazar H_0 ($\approx$ aceptamos H_0, pero es un abuso de lenguaje)

Ejemplos

Los responsables de salud pública del gobierno han determinado que el número medio de bacterias por cc en las aguas en las que se practica la recogida de moluscos para el consumo humano tiene que ser $\leqslant 70$

$\mu =$ número media de bacterias por cc de agua

Contraste:

$$\begin{cases} H_0 : \mu \leqslant 70 \\ H_1 : \mu > 70 \end{cases}$$

Decisión: Tomaremos algunas muestras y calcularemos la media muestral del nombre de bacterias por cc. Si es bastante grande, lo consideraremos como una evidencia de H_1, y si no, aceptaremos H_0.

Ejemplos

Un técnico recibe una partida de 100 routers cada mes. El técnico tiene la orden de rechazar entera las partidas que contengan más de un 5 % de unidades defectuosas.

$p =$ proporción de unidades defectuosas

Contraste:

$$\begin{cases} H_0 : p \leqslant 0.05 \\ H_1 : p > 0.05 \end{cases}$$

Decisión: El encargado comprueba algunas unidades y calcula la proporción muestral de routers defectuosos. Si es bastante grande, lo considerará una evidencia de H_1, y si no, aceptará H_0.

Decisiones

Un contraste de hipótesis

$$\begin{cases} H_0 : \text{hipótesis nula} \\ H_1 : \text{hipótesis alternativa} \end{cases}$$

consiste en plantear:

- Hipótesis nula H_0: Es la hipótesis que "por defecto" aceptamos como verdadera, y que rechazamos si hay pruebas en contra
- Hipótesis alternativa H_1: Es la hipótesis contra la que contrastamos la hipótesis nula y que aceptamos cuando rechazamos la nula

y generar una regla de decisión para rechazar o no la hipótesis nula a partir de la información contenida en una muestra

Ejemplo

La parábola del juicio y el contraste de hipótesis

En un juicio, tenemos que declarar a un acusado inocente o culpable

Contraste:

$$\begin{cases} H_0 : \text{El acusado es inocente} \\ H_1 : \text{El acusado es culpable} \end{cases}$$

Las pruebas son los elementos de la muestra

Si el jurado encuentra suficiente mente incriminatorias las pruebas, declara culpable al acusado (rechaza H_0 en favor de H_1)

Si no las encuentra suficientemente incriminatorias, le declara no culpable (no rechaza H_0)

Considerar no culpable $\neq$ declarar inocente

¿Cómo escoger H_0 y H_1?

Las pruebas tienen que aportar evidencia de H_1, lo que nos permitirá rechazar H_0

Es imposible encontrar evidencia de que $\mu =$ lo que sea, en cambio sí que es puede demostrar que $\mu >$, o que $\mu <$, o que $\mu \neq$ lo que sea

Ejemplo: ¿Es $e^{\pi\sqrt{163}} = 262537412640768744$?
Si calculamos

$$262537412640768743.99999999\ldots 9999\ldots 250072597198\ldots$$

Hemos demostrado que no; pero, para demostrar que sí, tendríamos que haber calculado infinitas cifras decimales

¿Cómo escoger H_0 y H_1?

Las pruebas han de poder dar evidencia de H_1, lo que permitirá rechazar H_0

Es imposible encontrar evidencia de que $\mu =$ lo que sea, en cambio sí que es puede demostrar que $\mu >$, o que $\mu <$, o que $\mu \neq$ lo que sea

En este contexto:

- H_1 se define con $>$, $<$, o $\neq$
- H_0 se define con $=$, $\leqslant$, o $\geqslant$
- H_1 es la hipótesis de la que podemos hallar pruebas incriminatorias, H_0 la que estamos dispuestos a aceptar si no hay pruebas en contra

¿Cómo elegir H_0?

Ejemplos

- Queremos decidir si la media es más pequeña que 2 o no
$$\begin{cases} H_0 : \mu = 2 \text{ (o } \mu \geqslant 2) \\ H_1 : \mu < 2 \end{cases}$$
- Queremos decidir si la media es igual o diferente de 5
$$\begin{cases} H_0 : \mu = 5 \\ H_1 : \mu \neq 5 \end{cases} \text{ o } \begin{cases} H_0 : \mu \neq 5 \\ H_1 : \mu = 5 \end{cases} ?$$
- Queremos decidir si la media es igual o diferente de 5
$$\begin{cases} H_0 : \mu = 5 \\ H_1 : \mu \neq 5 \end{cases}$$

Tipos de hipótesis alternativas

- Hipótesis unilateral (*one-sided*; también de una cola, *one-tailed*): $H : \theta > \theta_0$, $H : \theta < \theta_0$
- Hipótesis bilateral (*two-sided*; también de dos colas, *two-tailed*): $H : \theta \neq \theta_0$

Los tests suelen tomar el nombre de la hipótesis alternativa: test unilateral, test de dos colas,...

Tipos de errores

Decisión	Realidad	
	H_0 cierta	H_0 falsa
Aceptar H_0	Dec. correcta Prob=$1-\alpha$	Error Tipos II Prob=β
Rechazar H_0	Error Tipos I Prob=α	Dec. correcta Prob=$1-\beta$

- Error de Tipos I: Rechazar H_0 cuando es cierta

  $P(\text{Error Tipos I}) = P(\text{Rechazar } H_0 \mid H_0 \text{ cierta}) = \alpha$

  α es el nivel de significación del contraste

Tipos de errores

Decisión	Realidad	
	H_0 cierta	H_0 falsa
Aceptar H_0	Dec. correcta Prob=$1-\alpha$	Error Tipos II Prob=β
Rechazar H_0	Error Tipos I Prob=α	Dec. correcta Prob=$1-\beta$

- Error de Tipos II: Aceptar H_0 cuando es falsa

  $P(\text{Error Tipos II}) = P(\text{Aceptar } H_0 | H_0 \text{ falsa}) = \beta$

  $1-\beta = P(\text{Rechazar } H_0 | H_0 \text{ falsa})$ es la potencia del contraste

Tipos de errores

En un juicio, se declarar un acusado inocente o culpable

Contraste:

$$\begin{cases} H_0 : \text{El acusado es inocente} \\ H_1 : \text{El acusado es culpable} \end{cases}$$

Error de Tipo I: Declarar culpable un inocente

Error de Tipo II: Declarar no culpable un culpable

Es peor el error de Tipo I, conviene minimizarlo

Tipos de errores

Lo más conveniente es encontrar una regla de rechazo de H_0 que tenga poca probabilidad de Error de Tipo I, α

Pero también querríamos minimizar la probabilidad de Error de Tipo II, β

Problema: cuando hacemos disminuir α, suele aumentar β

¿Qué se suele hacer?

1. Encontrar una regla de decisión para a un α máximo fijado
2. Después, si es posible, controlar la tamaño n de la muestra para minimizar β

Tipos de errores

¿Qué se suele hacer?

1. Encontrar una regla de decisión para a un α máximo fijado
2. Después, si es posible, controlar la tamaño n de la muestra para minimizar β

Este caso solo lo veremos en una de las lecciones de AprendeR2

Ejemplo: C.H. para a μ de normal con σ conocida

Sea X una v.a. $N(\mu, \sigma)$ con μ desconocida y σ conocida

Sea $X_1, \ldots, X_n$ una m.a.s. de X de tamaño n

Consideremos el contraste

$$\left\{ \begin{array}{l} H_0 : \mu = \mu_0 \\ H_1 : \mu > \mu_0 \end{array} \right.$$

Idea: Rechazarnos H_0 en favor de H_1 si $\overline{X}$ es bastante más grande que μ_0

Ejemplo: C.H. para a μ de normal con σ conocida

$$\left\{ \begin{array}{l} H_0 : \mu = \mu_0 \\ H_1 : \mu > \mu_0 \end{array} \right.$$

Si H_0 es verdadera ,

$$Z = \frac{\overline{X} - \mu_0}{\frac{\sigma}{\sqrt{n}}} \sim N(0,1)$$

Entonces, la regla consistirá en rechazar H_0 si el estadístico de contraste Z es mayor que un cierto umbral, que determinaremos con α

Ejemplo: C.H. para la media μ de normal con σ conocida

$$\left\{ \begin{array}{l} H_0 : \mu = \mu_0 \\ H_1 : \mu > \mu_0 \end{array} \right.$$

Queremos

$$\begin{array}{l} \alpha = P(\text{rechazar } H_0 | H_0 \text{ cierto }) = P(Z > \text{umbral }) \\ \quad \Longrightarrow 1 - \alpha = P(Z \leqslant \text{umbral }) \Longrightarrow \text{umbral } = z_{1-\alpha} \end{array}$$

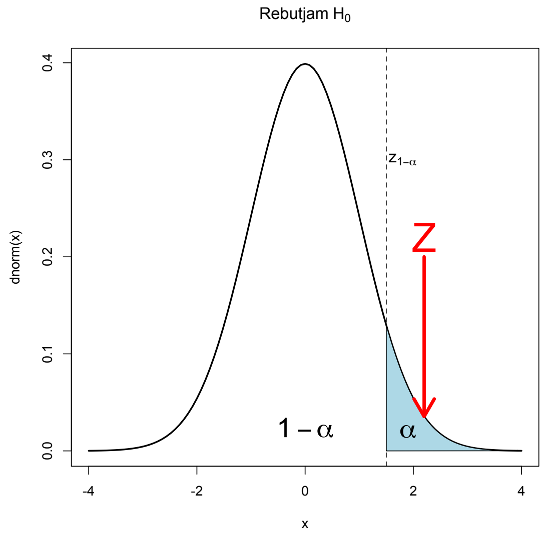
por lo tanto, para que el nivel de significación del contraste sea α, la regla de rechazo tiene que ser

$$Z > z_{1-\alpha}$$

Rechazamos H_0 si $\dfrac{\overline{X} - \mu_0}{\sigma/\sqrt{n}} > z_{1-\alpha}$

Ejemplo: C.H. para a μ de normal con σ conocida

$$\begin{cases} H_0 : \mu = \mu_0 \\ H_1 : \mu > \mu_0 \end{cases}$$



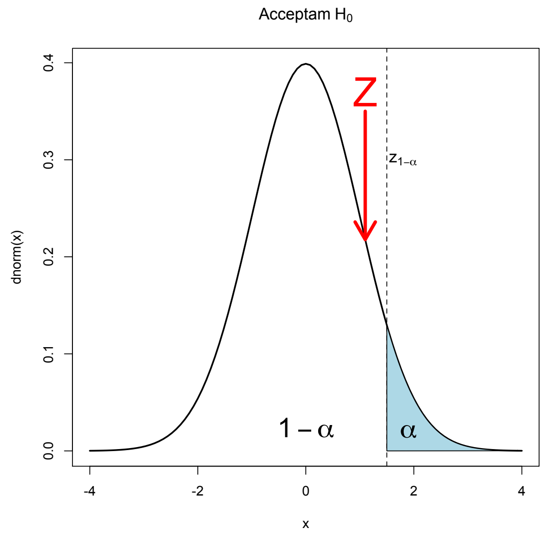
Terminología

Dado un contraste:

- Estadístico de contraste: el que nos permite definir una regla de rechazo de H_0
- Nivel de significación α: la probabilidad (máxima) de error de Tipo I
- Región crítica o de rechazo: si el estadístico de contraste pertenece a la región crítica, entonces rechazamosH_0
- Región de aceptación: el complementario de la región crítica

Ejemplo: C.H. para la media μ de normal con σ conocida

$$\begin{cases} H_0 : \mu = \mu_0 \\ H_1 : \mu > \mu_0 \end{cases}$$



Terminología

Dado un contraste:

- Intervalo de confianza del $(1-\alpha)\cdot 100\,\%$: un intervalo en el que el parámetro poblacional tiene probabilidad $1-\alpha$ de pertenecer (en el sentido de los intervalos de confianza del tema anterior)

  Se suele obtener imponiendo que el estadístico pertenezca a la región de aceptación para al nivel de significación α y despejando el parámetro

Ejemplo: C.H. para a μ de normal con σ conocida

Si la población es normal con σ conocida, un contraste al nivel de significación α de

$$\left\{\begin{array}{l} H_0 : \mu = \mu_0 \\ H_1 : \mu > \mu_0 \end{array}\right.$$

tiene

- Estadístico de contraste: $Z = \dfrac{\overline{X} - \mu_0}{\frac{\sigma}{\sqrt{n}}}$
- Región crítica: $]z_{1-\alpha}, \infty[$
- Región de aceptación: $]-\infty, z_{1-\alpha}]$
- Regla de decisión: rechazar H_0 si $Z > z_{1-\alpha}$

Ejemplo: C.H. para a μ de normal con σ conocida

- Intervalo de confianza:

$$\begin{aligned} Z \leqslant z_{1-\alpha} &\Longleftrightarrow \frac{\overline{X} - \mu_0}{\frac{\sigma}{\sqrt{n}}} \leqslant z_{1-\alpha} \\ &\Longleftrightarrow \mu_0 \geqslant \overline{X} - z_{1-\alpha} \cdot \frac{\sigma}{\sqrt{n}} \\ &\Longleftrightarrow \mu_0 \in \left[\overline{X} - z_{1-\alpha} \cdot \frac{\sigma}{\sqrt{n}}, \infty\right[\end{aligned}$$

Es

$$\left[\overline{X} - z_{1-\alpha} \cdot \frac{\sigma}{\sqrt{n}}, \infty\right[$$

- Regla de decisión II: rechazar H_0 si el μ_0 contrastado no pertenece al intervalo de confianza

Ejemplo

Sea X una población normal con $\sigma = 1.8$. Queremos hacer el contraste

$$\left\{\begin{array}{l} H_0 : \mu = 20 \\ H_1 : \mu > 20 \end{array}\right.$$

con un nivel de significación de 0.05

Tomamos una m.a.s. de $n = 25$ observaciones y obtenemos $\overline{x} = 20.25$

¿Qué decidimos?

Ejemplo

$$\left\{\begin{array}{l} H_0 : \mu = 20 \\ H_1 : \mu > 20 \end{array}\right.$$

$\alpha = 0.05$, $\sigma = 1.8$, $n = 25$, $\overline{x} = 20.25$

- Estadístico de contraste: $Z = \dfrac{\overline{X} - 20}{\frac{1.8}{\sqrt{25}}}$
- Toma el valor $z_0 = \dfrac{20.25 - 20}{\frac{1.8}{\sqrt{25}}} = 0.694$
- Región crítica: $]z_{1-0.05}, \infty[=]1.64, \infty[$
- Decisión: Como que $0.694 < 1.64$, no podemos rechazar H_0

Ejemplo

$$\begin{cases} H_0 : \mu = 20 \\ H_1 : \mu > 20 \end{cases}$$

$\alpha = 0.05$, $\sigma = 1.8$, $n = 25$, $\overline{x} = 20.25$

- Intervalo de confianza:

$$\left[\overline{X} - z_{1-\alpha} \cdot \frac{\sigma}{\sqrt{n}}, \infty\right[= [19.66, \infty[$$

- Decisión: Como que 20 pertenece al intervalo de confianza, no podemos rechazar H_0

Ejemplo

Sea X una población normal con $\sigma = 1.8$. Queremos hacer el contraste

$$\begin{cases} H_0 : \mu = 20 \\ H_1 : \mu > 20 \end{cases}$$

con un nivel de significación de 0.05

Tomamos una m.a.s. de $n = 25$ observaciones y obtenemos $\overline{x} = 20.75$

¿Qué decidimos?

Ejemplo

$$\begin{cases} H_0 : \mu = 20 \\ H_1 : \mu > 20 \end{cases}$$

$\alpha = 0.05$, $\sigma = 1.8$, $n = 25$, $\overline{x} = 20.75$

- Estadístico de contraste: $Z = \dfrac{\overline{X} - 20}{\frac{1.8}{\sqrt{25}}}$
- Toma el valor $z_0 = \dfrac{20.75 - 20}{\frac{1.8}{\sqrt{25}}} = 2.083$
- Región crítica: $]z_{1-0.05}, \infty[=]1.64, \infty[$
- Intervalo de confianza: $[\overline{X} - z_{1-\alpha} \cdot \frac{\sigma}{\sqrt{n}}, \infty[= [20.16, \infty[$
- Decisión: Rechazamos H_0: Concluimos que $\mu > 20$

Ejemplo

Sea X una población normal con $\sigma = 1.8$. Queremos hacer el contraste

$$\begin{cases} H_0 : \mu = 20 \\ H_1 : \mu > 20 \end{cases}$$

con un nivel de significación de 0.05

Tomamos una m.a.s. de $n = 25$ observaciones y obtenemos $\overline{x} = 19.75$

¿Qué decidimos?

Queremos rechazar H_0 contra H_1, si $\overline{x} < 20$? (Ejercicio: Haced el cálculo, si no nos creéis)

Ejemplo: C.H. para a μ de normal con σ conocida

Sea X una v.a. $N(\mu, \sigma)$ con μ desconocida y σ conocida

Sea $X_1, \ldots, X_n$ una m.a.s. de X de tamaño n

Consideremos el contraste

$$\begin{cases} H_0 : \mu = \mu_0 \\ H_1 : \mu < \mu_0 \end{cases}$$

rechazar H_0 si $Z = \dfrac{\overline{X} - \mu_0}{\sigma/\sqrt{n}}$ es inferior a un cierto umbral, que determinaremos con α

Ejemplo: C.H. para una media poblacional μ de una distribución normal con σ conocida

$$\begin{cases} H_0 : \mu = \mu_0 \\ H_1 : \mu < \mu_0 \end{cases}$$

Queremos

$$\begin{aligned} \alpha &= P(\text{rechazar } H_0 | H_0 \text{ cierta}) \\ &= P(Z < \text{umbral }) \Longrightarrow \text{umbral } = z_\alpha \end{aligned}$$

por lo tanto, para que el nivel de significación del contraste Sea α, la regla de rechazo tiene que ser

$$Z < z_\alpha$$

La Región crítica es $]-\infty, z_\alpha[$

Ejemplo: C.H. para la media μ de una población normal con σ conocida

Sea X una v.a. $N(\mu, \sigma)$ con μ desconocida y σ conocida

Sea $X_1, \ldots, X_n$ una m.a.s. de X de tamaño n

Consideremos el contraste

$$\begin{cases} H_0 : \mu = \mu_0 \\ H_1 : \mu \neq \mu_0 \end{cases}$$

Rechazar H_0 si $Z = \dfrac{\overline{X} - \mu_0}{\sigma/\sqrt{n}}$ está a bastante lejos de de 0, y la determinaremos con el valor de α

Ejemplo: C.H. para la media μ de una población normal con σ conocida

$$\begin{cases} H_0 : \mu = \mu_0 \\ H_1 : \mu \neq \mu_0 \end{cases}$$

Queremos

$$\begin{aligned} \alpha &= P(\text{rechazar } H_0 | H_0 \text{ cierta }) \\ &= P(Z < -\text{umbral } \text{ o } Z > \text{umbral }) \\ &= P(Z < -\text{umbral }) + P(Z > \text{umbral }) \\ &= 2P(Z > \text{umbral }) = 2(1 - P(Z < \text{umbral })) \\ &\quad \Longrightarrow P(Z < \text{umbral }) = 1 - \frac{\alpha}{2} \\ &\quad \Longrightarrow \text{umbral } = z_{1-\frac{\alpha}{2}} \end{aligned}$$

Ejemplo: C.H. para la media μ de una población normal con σ conocida

$$\begin{cases} H_0 : \mu = \mu_0 \\ H_1 : \mu \neq \mu_0 \end{cases}$$

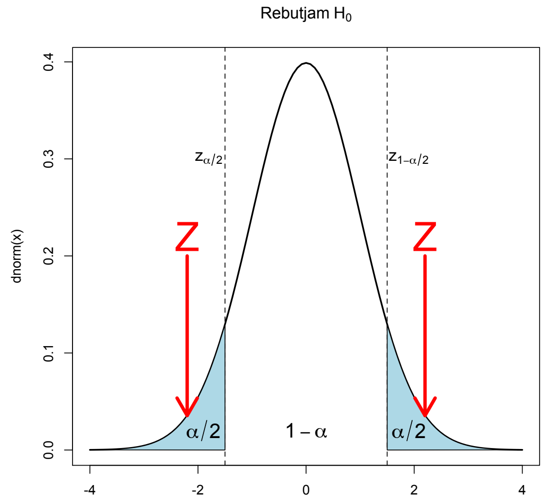
ahora para que el nivel de significación del contraste sea α, la regla de rechazo tiene que ser

$$Z < -z_{1-\frac{\alpha}{2}} = z_{\frac{\alpha}{2}} \text{ o } Z > z_{1-\frac{\alpha}{2}}$$

La región crítica es $]-\infty, z_{\frac{\alpha}{2}}[\bigcup]z_{1-\frac{\alpha}{2}}, \infty[$

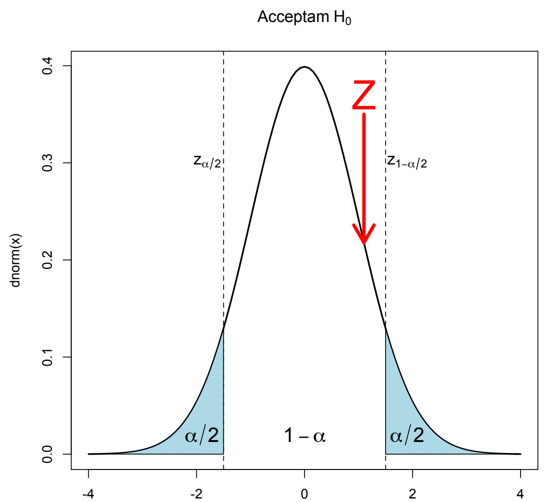
Ejemplo: C.H. para la media μ de una población normal con σ conocida

$$\begin{cases} H_0 : \mu = \mu_0 \\ H_1 : \mu \neq \mu_0 \end{cases}$$



Ejemplo: C.H. para la media μ de una población normal con σ conocida

$$\begin{cases} H_0 : \mu = \mu_0 \\ H_1 : \mu \neq \mu_0 \end{cases}$$



Ejemplo: C.H. para la media μ de una población normal con σ conocida

$$\begin{cases} H_0 : \mu = \mu_0 \\ H_1 : \mu \neq \mu_0 \end{cases}$$

¿Intervalo de confianza?

$$-z_{1-\frac{\alpha}{2}} \leqslant Z \leqslant z_{1-\frac{\alpha}{2}} \iff -z_{1-\frac{\alpha}{2}} \leqslant \frac{\overline{X} - \mu_0}{\frac{\sigma}{\sqrt{n}}} \leqslant z_{1-\frac{\alpha}{2}}$$

$$\iff -z_{1-\frac{\alpha}{2}} \frac{\sigma}{\sqrt{n}} \leqslant \overline{X} - \mu_0 \leqslant z_{1-\frac{\alpha}{2}} \frac{\sigma}{\sqrt{n}}$$

$$\iff \overline{X} - z_{1-\frac{\alpha}{2}} \frac{\sigma}{\sqrt{n}} \leqslant \mu_0 \leqslant \overline{X} + z_{1-\frac{\alpha}{2}} \frac{\sigma}{\sqrt{n}}$$

$$\iff \mu_0 \in \left[\overline{X} - z_{1-\frac{\alpha}{2}} \frac{\sigma}{\sqrt{n}}, \overline{X} + z_{1-\frac{\alpha}{2}} \frac{\sigma}{\sqrt{n}}\right]$$

¿Os recuerda a algo...?

Ejemplo

Sea X una población normal con $\sigma = 1.8$. Queremos realizar el contraste

$$\left\{ \begin{array}{l} H_0 : \mu = 20 \\ H_1 : \mu \neq 20 \end{array} \right.$$

con un nivel de significación de 0.05

Tomamos una m.a.s. de $n = 25$ observaciones y obtenemos $\overline{x} = 20.5$

¿Qué decidimos?

Ejemplo

$$\left\{ \begin{array}{l} H_0 : \mu = 20 \\ H_1 : \mu \neq 20 \end{array} \right.$$

$\alpha = 0.05$, $\sigma = 1.8$, $n = 25$, $\overline{x} = 20.5$

- Estadístico de contraste: $Z = \dfrac{\overline{X} - 20}{\frac{1.8}{\sqrt{25}}}$
- Toma el valor $z_0 = \dfrac{20.5 - 20}{\frac{1.8}{\sqrt{25}}} = 1.39$
- Región crítica: $]-\infty, z_{0.025}[\cup]z_{0.975}, \infty[=]-\infty, -1.96[\cup]1.96, \infty[$
- Intervalo de confianza: $[19.794, 21.206]$
- Decisión: No podemos rechazar H_0

El p-valor

El p-valor o valor crítico (p-*value*) de un contraste es la probabilidad que, si H_0 es verdadera, el estadístico de contraste tome un valor tan extremo o más que el que se ha observado

Ejemplo: En un contraste

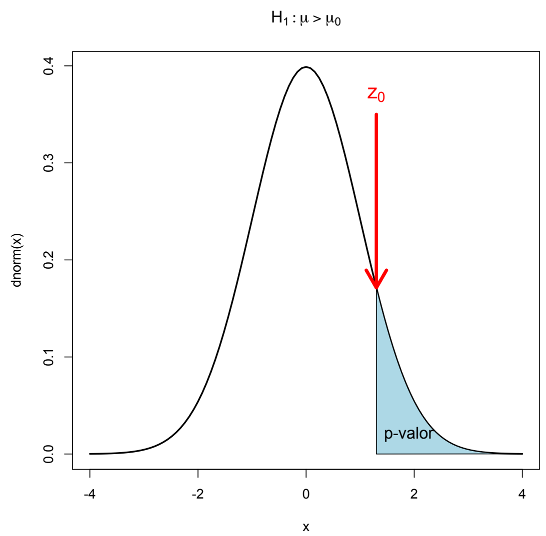
$$\left\{ \begin{array}{l} H_0 : \mu = \mu_0 \\ H_1 : \mu > \mu_0 \end{array} \right.$$

si el estadístico Z tiene el valor z_0,

$$p\text{-valor} = P(Z \geqslant z_0)$$

El p-valor

$$\left\{ \begin{array}{l} H_0 : \mu = \mu_0 \\ H_1 : \mu > \mu_0 \end{array} \right.$$



El p-valor

El p-valor o valor crítico (p-*value*) de un contraste es la probabilidad que, si H_0 es verdadera, el estadístico de contraste tome un valor tan extremo o más que el que se ha observado

Ejemplo: En un contraste

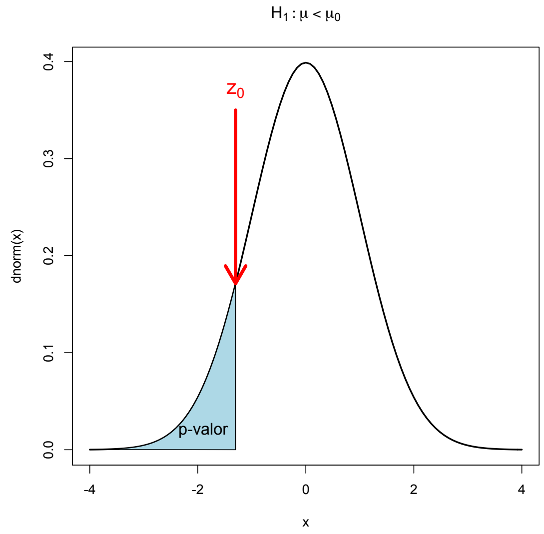
$$\left\{\begin{array}{l} H_0 : \mu = \mu_0 \\ H_1 : \mu < \mu_0 \end{array}\right.$$

si el estadístico Z es z_0,

$$p\text{-valor} = P(Z \leqslant z_0)$$

El p-valor

$$\left\{\begin{array}{l} H_0 : \mu = \mu_0 \\ H_1 : \mu < \mu_0 \end{array}\right.$$



El p-valor

El p-valor o valor crítico (p-*value*) de un contraste es la probabilidad que, si H_0 es verdadera, el estadístico de contraste tome un valor tan extremo o más que el que se ha observado

Ejemplo: En un contraste

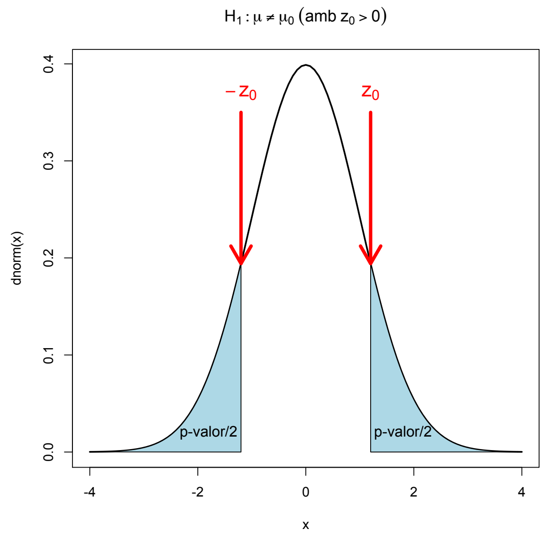
$$\left\{\begin{array}{l} H_0 : \mu = \mu_0 \\ H_1 : \mu \neq \mu_0 \end{array}\right.$$

si el estadístico Z ha dado z_0,

$$\begin{aligned} p\text{-valor} &= 2 \cdot \min\{P(Z \leqslant -|z_0|), P(Z \geqslant |z_0|)\} \\ &= 2 \cdot P(Z \geqslant |z_0|) \end{aligned}$$

El p-valor

$$\left\{\begin{array}{l} H_0 : \mu = \mu_0 \\ H_1 : \mu \neq \mu_0 \end{array}\right.$$



El p-valor

El p-valor o valor crítico (p-*value*) de un contraste es la probabilidad que, si H_0 es verdadera, el estadístico de contraste tome un valor tan extremo o más que el que se ha observado

Es una medida inversa de la fuerza de las pruebas o evidencias que hay en contra de H_1: si H_0 es verdadera, cuanto más pequeño sea el p-valor, más improbable es observar lo que hemos observado.

en consecuencia, cuanto más pequeño sea el p-valor, con más fuerza podemos rechazar H_0.

El p-valor

por ejemplo tomemos, p-valor $= 0.03$

- Significa que la probabilidad que, si H_0 es verdadera, el estadístico de contraste tome un valor tan extremo o más que el que ha pres es 0.03 (pequeño: evidencia que H_0 es falsa)
- No significa:
  - La probabilidad que H_0 Sea verdadera es 0.03
  - H_0 es verdadera un 3 % de les veces

El p-valor

¡Importante!

En un contraste con nivel de significación α,

- rechazamos H_0 si p-valor $< \alpha$
- aceptamos H_0 si $\alpha \leqslant p$-valor

Ejemplo: En un contraste

$$\begin{cases} H_0 : \mu = \mu_0 \\ H_1 : \mu > \mu_0 \end{cases}$$

supongamos que el estadístico Z vale z_0. El p-valor es $P(Z \geqslant z_0)$

$$\text{Rechazamos } H_0 \iff z_0 > z_{1-\alpha}$$
$$\iff P(Z \geqslant z_0) < P(Z \geqslant z_{1-\alpha}) = 1 - (1-\alpha) = \alpha$$

El p-valor

¡Importante!

En un contraste con nivel de significación α,

- rechazamos H_0 si p-valor $< \alpha$
- aceptamos H_0 si $\alpha \leqslant p$-valor

Ejemplo: En un contraste

$$\begin{cases} H_0 : \mu = \mu_0 \\ H_1 : \mu \neq \mu_0 \end{cases}$$

supongamos que el estadístico Z vale $z_0 > 0$. El p-valor es $2P(Z \geqslant z_0)$

$$\text{Rechazamos } H_0 \iff z_0 > z_{1-\frac{\alpha}{2}}$$
$$\iff 2P(Z \geqslant z_0) < 2P(Z \geqslant z_{1-\frac{\alpha}{2}}) = 2(1 - (1-\tfrac{\alpha}{2})) = \alpha$$

El p-valor

Importante!

En un contraste con nivel de significación α,

- rechazamos H_0 si p-valor $< \alpha$
- aceptamos H_0 si $\alpha \leqslant p$-valor

El p-valor de un contraste es

- El nivel de significación α más pequeño para el que rechazamos la hipótesis nula
- El nivel de significación α más grande para el que aceptaríamos la hipótesis nula
- La probabilidad mínima de error de Tipo I que permitimos si rechazamos la hipótesis nula con el valor del estadístico de contraste obtenido
- La probabilidad máxima de error de Tipo I que permitimos si aceptamos la hipótesis nula con el valor del estadístico de contraste obtenido

Ejemplo

Sea X una población normal con $\sigma = 1.8$. Queremos hacer el contraste

$$\begin{cases} H_0 : \mu = 20 \\ H_1 : \mu > 20 \end{cases}$$

Tomamos una m.a.s. de $n = 25$ observaciones y obtenemos $\overline{x} = 20.25$

¿Qué decidimos?

No tenemos α: Observamos el p-valor

El p-valor

¡Importante!

Si no establecemos un nivel de significación α, entonces

- Aceptamos H_0 si el p-valor es "grande" ($\geqslant 0.1$)
- Rechazamos H_0 si el p-valor es "pequeño" (< 0.05). En este caso, el p-valor es
  - Significativo si es < 0.05
  - Fuertemente significativo si es < 0.01
  - Muy significativo si es < 0.001

```
Signif. codes: 0'***'0.001'**'0.01'*'0.05'.'0.1' '1
```

Si el p-valor está entre 0.05 y 0.1 y no tenemos nivel de significación, se requieren¡ estudios posteriores para tomar una decisión ("la zona crepuscular, *twilight zone*")

Ejemplo

- Estadístico de contraste: $Z = \dfrac{\overline{X} - 20}{\frac{1.8}{\sqrt{25}}}$

  Toma el valor $z_0 = \dfrac{20.25 - 20}{\frac{1.8}{\sqrt{25}}} = 0.694$
- p-valor$= P(Z \geqslant 0.694) = 0.2438 > 0.1$ gran
- Decisión: No podemos rechazar H_0

Ejemplo

Sea X una población normal con $\sigma = 1.8$. Queremos hacer el contraste

$$\begin{cases} H_0 : \mu = 20 \\ H_1 : \mu > 20 \end{cases}$$

Tomamos una m.a.s. de $n = 25$ observaciones y obtenemos $\overline{x} = 20.75$

¿Qué decidimos?

Ejemplo

- Estadístico de contraste: $Z = \dfrac{\overline{X} - 20}{\frac{1.8}{\sqrt{25}}}$

  Toma el valor $z_0 = \dfrac{20.75 - 20}{\frac{1.8}{\sqrt{25}}} = 2.083$
- p-valor$= P(Z \geqslant 2.083) = 0.0186$ pequeño
- Decisión: Rechazamos H_0 contra H_1

Decisiones

Podemos decidir un contraste:

- con la regio crítica: Si el estadístico de contraste cae dentro la Región crítica para al nivel de significación α, rechazamosH_0
- con el intervalo de confianza: Si el parámetro poblacional a contrastar cae dentro el intervalo de confianza para al nivel $(1 - \alpha) \cdot 100\,\%$, aceptamos H_0
- con el p-valor: Si el p-valor es más pequeño que el nivel de significación α, rechazamos H_0
- con el p-valor y sin α: Si el p-valor es pequeño, rechazamos H_0, y si es grande, aceptamos

Aquí utilizaremos el p-valor

El método de los seis pasos (con α)

1) Establecer la hipótesis nula H_0 y la hipótesis alternativa H_1
2) Fijar un nivel de significación α
3) Seleccionar el estadístico de contraste apropiado
4) Calcular el valor del estadístico de contraste a partir de les datos muestrales
5) Calcular el p-valor del contraste
6) Decisión: rechazar H_0 en favor de H_1 si el p-valor es más pequeño que α; en caso contrario, aceptar H_0

El método de los cinco pasos (sin α)

1) Establecer la hipótesis nula H_0 y la hipótesis alternativa H_1
2) Seleccionar el estadístico de contraste apropiado
3) Calcular el valor del estadístico de contraste a partir de los valores de la muestra
4) Calcular el p-valor del contraste
5) Decisión: rechazar H_0 en favor de H_1 si el p-valor es pequeño (< 0.05), aceptar H_0 si el p-valor es grande ($\geqslant 0.1$), y ampliar el estudio si el p-valor está entre 0.05 y 0.1

Ejemplo

Los años de vida de un router sigue aproximadamente una ley de distribución normal con $\sigma = 0.89$ años

Una muestra aleatoria de la duración de 100 aparatos ha dado una vida media de 7.18 años

Queremos decidir si la vida media en de estos routers es superior a 7 años

utilizaremos el contraste

$$\begin{cases} H_0 : \mu = 7 \\ H_1 : \mu > 7 \end{cases}$$

Ejemplo: con α

Tomamos un nivel de significación $\alpha = 0.05$

EL estadístico de contraste es

$$Z = \frac{\overline{X} - 7}{0.89/\sqrt{100}} = \frac{\overline{X} - 7}{0.089}$$

El valor en este contraste es $z_0 = \dfrac{71.8 - 70}{0.89} = 2.02$

El p-valor es

$$P(Z \geqslant 2.02) = 0.0217$$

Como $0.0217 < \alpha$, rechazamos H_0: concluimos que $\mu > 70$

Ejemplo: con α

Supongamos que tomamos un nivel de significación $\alpha = 0.01$

El estadístico de contraste es

$$Z = \frac{\overline{X} - 70}{6.8/\sqrt{100}} = \frac{\overline{X} - 70}{0.68}$$

El valor del estadístico de contraste con esta muestra es $z_0 = \dfrac{71.8 - 70}{0.68} = 2.022$

El p-valor es

$$P(Z \geqslant 2.022) = 0.0217$$

Como $0.0217 > \alpha$, no podemos rechazar H_0: concluimos que $\mu \leqslant 70$ con este nivel de significación

Ejemplo: sin α

El estadístico de contraste es

$$Z = \frac{\overline{X} - 70}{6.8/\sqrt{100}} = \frac{\overline{X} - 70}{0.68}$$

Su valor en este contraste es $z_0 = \dfrac{71.8 - 70}{0.68} = 2.022$

El p-valor es

$$P(Z > 2.022) = 0.0216$$

Como es pequeño (< 0.05), rechazamos H_0: concluimos que $\mu > 70$

Un último consejo

Como una regla recomendaríamos en un informe:

- Si tenemos fijado (conocemos) α: Encontrar el p-valor y el intervalo de confianza del contraste para α dado (nivel de confianza $(1 - \alpha) \cdot 100\,\%$)
- Si no tenemos fijado (no conocemos) α: Encontrar el p-valor, y el intervalo de confianza del contraste al nivel de confianza 95 %