Lección 1: Probabilidad

Ricardo Alberich

8 de enero de 2019

La aleatoriedad

Experimentos aleatorios

- La naturaleza tiene un comportamiento incierto.
- Si repetimos bajo aproximadamente las mismas condiciones un experimento se obtienen resultados similares pero no idénticos.
- La estadística puede analizar estos resultados y ver si las desviaciones de la teoría son razonables o no.

Un experimento aleatorio es un proceso que cumple:

1. Que tiene dos o más resultados posibles.
2. Del que conocemos todos los resultados posibles.
3. Del que no podemos predecir con certeza su resultado.
4. Del que podemos explicar sus resultados a largo plazo, es lo que se denomina principio de regularidad estadística.

Espacio Muestral

- Llamaremos espacio muestral (e.m.) asociado a un experimento aleatorio al conjunto de todos sus posibles resultados.
- Normalmente lo denotaremos por Ω.
- A los elementos de Ω les denominaremos sucesos elementales.

Llamaremos suceso del e.m. Ω a cualquier subconjunto de Ω. El suceso Ω recibe el nombre de suceso seguro o cierto y $\emptyset$ es el suceso vacío o imposible.

Propiedades del los sucesos

Aunque la defición formal es más sofisticada para nuestros propositos es suficiente establecer las siguientes propiedades del álgebra de operaciones con sucesos

1. $\emptyset$ siempre es un suceso
2. dados $A_1, A_2, \ldots$ sucesos entonces $\bigcap_{n=1}^{\infty} A_n$ es un suceso
3. dados $A_1, A_2, \ldots, A_n$ sucesos $\bigcup_{k=1}^{n} A_n$ es un suceso
4. dados $A_1, A_2, \ldots, A_n$ sucesos $\bigcap_{k=1}^{n} A_n$ es un suceso
5. dadosA, B sucesos $A - B$ es un suceso.

Definiciones frecuencialista de probabilidad (Von Mises, 1883-1953)

Sea $N_A(n)$ el número de veces que ha ocurrido el suceso A en n repeticiones del mismo experimento aleatorio. Entonces la frecuencia relativa de A es

$$f_A(n) = \frac{N_A(n)}{n}$$

y definimos

$$P(A) = \lim_{n \to \infty} f_A(n)$$

Definición Clásica de probabilidad (Laplace, 1812)

Sea $\Omega = \{\omega_1, \omega_2, \ldots, \omega_n\}$ un e.m. finito. Supongamos que los sucesos elementales sean equiprobables, es decir

$$P(\{\omega_i\}) = \frac{1}{n} \text{ para todo } i = 1, \ldots, n$$

Entonces definimos la probabilidad del suceso A como:

$$P(A) = \frac{card(A)}{n} = \frac{\text{casos favorables al suceso} A}{\text{casos posibles}}.$$

Defición axiomática de probabilidad (Kolgomorov, 1933)

Diremos medida de probabilidad o simplemente probabilidad sobre un espacio de sucesos S

$$P : S \to [0, 1]$$

tal que:

1. $P(\Omega) = 1$
2. Si $A_1, A_2, \ldots \in \mathcal{F}$ y $A_i \cap A_j = \emptyset$ para $i, j = 1, 2, \ldots$ con $i \neq j$, entonces
$$P(\cup_{i=1}^{\infty} A_i) = \sum_{i=1}^{\infty} P(A_i)$$

A $(\Omega, \mathcal{F}, P)$ se le denomina espacio de probabilidad.

Consecuencias

1. $P(\emptyset) = 0$
2. Si $A_1, \ldots, A_n \in \mathcal{F}$ y $A_i \cap A_j = \emptyset$ para todo $i,j=1,. . . n $ con $i \neq j$, entonces

$$P(\cup_{i=1}^{n} A_i) = \sum_{i=1}^{n} P(A_i)$$

3. $P(\overline{A}) = 1 - P(A)$
4. $P(A - B) = P(A) - P(A \cap B)$
5. $P(A \cup B) = P(A) + P(B) - P(A \cap B)$
6. Si $A \subseteq B$ entonces $P(A) \leq P(B)$
7. $P(\cup_{i=1}^{n} A_i) \leq \sum_{i=1}^{n} P(A_i)$

Probabilidad Condicionada

Definición Si B es un suceso no nulo, es decir $P(B) > 0$, definimos la probabilidad condicional del suceso A al ocurrir el suceso B como

$$P(A/B) = \frac{P(A \cap B)}{P(B)}$$

Propiedades:

1. Bayes: $P(A/B) = \frac{P(A \cap B)}{P(B)} = \frac{P(B/A)P(A)}{P(B)}$
2. Regla del producto: $P(A \cap B) = P(A)P(B/A) = P(B)P(A/B)$
3. Regla del producto generalizada: $P(A_1 \cap A_2 \cap \ldots \cap A_n) = P(A_1)P(A_2/A_1)P(A_3/A_1 \cap A_2) \ldots P(A_n/A_1 \cap \ldots \cap A_{n-1})$

Fórmula de la probabilidad total

Sean $A_1, \ldots, A_n$ sucesos tales que

- $\cup_{i=1}^{n} A_i = \Omega$
- $A_i \cap A_j = \emptyset$ para todo $i, j = 1, \ldots n \quad i \neq j$

Una partición así se denomina *sistema completo de sucesos*.

Entonces si A es otro suceso

$$P(A) = \sum_{i=1}^{n} P(A \cap A_i) = \sum_{i=1}^{n} P(A_i) P(A/A_i)$$

Regla de Bayes

Sean $A_1, \ldots, A_n$ un sistema completo de sucesos, y sea B otro suceso entonces

$$P(A_i/B) = \frac{P(A_i \cap B)}{P(B)} = \frac{P(A_i)P(B/A_i)}{\sum_{k=1}^{n} P(A_k)P(B/A_k)}$$

Propiedad

Si B es un suceso no nulo, podemos definir

$$\begin{array}{rccc} P(\bullet/B): & \mathcal{F} & \rightarrow & [0,1] \\ & A & \mapsto & P(A/B) \end{array}$$

Entonces $P(\bullet/B)$ es una medida de probabilidad y por lo tanto cumple todas las propiedades de las medidas de probabilidad.

Independencia Estadística

- Dos sucesos A y B son estadísticamente independientes si $P(A \cap B) = P(A)P(B)$.
- Diremos que los sucesos $\{A_i\}_{i \in I}$ son estadísticamente independientes si

$$P(\cap_{i \in J} A_i) = \prod_{i \in J} P(A_i) \text{ para todo } J \subseteq I \text{finito}$$

- Diremos que los sucesos $\{A_i\}_{i \in I}$ son estadísticamente independientes dos a dos si

$$P(A_i \cap A_j) = P(A_i)P(A_j) \text{ para todo } i, j \in I, i \neq j$$

Propiedad

Si los sucesos $\{A_i\}_{i \in I}$ son estadísticamente independientes entonces son independientes dos a dos. El recíproco no es cierto en general.

Propiedades

1. A y B son independientes sí y sólo sí $P(A/B) = P(A)$
2. Las siguientes afirmaciones son equivalentes

- 1. A y B son independientes
- 2. $\overline{A}$ y B son independientes.
- 3. $\overline{A}$ y $\overline{B}$ son independientes.

3. si A, B, C, D son independientes entonces $A \cup B$ y $C \cup D$ son independientes. También son independientes $A \cup B$, C y D.