

# Contrastes de hipótesis: Introducción

## Decisiones

**Ejemplo:** Una empresa de telecomunicaciones recibe una partida de 100 routers cada mes. El técnico que se encarga de la recepción del material tiene la orden de rechazar entera las partidas que contengan más de un 5 % de unidades defectuosas.

El técnico toma la decisión de aceptar o rechazar la partida basándose en el análisis de una muestra aleatoria de unidades

Estas afirmaciones reciben el nombre de **hipótesis** y el método estadístico de toma de una decisión sobre una hipótesis recibe el nombre de **contraste de hipótesis**

## Decisiones

Para que la estadística inferencial sea útil no solo necesitamos estimar un valor sino que además tendremos que tomar una **decisión** apoyada en los datos (muestras) que acepte o rechace alguna afirmación relativa al valor de un parámetro

**Ejemplo:** Los responsables de salud pública del gobierno han determinado que el número medio de bacterias por cc en las aguas en las que se practica la recogida de moluscos para el consumo humano tiene que ser  $\leq 70$

Tomamos una serie de muestras de agua de una zona, y hemos de decidir si podemos recoger moluscos

## Decisiones

En un contraste de hipótesis, se contrastan dos hipótesis alternativas: la **hipótesis nula**  $H_0$  y la **hipótesis alternativa**  $H_1$

- La hipótesis alternativa  $H_1$  es de la que buscamos evidencia
- La hipótesis nula  $H_0$  es la que rechazaremos si obtenemos evidencia de la hipótesis alternativa
- Si no obtenemos evidencia a favor de  $H_1$ , **no podemos rechazar  $H_0$**  ( $\approx$  **aceptamos  $H_0$** , pero es un abuso de lenguaje)

## Ejemplos

## Nociones básicas

## Contrastes

Tipos de errores  
C.H. para a  $\mu$  de  
normal con  $\sigma$   
conocida  
p-valor  
Los pasos de un  
contraste

Los responsables de salud pública del gobierno han determinado que el número medio de bacterias por cc en las aguas en las que se practica la recogida de moluscos para el consumo humano tiene que ser  $\leq 70$

$\mu$  = número media de bacterias por cc de agua

Contraste:

$$\begin{cases} H_0 : \mu \leq 70 \\ H_1 : \mu > 70 \end{cases}$$

**Decisión:** Tomaremos algunas muestras y calcularemos la media muestral del nombre de bacterias por cc. Si es bastante grande, lo consideraremos como una evidencia de  $H_1$ , y si no, aceptaremos  $H_0$ .

## Decisiones

Un **contraste de hipótesis**

$$\begin{cases} H_0 : \text{hipótesis nula} \\ H_1 : \text{hipótesis alternativa} \end{cases}$$

consiste en plantear:

- **Hipótesis nula  $H_0$ :** Es la hipótesis que “por defecto” aceptamos como verdadera, y que rechazamos si hay pruebas en contra
- **Hipótesis alternativa  $H_1$ :** Es la hipótesis contra la que contrastamos la hipótesis nula y que aceptamos cuando rechazamos la nula

y generar una **regla de decisión** para **rechazar** o **no** la hipótesis nula a partir de la información contenida en una muestra

## Ejemplos

## Nociones básicas

## Contrastes

Tipos de errores  
C.H. para a  $\mu$  de  
normal con  $\sigma$   
conocida  
p-valor  
Los pasos de un  
contraste

Un técnico recibe una partida de 100 routers cada mes. El técnico tiene la orden de rechazar entera las partidas que contengan más de un 5 % de unidades defectuosas.

$p$  = proporción de unidades defectuosas

Contraste:

$$\begin{cases} H_0 : p \leq 0.05 \\ H_1 : p > 0.05 \end{cases}$$

**Decisión:** El encargado comprueba algunas unidades y calcula la proporción muestral de routers defectuosos. Si es bastante grande, lo considerará una evidencia de  $H_1$ , y si no, aceptará  $H_0$ .

## Ejemplo

**La parábola del juicio y el contraste de hipótesis**

En un juicio, tenemos que declarar a un acusado inocente o culpable

Contraste:

$$\begin{cases} H_0 : \text{El acusado es inocente} \\ H_1 : \text{El acusado es culpable} \end{cases}$$

Las pruebas son los elementos de la muestra

Si el jurado encuentra suficiente mente incriminatorias las pruebas, declara **culpable** al acusado (rechaza  $H_0$  en favor de  $H_1$ )

Si no las encuentra suficientemente incriminatorias, le declara **no culpable** (no rechaza  $H_0$ )

Considerar **no culpable**  $\neq$  **declarar inocente**

## Nociones básicas

## Contrastes

Tipos de errores  
C.H. para a  $\mu$  de  
normal con  $\sigma$   
conocida  
p-valor  
Los pasos de un  
contraste

## Nociones básicas

## Contrastes

Tipos de errores  
C.H. para a  $\mu$  de  
normal con  $\sigma$   
conocida  
p-valor  
Los pasos de un  
contraste

¿Cómo escoger  $H_0$  y  $H_1$ ?

## Nociones básicas

## Contrastes

Tipos de errores  
C.H. para  $\mu$  de  
normal con  $\sigma$   
conocida  
p-valor  
Los pasos de un  
contraste

Las pruebas tienen que aportar evidencia de  $H_1$ , lo que nos permitirá rechazar  $H_0$

Es imposible encontrar evidencia de que  $\mu =$  lo que sea, en cambio sí que es posible demostrar que  $\mu >$ , o que  $\mu <$ , o que  $\mu \neq$  lo que sea

**Ejemplo:** ¿Es  $e^{\pi\sqrt{163}} = 262537412640768744$ ?

Si calculamos

262537412640768743.99999999...9999...**250072597198**...

Hemos demostrado que no; pero, para demostrar que sí, tendríamos que haber calculado infinitas cifras decimales

¿Cómo elegir  $H_0$ ?

## Ejemplos

- Queremos decidir si la media es más pequeña que 2 o no

$$\begin{cases} H_0 : \mu = 2 \text{ (o } \mu \geq 2) \\ H_1 : \mu < 2 \end{cases}$$

- Queremos decidir si la media es igual o diferente de 5

$$\begin{cases} H_0 : \mu = 5 \\ H_1 : \mu \neq 5 \end{cases} \text{ o } \begin{cases} H_0 : \mu \neq 5 \\ H_1 : \mu = 5 \end{cases} ?$$

- Queremos decidir si la media es igual o diferente de 5

$$\begin{cases} H_0 : \mu = 5 \\ H_1 : \mu \neq 5 \end{cases}$$

¿Cómo escoger  $H_0$  y  $H_1$ ?

## Nociones básicas

## Contrastes

Tipos de errores  
C.H. para  $\mu$  de  
normal con  $\sigma$   
conocida  
p-valor  
Los pasos de un  
contraste

Las pruebas han de poder dar evidencia de  $H_1$ , lo que permitirá rechazar  $H_0$

Es imposible encontrar evidencia de que  $\mu =$  lo que sea, en cambio sí que es posible demostrar que  $\mu >$ , o que  $\mu <$ , o que  $\mu \neq$  lo que sea

En este contexto:

- $H_1$  se define con  $>$ ,  $<$ , o  $\neq$
- $H_0$  se define con  $=$ ,  $\leq$ , o  $\geq$
- $H_1$  es la hipótesis de la que podemos hallar pruebas incriminatorias,  $H_0$  la que estamos dispuestos a aceptar si no hay pruebas en contra

## Tipos de hipótesis alternativas

- Hipótesis unilateral** (*one-sided*; también **de una cola**, *one-tailed*):  $H : \theta > \theta_0$ ,  $H : \theta < \theta_0$
- Hipótesis bilateral** (*two-sided*; también **de dos colas**, *two-tailed*):  $H : \theta \neq \theta_0$

Los tests suelen tomar el nombre de la hipótesis alternativa: **test unilateral**, **test de dos colas**,...

## Nociones básicas

## Contrastes

Tipos de errores  
C.H. para  $\mu$  de  
normal con  $\sigma$   
conocida  
p-valor  
Los pasos de un  
contraste

## Nociones básicas

## Contrastes

Tipos de errores  
C.H. para  $\mu$  de  
normal con  $\sigma$   
conocida  
p-valor  
Los pasos de un  
contraste

## Tipos de errores

Decisión	Realidad	
	$H_0$ cierta	$H_0$ falsa
Aceptar $H_0$	Dec. correcta Prob= $1 - \alpha$	Error Tipos II Prob= $\beta$
Rechazar $H_0$	Error Tipos I Prob= $\alpha$	Dec. correcta Prob= $1 - \beta$

- **Error de Tipos I**: Rechazar  $H_0$  cuando es cierta  
 $P(\text{Error Tipos I}) = P(\text{Rechazar } H_0 \mid H_0 \text{ cierta}) = \alpha$   
 $\alpha$  es el **nivel de significación** del contraste

## Tipos de errores

En un juicio, se declara un acusado inocente o culpable

Contraste:

$$\begin{cases} H_0 : \text{El acusado es inocente} \\ H_1 : \text{El acusado es culpable} \end{cases}$$

**Error de Tipo I**: Declarar culpable un inocente

**Error de Tipo II**: Declarar no culpable un culpable

Es peor el error de Tipo I, conviene minimizarlo

## Tipos de errores

Decisión	Realidad	
	$H_0$ cierta	$H_0$ falsa
Aceptar $H_0$	Dec. correcta Prob= $1 - \alpha$	Error Tipos II Prob= $\beta$
Rechazar $H_0$	Error Tipos I Prob= $\alpha$	Dec. correcta Prob= $1 - \beta$

- **Error de Tipos II**: Aceptar  $H_0$  cuando es falsa  
 $P(\text{Error Tipos II}) = P(\text{Aceptar } H_0 \mid H_0 \text{ falsa}) = \beta$   
 $1 - \beta = P(\text{Rechazar } H_0 \mid H_0 \text{ falsa})$  es la **potencia** del contraste

## Tipos de errores

Lo más conveniente es encontrar una regla de rechazo de  $H_0$  que tenga poca probabilidad de Error de Tipo I,  $\alpha$

Pero también querríamos minimizar la probabilidad de Error de Tipo II,  $\beta$

Problema: cuando hacemos disminuir  $\alpha$ , suele aumentar  $\beta$

¿Qué se suele hacer?

- 1 Encontrar una regla de decisión para a un  $\alpha$  máximo fijado
- 2 Después, si es posible, controlar la tamaño  $n$  de la muestra para minimizar  $\beta$

## Tipos de errores

¿Qué se suele hacer?

- 1 Encontrar una regla de decisión para a un  $\alpha$  máximo fijado
- 2 Después, si es posible, controlar la tamaño  $n$  de la muestra para minimizar  $\beta$

Este caso solo lo veremos en una de las lecciones de AprendeR2

Ejemplo: C.H. para a  $\mu$  de normal con  $\sigma$  conocida

$$\begin{cases} H_0 : \mu = \mu_0 \\ H_1 : \mu > \mu_0 \end{cases}$$

Si  $H_0$  es verdadera ,

$$Z = \frac{\bar{X} - \mu_0}{\frac{\sigma}{\sqrt{n}}} \sim N(0, 1)$$

Entonces, la regla consistirá en rechazar  $H_0$  si el estadístico de contraste  $Z$  es mayor que un cierto umbral, que determinaremos con  $\alpha$ Ejemplo: C.H. para a  $\mu$  de normal con  $\sigma$  conocidaSea  $X$  una v.a.  $N(\mu, \sigma)$  con  $\mu$  desconocida y  $\sigma$  conocidaSea  $X_1, \dots, X_n$  una m.a.s. de  $X$  de tamaño  $n$ 

Consideremos el contraste

$$\begin{cases} H_0 : \mu = \mu_0 \\ H_1 : \mu > \mu_0 \end{cases}$$

Idea: Rechazarnos  $H_0$  en favor de  $H_1$  si  $\bar{X}$  es bastante más grande que  $\mu_0$ Ejemplo: C.H. para la media  $\mu$  de normal con  $\sigma$  conocida

$$\begin{cases} H_0 : \mu = \mu_0 \\ H_1 : \mu > \mu_0 \end{cases}$$

Queremos

$$\begin{aligned} \alpha &= P(\text{rechazar } H_0 | H_0 \text{ cierto}) = P(Z > \text{umbral}) \\ \implies 1 - \alpha &= P(Z \leq \text{umbral}) \implies \text{umbral} = z_{1-\alpha} \end{aligned}$$

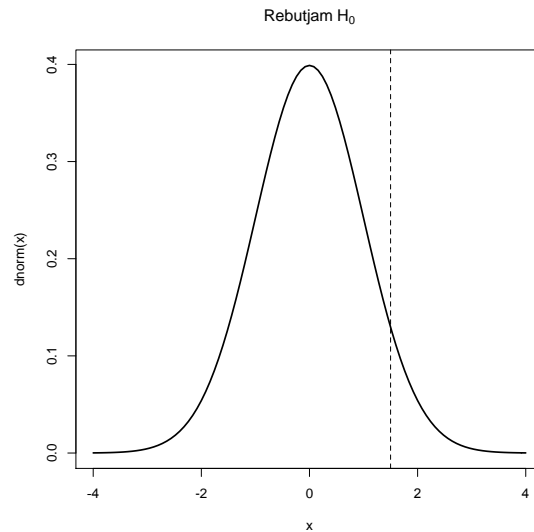
por lo tanto, para que el nivel de significación del contraste sea  $\alpha$ , la regla de rechazo tiene que ser

$$Z > z_{1-\alpha}$$

$$\text{Rechazamos } H_0 \text{ si } \frac{\bar{X} - \mu_0}{\sigma/\sqrt{n}} > z_{1-\alpha}$$

## Ejemplo: C.H. para a $\mu$ de normal con $\sigma$ conocida

$$\begin{cases} H_0 : \mu = \mu_0 \\ H_1 : \mu > \mu_0 \end{cases}$$



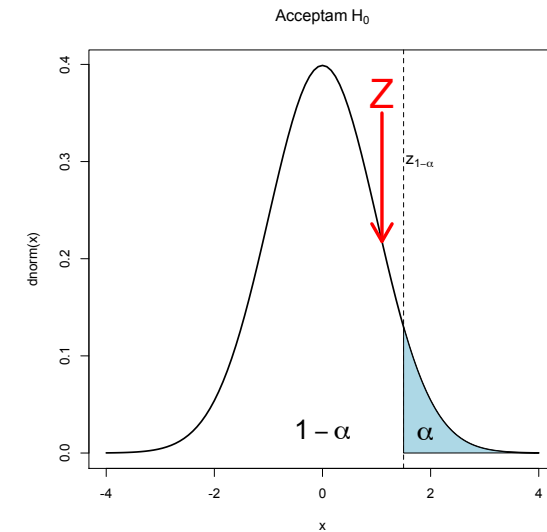
## Terminología

Dado un contraste:

- **Estadístico de contraste:** el que nos permite definir una regla de rechazo de  $H_0$
- **Nivel de significación  $\alpha$ :** la probabilidad (máxima) de error de Tipo I
- **Región crítica o de rechazo:** si el estadístico de contraste pertenece a la región crítica, entonces rechazamos  $H_0$
- **Región de aceptación:** el complementario de la región crítica

## Ejemplo: C.H. para la media $\mu$ de normal con $\sigma$ conocida

$$\begin{cases} H_0 : \mu = \mu_0 \\ H_1 : \mu > \mu_0 \end{cases}$$



## Terminología

Dado un contraste:

- **Intervalo de confianza del  $(1 - \alpha) \cdot 100\%$ :** un intervalo en el que el parámetro poblacional tiene probabilidad  $1 - \alpha$  de pertenecer (en el sentido de los intervalos de confianza del tema anterior)
- Se suele obtener imponiendo que el estadístico pertenezca a la región de aceptación para al nivel de significación  $\alpha$  y despejando el parámetro

## Ejemplo: C.H. para a $\mu$ de normal con $\sigma$ conocida

Si la población es normal con  $\sigma$  conocida, un contraste al nivel de significación  $\alpha$  de

$$\begin{cases} H_0 : \mu = \mu_0 \\ H_1 : \mu > \mu_0 \end{cases}$$

tiene

- **Estadístico de contraste:**  $Z = \frac{\bar{X} - \mu_0}{\frac{\sigma}{\sqrt{n}}}$
- **Región crítica:**  $]z_{1-\alpha}, \infty[$
- **Región de aceptación:**  $] - \infty, z_{1-\alpha}]$
- **Regla de decisión:** rechazar  $H_0$  si  $Z > z_{1-\alpha}$

## Ejemplo

Sea  $X$  una población normal con  $\sigma = 1.8$ . Queremos hacer el contraste

$$\begin{cases} H_0 : \mu = 20 \\ H_1 : \mu > 20 \end{cases}$$

con un nivel de significación de 0.05

Tomamos una m.a.s. de  $n = 25$  observaciones y obtenemos  $\bar{x} = 20.25$

¿Qué decidimos?

## Ejemplo: C.H. para a $\mu$ de normal con $\sigma$ conocida

- **Intervalo de confianza:**

$$\begin{aligned} Z \leq z_{1-\alpha} &\iff \frac{\bar{X} - \mu_0}{\frac{\sigma}{\sqrt{n}}} \leq z_{1-\alpha} \\ &\iff \mu_0 \geq \bar{X} - z_{1-\alpha} \cdot \frac{\sigma}{\sqrt{n}} \\ &\iff \mu_0 \in \left[ \bar{X} - z_{1-\alpha} \cdot \frac{\sigma}{\sqrt{n}}, \infty \right] \end{aligned}$$

Es

$$\left[ \bar{X} - z_{1-\alpha} \cdot \frac{\sigma}{\sqrt{n}}, \infty \right]$$

- **Regla de decisión II:** rechazar  $H_0$  si el  $\mu_0$  contrastado no pertenece al intervalo de confianza

## Ejemplo

$$\begin{cases} H_0 : \mu = 20 \\ H_1 : \mu > 20 \end{cases}$$

$\alpha = 0.05$ ,  $\sigma = 1.8$ ,  $n = 25$ ,  $\bar{x} = 20.25$

- **Estadístico de contraste:**  $Z = \frac{\bar{X} - 20}{\frac{1.8}{\sqrt{25}}}$
- Toma el valor  $z_0 = \frac{20.25 - 20}{\frac{1.8}{\sqrt{25}}} = 0.694$
- **Región crítica:**  $]z_{1-0.05}, \infty[ = ]1.64, \infty[$
- **Decisión:** Como que  $0.694 < 1.64$ , no podemos rechazar  $H_0$

## Ejemplo

$$\begin{cases} H_0 : \mu = 20 \\ H_1 : \mu > 20 \end{cases}$$

$$\alpha = 0.05, \sigma = 1.8, n = 25, \bar{x} = 20.25$$

- Intervalo de confianza:

$$\left[ \bar{X} - z_{1-\alpha} \cdot \frac{\sigma}{\sqrt{n}}, \infty \right] = [19.66, \infty[$$

- Decisión:** Como que 20 pertenece al intervalo de confianza, no podemos rechazar  $H_0$

## Ejemplo

$$\begin{cases} H_0 : \mu = 20 \\ H_1 : \mu > 20 \end{cases}$$

$$\alpha = 0.05, \sigma = 1.8, n = 25, \bar{x} = 20.75$$

- Estadístico de contraste:**  $Z = \frac{\bar{X} - 20}{\frac{1.8}{\sqrt{25}}}$

- Toma el valor  $z_0 = \frac{20.75 - 20}{\frac{1.8}{\sqrt{25}}} = 2.083$

- Región crítica:**  $]z_{1-0.05}, \infty[ = ]1.64, \infty[$

- Intervalo de confianza:**  
 $\left[ \bar{X} - z_{1-\alpha} \cdot \frac{\sigma}{\sqrt{n}}, \infty \right] = [20.16, \infty[$

- Decisión:** Rechazamos  $H_0$ : Concluimos que  $\mu > 20$

## Ejemplo

Sea  $X$  una población normal con  $\sigma = 1.8$ . Queremos hacer el contraste

$$\begin{cases} H_0 : \mu = 20 \\ H_1 : \mu > 20 \end{cases}$$

con un nivel de significación de 0.05

Tomamos una m.a.s. de  $n = 25$  observaciones y obtenemos  $\bar{x} = 20.75$

¿Qué decidimos?

## Ejemplo

Sea  $X$  una población normal con  $\sigma = 1.8$ . Queremos hacer el contraste

$$\begin{cases} H_0 : \mu = 20 \\ H_1 : \mu > 20 \end{cases}$$

con un nivel de significación de 0.05

Tomamos una m.a.s. de  $n = 25$  observaciones y obtenemos  $\bar{x} = 19.75$

¿Qué decidimos?

Queremos rechazar  $H_0$  contra  $H_1$ , si  $\bar{x} < 20$ ? (**Ejercicio:** Haced el cálculo, si no nos creéis)



## Ejemplo: C.H. para $\mu$ de normal con $\sigma$ conocida

Sea  $X$  una v.a.  $N(\mu, \sigma)$  con  $\mu$  desconocida y  $\sigma$  conocida

Sea  $X_1, \dots, X_n$  una m.a.s. de  $X$  de tamaño  $n$

Consideremos el contraste

$$\begin{cases} H_0 : \mu = \mu_0 \\ H_1 : \mu < \mu_0 \end{cases}$$

rechazar  $H_0$  si  $Z = \frac{\bar{X} - \mu_0}{\sigma/\sqrt{n}}$  es inferior a un cierto umbral, que determinaremos con  $\alpha$

## Ejemplo: C.H. para la media $\mu$ de una población normal con $\sigma$ conocida

Sea  $X$  una v.a.  $N(\mu, \sigma)$  con  $\mu$  desconocida y  $\sigma$  conocida

Sea  $X_1, \dots, X_n$  una m.a.s. de  $X$  de tamaño  $n$

Consideremos el contraste

$$\begin{cases} H_0 : \mu = \mu_0 \\ H_1 : \mu \neq \mu_0 \end{cases}$$

Rechazar  $H_0$  si  $Z = \frac{\bar{X} - \mu_0}{\sigma/\sqrt{n}}$  está a bastante lejos de 0, y la determinaremos con el valor de  $\alpha$

## Ejemplo: C.H. para una media poblacional $\mu$ de una distribución normal con $\sigma$ conocida

$$\begin{cases} H_0 : \mu = \mu_0 \\ H_1 : \mu < \mu_0 \end{cases}$$

Queremos

$$\begin{aligned} \alpha &= P(\text{rechazar } H_0 | H_0 \text{ cierta}) \\ &= P(Z < \text{umbral}) \implies \text{umbral} = z_\alpha \end{aligned}$$

por lo tanto, para que el nivel de significación del contraste Sea  $\alpha$ , la regla de rechazo tiene que ser

$$Z < z_\alpha$$

La Región crítica es  $] -\infty, z_\alpha[$

## Ejemplo: C.H. para la media $\mu$ de una población normal con $\sigma$ conocida

$$\begin{cases} H_0 : \mu = \mu_0 \\ H_1 : \mu \neq \mu_0 \end{cases}$$

Queremos

$$\begin{aligned} \alpha &= P(\text{rechazar } H_0 | H_0 \text{ cierta}) \\ &= P(Z < -\text{umbral} \text{ o } Z > \text{umbral}) \\ &= P(Z < -\text{umbral}) + P(Z > \text{umbral}) \\ &= 2P(Z > \text{umbral}) = 2(1 - P(Z < \text{umbral})) \\ &\implies P(Z < \text{umbral}) = 1 - \frac{\alpha}{2} \\ &\implies \text{umbral} = z_{1-\frac{\alpha}{2}} \end{aligned}$$

## Ejemplo: C.H. para la media $\mu$ de una población normal con $\sigma$ conocida

$$\begin{cases} H_0 : \mu = \mu_0 \\ H_1 : \mu \neq \mu_0 \end{cases}$$

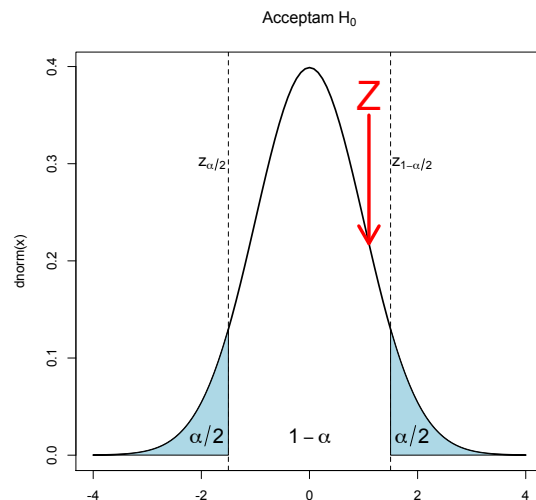
ahora para que el nivel de significación del contraste sea  $\alpha$ , la regla de rechazo tiene que ser

$$Z < -z_{1-\frac{\alpha}{2}} = z_{\frac{\alpha}{2}} \text{ o } Z > z_{1-\frac{\alpha}{2}}$$

La región crítica es  $] -\infty, z_{\frac{\alpha}{2}}[ \cup ]z_{1-\frac{\alpha}{2}}, \infty[$

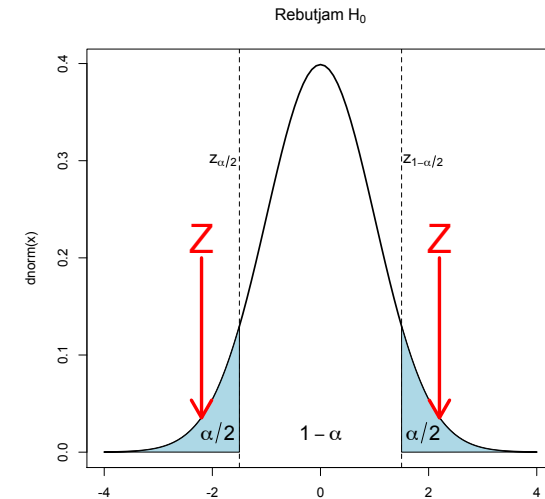
## Ejemplo: C.H. para la media $\mu$ de una población normal con $\sigma$ conocida

$$\begin{cases} H_0 : \mu = \mu_0 \\ H_1 : \mu \neq \mu_0 \end{cases}$$



## Ejemplo: C.H. para la media $\mu$ de una población normal con $\sigma$ conocida

$$\begin{cases} H_0 : \mu = \mu_0 \\ H_1 : \mu \neq \mu_0 \end{cases}$$



## Ejemplo: C.H. para la media $\mu$ de una población normal con $\sigma$ conocida

$$\begin{cases} H_0 : \mu = \mu_0 \\ H_1 : \mu \neq \mu_0 \end{cases}$$

¿Intervalo de confianza?

$$\begin{aligned} -z_{1-\frac{\alpha}{2}} \leq Z \leq z_{1-\frac{\alpha}{2}} &\iff -z_{1-\frac{\alpha}{2}} \leq \frac{\bar{X} - \mu_0}{\frac{\sigma}{\sqrt{n}}} \leq z_{1-\frac{\alpha}{2}} \\ &\iff -z_{1-\frac{\alpha}{2}} \frac{\sigma}{\sqrt{n}} \leq \bar{X} - \mu_0 \leq z_{1-\frac{\alpha}{2}} \frac{\sigma}{\sqrt{n}} \\ &\iff \bar{X} - z_{1-\frac{\alpha}{2}} \frac{\sigma}{\sqrt{n}} \leq \mu_0 \leq \bar{X} + z_{1-\frac{\alpha}{2}} \frac{\sigma}{\sqrt{n}} \\ &\iff \mu_0 \in \left[ \bar{X} - z_{1-\frac{\alpha}{2}} \frac{\sigma}{\sqrt{n}}, \bar{X} + z_{1-\frac{\alpha}{2}} \frac{\sigma}{\sqrt{n}} \right] \end{aligned}$$

¿Os recuerda a algo...?

## Ejemplo

Nociones básicas  
Contrastes  
Tipos de errores  
C.H. para a  $\mu$  de normal con  $\sigma$  conocida  
**p-valor**  
Los pasos de un contraste

Sea  $X$  una población normal con  $\sigma = 1.8$ . Queremos realizar el contraste

$$\begin{cases} H_0 : \mu = 20 \\ H_1 : \mu \neq 20 \end{cases}$$

con un nivel de significación de 0.05

Tomamos una m.a.s. de  $n = 25$  observaciones y obtenemos  $\bar{x} = 20.5$

¿Qué decidimos?

El  $p$ -valor

El  $p$ -valor o **valor crítico** ( $p$ -value) de un contraste es la probabilidad que, si  $H_0$  es verdadera, el estadístico de contraste tome un valor tan extremo o más que el que se ha observado

**Ejemplo:** En un contraste

$$\begin{cases} H_0 : \mu = \mu_0 \\ H_1 : \mu > \mu_0 \end{cases}$$

si el estadístico  $Z$  tiene el valor  $z_0$ ,

$$p\text{-valor} = P(Z \geq z_0)$$

## Ejemplo

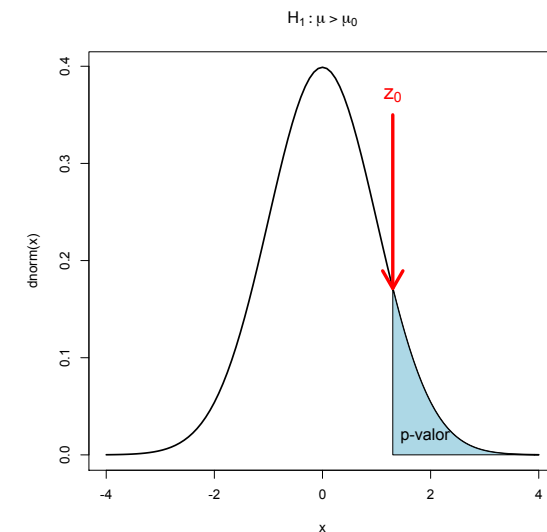
$$\begin{cases} H_0 : \mu = 20 \\ H_1 : \mu \neq 20 \end{cases}$$

$$\alpha = 0.05, \sigma = 1.8, n = 25, \bar{x} = 20.5$$

- **Estadístico de contraste:**  $Z = \frac{\bar{X} - 20}{\frac{1.8}{\sqrt{25}}}$
- Toma el valor  $z_0 = \frac{20.5 - 20}{\frac{1.8}{\sqrt{25}}} = 1.39$
- **Región crítica:**  
 $] -\infty, z_{0.025}[ \cup ] z_{0.975}, \infty[ = ] -\infty, -1.96[ \cup ] 1.96, \infty[$
- **Intervalo de confianza:** [19.794, 21.206]
- **Decisión:** No podemos rechazar  $H_0$

El  $p$ -valor

$$\begin{cases} H_0 : \mu = \mu_0 \\ H_1 : \mu > \mu_0 \end{cases}$$



El  $p$ -valor

El  $p$ -valor o **valor crítico** ( $p$ -value) de un contraste es la probabilidad que, si  $H_0$  es verdadera, el estadístico de contraste tome un valor tan extremo o más que el que se ha observado

**Ejemplo:** En un contraste

$$\begin{cases} H_0 : \mu = \mu_0 \\ H_1 : \mu < \mu_0 \end{cases}$$

si el estadístico  $Z$  es  $z_0$ ,

$$p\text{-valor} = P(Z \leq z_0)$$

El  $p$ -valor

El  $p$ -valor o **valor crítico** ( $p$ -value) de un contraste es la probabilidad que, si  $H_0$  es verdadera, el estadístico de contraste tome un valor tan extremo o más que el que se ha observado

**Ejemplo:** En un contraste

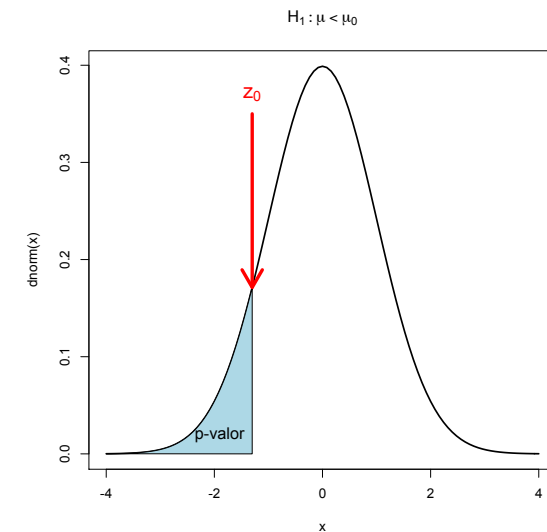
$$\begin{cases} H_0 : \mu = \mu_0 \\ H_1 : \mu \neq \mu_0 \end{cases}$$

si el estadístico  $Z$  ha dado  $z_0$ ,

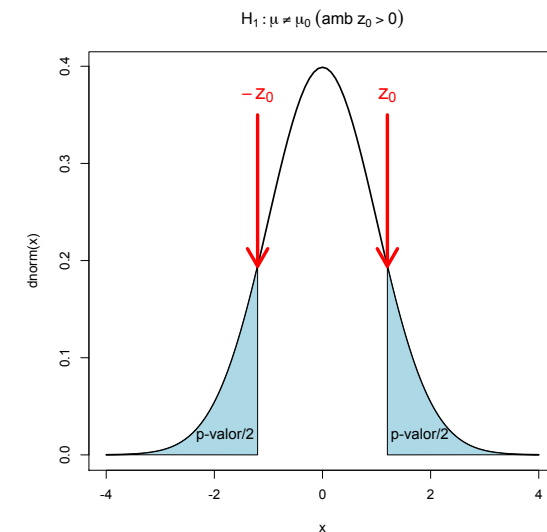
$$\begin{aligned} p\text{-valor} &= 2 \cdot \min\{P(Z \leq -|z_0|), P(Z \geq |z_0|)\} \\ &= 2 \cdot P(Z \geq |z_0|) \end{aligned}$$

El  $p$ -valor

$$\begin{cases} H_0 : \mu = \mu_0 \\ H_1 : \mu < \mu_0 \end{cases}$$

El  $p$ -valor

$$\begin{cases} H_0 : \mu = \mu_0 \\ H_1 : \mu \neq \mu_0 \end{cases}$$



El  $p$ -valor

Nociones básicas  
Contrastes  
Tipos de errores  
C.H. para  $\mu$  de normal con  $\sigma$  conocida  
 **$p$ -valor**  
Los pasos de un contraste

El  $p$ -valor o valor crítico ( $p$ -value) de un contraste es la probabilidad que, si  $H_0$  es verdadera, el estadístico de contraste tome un valor tan extremo o más que el que se ha observado

Es una medida inversa de la fuerza de las pruebas o evidencias que hay en contra de  $H_1$ : si  $H_0$  es verdadera, cuanto más pequeño sea el  $p$ -valor, más improbable es observar lo que hemos observado.

en consecuencia, cuanto más pequeño sea el  $p$ -valor, con más fuerza podemos rechazar  $H_0$ .

El  $p$ -valor

¡Importante!

En un contraste con nivel de significación  $\alpha$ ,

- rechazamos  $H_0$  si  $p\text{-valor} < \alpha$
- aceptamos  $H_0$  si  $\alpha \leq p\text{-valor}$

Ejemplo: En un contraste

$$\begin{cases} H_0 : \mu = \mu_0 \\ H_1 : \mu > \mu_0 \end{cases}$$

supongamos que el estadístico  $Z$  vale  $z_0$ . El  $p$ -valor es  $P(Z \geq z_0)$

$$\begin{aligned} \text{Rechazamos } H_0 &\iff z_0 > z_{1-\alpha} \\ &\iff P(Z \geq z_0) < P(Z \geq z_{1-\alpha}) = 1 - (1 - \alpha) = \alpha \end{aligned}$$

El  $p$ -valor

Nociones básicas  
Contrastes  
Tipos de errores  
C.H. para  $\mu$  de normal con  $\sigma$  conocida  
 **$p$ -valor**  
Los pasos de un contraste

por ejemplo tomemos,  $p\text{-valor} = 0.03$

- Significa** que la probabilidad que, si  $H_0$  es verdadera, el estadístico de contraste tome un valor tan extremo o más que el que ha pres es 0.03 (pequeño: evidencia que  $H_0$  es falsa)
- No significa:**
  - La probabilidad que  $H_0$  Sea verdadera es 0.03
  - $H_0$  es verdadera un 3 % de les veces

El  $p$ -valor

¡Importante!

En un contraste con nivel de significación  $\alpha$ ,

- rechazamos  $H_0$  si  $p\text{-valor} < \alpha$
- aceptamos  $H_0$  si  $\alpha \leq p\text{-valor}$

Ejemplo: En un contraste

$$\begin{cases} H_0 : \mu = \mu_0 \\ H_1 : \mu \neq \mu_0 \end{cases}$$

supongamos que el estadístico  $Z$  vale  $z_0 > 0$ . El  $p$ -valor es  $2P(Z \geq z_0)$

$$\begin{aligned} \text{Rechazamos } H_0 &\iff z_0 > z_{1-\frac{\alpha}{2}} \\ &\iff 2P(Z \geq z_0) < 2P(Z \geq z_{1-\frac{\alpha}{2}}) = 2(1 - (1 - \frac{\alpha}{2})) = \alpha \end{aligned}$$

Nociones básicas  
Contrastes  
Tipos de errores  
C.H. para  $\mu$  de normal con  $\sigma$  conocida  
 **$p$ -valor**  
Los pasos de un contraste

Nociones básicas  
Contrastes  
Tipos de errores  
C.H. para  $\mu$  de normal con  $\sigma$  conocida  
 **$p$ -valor**  
Los pasos de un contraste

El  $p$ -valor

## ¡Importante!

En un contraste con nivel de significación  $\alpha$ ,

- rechazamos  $H_0$  si  $p\text{-valor} < \alpha$
- aceptamos  $H_0$  si  $\alpha \leq p\text{-valor}$

El  $p$ -valor de un contraste es

- El nivel de significación  $\alpha$  más pequeño para el que rechazamos la hipótesis nula
- El nivel de significación  $\alpha$  más grande para el que aceptaríamos la hipótesis nula
- La probabilidad mínima de error de Tipo I que permitimos si rechazamos la hipótesis nula con el valor del estadístico de contraste obtenido
- La probabilidad máxima de error de Tipo I que permitimos si aceptamos la hipótesis nula con el valor del estadístico de contraste obtenido

## Ejemplo

Sea  $X$  una población normal con  $\sigma = 1.8$ . Queremos hacer el contraste

$$\begin{cases} H_0 : \mu = 20 \\ H_1 : \mu > 20 \end{cases}$$

Tomamos una m.a.s. de  $n = 25$  observaciones y obtenemos  $\bar{x} = 20.25$

¿Qué decidimos?

No tenemos  $\alpha$ : Observamos el  $p$ -valor

El  $p$ -valor

## ¡Importante!

Si no establecemos un nivel de significación  $\alpha$ , entonces

- Aceptamos  $H_0$  si el  $p$ -valor es “grande” ( $\geq 0.1$ )
- Rechazamos  $H_0$  si el  $p$ -valor es “pequeño” ( $< 0.05$ ). En este caso, el  $p$ -valor es
  - **Significativo** si es  $< 0.05$
  - **Fuertemente significativo** si es  $< 0.01$
  - **Muy significativo** si es  $< 0.001$

Signif. codes: 0 ‘\*\*\*’ 0.001 ‘\*\*’ 0.01 ‘\*’ 0.05 ‘.’ 0.1 ‘ ’ 1

Si el  $p$ -valor está entre 0.05 y 0.1 y no tenemos nivel de significación, se requieren estudios posteriores para tomar una decisión ("la **zona crepuscular**, *twilight zone*")

## Ejemplo

- **Estadístico de contraste:**  $Z = \frac{\bar{X} - 20}{\frac{1.8}{\sqrt{25}}}$

Toma el valor  $z_0 = \frac{20.25 - 20}{\frac{1.8}{\sqrt{25}}} = 0.694$

- $p\text{-valor} = P(Z \geq 0.694) = 0.2438 > 0.1$  gran
- **Decisión:** No podemos rechazar  $H_0$

## Ejemplo

Sea  $X$  una población normal con  $\sigma = 1.8$ . Queremos hacer el contraste

$$\begin{cases} H_0 : \mu = 20 \\ H_1 : \mu > 20 \end{cases}$$

Tomamos una m.a.s. de  $n = 25$  observaciones y obtenemos  $\bar{x} = 20.75$

¿Qué decidimos?

## Decisiones

Podemos decidir un contraste:

- **con la región crítica:** Si el estadístico de contraste cae dentro la Región crítica para al nivel de significación  $\alpha$ , rechazamos  $H_0$
- **con el intervalo de confianza:** Si el parámetro poblacional a contrastar cae dentro el intervalo de confianza para al nivel  $(1 - \alpha) \cdot 100 \%$ , aceptamos  $H_0$
- **con el p-valor:** Si el  $p$ -valor es más pequeño que el nivel de significación  $\alpha$ , rechazamos  $H_0$
- **con el p-valor y sin  $\alpha$ :** Si el  $p$ -valor es pequeño, rechazamos  $H_0$ , y si es grande, aceptamos

Aquí utilizaremos el  $p$ -valor

## Ejemplo

- **Estadístico de contraste:**  $Z = \frac{\bar{X} - 20}{\frac{1.8}{\sqrt{25}}}$

Toma el valor  $z_0 = \frac{20.75 - 20}{\frac{1.8}{\sqrt{25}}} = 2.083$

- **p-valor** =  $P(Z \geq 2.083) = 0.0186$  pequeño
- **Decisión:** Rechazamos  $H_0$  contra  $H_1$

El método de los seis pasos (con  $\alpha$ )

- 1) Establecer la hipótesis nula  $H_0$  y la hipótesis alternativa  $H_1$
- 2) Fijar un nivel de significación  $\alpha$
- 3) Seleccionar el estadístico de contraste apropiado
- 4) Calcular el valor del estadístico de contraste a partir de los datos muestrales
- 5) Calcular el  $p$ -valor del contraste
- 6) **Decisión:** rechazar  $H_0$  en favor de  $H_1$  si el  $p$ -valor es más pequeño que  $\alpha$ ; en caso contrario, aceptar  $H_0$

# El método de los cinco pasos (sin $\alpha$ )

- 1) Establecer la hipótesis nula  $H_0$  y la hipótesis alternativa  $H_1$
- 2) Seleccionar el estadístico de contraste apropiado
- 3) Calcular el valor del estadístico de contraste a partir de los valores de la muestra
- 4) Calcular el  $p$ -valor del contraste
- 5) **Decisión:** rechazar  $H_0$  en favor de  $H_1$  si el  $p$ -valor es pequeño ( $< 0.05$ ), aceptar  $H_0$  si el  $p$ -valor es grande ( $\geq 0.1$ ), y ampliar el estudio si el  $p$ -valor está entre 0.05 y 0.1

## Ejemplo: con $\alpha$

Tomamos un nivel de significación  $\alpha = 0.05$

EL estadístico de contraste es

$$Z = \frac{\bar{X} - 7}{0.89/\sqrt{100}} = \frac{\bar{X} - 7}{0.089}$$

El valor en este contraste es  $z_0 = \frac{71.8 - 70}{0.89} = 2.02$

El  $p$ -valor es

$$P(Z \geq 2.02) = 0.0217$$

Como  $0.0217 < \alpha$ , rechazamos  $H_0$ : concluimos que  $\mu > 70$

# Ejemplo

Los años de vida de un router sigue aproximadamente una ley de distribución normal con  $\sigma = 0.89$  años

Una muestra aleatoria de la duración de 100 aparatos ha dado una vida media de 7.18 años

Queremos decidir si la vida media en de estos routers es superior a 7 años

utilizaremos el contraste

$$\begin{cases} H_0 : \mu = 7 \\ H_1 : \mu > 7 \end{cases}$$

## Ejemplo: con $\alpha$

Supongamos que tomamos un nivel de significación  $\alpha = 0.01$

El estadístico de contraste es

$$Z = \frac{\bar{X} - 70}{6.8/\sqrt{100}} = \frac{\bar{X} - 70}{0.68}$$

El valor del estadístico de contraste con esta muestra es  $z_0 = \frac{71.8 - 70}{0.68} = 2.022$

El  $p$ -valor es

$$P(Z \geq 2.022) = 0.0217$$

Como  $0.0217 > \alpha$ , no podemos rechazar  $H_0$ : concluimos que  $\mu \leq 70$  con este nivel de significación



## Ejemplo: sin $\alpha$

El estadístico de contraste es

$$Z = \frac{\bar{X} - 70}{6.8/\sqrt{100}} = \frac{\bar{X} - 70}{0.68}$$

Su valor en este contraste es  $z_0 = \frac{71.8 - 70}{0.68} = 2.022$

El  $p$ -valor es

$$P(Z > 2.022) = 0.0216$$

Como es pequeño ( $< 0.05$ ), rechazamos  $H_0$ : concluimos que  $\mu > 70$

## Un último consejo

Como una regla recomendaríamos en un informe:

- Si tenemos fijado (conocemos)  $\alpha$ : Encontrar el  $p$ -valor y el intervalo de confianza del contraste para  $\alpha$  dado (nivel de confianza  $(1 - \alpha) \cdot 100 \%$ )
- Si no tenemos fijado (no conocemos)  $\alpha$ : Encontrar el  $p$ -valor, y el intervalo de confianza del contraste al nivel de confianza 95 %