# PROBABILIDAD

**1.-** En una carrera en la que participan diez caballos ¿de cuántas maneras diferentes se pueden dar los cuatro primeros lugares?

**2.-** Una empresa de reciente creación encarga a un diseñador gráfico la elaboración del su logotipo, indicando que ha de seleccionar exactamente tres colores de una lista de seis. ¿Cuántos grupos tienen para elegir el diseñador?

**3.-** ¿Cuántas palabras diferentes, de cuatro letras, se pueden formar con la palabra **byte**?

**4.-** ¿De cuantas maneras diferentes se pueden elegir el director y el subdirector de un departamento formado por 50 miembros?

**5.-** Con once empleados ¿cuántos comités de empresa de cinco personas se pueden formar?

**6.-** ¿Cuántas maneras distintas hay de colocar quince libros diferentes en una estantería si queremos que el de Probabilidades esté el primero y el de Estadística en el tercero?

**7.-** ¿cuántos caracteres diferentes podemos formar utilizando a lo sumo a tres símbolos de los utilizados en el alfabeto Morse?

**8.-** Un supermercado organiza una rifa con un premio de una botella de cava para todas las papeletas que tengan las dos últimas cifras iguales a las correspondientes dos últimas cifras del número premiado en el sorteo de Navidad. Supongamos que todos los décimos tienen cuatro cifras y que existe un único décimo de cada numeración ¿Cuántas botellas repartirá el supermercado?

**9.-** ¿Cuántas palabras diferentes podemos formar con todas las letras de la palabra estadística?

**10.-** En una tienda de regalos hay relojes de arena con cubetas de colores, y no hay diferencia alguna entre las dos cubetas que forman cada reloj. Si hay cuatro colores posibles y el color de los dos recipientes puede coincidir ¿cuántos modelos de reloj de arena puede ofrecer el establecimiento?

**11.-** En una partida de parchís gana aquel jugador que consigue alcanzar antes con sus cuatro fichas la llegada. Si hay cuatro jugadores y la partida continua hasta que todos han

---

[1] Sol.: **5040**
[2] Sol.: **20**
[3] Sol.: **24**
[4] Sol.: **2450**
[5] Sol.: **462**
[6] Sol.: **6227020800**
[7] Sol.: **8+4+2=14**
[8] Sol.: **100**
[9] Sol.: **2494800**
[10] Sol.: **6**

completado el recorrido ¿cuántos órdenes de llegadas hay para la dieciséis fichas?

**12.-** Se han de repartir cinco becas entre diez españoles y seis extranjeros, de manera que se den tres a españoles y dos a extranjeros ¿De Cuántas maneras se puede hacer el reparto?

**13.-** ¿Cuantas fichas tiene un dominó?

**14.-** Calcular la probabilidad de que al lanzar a la vez 5 dados se obtenga:

a) repóker (5 resultados iguales);

b) póker (4 resultados iguales);

c) full (3 resultados iguales y los otros distintos pero iguales entre si);

d) trío (3 resultados iguales y los otros dos diferentes);

e) doble pareja (2 resultados iguales, otros 2 iguales y diferentes de los anteriores y el restante diferente );

f) pareja (exactamente 2 resultados iguales);

g) nada (5 resultados distintos).

**15.-** Tenemos 12 radios de las que 5 son defectuosas. Elegimos 3 radios al azar. ¿Cuál es la probabilidad de que solo una de las 3 sea defectuosa?

**16.-** Lanzamos al aire 6 dados.

a) ¿Cuál es la probabilidad de que todos ellos den resultados distintos?

b) ¿Cuál es la probabilidad de obtener 3 parejas?

**17.-** Supongamos que en una empresa de fabricación de componentes electrónicos se sabe que en un lote de 550 almacenados el 2% son defectuosos ¿Cuál es la probabilidad de encontrar 2 de defectuosos si cogemos de forma equiprobable 25?

**18.-** Si mezclamos suficientemente una baraja de 52 cartas ¿Cuál es la probabilidad de que los 4 ases queden colocados consecutivamente?

[11]Sol.: **63063000**
[12]Sol.: **1800**
[13]Sol.: **28**
[14]Sol.: a) $\mathbf{6/6^5}$; b) $\mathbf{150/6^5}$;c) $\mathbf{300/6^5}$; d) $\mathbf{1200/6^5}$; e) $\mathbf{1800/6^5}$; f) $\mathbf{3600/6^5}$; g) $\mathbf{720/6^5}$
[15]Sol.: **21/44**
[16]Sol.: a)$\mathbf{120/6^5}$; b) $\mathbf{300/6^5}$
[17]Sol.: **0.074**
[18]Sol.: **24/132600**

**19.-** Una forma de incrementar la fiabilidad de un sistema es la introducción de una copia de los componentes en una configuración paralela. Supongamos que la N.A.S.A. quiere un vuelo con una probabilidad no inferior a 0.99999 de que el transbordador espacial entre en órbita alrededor de la Tierra con éxito. ¿cuántos motores se han de montar en paralelo para que se alcance esta fiabilidad, si se sabe que la probabilidad de que cada uno de los motores funcione adecuadamente es 0.95? Suponer que los motores funcionan de manera independiente entre si.

**20.-** ¿Cuál es la probabilidad de que entre $n$ personas, que no han nacido el 29 de febrero, haya como a mínimo dos que hayan nacido el mismo día del año? (no necesariamente del mismo año). Calcular la probabilidad para los siguientes valores de $n : 10, 15, 22, 23, 30, 40, 50, 55.$

**21.-** Cuatro cartas numeradas de 1 a 4 están colocadas boca abajo sobre una mesa. Una persona, supuestamente clarividente, irá adivinando los valores de las 4 cartas una a una. Si suponemos que es un farsante y que lo que hace es decir los cuatro números al azar ¿Cuál es la probabilidad de que acierte como mínimo una? (Obviamente, no repite ningún número)

**22.-** En una lotería hay 500 billetes y 5 premios. Si una persona compra 10 billetes ¿Cuál es la probabilidad de obtener?:

a) el primer premio?

b) como mínimo un premio?

c) exactamente un premio?

**23.-** Se elige de forma equiprobable un número del 1 al 6000. Calcular la probabilidad de que sea múltiplo de 2 o de 3 o de 4 o de 5.

**24.-** Si elegimos un número de entre los 120 primeros enteros positivos ¿Cuál es la probabilidad de que sea múltiplo de 3, no sea divisible por 5, y sea divisible por 4 o por 6?

**25.-** Una cuarta parte de la población ha sido vacunada contra una enfermedad contagiosa. Durante una epidemia, se observa que de uno de entre cada cuatro enfermos ha sido vacunado.

a) ¿Ha tenido alguna eficacia la vacuna?

b) Por otra parte, se sabe que hay un enfermo entre cada 12 personas vacunadas ¿Cuál es la probabilidad de que esté enferma una persona que no se ha vacunado?

[19] Sol.: **4**

[20] Sol.: **0**.12; 0.25; 0.48; 0.51; 0.71; 0.89; 0.97; 0.99

[21] Sol.: **15/24**

[22] Sol.: **0.02; 0.096; 0.093**

[23] Sol.: **0.73**

[24] Sol.: **2/15**

[25] Sol.: a) **No**; b) **11/108**

**26.-** La probabilidad de que un estudiante acabe una carrera determinada es 0.4. Dado un grupo de 5 estudiantes de esta carrera, calcular la probabilidad de que:[26]

a) ninguno acabe la carrera,

b) solo uno acabe la carrera,

c) al menos dos acaben la carrera;

d) todos la acaben.

**27.-** Un mensaje se ha codificado con un alfabeto de dos símbolos $A$ y $B$ para poder transmitirse a través de un canal de comunicación. La codificación es tal que $A$ aparece el doble de veces que $B$ en el mensaje codificado. El ruido del canal es tal que cuando $A$ se transmite, se recibe $A$ con una probabilidad de 0.8 y $B$ con una probabilidad de 0.2; cuando se transmite $B$ se recibe $B$ con una probabilidad de 0.7 y se recibe $A$ con probabilidad 0.3.[27]

a) ¿Cuál es la frecuencia relativa de $A$ en el mensaje recibido?

b) Si última letra del mensaje recibido es una $A$ ¿Cuál es la probabilidad de que se haya enviado una $A$?

**28.-** En una ciudad se publican 3 diarios $A$, $B$ y $C$. El 30% de la población lee $A$, el 20% lee $B$ y el 15% lee C; el 12% lee $A$ y $B$, el 9% lee $A$ y $C$, y el 6% lee $B$ y $C$; finalmente, el 3% lee $A$, $B$ y $C$. Calcular:[28]

a) El porcentaje de gente que lee al menos uno de los tres diarios.

b) El porcentaje de gente que solo lee $A$.

c) El porcentaje de gente que lee $B$ o $C$, pero no $A$.

d) El porcentaje de gente que lee $A$ o no lee ni $B$ ni $C$.

**29.-** Supongamos que en un dado la probabilidad de cada una de sus seis caras es proporcional al número inscrito en ella. Calcular la probabilidad de obtener un número par.[29]

**30.-** En una reunión, $n$ personas ($n \geq 3$) lazan una moneda al aire. Si una de ellas da diferente de todas las otras, su propietario paga una ronda ¿Cuál es la probabilidad de que pase esto?[30]

---

[26] Sol.: **a) 0.07776; b) 0.2592; c) 0.66304; d) 0.01024**

[27] Sol.: **a) 0.633; b) 0.84**

[28] Sol.: **a) 0.41 ; b) 0.12; c) 0.11; d) 0.89**

[29] Sol.: **4/7**

[30] Sol.: $(\mathbf{n} \cdot (\frac{\mathbf{1}}{\mathbf{2}})^{\mathbf{n-1}})$

**31.-** Un matrimonio planifica su descendencia considerando los siguientes esquemas (se supone que tener una varón o una hembra es equiprobable):

**Esq. A)** Tener 3 hijos (de cualquier sexo:varón o hembra).

**Esq. B)** Tener varones hasta que nazca la primera hembra, o ya tengan tres hijos (lo que pase primero).

**Esq. C)** Tener hijos hasta que tengan una pareja de ambos sexos, o ya tengan tres hijos (lo que pase primero).

Sea $B_i$ el suceso han nacido $i$ varones ($i = 1, 2, 3$) y $C$ el suceso tener más varones que hembras.

1) Calcular $p(B_1)$ y $p(C)$ en cada uno de los tres esquemas.

2) Calcular $p(B_2)$ y $p(B_3)$ en cada uno de los tres esquemas.

3) Sea $E$ el suceso que el total de hijos tenga igual número de varones que de hembras. Encontrar $p(E)$ en cada uno de los tres esquemas.

**32.-** Un comerciante ha de viajar en avión de Bangkok a Bagdad. Preocupado, pide a la compañía aérea ¿Cuál es la probabilidad de que haya como mínimo una bomba en el avión y le dicen que es de 0.1. Más preocupado aún pide cuál es la probabilidad de que haya como mínimo dos bombas y le dicen que es 0.01. Más tranquilo, decide llevar una bomba en su equipaje. Haciendo las suposiciones adicionales oportunas ¿qué valoración estadística podemos hacer de su decisión?

**33.-** Dos sistemas con cuatro componentes independientes con fiabilidades respectivas $p_1, p_2, p_3$ y $p_4$ se configuran de las dos maneras siguientes: En el sistema $A$, la combinación en serie de los componentes 1 y 2 se configura en paralelo con la combinación en serie de los componentes 3 y 4; en el sistema $B$, la combinación en paralelo de 1 y 3 se configura en serie con la combinación en paralelo de 2 y 4. Determinar el sistema más fiable.

**34.-** Si un sistema que consiste en tres componentes independientes con la misma fiabilidad ($p_1 = p_2 = p_3$) tiene una fiabilidad de 0.8, determinar $p_1$ en los siguientes casos:

a) el componente 3 está configurado en serie con la combinación en paralelo 1 y 2.

b) el componente 3 está configurado en paralelo con la combinación en serie de 1 y 2.

[31] Sol.: a) $(\mathbf{p(B_1) = 3/8, 1/4, 5/8; p(C) = 1/2, 1/2, 1/4})$; b) $(\mathbf{p(B_2) = 3/8, 1/8, 1/8; p(B_3) = 1/8, 1/8, 1/8})$; c) $(\mathbf{0, 1/4, 1/2})$.

[32] Sol.: **Decisión absurda por sentido común y estadísticamente.**

[33] Sol.: **B**

[34] Sol.: **a) 0.825; b) 0.652**

## VARIABLES ALEATORIAS

**35.-** En los ocho problemas siguientes determinar la función de probabilidad y la de distribución de las variables aleatorias que aparezcan

a) Consideremos el experimento consistente en lanzar simultáneamente dos dados; repetimos el experimento dos veces. Sea $X$ la variable aleatoria que da el número de lanzamientos en que los dos dados han mostrado un número par. Sea $Y$ la variable aleatoria que nos da el número de lanzamientos en que la suma de los dos dados es par.

b) Supongamos que tenemos almacenadas 10 piezas, de las que sabemos que hay 8 del tipo I y 2 del tipo II; se toman dos al azar de forma equiprobable. Sea $X$ la variable aleatoria que da el número de piezas de tipo I que hemos cogido.

c) Supongamos que un estudiante realiza el tipo de examen siguiente: El profesor le va formulando preguntas hasta que el estudiante falla una (no os preguntéis como se evalúa ni yo lo sé). La probabilidad de que el estudiante acierte una pregunta cualquiera es 0.9 (examen fácil). Sea $X$ la variable aleatoria que nos da el número de preguntas formuladas por el profesor ¿Cuál es el número más probable de preguntas formuladas?

d) Consideremos dos cañones que van disparando alternativamente hacia el mismo objetivo. El primer cañón tiene una probabilidad de acertar el objetivo de 0.3 mientas que en el segundo es de 0.7. El primer cañón comienza la serie de lanzamientos y no se detienen hasta que uno de los cañones desintegre el blanco (es suficiente darle una vez). Sea $X$ la variable aleatoria que nos da el número de proyectiles lanzados por el primer cañón e $Y$ la que nos da los proyectiles lanzados por el segundo cañón.

e) En la misma situación que en el ítem anterior, considerar la variable aleatoria $X$ que da el número de proyectiles lanzados por el primer cañón condicionado a que gana y sea $Y$ la variable aleatoria que cuenta el número de proyectiles lanzados por segundo cañón cuando gana.

f) Supongamos que se hace una tirada de 100000 ejemplares de un determinado libro . La probabilidad de que una encuadernación sea incorrecta es 0.0001 ¿Cuál es la probabilidad de que haya 5 libros de la tirada mal encuadernados?

g) Dos compañeros de estudios se encuentran en un conocido bar de copas de Palma y deciden jugar a dardos de una manera especial: Lanzarán consecutivamente un dardo cada hasta que uno de los dos acierte el triple 10 (centro de la diana). El que lanza en primer lugar tiene una probabilidad de 0.7 de acertar y el que lo hace en segundo lugar 0.8. Sea $X$ la variable aleatoria que da el número total de lanzamientos de dardos hechos por los dos compañeros.

h) Un examen tipo test consta de 5 preguntas, cada una con tres opciones de respuesta, solo hay una opción correcta. Un estudiante contesta al azar a las 5 cuestiones. Sea $X$ la variable aleatoria que da el número de puntos obtenidos por el alumno.

   i) Si les respuestas erróneas no restan puntos.

   ii) Si cada respuesta errónea resta 1 punto.

**36.-** Un coche tiene que pasar por cuatro semáforos. En cada uno de ellos el coche tiene la misma probabilidad de seguir su marcha que de detenerse. Hallar la función de distribución del número de semáforos que pasa el coche sin detenerse.

**37.-** Un individuo quiere invertir un capital de medio millón de euros en un negocio que tiene una rentabilidad del 50%, pero con el riesgo de perder toda la inversión. Su asesor financiero le informa que este negocio tiene una probabilidad de ser rentable del 0.8 ¿Cuál es el beneficio esperado? (**100000**)

**38.-** Un juego se dice justo si la ganancia esperada de cada jugador es 0. Dos jugadores A y B tiran un dado por turnos, y gana el primero que obtiene un 5. Cada jugador apuesta una cantidad $c_j$ $(j = 1, 2)$, y el total se lo queda el ganador. Si suponemos que comienza a jugar A ¿qué relación tienen que verificar $c_1$ y $c_2$ para que el juego sea justo?

**39.-** (**Opcional**) **Problema de la ruina del jugador** Supongamos que jugamos a la ruleta en un casino. Sea $p < 1/2$ la probabilidad de que salga un número rojo. Supongamos que apostamos a la par (lo que quiere decir, que si apostamos $k$ dólares, cuando sale rojo nos dan $k$ dólares más los que hemos entregado al apostar y perdemos los $k$ dólares que hemos apostado si no sale rojo). La primera apuesta es de 1 dólar. Si ganamos, nos retiramos. Si perdemos, hacemos una segunda apuesta de 2 dólares. Si ganamos, nos retiramos. Si perdemos, apostamos $2^2$ dólares, y así sucesivamente. La $n$-ésima apuesta ser? de $2^{n-1}$ dólares.

a) Probar que con este sistema es seguro que ganamos 1 dólar.

b) Calcular el importe esperado de la apuesta ganadora. $(\infty)$

Supongamos ahora que la casa tiene un límite de $2^L$ dólares (el máximo que está permitido apostar), de manera que, si no hemos ganado antes, esa ser? nuestra apuesta final.

a) ¿Cuál es la ganancia esperado cuando paramos de jugar? $(\mathbf{1 - (2(1-p))^{L+1}})$

b) ¿Qué? es mejor un límite alto o bajo? **(bajo)**

**40.-** Se venden 50000 números de lotería a 10 euros cada uno, para un sorteo con un premio de 300000 euros. ¿Cuál es la ganancia (pérdida) esperada de una persona que compra tres billetes? (**−12** euros)

**41.-** (**Opcional**) Un sistema de transmisión emite los dígitos -1, 0, 1. Cuando se transmite el símbolo $i$, se recibe el símbolo $j$ con las probabilidades siguientes: $P(r_1/t_1) = 1,\ P(r_{-1}/t_{-1}) = 1,\ P(r_1/t_0) = 0.1,\ P(r_{-1}/t_0) = 0.1,\ P(r_0/t_0) = 0.8$. Se dice que en este caso se ha producido una distorsión $(i - j)^2$. ¿Cuál es el valor medio de la distorsión? (**1/15**)

**42.-** (**Opcional**) Una fuente binaria emite de manera equiprobable e independiente un bloque de 3 dígitos (0 ó 1) cada segundo. De cada bloque se envía a una canal de transmisión un 0 si en el bloque hay más ceros que unos y un 1 en caso contrario. El canal transmite el dígito con una probabilidad de error $p$. El receptor reconstruye la terna de dígitos repitiendo tres veces el dígito que ha recibido ¿Cuál es el número medio de bits erróneos por bloque? $(\mathbf{\frac{3}{4}+\frac{3 \cdot p}{2}})$ ¿Cuál tendría que ser la probabilidad $p$ para que este valor medio no fuera más grande que 1? $(\mathbf{p \leq 1/6})$

**43.-** (**Opcional**) Dos personas juegan a cara o cruz, y han decidido continuar la partida hasta que se obtengan como mínimo 3 caras y 3 cruces. Hallar la probabilidad de que el juego no se acabe en 10 tiradas y el número esperado de tiradas.

**44.-** (**Opcional**) Es un buen ejercicio calcular la esperanza y la varianza de todas las variables que aparecen en el problema 35 (Algunas son difíciles).

## Variables aleatorias continuas

**45.-** Sea $X$ una variable aleatoria continua con función de densidad $f(x)$ dada por:

$$f(x) = \begin{cases} k \cdot (1+x^2) & \text{si } x \in (0,3) \\ 0 & \text{si } x \notin (0,3) \end{cases}$$

a) Calcular la constante $k$ y la función de distribución de $X$.

b) Calcular la probabilidad de que $X$ esté comprendida entre 1 y 2

c) Calcular la probabilidad de que $X$ sea menor que 1.

d) Sabiendo que $X$ es mayor que 1, calcular la probabilidad de que sea menor que 2.

**46.-** La función de densidad de una variable aleatoria continua es:

$$f(x) = \begin{cases} a \cdot x^2 + b & \text{si } x \in (0,3) \\ 0 & \text{si } x \notin (0,3) \end{cases}.$$

Determinar $a$ y $b$, sabiendo que $P(1 < X \leq 2) = 2/3$.

**47.-** (**Opcional, es una integral rara.**) La duración en minutos de unas ciertas comunicaciones telefónicas es una variable aleatoria con función de distribución:

$$F(x) = \begin{cases} 0 & \text{si } x \leq 0 \\ 1 - \frac{1}{2}e^{-x/3} - \frac{1}{2}e^{-R[x/3]} & \text{si } x > 0 \end{cases}$$

donde $R[x]$ es la parte entera de $x$. Calcular la probabilidad de la comunicación dure:

a) Más de 6 minutos.

b) Menos de 4 minutos.

c) Exactamente 3 minutos.

---

[43]Sol.: $\mathbf{\frac{7}{64} = 0.109375}$; $\mathbf{E(X) = \frac{63}{8}}$.
[45]Sol.: a) $\mathbf{k = 1/12}$; b) $\mathbf{5/18}$; c) $\mathbf{1/9}$; e) $\mathbf{5/16}$
[46]Sol.: $\mathbf{a = -1/2, b = 11/6}$

d) Menos de 9 minutos, sabiendo que ha durado más de 5.

e) Más de 5 minutos, sabiendo que ha durado menos de 9.

**48.-** Sea $X$ una variable aleatoria continua con densidad:

$$f(x) = \begin{cases} 1 - |x| & \text{si } |x| \leq 1 \\ 0 & \text{en caso contrario} \end{cases}$$

a) Encontrar la función de distribución de $X$.

b) Calcular $P(X \geq 0)$ y $P(|X| < 1/2)$.

**49.-** Se llama **distribución triangular** a cualquier distribución continua tal que su densidad es cero salvo en un cierto intervalo $(a, b)$, en el que su gráfica tiene forma de triángulo isósceles. Hallar la función de densidad y de distribución de una distribución triangular.

**50.-** Sea $X$ una variable aleatoria continua con densidad (Laplaciana)

$$f(x) = \frac{1}{2} \cdot e^{-|x|} \text{ si } x \in \mathbb{R}$$

a) Calcular $P(|X| > 2)$.

b) Calcular $E(X)$ y $Var(X)$.

**51.-** Consideremos $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ dada por

$$f(x) = \begin{cases} 0 & \text{si } x \leq 0 \\ a(1 + x) & \text{si } 0 < x \leq 1 \\ 2/3 & \text{si } 1 < x \leq 2 \\ 0 & \text{si } x > 2 \end{cases}$$

a) Determinar el valor de $a$ para que $f$ sea una densidad.

b) En este caso, si $X$ es una variable aleatoria continua con densidad $f$, calcular $P(1/2 < X \leq 3/2)$.

c) Calcular, para el valor de $a$ encontrado $E(X)$ y $Var(X)$.

[47]Sol.: a)$\mathbf{e^{-2}}$; b)$\mathbf{1 - \frac{1}{2}e^{-4/3} - \frac{1}{2}e^{-1}}$ ; c) $\mathbf{\frac{1}{2}(1 - e^{-1})}$
[48]Sol.: b) $\mathbf{1/2, 3/4}$
[50]Sol.: $\mathbf{e^{-2}}$
[50]Sol.: $E(X) = 0$, $Var(X) = 2$.
[51]Sol.: a)$\mathbf{a = 2/9}$ ; b) $\mathbf{19/36}$; c) $E(X) = \frac{32}{27}$, $Var(X) = \frac{409}{1458}$.

## Transformación de variables aleatorias

**52.-** (**No es difícil!!!!, haced los casos.**)Sea $X$ la variable que nos da la puntuación obtenida al lanzar un dado. Calcular la distribución de las variables $Y = X^2$, $Z = X^2 - 6 \cdot X + 6$. Calcular las esperanzas y las varianzas de las variables $Y$ y $Z$.

**53.-** (**Opcional**) Conocida la función de distribución de una variable aleatoria continua $X$, hallar la función de densidad de $Y = X^2$ y de $Z = e^X$.

**54.-** La función de distribución de una variable aleatoria $X$ es:

$$F_X(x) = \begin{cases} 0 & \text{si } x \leq 0 \\ 1 - e^{-x^2} & \text{si } x > 0 \end{cases}$$

Encontrar la función de densidad de la variable aleatoria $Y = \ln(X + 1)$.

**55.-** (**Tiene algo de dificultad.**) La función de densidad de una variable aleatoria $X$ es:

$$f_X(x) = \begin{cases} x + 1 & \text{si } x \in (-1, 0] \\ -x + 1 & \text{si } x \in (0, 1] \\ 0 & \text{si } x \in (-\infty, -1] \cup (1, \infty) \end{cases}$$

Definimos la variable aleatoria $Y = g(X)$, donde $g$ es la función

$$g(x) = \begin{cases} 1 & \text{si } x \in (1/2, \infty) \\ 0 & \text{si } x \in (-1/2, 1/2] \\ -1 & \text{si } x \in (-\infty, -1/2] \end{cases}$$

Determinar la función de probabilidad y la de distribución de $Y$. Calcular las esperanzas y varianzas de $X$ e $Y$.

**56.-** (**Opcional, difícil!!!!!**) El precio por estacionar un vehículo en un aparcamiento es de 75 céntimos de euro por la primera hora o fracción, y de 60 ceńtimos más a partir de la segunda hora o fracción. Supongamos que el tiempo, en horas, que un vehículo cualquiera permanece en el aparcamiento se modeliza según la siguiente función de densidad

$$f_X(x) = \begin{cases} e^{-x} & \text{si } x \geq 0 \\ 0 & \text{si } x < 0 \end{cases}.$$

Calcular el ingreso medio por vehículo. (**109.919**)

**57.-** Calcular $E(X)$ y $Var(X)$ para una v.a. $X$ que tiene por función de densidad $f_X$ dada por:

$$f_X(x) = \begin{cases} \frac{1}{2\sqrt{x}} & \text{si } x \in (0, 1) \\ 0 & \text{si } x \notin (0, 1) \end{cases}$$

(**1/3**, **4/45**)

**58.-** Consideremos una variable aleatoria $X$ con función de densidad:

$$f_X(x) = \begin{cases} 1/2 & \text{si } 0 < x < 2 \\ 0 & \text{en caso contrario} \end{cases}$$

determinar $E(Y)$, donde $Y = \ln(X)$. $(\mathbf{-0.3069})$

**59.-** Sea $X$ una variable aleatoria con función de densidad:

$$f_X(x) = \begin{cases} 2x & \text{si } x \in (0,1) \\ 0 & \text{si } x \notin (0,1) \end{cases}$$

a) Determinar $E(\sqrt{X})$ a partir de $f_{\sqrt{X}}$. $(\mathbf{4/5})$

b) Hacer lo mismo a partir de $f_X$.

## DISTRIBUCIONES NOTABLES

**60.-** Sea $X$ el número de éxitos en $n$ repeticiones independientes de un experimento con probabilidad de éxito $p$.

a) Si $k$ es el valor más probable de $X$, probar que

$$(n+1)p - 1 \leq k \leq (n+1)p$$

b) Si lanzamos 10 veces un dado bien balanceado, ¿Cuál es el número de veces más probable en el que obtendremos un 2.

**61.-** Una cadena de producción da salida a 10000 unidades diarias, el número medio de unidades incorrectas es 200. Una vez al día, se inspecciona un lote de 100 unidades. Determinar la probabilidad de que el lote contenga más de 3 unidades incorrectas

a) Utilizando la distribución binomial.

b) Utilizando la aproximación de Poisson.

**62.-** En una planta de fabricación de circuitos integrados, la proporción de circuitos defectuosos es $p$. Supongamos que la incidencia de circuitos defectuosos es completamente aleatoria.

a) Determinar la distribución del número $X$ de circuitos aceptables producidos antes del primer circuito defectuoso.

b) ¿Cuál es la longitud media de una cadena de producción exitosa? si $p = 0.05$.

**63.-** Un servidor de mensajería esta en funcionamiento. Los clientes acceden a él de forma independiente. La probabilidad de que el servidor caiga cuando accede el cliente es $p$. Calcular la distribución de probabilidad del número de clientes a los que se dará servicio antes de que el servidor caiga.

[60]Sol.: b) $(\mathbf{1})$
[61]Sol.: a) $(\mathbf{0.1410})$ ; b) $(\mathbf{0.1429})$
[62]Sol.: b) $(\mathbf{19})$

a) Calcular el valor esperado y la varianza de esta variable.

b) ¿Cuál es la probabilidad de que atienda a más de 1000 clientes sin que se caiga el servidor?

**64.-** Un sistema informático dispone de un sistema de seguridad compuesto por tres claves de 3 dígitos (del 0 al 9) cada una. Para entrar en el sistema hay que averiguar la primera clave, luego la segunda y por último la tercera. Un pirata informático intenta entrar ilegalmente en el sistema, para ello va introduciendo al azar distintas claves de forma independiente, olvidando las que ha introducido antes. Calcular el valor esperado y la varianza del número de intentos antes de romper el sistema.

Comparar el resultado anterior cuando se ataca el sistema de forma similar pero cuando el sistema de seguridad solo consta de una clave de 9 dígitos. ¿Cuál es el sistema más seguro, desde el punto de vista del número de intentos necesarios para violarlo?

**65.-** De un grupo de 10 personas se eligen 5 de forma equiprobable y se les pregunta si están a favor de una cierta ley. Sea $X$ la variable aleatoria que cuenta el número de personas a favor de la ley entre las 5. Supongamos que hay una persona a favor por cada nueve en contra.

a) Calcular la función de probabilidad de $X$.

b) Calcular la esperanza y la varianza de $X$.

c) Supongamos ahora que la población es de tamaño 10000 ¿podemos suponer un modelo binomial para $X$?, en este caso ¿varía mucho la esperanza y la varianza con respecto al modelo hipergeométrico?

**66.-** (**Pensad bien y os saldrá, es fácil**) Los taxis llegan aleatoriamente (según un proceso Poisson) a la terminal de un aeropuerto con un ritmo medio de un taxi cada 3 minutos. ¿Cuál es la probabilidad de que el último pasajero de una cola de 4 tenga que esperar un taxi más de un cuarto de hora?

**67.-** La variable aleatoria $X$ sigue una ley $N(\mu, \sigma^2)$. Sabemos que $\mu = 5\sigma$, y que $P(X < 6) = 0.8413$.

a) Determinar la esperanza y la varianza de $X$.

b) ¿Cuál es la función de distribución de $Y = 3 - X^2$ y su esperanza?

**68.-** Consideremos una variable aleatoria $X$ con función de densidad $f_X$ dada por:

$$f_X(x) = \begin{cases} 1/2 & \text{si } 0 < x < 2 \\ 0 & \text{en otro caso} \end{cases}$$

[63]Sol.: a) $(\mathbf{\frac{q}{p}}; \mathbf{\frac{q}{p}^2})$ b) $(\mathbf{q^{1001}})$

[66]Sol.: $(\mathbf{0.265})$

[67]Sol.: a)$(\mathbf{5}, \quad \mathbf{1})$ ; b) $\mathbf{E(Y) = -23}$

determinar $\mathrm{E}(Y)$, donde $Y = \ln X$.

**69.-** (**Opcional**) Sea $X$ una variable aleatoria continua con distribución uniforme sobre el intervalo $(0,1)$.

a) Encontrar las funciones de densidad de las variables aleatorias $Y = g(X)$ y $Z = h(X)$, donde $g(x) = 8x^3$ y $h(x) = (x - 1/2)^2$.

b) Calcular la esperanza de las variables aleatorias $Y$ y $Z$ como esperanzas de v.a. y como esperanzas de funciones de la v.a. $X$.

**70.-** El cuantil 0.9 de una variable aleatoria $X$ es el valor $x_{0.9}$ para el que $F_X(x_{0.9}) = P(X \leq x_{0.9}) = 0.9$. De manera similar, el percentil 0.5 es el valor $x_{0.5}$ que satisface $P(X \leq x_{0.5}) = 0.5$ que recibe el nombre de **mediana** (poblacional). Determinar estos dos valores para una variable aleatoria exponencial de valor medio 10.

[68] Sol.: $(-\mathbf{0.3069})$
[69] Sol.: b) $(\mathbf{2}, \quad \mathbf{1/12})$
[70] Sol.: $(\mathbf{23.0585}, \quad \mathbf{6.93147})$