ESTADÍSTICA DESCRIPTIVA UNIVARIANTE

1.- Una cadena de franquicias de restaurantes de 1991 a 1995 tuvo 4, 8, 16, 26 y 82 restaurantes respectivamente. Un modelo estadístico estima que el número de restaurantes entre 1991 y 1997 es 4, 8, 16, 33, 140, 280, y 586. Representar los datos en un diagrama de barras combinado.

Sol: Lo solucionamos con el siguiente script de R. Algunas cosas con más avanzadas de lo que que hemos visto en prácticas. Vosotros lo podéis resolver con una hoja de cálculo.

```
#leyendo el help(barplot) necesitamos la lista de años y una matriz con las
#alturas de las barras
#así ponemos la lista de años
anyos<- c(1991:1997)
#introducimos los datos en dos vectores
franquicias9195<- c(4, 8, 16, 26 , 82)
franquicias9197<- c(4, 8, 16, 33, 140, 280,586)
#juntamos los datos en un vector añadiendo dos NA de los años que faltan
fraquicias2series<- c(c(franquicias9195,NA,NA),c(franquicias9197))
#Redimensionamos el vetor para que sea una matriz
dim(fraquicias2series)<-c(7,2)
#Nota mirar que el efecto dim(fraquicias2series)<-c(2,7) no sería el deseado
fraquicias2series
#Así nos queda la matriz pero queremos "darle" la vuelta la dunfión t()
#calcula la traspuesta de la matriz
fraquicias2series<- t(fraquicias2series)
fraquicias2series
#Leyendo un help(barplot) podemos hacer esta primera aproximación
barplot(fraquicias2series,col=c("grey","red"),beside=TRUE,names.arg=anyos,space=c(0,0.5),
main="Número de franquicias periodo 1991-1995.",
sub="Estimación periodo 1991-1997",
font.main=4,legend.text=c("Observadas","Estimadas"))

#como la leyenda no queda muy bien podemos elimarla del barplot
#y añadirla luego con la instrucción de dibujo de alto nivel legend

barplot(fraquicias2series,col=c("grey","red"),beside=TRUE,names.arg=anyos,space=c(0,0.5),
main="Número de franquicias periodo 1991-1995.",
sub="Estimación periodo 1991-1997",
font.main=4)
legend(0,500,legend=c("Observada","Estimada"),fill=c("grey","red"))
```

2.- Determinar la media (aritmética) la mediana y la moda del siguiente conjunto de datos:

$$\begin{array}{cccccccccc} 3, & 5, & 7, & 8, & 8, & 8, & 10, & 11, & 12, & 12 \\ 13, & 14, & 14, & 15, & 16, & 18, & 19, & 21, & 23, & 25 \end{array}$$

Sol: Lo solucionamos con el siguiente script de R.

```
x<- c(3,5,7,8,8,8,10,11,12,12, 13,14,14,15,16,18,19,21,23,25)
mean(x)
table(x)->frecuencias
#no se encuentra una función moda
#pero la moda es el valor o valores de máxima frecuencia
names(which(frecuencias==max(frecuencias)))
#la mediana es
median(x)
#Y conincide con el método de cáculo manual visto en clase
#com el número de datos es par
length(x)
#ordenamos los datos
xsort<- sort(x)
#como es par la media es
(xsort[length(x)/2]+xsort[length(x)/2+1])/2
```

3.- Estimar la media la mediana y la moda de los siguientes datos continuos agrupados en intervalos:

Intervalo de clase	Frecuencia
de 0 a 9	50
de 10 a 19	150
de 20 a 29	100
de 30 a 40	50

Sol: Aquí la dificutad es determinar los extremos y las marcas de clase de los intervalos. La forma correcta serái la del problema siguiente.

4.- Ídem que en el anterior para la tabla:

Intervalo de clase	Frecuencia
$[-0.5, 9.5)$	50
$[9.5, 19.5)$	150
$[19.5, 29.5)$	100
$[29.5, 40.5)$	50

5.- ¿Son diferentes los resultados de los dos ejercicios anteriores, por qué?

6.- Discutir el significado de las distintas medidas de centralización en cada uno de los casos siguientes:

a) Datos sobre el número de empleados anuales de una compañía fundada en 1920.

b) Datos de localidades preferidas por las grandes empresas para celebrar sus reuniones anuales.

c) Datos sobre el coste medio de una pensión de jubilación.

d) Datos de una muestra de 100 batidoras domésticas de una población de 10000 batidoras.

7.- Una editorial tiene 4000 títulos en catálogo. Podemos clasificar los distintos libros en novelas, biografías y otros tipos de libros de venta más preferente en librerías. De los siguientes datos de número de copias vendidas, estimar las ventas medias por título.

Intervalo de unidades vendidas	Frecuencia
0-999	500
1000-4999	800
5000-24999	700
25000- 49999	1500
50000 o más	500

8.- Con los datos del ejercicio anterior. Si el título de mayores ventas vendió 1000000 de copias en el año en que se recogieron los datos ¿cuál es la desviación estándar estimada para las ventas por título?

9.- A 50 aspirantes a un determinado puesto de trabajo se les sometió a una prueba. Las puntuaciones obtenidas fueron:

4	4	2	10	1	9	5	3	4	5
6	6	7	6	8	7	6	8	7	6
5	4	4	4	5	6	6	7	5	6
6	7	5	6	6	7	5	6	4	3
2	6	6	7	7	8	8	9	8	7

a) Construir la tabla de frecuencias y la representación gráfica correspondiente.

b) Encontrar la puntuación que seleccione al 20% de los mejores candidatos.

10.- En la población de estudiantes de la facultad, se seleccionó una muestra de 20 alumnos y se obtuvieron las siguientes tallas en cm.:

162,168,174,168,166,170,168,166,170,172,
188,182,178,180,176, 168,164, 166,164,172

Se pide:

a) Descripción numérica y representación gráfica.

b) Media aritmética, mediana y moda.

11.- Agrupando los datos del ejercicio anterior en intervalos de amplitud 10 cm., se pide:

a) Descripción numérica y representación gráfica.

b) Media aritmética, mediana y moda.

c) Analizar los cálculos hechos y los errores de agregación comparándolos con el ejercicio anterior.

12.- Las tres factorías de una industria han producido en el último año el siguiente numero de motocicletas por trimestre:

	factoría 1	factoría 2	factoría 3
1º. trimestre	600	650	550
2º. trimestre	750	1200	900
3º. trimestre	850	1250	1050
4º. trimestre	400	800	650

Obtener:

a) Producción media trimestral de cada factoría y de toda la industria.

b) Producción media diaria de cada factoría y de toda la industria teniendo en cuenta que durante el primer trimestre hubieron 68 días laborables, el segundo, 78, el tercero, 54 y el cuarto, 74.

13.- Una empresa ha pagado por un cierto articulo: 225, 250, 300 y 200 pts. de precio. Determinar el precio medio en las siguientes hipótesis:

a) Compraba por valor de 38250, 47500, 49500 y 42000 pts. respectivamente.

b) Compraba cada vez un mismo importe global.

c) Compraba 174, 186, 192 y 214 unidades respectivamente.

14.- Sobre una muestra de 56 tiendas distintas, se obtuvieron los siguientes precios de venta de un determinado articulo:

3260	3510	3410	3180	3300	3540	3320
3450	3840	3760	3340	3260	3720	3430
3320	3460	3600	3700	3670	3610	3910
3610	3610	3620	3150	3520	3430	3330
3370	3620	3750	3220	3400	3520	3360
3300	3340	3410	3600	3320	3670	3420
3320	3290	3550	3750	3710	3530	3500
3290	3410	3100	3860	3560	3440	3620

Se pide:

a) Agrupar la información en seis intervalos de igual amplitud y hacer la representación gráfica correspondiente

b) Media aritmética y desviación típica

c) Desviación media respecto de la media aritmética y la mediana.

15.- La siguiente distribución corresponde al capital pagado por las 420 empresas de la construcción con domicilio fiscal en una región determinada:

Capital (millones de pts.)	Número de empresas
menos de 5	12
de 5 a 13	66
de 13 a 20	212
de 20 a 30	84
de 30 a 50	30
de 50 a 100	14
más de 100	2

a) Haciendo servir como marcas de clase del primer y último intervalo 4 y 165 respectivamente, encontrar la media aritmética y la desviación típica

b) Calcular la moda y la mediana

c) Estudiar gráficamente su simetría

16.- La distribución de los ingresos en España en el inicio y final del segundo plan de desarrollo (1967-70) era:

Ingresos medios(en miles de pts)	% Hogares 1967	% Hogares 1970
hasta a 60	20.02	13.87
de 60 a 120	49.46	39.20
de 120 a 180	17.27	24.31
de 180 a 240	6.48	11.44
de 240 a 500	5.14	8.54
de 500 a 1000	1.46	1.42
de 1000 a 2000	0.88	0.80
de 2000 a 5000	0.21	0.30
más de 5000	0.08	0.12

Utilizando el Q_1 (percentil 25) y Q_3 (percentil 75) como umbrales de pobreza y riqueza entre los que se encuentra la clase media de la población y usarlo en la clasificación siguiente:

Intervalo al que pertenecen	clase
hasta Q_1	baja
de Q_1 a M_e (Media)	media baja
de M_e a Q_3	media alta
más de Q_3	alta

Discutir la veracidad de los siguientes conclusiones relativas al segundo plan de desarrollo:

a) La diferencia entre les clase baja y alta aumentó.

b) El recorrido entre las clases media baja y media alta también aumentó, siendo menor el incremento en el primer caso que en el segundo.

17.- La siguiente tabla muestra la distribución de les cargas máximas que soportan los hilos producidos en una cierta fábrica:

Carga máxima(Tm)	Número de hilos
9.25-9.75	2
9.75-10.25	5
10.25-10.75	12
10.75-11.25	17
11.25-11.75	14
11.75-12.25	6
12.25-12.75	3
12.75-13.25	1

Encontrar la media y la varianza. Dar un intervalo donde estén al menos el 90% de los datos.

18.- Las calificaciones finales de 20 estudiantes de estadística son:

$$59, 60, 62, 68, 68, 71, 73, 73, 75, 75,$$
$$76, 79, 82, 84, 85, 88, 88, 90, 93, 93.$$

Hacer la distribución de frecuencias, y los histogramas de frecuencias relativas y relativas acumuladas en tantos por cien.

19.- La siguiente tabla muestra los precios por persona y noche en hoteles y pensiones del área metropolitana de una ciudad española en pts:

6500	3800	5450	2795	2500	3200	8400	4700	4500	3295
7000	3700	6400	2600	4000	4500	3400	4700	6100	6600
4300	4600	6200	5600	4700	5200	2800	2800	2600	3200
9400	4000	5700	3600	3000	5400	6000	2395	2395	2395
2395	2525	5000	6500	3495	6000	3200	3200	2600	2500
3300	10000								

a) Realizar el diagrama de árbol y hojas (*stem-and-leaf*) de los datos anteriores (con profundidad), en cientos de pesetas (despreciando decimales).

b) Calcular la distribución de frecuencias (agrupando de forma oportuna) de los precios.

c) Dibujar el histograma de frecuencias absolutas y absolutas acumuladas y sus polígonos asociados.

d) Dibujar el histograma de frecuencias relativas y relativas acumuladas y sus polígonos asociados.

e) Dibujar el diagrama de caja asociado a los datos.

f) Dibujar el diagrama de tarta de los precios.

g) Comentar todos los gráficos.

20.- Supongamos que seis vendedores necesitan vender un total de 50 aspiradoras en un mes. El señor A vende 7 durante los primeros 4 días; el señor B vede 10 durante los siguientes 5 días; el señor C vende 12 durante los siguientes 5 días; el señor D vende 10 durante los siguientes 4 días; el señor E vende 6 durante los siguientes 3 días y el señor F vende 5 durante los siguientes 3 días. Encontrar el promedio de aspiradoras vendidas por día.

21.- Consideremos la siguiente variable discreta que nos da el numero de veces que la gente se examina para aprobar el examen de conducir. Los resultados, dada una muestra de 30 aspirantes, son:

$$\begin{array}{l} 4,\ 3,\ 1,\ 1,\ 1,\ 1,\ 2,\ 2,\ 2,\ 3, \\ 2,\ 1,\ 2,\ 2,\ 1,\ 2,\ 1,\ 1,\ 1,\ 2, \\ 2,\ 3,\ 1,\ 3,\ 3,\ 3,\ 2,\ 1,\ 4,\ 1, \end{array}$$

Encontrar $\overline{X}$ y s_X^2.

22.- Los pesos en Kg. de 120 langostas compradas en una pescadería fueron:

0.66	0.47	0.58	0.68	0.56	0.52	0.54	0.59	0.56	0.72	0.63
0.59	0.56	0.56	0.49	0.63	0.53	0.56	0.55	0.50	0.75	0.56
0.59	0.66	0.61	0.56	0.52	0.48	0.56	0.68	0.77	0.59	0.53
0.56	0.65	0.51	0.59	0.49	0.62	0.54	0.56	0.56	0.61	0.50
0.61	0.45	0.65	0.55	0.54	0.61	0.64	0.56	0.71	0.59	0.56
0.59	0.64	0.49	0.56	0.48	0.64	0.56	0.62	0.54	0.53	0.55
0.56	0.63	0.56	0.52	0.66	0.68	0.62	0.56	0.59	0.54	0.50
0.56	0.62	0.49	0.56	0.64	0.60	0.53	0.55	0.64	0.59	0.60
0.52	0.56	0.66	0.54	0.68	0.59	0.56	0.48	0.54	0.56	0.67
0.63	0.46	0.48	0.68	0.61	0.56	0.54	0.49	0.65	0.56	0.61
0.45	0.73	0.60	0.68	0.65	0.56	0.54	0.55	0.60	0.60	

a) Realizar el diagrama de tallo y hojas (*stem-and-leaf*) de los datos anteriores (con profundidad), gramos.

b) Calcular la distribución de frecuencias (agrupando de forma oportuna) de los pesos.

c) Dibujar el histograma de frecuencias absolutas y absolutas acumuladas y sus polígonos asociados.

d) Dibujar el histograma de frecuencias relativas y relativas acumuladas y sus polígonos asociados.

e) Dibujar el diagrama de caja asociado a los datos.

f) Dibujar el diagrama de tarta de los precios.

g) Comentar todos los gráficos.

23.- Los siguientes pesos en Kg. corresponden a langostas compradas en la misma pescadería pero en un mes distinto:

0.76	0.81	0.72	0.80	0.57	0.52	0.67	0.59	0.67	0.85	1.10
0.60	0.82	1.19	0.61	0.77	0.83	1.15	0.56	0.75	0.96	0.57
0.95	0.81	0.97	0.64	0.62	0.86	0.70	0.79	1.00	0.70	1.06
0.79	0.67	0.95	0.81	0.53	0.92	0.73	0.64	0.65	0.71	0.68
0.92	0.56	0.76	1.04	0.61	0.62	0.93	0.81	0.87	0.76	0.77
0.75	0.89	0.53	0.82	0.95	0.88	0.65	0.85	0.76	0.85	0.64
0.84	0.74	0.76	0.90	0.96	0.94	1.10	0.69	0.62	0.58	0.52
0.57	0.88	0.69	0.79	0.66	0.92	0.93	0.74	1.17	0.67	0.61
0.81	0.87	1.15	0.66	0.87	0.87	0.68	0.49	0.89	1.21	0.92
0.72	0.48	1.03	1.05	0.70	0.58	0.70	1.04	0.76	0.65	0.68
0.52	0.79	1.03	0.77	0.99	1.24	0.59	0.91	0.66	0.71	

Realizar un estudio comparativo de los dos grupos de langostas mediante gráficas.

ESTADÍSTICA DESCRIPTIVA BIVARIANTE

24.- Las puntuaciones obtenidas por 26 concursantes a un puesto de trabajo en las pruebas de procesador de textos (PT) y hoja de cálculo (C) han sido, en este orden:

$$(1,2)\ (1,3)\ (2,1)\ (2,3)\ (2,2)\ (2,1)\ (1,2)\ (2,1)\ (1,3)\ (3,2)\ (2,2)\ (2,3)\ (1,3)$$
$$(3,1)\ (3,2)\ (1,1)\ (3,2)\ (2,1)\ (3,3)\ (1,1)\ (2,1)\ (1,3)\ (1,2)\ (2,2)\ (2,1)\ (1,3)$$

Calcular la tabla de contingencia $n_{i,j}$.

25.- Un servicio regular de transportes a larga distancia dispone del siguiente modelo relativo a las variables:

X = retraso en horas sobre la hora de llegada prevista,
Y = velocidad modal en el recorrido.

$X\backslash Y$	$40-50$	$50-60$	$60-80$
$0-1$	0	0	$0,32$
$1-2$	0	$0,13$	$0,08$
$2-3$	$0,16$	$0,10$	0
$3-4$	$0,15$	$0,06$	0

Estudiar la independencia entre X e Y calcular el coeficiente de contingencias de Pearson C_P.

26.- En un proceso de manufacturación de un artículo de vestir se han controlado dos características: tiempo empleado y perfeccionamiento en el acabado, teniendo la siguiente distribución de frecuencias conjunta sobre una muestra de 120 unidades:

Errors encontrados\minutos empleados	3	4	5	6
0	2	5	10	12
1	6	10	28	8
2	15	12	6	6

Se pide:

a) Distribuciones marginales.

b) Media aritmética, moda y desviación típica de las distribuciones marginales.

27.- Las 130 agencias de una entidad bancaria presentaban, en el ejercicio 1984, las observaciones siguientes:

X = tipo de cuenta (corriente, a plazo fijo,...)/total de cuentas,
Y = saldo medio de las cuentas a 31-XII (en cientos de euros.).

$Y\backslash X$	menos de 0,1	de 0,1 a 0,3	más de 0,3
menos de 20	48	0	0
de 20 a 50	21	11	0
de 50 a 100	14	8	2
de 100 a 250	7	5	1
más de 250	6	6	1

Se pide:

a) Distribuciones marginales.

b) Mediana de Y y tercer cuartil de X.

c) Distribución de las agencies según Y,cuando el ratio X esta entre $0,1$ y $0,3$.

28.- De una muestra de 24 puestos de venta en un mercado de provisiones se recogió información sobre X : número de balanzas e Y : número de dependientes.

$X\backslash Y$	1	2	3	4
1	1	2	0	0
2	1	2	3	1
3	0	1	2	6
4	0	0	2	3

Calcular la covarianza entre estas dos características.

29.- La siguiente distribución corresponde a los controls a los que han sido sometidas 42 piezas por dos secciones del equipo de control de calidad:

Controles sección 2\Controles sección 1	0	1	2	3
0	0	3	6	6
1	2	4	3	4
2	6	2	0	0
3	3	2	1	0

Se pide:

a) Distribución de los controles efectuados por la sección 2, media, moda y mediana.

b) Coeficiente de correlación lineal entre estas variables.

30.- Las seis cooperativas agrarias de una comarca presentaban las siguientes cifras correspondientes a las variables:

X = stock medio diario en naves de almacenamiento (miles de euros.)
Y = cifra comercializada diariamente (en miles de euros.)
Z = empleados fijos en plantilla.
V = empleados eventuales.

Cooperativa	X	Y	Z	V
A	26	146	6	8
B	33	167	8	6
C	12	92	6	8
D	18	125	8	6
E	18	118	10	4
F	25	132	10	4

Calcular el coeficiente de correlación lineal entre las variables (X, Y), (Y, Z) y (Z, V).

31.- Se pidió a dos usuarios de detergentes que clasificaran 6 detergentes de acuerdo con sus preferencias. Los resultados fueron:

Detergente	Usu. A	Usu. B
A	2	3
B	4	2
C	5	4
D	1	1
E	6	6
F	3	5

Calcular el coeficiente de correlación de Spearman, e interpretar el resultado.

32.- Los siguientes datos corresponden a las calificaciones otorgadas a 18 empleados después de unos cursillos de especialización realizados por una agencia de ventas:

empleado	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14	15	16	17	18
persuasión	0	0	1	2	1	2	0	1	2	1	1	1	2	1	0	1	1	0
retentiva	1	0	1	0	1	0	2	1	0	1	2	1	1	2	0	1	1	2
prudencia	1	1	1	2	2	1	0	1	2	0	1	1	0	0	0	1	1	2

Se pide:

a) Distribución de las puntuaciones de retentiva y prudencia.

b) Distribución de las puntuaciones en persuasión y prudencia para aquellos que no han obtenido un cero en retentiva.

c) Distribución de las puntuaciones en persuasión de aquellos que han sacado un 1 en las pruebas de retentiva y prudencia.

33.- Una cartera de valores puede estar compuesta por dos tipos d e acciones con una rentabilidad dada por la siguiente distribución conjunta, según una escala subjetiva que les concedemos "a priori":

Rentabilidad X_2\Rentabilidad X_1	De 5 a 10	De 10 a 15
De 0 a 5	$0,06$	$0,02$
De 5 a 10	$0,14$	$0,38$
De 10 a 15	$0,30$	$0,10$

Se pide:

a) ¿Cuál de las dos acciones presenta mayor rentabilidad media esperada?

b) ¿Cuál de las dos acciones presenta menos varianza en su rentabilidad?

c) Calcular la covarianza entre las rentabilidades.

PROBABILIDAD

34.- En una carrera en la que participan diez caballos ¿de cuántas maneras diferentes se pueden dar los cuatro primeros lugares?

35.- Una empresa de reciente creación encarga a un diseñador gráfico la elaboración del su logotipo, indicando que ha de seleccionar exactamente tres colores de una lista de seis. ¿Cuántos grupos tienen para elegir el diseñador?

36.- ¿Cuántas palabras diferentes, de cuatro letras, se pueden formar con la palabra **byte**?

37.- ¿De cuantas maneras diferentes se pueden elegir el director y el subdirector de un departamento formado por 50 miembros?

38.- Con once empleados ¿cuántos comités de empresa de cinco personas se pueden formar?

39.- ¿Cuántas maneras distintas hay de colocar quince libros diferentes en una estantería si queremos que el de Probabilidades esté el primero y el de Estadística en el tercero?

40.- ¿Cuántos caracteres diferentes podemos formar utilizando a lo sumo a tres símbolos de los utilizados en el alfabeto Morse?

41.- Un supermercado organiza una rifa con un premio de una botella de cava para todas las papeletas que tengan las dos últimas cifras iguales a las correspondientes dos últimas cifras del número premiado en el sorteo de Navidad. Supongamos que todos los décimos tienen cuatro cifras y que existe un único décimo de cada numeración ¿Cuántas botellas repartirá el supermercado?

42.- ¿Cuántas palabras diferentes podemos formar con todas las letras de la palabra estadística?

43.- En una tienda de regalos hay relojes de arena con cubetas de colores, y no hay diferencia alguna entre las dos cubetas que forman cada reloj. Si hay cuatro colores posibles y el color de los dos recipientes puede coincidir ¿cuántos modelos de reloj de arena puede ofrecer el establecimiento?

44.- En una partida de parchís gana aquel jugador que consigue alcanzar antes con sus cuatro fichas la llegada. Si hay cuatro jugadores y la partida continua hasta que todos han

---

[34] Sol.: **5040**
[35] Sol.: **20**
[36] Sol.: **24**
[37] Sol.: **2450**
[38] Sol.: **462**
[39] Sol.: **6227020800**
[40] Sol.: **14**
[41] Sol.: **100**
[42] Sol.: **2494800**
[43] Sol.: **10**

completado el recorrido¿cuántos órdenes de llegadas hay para la dieciséis fichas?

45.- Se han de repartir cinco becas entre diez españoles y seis extranjeros, de manera que se den tres a españoles y dos a extranjeros ¿De cuántas maneras se puede hacer el reparto?

46.- ¿Cuantas fichas tiene un dominó?

47.- Calcular la probabilidad de que al lanzar a la vez 5 dados se obtenga:

a) repóker (5 resultados iguales);

b) póker (4 resultados iguales);

c) full (3 resultados iguales y los otros distintos pero iguales entre si);

d) trio (3 resultados iguales y los otros dos diferentes);

e) doble pareja (2 resultados iguales, otros 2 iguales y diferentes de los anteriores y el restante diferente);

f) pareja (exactamente 2 resultados iguales);

g) nada (5 resultados distintos).

48.- Tenemos 12 radios de las que 5 son defectuosas. Elegimos 3 radios al azar. ¿Cuál es la probabilidad de que sólo una de las 3 sea defectuosa?

49.- Lanzamos al aire 6 dados.

a) ¿Cuál es la probabilidad de que todos ellos den resultados distintos?

b) ¿Cuál es la probabilidad de obtener 3 parejas?

50.- Supongamos que en una empresa de fabricación de componentes electrónicos se sabe que en un lote de 550 almacenados el 2% son defectuosos ¿Cuál es la probabilidad de encontrar 2 de defectuosos si cogemos de forma equiprobable 25?

51.- Si mezclamos suficientemente una baraja de 52 cartas ¿cuál es la probabilidad de que los 4 ases queden colocados consecutivamente?

---

[44]Sol.: **63063000**
[45]Sol.: **1800**
[46]Sol.: **28**
[47]Sol.: a) $\mathbf{6/6^5}$; b) $\mathbf{150/6^5}$;c) $\mathbf{300/6^5}$; d) $\mathbf{1200/6^5}$; e) $\mathbf{1800/6^5}$; f) $\mathbf{3600/6^5}$; g) $\mathbf{720/6^5}$
[48]Sol.: **21/44**
[49]Sol.: a)$\mathbf{120/6^5}$; b) $\mathbf{300/6^5}$
[50]Sol.: **0.074**
[51]Sol.: **24/132600**

52.- Una forma de incrementar la fiabilidad de un sistema es la introducción de una copia de los componentes en una configuración paralela. Supongamos que la N:A.S.A. quiere un vuelo con una probabilidad no inferior a 0.99999 de que el transbordador espacial entre en órbita alrededor de la Tierra con éxito. ¿Cuántos motores se han de montar en paralelo para que se alcance esta fiabilidad, si se sabe que la probabilidad de que cada uno de los motores funcione adecuadamente es 0.95? Suponer que los motores funcionan de manera independiente entre si.

53.- ¿Cuál es la probabilidad de que entre n personas, que no han nacido el 29 de febrero, haya como a mínimo dos que hayan nacido el mismo día del año? (no necesariamente del mismo año). Calcular la probabilidad para los siguientes valores de $n : 10, 15, 22, 23, 30, 40, 50, 55$.

54.- Cuatro cartas numeradas de 1 a 4 están colocadas boca abajo sobre una mesa. Una persona, supuestamente clarividente, irá adivinando los valores de las 4 cartas una a una. Si suponemos que es un farsante y que lo que hace es decir los cuatro números al azar ¿cuál es la probabilidad de que acierte como mínimo una ? (Obviamente, no repite ningún número)

55.- En una lotería hay 500 billetes y 5 premios. Si una persona compra 10 billetes ¿cuál es la probabilidad de obtener?:

a) el primer premio?

b) como mínimo un premio?

c) exactamente un premio?

56.- Se elige de forma equiprobable un número del 1 al 6000. Calcular la probabilidad de que sea múltiplo de 2 o de 3 o de 4 o de 5.

57.- Si elegimos un número de entre los 120 primeros enteros positivos ¿cuál es la probabilidad de que sea múltiplo de 3, no sea divisible por 5, y sea divisible por 4 o por 6?

58.- Una cuarta parte de la población ha sido vacunada contra una enfermedad contagiosa. Durante una epidemia, se observa que de uno de entre cada cuatro enfermos ha sido vacunado.

a) ¿Ha tenido alguna eficacia la vacuna?

b) Por otra parte, se sabe que hay un enfermo entre cada 12 personas vacunadas ¿Cuál es la probabilidad de que esté enferma una persona que no se ha vacunado?

[52]Sol.: **4**
[53]Sol.: **0**.12; 0.25; 0.48; 0.51; 0.71; 0.89; 0.97; 0.99
[54]Sol.: **15/24**
[55]Sol.: **0.02; 0.096; 0.093**
[56]Sol.: **0.73**
[57]Sol.: **2/15**
[58]Sol.: a) **Sí**; b) **1/9**

59.- La probabilidad de que un estudiante acabe una carrera determinada es 0.4. Dado un grupo de 5 estudiantes de esta carrera, calcular la probabilidad de que:[59]

a) ninguno acabe la carrera,

b) sólo uno acabe la carrera,

c) al menos dos acaben la carrera;

d) todos la acaben.

60.- Un mensaje se ha codificado con un alfabeto de dos símbolos A y B para poder transmitirse a través de un canal de comunicación. La codificación es tal que A aparece el doble de veces que B en el mensaje codificado. El ruido del canal es tal que cuando A se transmite, se recibe A con una probabilidad de 0.8 y B con una probabilidad de 0.2; cuando se transmite B se recibe B con una probabilidad de 0.7 y se recibe A con probabilidad 0.3.[60]

a) ¿Cuál es la frecuencia relativa de A en el mensaje recibido?

b) Si última letra del mensaje recibido es una A ¿cuál es la probabilidad de que se haya enviado una A?

61.- En una ciudad se publican 3 diarios A, B y C. El 30% de la población lee A, el 20% lee B y el 15% lee C; el 12% lee A y B, el 9% lee A y C, y el 6% lee B y C; finalmente, el 3% lee A, B y C. Calcular:[61]

a) El porcentaje de gente que lee al menos uno de los tres diarios.

b) El porcentaje de gente que sólo lee A.

c) El porcentaje de gente que lee B o C, pero no A.

d) El porcentaje de gente que lee A o no lee ni B ni C.

62.- Supongamos que en un dado la probabilidad de cada una de sus seis caras es proporcional al número inscrito en ella. Calcular la probabilidad de obtener un número par.[62]

63.- En una reunión, n personas ($n \geq 3$) lazan una moneda al aire. Si una de ellas da diferente de todas las otras, su propietario paga una ronda ¿Cuál es la probabilidad de que pase esto?[63]

[59] Sol.: **a) 0.07776; b) 0.2592; c) 0.66304; d) 0.01024**
[60] Sol.: **a) 0.633; b) 0.84**
[61] Sol.: **a) 0.41 ; b) 0.12; c) 0.11; d) 0.89**
[62] Sol.: **4/7**
[63] Sol.: $(\mathbf{n} \cdot (\tfrac{\mathbf{1}}{\mathbf{2}})^{\mathbf{n-1}})$

64.- Un matrimonio planifica su descendencia considerando los siguientes esquemas (se supone que tener una varón o una hembra es equiprobable):

Esq. A) Tener 3 varones.

Esq. B) Tener varones hasta que nazca la primera hembra, o ya tengan tres niños (lo que pase primero).

Esq. C) Tener niños hasta que tengan una pareja de ambos sexos, o ya tengan tres niños (lo que pase primero).

Sea B_i el suceso han nacido i niños ($i = 1, 2, 3$) y C el suceso tener más varones que hembras.

1) Calcular $p(B_1)$ y $p(C)$ en cada uno de los tres esquemas.

2) Calcular $p(B_2)$ y $p(B_3)$ en cada uno de los tres esquemas.

3) Sea E el suceso que la familia completa tenga igual número de varones que de hembras. Encontrar $p(E)$ en cada uno de los tres esquemas.

65.- Un comerciante ha de viajar en avión de Bangkok a Bagdad. Preocupado, pide a la compañía aérea cuál es la probabilidad de que haya como mínimo una bomba en el avión y le dicen que es de 0.1. Más preocupado aún pide cuál es la probabilidad de que haya como mínimo dos bombas y le dicen que es 0.01. Más tranquilo, decide llevar una bomba en su equipaje. Haciendo las suposiciones adicionales oportunas ¿qué valoración estadística podemos hacer de su decisión?

66.- Dos sistemas con cuatro componentes independientes con fiabilidades respectivas p_1, p_2, p_3 y p_4 se configuran de las dos maneras siguientes: En el sistema A, la combinación en serie de los components 1 y 2 se configura en paralelo con la combinación en serie de los componentes 3 y 4; en el sistema B, la combinación en paralelo de 1 y 3 se configura en serie con la combinación en paralelo de 2 y 4. Determinar el sistema más fiable.

67.- Si un sistema que consiste en tres components independientes con la misma fiabilidad ($p_1 = p_2 = p_3$) tiene una fiabilidad de 0.8, determinar p_1 en los siguientes casos:

a) el componente 3 está configurado en serie con la combinación en paralelo 1 y 2.

b) el componente 3 está configurado en paralelo con la combinación en serie de 1 y 2.

---

[64]Sol.: a) $(\mathbf{p(B_1) = 3/8, 1/4, 5/8; p(C) = 1/2, 1/2, 1/4})$; b) $(\mathbf{p(B_2) = 3/8, 1/8, 1/8; p(B_3) = 1/8, 1/8, 1/8})$; c) $(\mathbf{0, 1/4, 1/2})$.

[65]Sol.: **Decisión absurda por sentido común y estadísticamente.**

[66]Sol.: **B**

[67]Sol.: **a) 0.825; b) 0.652**

VARIABLES ALEATORIAS

68.- En los ocho problemas siguientes determinar la función de probabilidad y la de distribución de las variables aleatorias que aparezcan

a) Consideremos el experimento consistente en lanzar simultáneamente dos dados; repetimos el experimento dos veces. Sea X la variable aleatoria que da el número de lanzamientos en que los dos dados han mostrado un número par. Sea Y la variable aleatoria que nos da el número de lanzamientos en que la suma de los dos dados es par.

b) Supongamos que tenemos almacenadas 10 piezas, de las que sabemos que hay 8 del tipo I y 2 del tipo II; se toman dos al azar de forma equiprobable. Sea X la variable aleatoria que da el número de piezas de tipo I que hemos cogido.

c) Supongamos que un estudiante realiza el tipo de examen siguiente: El profesor le va formulando preguntas hasta que el estudiante falla una (no os preguntéis como se evalúa ni yo lo sé). La probabilidad de que el estudiante acierte una pregunta cualquiera es 0.9 (examen fácil). Sea X la variable aleatoria que nos da el número de preguntas formuladas por el profesor ¿Cuál es el número más probable de preguntas formuladas?

d) Consideremos dos cañones que van disparando alternativamente hacia el mismo objetivo. El primer cañón tiene una probabilidad de acertar el objetivo de 0.3 mientas que en el segundo es de 0.7. El primer cañón comienza la serie de lanzamientos y no se detienen hasta que uno de los cañones desintegre el blanco (es suficiente darle una vez). Sea X la variable aleatoria que nos da el número de proyectiles lanzados por el primer cañón e Y la que nos da los proyectiles lanzados por el segundo cañón.

e) En la misma situación que en el ítem anterior, considerar la variable aleatoria X que da el número de proyectiles lanzados por el primer cañón condicionado a que gana y sea Y la variable aleatoria que cuenta el número de proyectiles lanzados por segundo cañón cuando gana.

f) Supongamos que se hace una tirada de 100000 ejemplares de un determinado libro . La probabilidad de que una encuadernación sea incorrecta es 0.0001 ¿Cuál es la probabilidad de que haya 5 libros de la tirada mal encuadernados?

g) Dos compañeros de estudios se encuentran en un conocido bar de copas de Palma y deciden jugar a dardos de una manera especial: Lanzarán consecutivamente un dardo cada hasta que uno de los dos acierte el triple 10 (centro de la diana). El que lanza en primer lugar tiene una probabilidad de 0.7de acertar y el que lo hace en segundo lugar 0.8. Sea X la variable aleatoria que da el número total de lanzamientos de dardos hechos por los dos compañeros.

h) Un examen tipo test consta de 5 preguntas, cada una con tres opciones de respuesta, sólo hay una opción correcta. Un estudiante contesta al azar a las 5 cuestiones. Sea X la variable aleatoria que da el número de puntos obtenidos por el alumno.

   i) Si les respuestas erróneas no restan puntos.

   ii) Si cada respuesta errónea resta 1 punto.

69.- Un coche tiene que pasar por cuatro semáforos. En cada uno de ellos el coche tiene la misma probabilidad de seguir su marcha que de detenerse. Hallar la función de distribución del número de semáforos que pasa el coche sin detenerse.

70.- Un individuo quiere invertir un capital de medio millón de euros en un negocio que tiene una rentabilidad del 50%, pero con el riesgo de perder toda la inversión. Su asesor financiero le informa que este negocio tiene una probabilidad de ser rentable del 0.8 ¿Cuál es el beneficio esperado? (**100000**)

71.- Un juego se dice justo si la ganancia esperada de cada jugador es 0. Dos jugadores A y B tiran un dado por turnos, y gana el primero que obtiene un 5. Cada jugador apuesta una cantidad c_j $(j = 1, 2)$, y el total se lo queda el ganador. Si suponemos que comienza a jugar A ¿qué relación tienen que verificar c_1 y c_2 para que el juego sea justo?

72.- Supongamos que jugamos a la ruleta en un casino. Sea $p < 1/2$ la probabilidad de que salga un número rojo. Supongamos que apostamos a la par (lo que quiere decir, que si apostamos k dólares, cuando sale rojo nos dan k dólares más los que hemos entregado al apostar y perdemos los k dólares que hemos apostado si no sale rojo). La primera apuesta es de 1 dólar. Si ganamos, nos retiramos. Si perdemos, hacemos una segunda apuesta de 2 dólares. Si ganamos, nos retiramos. Si perdemos, apostamos 2^2 dólares, y así sucesivamente. La n-ésima apuesta será de 2^{n-1} dólares.

a) Probar que con este sistema es seguro que ganamos 1 dólar.

b) Calcular el importe esperado de la apuesta ganadora. (∞)

Supongamos ahora que la casa tiene un límite de 2^L dólares (el máximo que está permitido apostar), de manera que, si no hemos ganado antes, esa será nuestra apuesta final.

a) ¿Cuál es la ganancia esperado cuando paramos de jugar? $(\mathbf{1 - (2(1 - p))^{L+1}})$

b) ¿Qué es mejor un límite alto o bajo? **(bajo)**

73.- Se venden 5000 billetes de lotería a 100 pts. cada uno, para un sorteo con un premio de 300000 pts. ¿Cuál es la ganancia (pérdida) esperada de una persona que compra tres billetes? ($-$**120** pts)

74.- Un sistema de transmisión emite los dígitos -1, 0, 1. Cuando se transmite el símbolo i, se recibe el símbolo j con las probabilidades siguientes: $P(r_1/t_1) = 1,\ P(r_{-1}/t_{-1}) = 1,\ P(r_1/t_0) = 0.1,\ P(r_{-1}/t_0) = 0.1,\ P(r_0/t_0) = 0.8$. Se dice que en este caso se ha producido una distorsión $(i - j)^2$. ¿Cuál es el valor medio de la distorsión? (**1/15**)

75.- Una fuente binaria emite de manera equiprobable e independiente un bloque de 3 dígitos (0 ó 1) cada segundo. De cada bloque se envía a una canal de transmisión un 0 si en el bloque hay más ceros que unos y un 1 en caso contrario. El canal transmite el dígito con una probabilidad de error p. El receptor reconstruye la terna de dígitos repitiendo tres veces el dígito que ha recibido ¿Cuál es el número medio de bits erróneos por bloque? $(\mathbf{\frac{3}{4} + \frac{3 \cdot p}{2}})$

¿Cuál tendría que ser la probabilidad p para que este valor medio no fuera más grande que 1? ($\mathbf{p \leq 1/6}$)

76.- Dos personas juegan a cara o cruz, y han decidido continuar la partida hasta que se obtengan como mínimo 3 caras y 3 cruces. Hallar la probabilidad de que el juego no se acabe en 10 tiradas y el número esperado de tiradas.[76]

77.- (Opcional) Es un buen ejercicio calcular la esperanza y la varianza de todas las variables que aparecen en el problema 68.

Variables aleatorias continuas

78.- Sea X una variable aleatoria continua con función de densidad $f(x)$ dada por:

$$f(x) = \begin{cases} k \cdot (1 + x^2) & \text{si } x \in (0,3) \\ 0 & \text{si } x \notin (0,3) \end{cases}$$

a) Calcular la constante k y la función de distribución de X.

b) Calcular la probabilidad de que X esté comprendida entre 1 y 2

c) Calcular la probabilidad de que X sea menor que 1.

d) Sabiendo que X es mayor que 1, calcular la probabilidad de que sea menor que 2.[78]

79.- La función de densidad de una variable aleatoria continua es:

$$f(x) = \begin{cases} a \cdot x^2 + b & \text{si } x \in (0,3) \\ 0 & \text{si } x \notin (0,3) \end{cases}$$

.

Determinar a y b , sabiendo que $P(1 < X \leq 2) = 2/3$.[79]

80.- La duración en minutos de unas ciertas comunicaciones telefónicas es una variable aleatoria con función de distribución:

$$F(x) = \begin{cases} 0 & \text{si } x \leq 0 \\ 1 - \frac{1}{2}e^{-x/3} - \frac{1}{2}e^{-R[x/3]} & \text{si } x > 0 \end{cases}$$

donde $R[x]$ es la parte entera de x. Calcular la probabilidad de la comunicación dure:

a) Más de 6 minutos.

b) Menos de 4 minutos.

c) Exactamente 3 minutos.

[76]Sol.: $\mathbf{\frac{7}{64} = 0.109375}$; $\mathbf{E(X) = \frac{63}{8}}$.
[78]Sol.: a)$\mathbf{k = 1/12}$; b) $\mathbf{5/18}$; c)$\mathbf{1/9}$; e) $\mathbf{5/16}$
[79]Sol.: $\mathbf{a = -1/2, b = 11/6}$

d) Menos de 9 minutos, sabiendo que ha durado más de 5.

e) Más de 5 minutos, sabiendo que ha durado menos de 9.

81.- Sea X una variable aleatoria continua con densidad:

$$f(x) = \begin{cases} 1-|x| & \text{si } |x| \leq 1 \\ 0 & \text{en caso contrario} \end{cases}$$

a) Encontrar la función de distribución de X.

b) Calcular $P(X \geq 0)$ y $P(|X| < 1/2)$.

82.- Se llama **distribución triangular** a cualquier distribución continua tal que su densidad es cero salvo en un cierto intervalo (a, b), en el que su gráfica tiene forma de triángulo isósceles. Hallar la función de densidad y de distribución de una distribución triangular.

83.- Sea X una variable aleatoria continua con densidad (Laplaciana)

$$f(x) = \frac{1}{2}e^{-|x|} \text{ si } x \in \mathbb{R}$$

a) Calcular $P(|X| > 2)$.

b) Calcular $E(X)$ y $Var(X)$.

84.- Consideremos $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ dada por

$$f(x) = \begin{cases} 0 & \text{si } x \leq 0 \\ a(1+x) & \text{si } 0 < x \leq 1 \\ 2/3 & \text{si } 1 < x \leq 2 \\ 0 & \text{si } x > 2 \end{cases}$$

a) Determinar el valor de a para que f sea una densidad.

b) En este caso, si X es una variable aleatoria continua con densidad f, calcular $P(1/2 < X \leq 3/2)$.

c) Calcular, para el valor de a encontrado $E(X)$ y $Var(X)$.

[80]Sol.: a)$\mathbf{e^{-2}}$; b)$\mathbf{1 - \frac{1}{2}e^{-4/3} - \frac{1}{2}e^{-1}}$; c) $\mathbf{\frac{1}{2}(1 - e^{-1})}$
[81]Sol.: b) $\mathbf{1/2, 3/4}$
[83]Sol.: $\mathbf{e^{-2}}$
[83]Sol.: $E(X) = 0$, $Var(X) = 2$.
[84]Sol.: a)$\mathbf{a = 2/9}$; b) $\mathbf{19/36}$; c) $E(X) = \frac{32}{27}$, $Var(X) = \frac{409}{1458}$.

Transformación de variables aleatorias

85.- Sea X la variable que nos da la puntuación obtenida al lanzar un dado. Calcular la distribución de las variables $Y = X^2$, $Z = X^2 - 6x + 6$. Calcular las esperanzas y las varianzas de las variables Y y Z.

86.- Conocida la función de distribución de una variable aleatoria continua X, hallar la función de densidad de $Y = X^2$ y de $Z = e^X$.

87.- La función de distribución de una variable aleatoria X es:

$$F_X(x) = \begin{cases} 0 & \text{si } x \leq 0 \\ 1 - e^{-x^2} & \text{si } x > 0 \end{cases}$$

Encontrar la función de densidad de la variable aleatoria $Y = \ln(X + 1)$.

88.- La función de densidad de una variable aleatoria X es:

$$f_X(x) = \begin{cases} x + 1 & \text{si } x \in (-1, 0] \\ -x + 1 & \text{si } x \in (0, 1] \\ 0 & \text{si } x \in (-\infty, -1] \cup (1, \infty) \end{cases}$$

Definimos la variable aleatoria $Y = g(X)$, donde g es la función

$$g(x) = \begin{cases} 1 & \text{si } x \in (1/2, \infty) \\ 0 & \text{si } x \in (-1/2, 1/2] \\ -1 & \text{si } x \in (-\infty, -1/2] \end{cases}$$

Determinar la función de masa de probabilidad y la de distribución de Y. Calcular las esperanzas y varianzas de X e Y.

89.- El precio por estacionar un vehículo en un aparcamiento es de 75 pts. por la primera hora o fracción, y de 60 pts. a partir de la segunda hora o fracción. Supongamos que el tiempo, en horas, que un vehículo cualquiera permanece en el aparcamiento se modeliza según la siguiente función de densidad

$$f_X(x) = \begin{cases} e^{-x} & \text{si } x \geq 0 \\ 0 & \text{si } x < 0 \end{cases}.$$

Calcular el ingreso medio por vehículo. (**109.919**)

90.- Calcular $E(X)$ y $Var(X)$ para una v.a. X que tiene por funció de densidad f_X dada por:

$$f_X(x) = \begin{cases} \frac{1}{2\sqrt{x}} & \text{si } x \in (0, 1) \\ 0 & \text{si } x \notin (0, 1) \end{cases}$$

(**1/3**, **4/45**)

91.- Consideremos una variable aleatoria X con función de densidad:

$$f_X(x) = \begin{cases} 1/2 & \text{si } 0 < x < 2 \\ 0 & \text{en caso contrario} \end{cases}$$

determinar $E(Y)$, donde $Y = \ln(X)$. ($\mathbf{-0.3069}$)

92.- Sea X una variable aleatoria con función de densidad:

$$f_X(x) = \begin{cases} 2x & \text{si } x \in (0,1) \\ 0 & \text{si } x \notin (0,1) \end{cases}$$

a) Determinar $E(\sqrt{X})$ a partir de $f_{\sqrt{X}}$. ($\mathbf{4/5}$)

b) Hacer lo mismo a partir de f_X.

Desigualdad Chebychef

93.- Sea X una variable aleatoria que toma los valores $-k, 0, k$ con probabilidades $\frac{1}{8}, \frac{3}{4}$ y $\frac{1}{8}$ respectivamente.

a) Calcular $P(|X - \mu| \geq 2\sigma)$ ($\mu = E(X), \sigma^2 = Var(X)$). ($\mathbf{1/4}$)

b) Obtener una cota superior de la probabilidad anterior utilizando la desigualdad de Chebychef. ($\mathbf{1/4}$)

94.- Sea X una variable aleatoria con función de densidad

$$f(x) = \begin{cases} 1 - |x| & \text{si } |x| < 1 \\ 0 & \text{si } |x| \geq 1 \end{cases}$$

a) Calcular $P(|X| \geq k)$, donde $0 < k < 1$. ($\mathbf{(1-k)^2}$)

b) Obtener una cota superior de la probabilidad anterior utilizando la desigualdad de Chebychef. ($\mathbf{\frac{1}{6k^2}}$)

c) Comparar los dos resultados anteriores para $k = 0.1, 0.2, \ldots, 0.9$

95.- El número de periódicos vendidos en un kiosko es una variable aleatoria de media 200 y desviación típica 10. ¿Cuántos ejemplares diarios tiene que encargar el dueño del kiosko para tener una seguridad de que el menos el 99% de los días no se quedará sin existencias? (**300**)

96.- El número de días al año que un trabajador de un pequeño comercio está de baja por enfermedad es una variable aleatoria de media 10 y desviación típica 2. Si cada uno de estos días la empresa pierde 10000 pts., determinar los límites inferior y superior de las pérdidas anuales por trabajador con un grado de fiabilidad no inferior a 95%. (**10.560**) y (**189.440**) pts.

97.- El ayuntamiento de una ciudad ha decido establecer una zona de aparcamiento limitado, en la que aparcan 500 vehículos diarios por termino medio. Si al menos el 99% de los días el número de coches que utilizan esta servicio está entre 175 y 525, estimar la desviación típica de la variable aleatoria que da el número de vehículos diarios que ocupan plazas de estacionamiento limitado. (**2.5**)

98.- Probar que $E((X-C)^2)$ toma el valor mínimo respecto de un valor real C para $C =$ E(X). ¿Cuál es el valor del mínimo?

99.- El número medio de personas que van a un local es 1000, con una desviación típica de 20 ¿Cuál es el número de sillas necesarias para que sea seguro, con una probabilidad no inferior a 0.75 , que todos los asistentes podrán sentarse?

[99]Sol.: (**1040**)

DISTRIBUCIONES NOTABLES

100.- Usar la desigualdad de Chebychef para estimar el número de veces que se tiene que lanzar al aire una moneda bien balanceada si queremos tener un probabilidad de al menos 0.9 de que la frecuencia relativa de caras esté comprendida entre 0.45 y 0.55 (**1000**)

101.- Sea X el número de éxitos en n repeticiones independientes de un experimento con probabilidad de éxito p.

a) Si k es el valor más probable de X, probar que

$$(n+1)p - 1 \leq k \leq (n+1)p$$

b) Si lanzamos 10 veces un dado bien balanceado, ¿cuál es el número de veces más probable en el que obtendremos un 2.

102.- Una cadena de producción da salida a 10000 unidades diarias, el número medio de unidades incorrectas es 200. Una vez al día, se inspecciona un lote de 100 unidades. Determinar la probabilidad de que el lote contenga más de 3 unidades incorrectas

a) Utilizando la distribución binomial.

b) Utilizando la aproximación de Poisson.

103.- En una planta de fabricación de circuitos integrados, la proporción de circuitos defectuosos es p. Supongamos que la incidencia de circuitos defectuosos es completamente aleatoria.

a) Determinar la distribución del número X de circuitos aceptables producidos antes del primer circuito defectuoso.

b) ¿Cuál es la longitud media de una cadena de producción exitosa? si $p = 0.05$.

104.- Un servidor de mensajería esta en funcionamiento. Los clientes acceden a él de forma independiente. La probabilidad de que el servidor caiga cuando accede el cliente es p. Calcular la distribución de probabilidad del número de clientes a los que se dará servicio antes de que el servidor caiga.

a) Calcular el valor esperado y la varianza de esta variable.

b) ¿Cuál es la probabilidad de que se de servicio a más de 1000 clientes sin que se caiga el servidor?

[101] Sol.: b) (**1**)
[102] Sol.: a) (**0.1410**) ; b) (**0.1429**)
[103] Sol.: b) (**19**)

105.- Un sistema informático dispone de un sistema de seguridad compuesto por tres claves de 3 dígitos (del 0 al 9) cada una. Para entrar en el sistema hay que averiguar la primera clave, luego la segunda y por último la tercera. Un pirata informático intenta entrar ilegalmente en el sistema, para ello va introduciendo al azar distintas claves de forma independiente, olvidando las que ha introducido antes. Calcular el valor esperado y la varianza del número de intentos antes de romper el sistema.

Comparar el resultado anterior cuando se ataca el sistema de forma similar pero cuando el sistema de seguridad sólo consta de una clave de 9 dígitos. ¿Cuál es el sistema más seguro, desde el punto de vista del número de intentos necesarios para violarlo?

106.- De un grupo de 10 personas se eligen 5 de forma equiprobable y se les pregunta si están a favor de una cierta ley. Sea X la variable aleatoria que cuenta el número de personas a favor de la ley entre las 5. Supongamos que hay una persona a favor por cada nueve en contra.

a) Calcular la función de probabilidad de X.

b) Calcular la esperanza y la varianza de X.

c) Supongamos ahora que la población es de tamaño 10000 ¿podemos suponer un modelo binomial para X?, en este caso ¿varía mucho la esperanza y la varianza con respecto al modelo hipergeométrico?

107.- Los taxis llegan aleatoriamente (según un proceso Poisson) a la terminal de un aeropuerto con un ritmo medio de un taxi cada 3 minutos. ¿Cuál es la probabilidad de que el último pasajero de una cola de 4 tenga que esperar un taxi más de un cuarto de hora?

108.- La variable aleatoria X sigue una ley $N(\mu, \sigma^2)$. Sabemos que $\mu = 5\sigma$, y que $P(X < 6) = 0.8413$.

a) Determinar la esperanza y la varianza de X.

b) ¿Cuál es la función de distribución de $Y = 3 - X^2$ y su esperanza?

109.- Consideremos una variable aleatoria X con función de densidad f_X dada por:

$$f_X(x) = \begin{cases} 1/2 & \text{si } 0 < x < 2 \\ 0 & \text{en otro caso} \end{cases}$$

determinar $\mathrm{E}(Y)$, donde $Y = \ln X$.

110.- Sea X una variable aleatoria continua con distribución uniforme sobre el intervalo $(0, 1)$.

[104]Sol.: a) $(\frac{\mathbf{q}}{\mathbf{p}}; \frac{\mathbf{q}}{\mathbf{p}}^{\mathbf{2}})$ b) $(\mathbf{q^{1001}})$
[107]Sol.: $(\mathbf{0.265})$
[108]Sol.: a)$(\mathbf{5}, \quad \mathbf{1})$; b) $\mathbf{E(Y) = -23}$
[109]Sol.: $(\mathbf{-0.3069})$

a) Encontrar las funciones de densidad de las variables aleatorias $Y = g(X)$ y $Z = h(X)$, donde $g(x) = 8x^3$ y $h(x) = (x - 1/2)^2$.

b) Calcular la esperanza de las variables aleatorias Y y Z como esperanzas de v.a. y como esperanzas de funciones de la v.a. X.

111.- El percentil 90 de una variable aleatoria X es el valor x_{90} para el que $F_X(x_{90}) = P(X \leq x_{90}) = 0.9$. De manera similar, el percentil 50 es el valor x_{50} que satisface $P(X \leq x_{50}) = 0.5$ que recibe el nombre de **mediana** (poblacional). Determinar estos dos valores para una variable aleatoria exponencial de valor medio 10.

112.- Usar la desigualdad de Chebyshef para estimar el número de veces que hay que lanzar una moneda, no trucada, al aire si queremos tener una probabilidad de al menos el 90% de que la frecuencia de caras este comprendida entre 0.45 y 0.55.

113.- Una centralita recibe llamadas telefónicas con un ritmo medio de μ llamadas por minuto. Calcular la probabilidad de que el intervalo entre dos llamadas consecutivas supere al intervalo medio en más de dos desviaciones típicas, comparar este resultado con la cota superior dada por la desigualdad de Chebyshef .

[110]Sol.: b) (**2**, **1/12**)
[111]Sol.: (**23.0585**, **6.93147**)
[112]Sol.: (**1000**)
[113]Sol.: **0.05**, **0.25**

Variables aleatorias vectoriales

114.- Los estudiantes de una universidad se clasifican de acuerdo a sus años en la universidad (X) y el número de visitas a un museo el último año($Y = 0$ si no hizo ninguna visita $Y = 1$ si hizo una visita, $Y = 2$ si hizo más de una visita). En la tabla siguiente aparecen la probabilidades conjuntas que se estimaron para estas dos variables:

Núm. de Visitas (Y)	Núm. de años (X)			
	1	2	3	4
0	0.07	0.05	0.03	0.02
1	0.13	0.11	0.17	0.15
2	0.04	0.04	0.09	0.10

a) Hallar la probabilidad de que un estudiante elegido aleatoriamente no haya visitado ningún museo el último año.

b) Hallar las medias de las variables aleatoria X e Y.

c) Hallar e interpretar la covarianza y la correlación entre las variables aleatorias X e Y.

115.- Un vendedor de libros de texto realiza llamadas a los despachos de lo profesores, y tiene la impresión que éstos suelen ausentarse más de los despachos los viernes que cualquier otro día laborable. Un repaso a las llamadas, de las cuales un quinto se realizan los viernes, indica que para el 16% de las llamadas realizadas en viernes, el profesor no estaba en su despacho, mientras que esto ocurre sólo para el 12% de llamadas que se realizan en cualquier otro día laborable. Definamos las variables aleatorias siguientes:

$$X = \begin{cases} 1 & \text{si la llamada es realizada el viernes} \\ 0 & \text{en cualquier otro caso} \end{cases}$$

$$Y = \begin{cases} 1 & \text{si el profesor está en el despacho} \\ 0 & \text{en cualquier otro caso} \end{cases}$$

a) Hallar la función de probabilidad conjunta de X e Y.

b) Hallar la función de probabilidad condicional de Y, dado que $X = 0$.

c) Hallar las funciones de probabilidad marginal de X e Y.

d) Hallar e interpretar la covarianza de X e Y.

[114]Sol.: a) 0.17; b) $E(X) = 2.59$, $E(Y) = 1,10$; c) $Cov(X, Y) = 0.191$, r_{XY}=0.259291

116.- Se lanzan al aire dos dados de diferente color, uno es blanco y el otro rojo. Sea X la variable aleatoria "número de puntos obtenidos con el dado blanco, e Y la variable aleatoria "número más grande de puntos obtenido entre los dos dados".

a) Determinar la función de probabilidad conjunta.

b) Obtener las funciones de probabilidad marginales.

c) ¿Son independientes? (**No**)

117.- Si X_1 y X_2 son dos variables aleatorias con distribución Poisson, independientes y con medias respectivas α y β, probar que $Y = X_1 + X_2$ también una variable aleatoria Poisson (con media $\alpha + \beta$).

118.- Las variables aleatorias continuas X e Y tienen por función de densidad

$$f(x,y) = \begin{cases} k(3x^2+2y) & \text{si } 0 \leq x \leq 1 \text{ y } 0 \leq y \leq 1 \\ 0 & \text{en cualquier otro caso} \end{cases}$$

Se pide:

a) El valor de la constante k.

b) Las funciones de densidad marginales.

c) Las probabilidades $P(X \leq 0.5)$ y $P(Y \leq 0.3)$

d) Las medias y las varianzas de X y de Y.

e) La covarianza de X e Y.

f) La matriz de varianzas-covarianzas y la de correlaciones.

119.- Los gastos X e ingresos Y de una familia se consideran como una variable bidimensional con función de densidad dada por:

---

[115]Sol.:

	X		
Y	0	1	$P_Y(y)$
0	0.096	0.032	0.128
1	0.704	0.168	0.872
$P_X(x)$	0.8	0.2	1

; b)

Y	0	1
$P_{Y/X}(y\|0)$	0.12	0.88

c) $Cov(X,Y) = -0.0064$

[118]Sol.: a) $k = \frac{1}{2}$; b) $f_X(x) = \begin{cases} \frac{1}{2}(3x^2+1) & \text{si } 0 \leq x \leq 1 \\ 0 & \text{en el resto de casos} \end{cases}$; $f_Y(y) = \begin{cases} \frac{1}{2}(1+2y) & \text{si } 0 \leq y \leq 1 \\ 0 & \text{en el resto de casos} \end{cases}$; c) $P(X \leq 0.5) = 0.312$ y $P(Y \leq 0.3) = 0.195$; d) $E(X) = \frac{5}{8}$; $E(Y) = \frac{7}{12}$; $Var(X) = \frac{73}{960}$; $Var(Y) = \frac{11}{144}$. e) $Cov(X,Y) = \frac{-1}{96}$; f) $\begin{pmatrix} \frac{73}{960} & \frac{-1}{96} \\ \frac{-1}{96} & \frac{11}{144} \end{pmatrix}$

$$f(x,y)=\left\{\begin{array}{ll} k(x+y) & \text{si } 0\leq x\leq 100 \text{ y } 0\leq y\leq 100\\ 0 & \text{en cualquier otro caso}\end{array}\right.$$

Se pide:

a) El valor de la constante k para que $f(x,y)$ sea densidad.

b) La probabilidad $P(0\leq X\leq 60, 0\leq Y\leq 50)$

c) Las funciones de densidad marginales.

d) Los gastos e ingresos medios.

e) La covarianza de X e Y.

f) La matriz de varianzas-covarianzas.

g) La densidad (condicionada) de los gastos de las familias con ingresos $Y=50$. La esperanza de los gastos condicionados a que los ingresos valen $Y=50$.

120.- Dos amigos desayunan cada mañana en una cafetería entre la 8 y las 8:30 de la mañana. La distribución conjunta de sus tiempos de llegada es uniforme en dicho intervalo, es decir (y para simplificar tomando el tiempo en minutos):

$$f(x,y)=\left\{\begin{array}{ll} k & \text{si } 0\leq x\leq 30 \text{ y } 0\leq y\leq 30\\ 0 & \text{en el resto de casos}\end{array}\right. .$$

Si los amigos esperan un máximo de 10 minutos, calcular la probabilidad de que se encuentren (sugerencia: resolverlo gráficamente). Calcular las distribuciones marginales.

121.- La variable X representa la proporción de errores tipo A en ciertos documentos y la variable Y la proporción de errores de tipo B. Se verifica que $X+Y\leq 1$ (es decir puede haber más tipos de errores posibles) y la densidad conjunta de ambas variables es

$$f(x,y)=\left\{\begin{array}{ll} k & \text{si } 0\leq x\leq 1;\ 0\leq y\leq 1 \text{ y } x+y\leq 1\\ 0 & \text{en el resto de casos}\end{array}\right. .$$

a) Calcular el valor de la constante k.

b) Calcular la densidad condicional de X a $Y=y_0$ con $0<y_0<1$.

---

[119]Sol.: a) $k=\frac{1}{100^3}$; b) 0.165; c) $f_X(x)=\left\{\begin{array}{ll}\frac{x+50}{100^2} & \text{si } 0<x<100\\ 0 & \text{en el resto de casos}\end{array}\right.$, la de Y es similar; d)$E(X)=E(Y)=\frac{175}{3}$; e) $Cov(X,Y)=\frac{-625}{9}$; f) $\begin{pmatrix}\frac{6875}{9} & \frac{-625}{9}\\ \frac{-625}{9} & \frac{6875}{9}\end{pmatrix}$; g) $f_{X/Y}(x|50)=\left\{\begin{array}{ll}\frac{1}{100^2}(x+50) & \text{si } 0\leq x\leq 100\\ 0 & \text{en cualquier otro caso}\end{array}\right.$; $E(X/Y=50)=\frac{175}{3}$

[120]Sol.: (Para la solución completa véase Daniel Peña "*Estadística Modelos y Métodos. Vol 1. 2 Ed pág.160*) $\frac{5}{9}$; las marginales son uniformes en el intervalo $(0,30)$

c) Calcular la esperanza de la variable condicionada del apartado anterior.

d) Calcular el vector de medias y la matriz de correlaciones de (X, Y)

122.- La función de densidad conjunta de dos variables aleatorias continuas es:

$$f(x,y) = \begin{cases} k(x+xy) & \text{si } (x,y) \in (0,1)^2 \\ 0 & \text{en otro caso} \end{cases}$$

a) Determinar k. (**4/3**)

b) Encontrar las funciones de densidad marginales.

c) ¿Son independientes? (**Sí**)

123.- Las variables aleatorias X_1 y X_2 son independientes y ambas tienen la misma densidad

$$f(x) = \begin{cases} 1 & \text{si } 0 \leq x \leq 1 \\ 0 & \text{en caso contrario} \end{cases}$$

a) Determinar la densidad de $Y = X_1 + X_2$.

b) Determinar la densidad de $Z = X_1 - X_2$.

c) Calcular la esperanza y varianza de Y y de Z.

124.- Un proveedor de servicios informáticos tiene una cantidad X de cientos de unidades de un cierto producto al principio de cada mes. Durante el mes se venden Y cientos de unidades del producto. Supongamos que X e Y tienen una densidad conjunta dada por

$$f(x,y) = \begin{cases} 2/9 & \text{si } 0 < y < x < 3 \\ 0 & \text{en caso contrario} \end{cases}$$

a) Comprobar que f es una densidad.

b) Determinar $F_{X,Y}$.

c) Calcular la probabilidad de que al final de mes se hayan vendido como mínimo la mitad de las unidades que había inicialmente. (**1/2**)

d) Si se han vendido 100 unidades, ¿cuál es la probabilidad de que hubieran, como mínimo 200 a principio de mes? (**1/2**)

[121]Sol.: a) $k = 2$; b) Dado $0 < y_0 < 1$ la densidad condicional de X a $Y = y_0$ es $f_{X|Y}(x|y_0) = \begin{cases} \frac{1}{(1-y)} & \text{si } 0 < x < 1 \text{y } x < 1 - y_0 \\ 0 & \text{en el resto de casos} \end{cases}$; c) $\frac{1}{3}$

125.- Sean X e Y dos variables aleatorias conjuntamente absolutamente continuas. Supongamos que

$$f_X(x) = \begin{cases} 4x^3 & \text{si } 0 < x < 1 \\ 0 & \text{en caso contrario} \end{cases}$$

y que

$$f_Y(y|x) = \begin{cases} \frac{2y}{x^2} & \text{si } 0 < y < x \\ 0 & \text{en caso contrario} \end{cases}$$

a) Determinar $f_{X,Y}$.

b) Obtener la distribución de Y.

c) Calcular $f_X(x|y)$.

126.- Sea $W = X + Y + Z$, donde X, Y y Z son variables aleatorias con media 0 y varianza 1,

a) Sabiendo que $Cov(X,Y) = 1/4, Cov(X,Z) = 0, Cov(Y,Z) = -1/4$. calcular la esperanza y la varianza de W. (Sol.:$\mathbf{0}; \mathbf{3}$)

b) Sabiendo que X, Y y Z son incorreladas calcular la esperanza y la varianza de W. (Sol.:$\mathbf{0}; \mathbf{3}$)

c) Calcular la esperanza y la varianza de W si $Cov(X,Y) = 1/4, Cov(X,Z) = 1/4, Cov(Y,Z) = 1/4$. (Sol.:$\mathbf{0}; \mathbf{15/4}$)

d) Sabiendo que X, Y y Z.

Teorema del Límite Central

127.- En cierta fabricación mecánica el 96% de las piezas resultan con longitudes admisibles (dentro de las toleradas), un 3% defectuosas cortas y un 1% defectuosas largas. Calcular la probabilidad de:

a) En un lote de 250 piezas sean admisibles 242 o más

b) En un lote de 500 sean cortas 10 o menos.

c) En 1000 piezas haya entre 6 y 12 largas.

128.- Una organización de investigación de mercados ha encontrado que el 40% de los clientes de un supermercado no quieren contestar cuando son encuestados. Si se pregunta a 1000 clientes, ¿cuál es la probabilidad de que menos de 500 de ellos se nieguen a contestar?

[128]Sol.: Aproximando por el T.C.L. prácticamente es 1

129.- Un servicio de grúa de auxilio en carretera recibe diariamente una media de 70 llamadas. Para un día cualquiera, ¿cuál es la probabilidad de que se reciban menos de 50 llamadas?

130.- Supongamos que el 10% de los votantes están, de un determinado cuerpo electoral, están a favor de una cierta legislación. Se hace una encuesta entre la población y se obtiene una frecuencia relativa $f_n(A)$ que estima la proporción poblacional anterior. Determinar, aplicando la desigualdad de Cheb., cuántos votantes se tendrían que encuestar para que la probabilidad de que $f_n(A)$ difiera de 0.1 menos de 0.02 sea al menos de 0.95 (Sol.:**4500**).¿Qué podemos decir si no conocemos el valor de la proporción? (Sol.:**12500**) Repetir el ejercicio pero aplicando el T.L.C. (Sol.:**865** si sabemos que $\mathbf{p = 0.1}$ y **2401** en otro caso)

131.- Se lanza al aire una dado regular 100 veces. Aplicar la desigualdad de Cheb. para obtener una cota de la probabilidad de que el número total de puntos obtenidos esté entre 300 y 400. (Sol.:**0.883**). ¿Cuál es la probabilidad que se obtiene aplicando el T.L.C? (Sol.:**0.9964**)

132.- Se sabe que, en una población, la altura de los individuos machos adultos es una variable aleatoria X con media $\mu_x = 170$ cm y desviación típica $\sigma_x = 7$ cm. Se toma una muestra aleatoria de 140 individuos. Calcular la probabilidad de que la media muestral $\overline{x}$ difiera de μ_x en menos de 1 cm. (Sol.:**0.909**)

133.- ¿Cuántas veces hemos de lanzar un dado bien balanceado para tener como mínimo un 95% de certeza de que la frecuencia relativa del salir "6" diste menos de 0.01 de la probabilidad teórica 1/6? (Sol.:**5336**)

134.- Se lanza al aire una moneda sin sesgo n veces. Estimar el valor de n de manera que la frecuencia relativa del número de caras difiera de 1/2 en menos de 0.01 con probabilidad 0.95. (Sol.:**9604**)

135.- El número de mensajes llegan a un multiplexor es una variable aleatoria que sigue una ley Poisson con una media de 10 mensajes por segundo. Estimar la probabilidad de que lleguen más de 650 mensajes en un minuto. (Ind.: Utilizar el teorema del límite central) (Sol.:**0.0207**)

[129] Sol.: Aproximadamente 0.3897

Muestreo. Distribuciones muestrales

136.- El precio medio del m^2 en la venta de casas nuevas durante el último año en una determinada ciudad fue de 115000 pts. La desviación típica de la población fue de 25000 pts. Se toma una muestra aleatoria de 100 casas nuevas de esta ciudad.

a) ¿Cuál es la probabilidad de que la media muestral de los precios de venta sea menor que 110000 pts?

b) ¿Cuál es la probabilidad de que la media muestral de los precios de venta esté entre 113000 pts. y 117000 pts.??

c) ¿Cuál es la probabilidad de que la media muestral de los precios de venta esté entre 114000 pts. y 116000 pts.?

d) Sin hacer cálculos, razonar en cuál de los siguientes rangos resulta más probable que se encuentre la media muestral de los precios de venta:

113000 pts-	115000 pts
114000 pts-	116000 pts
115000 pts-	117000 pts
116000 pts-	118000 pts

137.- Se ha tomado una muestra de 16 directores de oficina de corporaciones de una gran ciudad, con el fin de estimar el tiempo medio que emplean en desplazarse para ir a su trabajo. Supongamos que la distribución de dichos tiempos en la población sigue una normal con media 87 minutos y desviación típica 22.

a) ¿Cuál es el error estándar de la media muestral de los tiempos de desplazamiento?

b) ¿Cuál es la probabilidad de que la media muestral sea inferior a 100 minutos?

c) ¿Cuál es la probabilidad de que la media muestral sea superior a 80 minutos?

d) ¿Cuál es la probabilidad de que la media muestral esté entre 85 y 95 minutos?

e) Supongamos que se toma una segunda muestra de quince directores, independiente de la anterior. Sin hacer los cálculos, razonar si la probabilidades calculadas en los apartados b), c) y d) serán mayores, menores o iguales para esta segunda muestra. Utilizar gráficos para ilustrar las respuestas.

138.- Una compañía produce cereales para el desayuno. La media del peso que contienen las cajas de estos cereales es de doscientos gramos y su desviación típica de seis gramos. La distribución de los pesos de la población es normal. Se eligen cuatro cajas, que pueden considerarse como una muestra aleatoria del total de la producción.

[136] Sol.: a) 0.0228; b) 0.5762; c) 0.3108: d) el intervalo 114000 pts-116000 pts

[137] Sol.: a) 5.5 ; b) 0.9909; c) 0.8980; d) 0.5671; e) es menor en los tres casos.

a) ¿Cuál es el error estándar de la media muestral del peso de las cuatro cajas?

b) ¿Cuál es la probabilidad de que la media del peso de esas cuatro cajas sea inferior que 197 gramos?

c) ¿Cuál es la probabilidad , en media, el peso de estas cuatro cajas esté entre 105 y 195 gramos?

d) ¿Cuál es la probabilidad de que la suma del peso de estas cuatro cajas sea menor de 800 gr.?

e) Se eligen al azar dos de estas cuatro cajas ¿Cuál es la probabilidad de que, en media, el contenido de estas dos cajas pese entre 195 y 200 gramos?

139.- La tasa de rentabilidad de ciertos tipos de acciones sigue una distribución con desviación típica 3.8. Se extrae una muestra de tales acciones con el fin de estimar el precio medio.

a) ¿Qué tamaño ha de tener la muestra para asegurarnos que la probabilidad de que la media muestral difiera de la media poblacional en una cantidad superior a 1 sea menor que 0.1?

b) Sin realizar los cálculos razonar si será preciso un tamaño muestral mayor o menor que el requerido en el apartado a) para garantizar que la probabilidad de que la media muestral difiera de la media poblacional en más de 1 sea inferior a 0.05.

c) Sin realizar los cálculos razonar si será preciso un tamaño muestral mayor o menor que el requerido en el apartado a) para garantizar que la probabilidad de que la media muestral difiera de la media poblacional en más de 1.5 sea inferior a 0.1.

140.- De acuerdo con los datos del ministerio de Economía y Hacienda, el 15% de las declaraciones del IRPF del último año darán lugar a una devolución. Se toma una muestra aleatoria de 10 declaraciones.

a) ¿Cuál es la media de la distribución en el muestreo de la proporción muestral de declaraciones que darán lugar a una devolución?

b) ¿Cuál es la varianza de la proporción muestral?

c) ¿Cuál es el error estándar de la proporción muestral?

d) ¿Cuál es la probabilidad de que la proporción muestral sea mayor que 0.8?

[138]Sol.: a) 3; b) 0.1587; c) 0.0475; d) 0.5; e) 0.3810
[139]Sol.: a) $n \geq 40$; b) mayor; c) menor

141.- El dueño de una portal de ventas de discos por internet ha comprobado que el 20% de los clientes que acceden a su portal realizan una compra. Cierta mañana entraron en el portal 180 personas, que pueden ser consideradas como una muestra aleatoria de todos sus clientes.

a) ¿Cuál será la media de la proporción muestral de clientes que realizaron alguna compra?

b) ¿Cuál es la varianza de la proporción muestral?

c) ¿Cuál es el error estándar de la proporción muestral?

d) ¿Cuál es la probabilidad de que la proporción muestral sea mayor que 0.15?

142.- El administrador de una gran cadena de hospitales opina que, de entre todos sus pacientes, el 30% generará facturas que se pagarán con más de dos meses de retraso. Se toma una muestra aleatoria de 200 pacientes.

a) ¿Cuál es el error estándar de la proporción muestral de pacientes con facturas cuyo pago se retrasará dos meses?

b) ¿Cuál es la probabilidad de que la proporción muestral sea inferior a 0.25?

c) ¿Cuál es la probabilidad de que la proporción muestral sea mayor que 0.33?

d) ¿Cuál es la probabilidad de que la proporción muestral esté entre 0.27 y 0.33?

e) Sin realizar los cálculos, razonar en cuál de los siguientes intervalos es más probable que se encuentre la proporción muestral: 0.29-0.31; 0.30-0.32; 0.31-0.33; 0.32-0.34.

f) Supongamos que se toma al azar una muestra de 500 pacientes. Sin realizar los cálculos razonar si las probabilidades de los apartados b), c) y d) resultarán en este caso mayores, menores o iguales que las calculadas para la muestra anterior.

143.- Se toma una muestra aleatoria de 100 votantes con el fin de estimar la proporción de los mismos que están a favor de un aumento en los impuestos sobre la gasolina para contar así con un ingreso adicional para reparaciones de las autopistas. ¿Cuál es el mayor valor que puede tomar el error estándar de la proporción muestral de esta medida?

144.- Continuando en la situación del problema anterior, se decide que una muestra de 100 votantes es muy pequeña para obtener una estimación de la proporción poblacional que

[140] Sol.: a) 0.15; b) 0.01275; c) 0.1129; d) casi nula.
[141] Sol.: a) 0.2; b) ≈ 0.0009; c) 0.03; d) 0.9525
[142] Sol.: a) 0.0324; b) 0.0618; c) 0.1762; d) 0.6476; e) 0.29-0.31; f) menor, menor, mayor
[143] Sol.: 0.05

resulte suficientemente creíble. Se decide exigir que la probabilidad de que la proporción muestral difiera de la proporción poblacional (cualquiera que sea su valor) en más de 0.03 no debe ser superior a 0.05. ¿Qué tamaño ha de tener la muestra para poder garantizar que se cumple este requisito?

145.- Una compañía quiere estimar la proporción de personas que son posibles compradores de máquinas de afeitar eléctricas que ven retransmisiones partidos de La Liga de Campeones. Se toma una muestra de 120 individuos que se identificaron como posibles compradores de afeitadoras eléctricas. Supongamos que la proporción de posibles compradores de afeitadoras eléctricas en la población que ven estas retransmisiones es 0.25.

a) 0.10 es la probabilidad de que la proporción muestral exceda a la proporción poblacional ¿en qué valor?

b) 0.05 es la probabilidad de que la proporción muestral esté por debajo de la proporción poblacional ¿en qué cantidad?

c) 0.30 es la probabilidad de que la proporción muestral difiera de la proporción poblacional ¿en menos de qué cantidad?

146.- Supongamos que el 50% de los españoles adultos opina que es necesaria una revisión del sistema nacional público de hospitales. ¿Cuál es la probabilidad de que más del 56% de los componentes de una muestra de 150 españoles adultos tenga esa opinión?

147.- Las rentabilidades mensuales de cierto tipo de acciones son independientes unas de otras, y siguen una distribución normal con desviación típica 1,7. Se toma una muestra de 12 meses.

a) Hallar la probabilidad de que la desviación típica muestral sea menor que 2.5.

b) Hallar la probabilidad de que la desviación típica muestral sea mayor que 1.

148.- El número de horas que dedican a ver la televisión los estudiantes en la semana anterior a los exámenes finales sigue una distribución normal con una desviación típica de 4.5 horas. Se toma una muestra aleatoria de 30 estudiantes.

a) La probabilidad de que la desviación típica muestral sea mayor que 3.5 horas, ¿es mayor que 0.95?

b) La probabilidad de que la desviación típica muestral sea menor que seis horas, ¿es mayor que 0.95?

[144] Sol.: $n \geq 267$

[145] Sol.: a) 0.0506; b) 0.0648; c) 0.0154

[146] Sol.: 0.0708

[147] Sol.: a) 0.8; b) 0.975

149.- Se extrae una muestra aleatoria de 15 economistas y se les pregunta acerca de su predicción sobre la tasa de inflación para el próximo año. Supongamos que las predicciones para la población completa de economistas sigue una distribución normal con una desviación típica de 1.8.

a) 0.01 es la probabilidad de que la desviación típica sea mayor que ¿qué número?

b) 0.025 es la probabilidad de que la desviación típica sea menor que ¿qué número?

c) Encontrar una par de números, a y b, tales que la probabilidad de que la desviación típica muestral se encuentre entre ellos sea 0.9.

[148]Sol.: a) Sí; b) Sí

[149]Sol.: a) 2.5969; b) 1.1415; c) 1.2331; 2.3410

Estimación puntual

150.- Se toma una muestra de ocho lotes de un producto químico para comprobar la concentración de impurezas. Los niveles porcentuales de impurezas encontrados en la muestra fueron

3.2 4.3 2.1 2.8 3.2 3.6 4.0 3.8

a) Hallar la media y la varianza muestrales. Hallar la proporción muestral de lotes con nivel porcentual de impurezas mayor que 3.75%.

b) ¿Para qué parámetros poblacionales se han hallado en la parte a) estimadores por procedimientos insesgados?

151.- Sea $\hat{\theta}_1$ un estimador insesgado de θ_1, y $\hat{\theta}_2$ un estimador insesgado de θ_2.

a) Probar que $(\hat{\theta}_1 + \hat{\theta}_2)$ es un estimador insesgado de $(\theta_1 + \theta_2)$.

b) Probar que $(\hat{\theta}_1 - \hat{\theta}_2)$ es un estimador insesgado de $(\theta_1 - \theta_2)$.

152.- Sea X_1 y X_2 una muestra aleatoria de dos observaciones independientes de una población con media μ y varianza σ^2. Considerar los siguientes tres estimadores puntuales de μ:

$$\begin{aligned} \overline{X} &= \tfrac{1}{2}X_1 + \tfrac{1}{2}X_2 \\ \hat{\mu}^{(1)} &= \tfrac{1}{4}X_1 + \tfrac{3}{4}X_2 \\ \hat{\mu}^{(2)} &= \tfrac{1}{3}X_1 + \tfrac{2}{3}X_2 \end{aligned}$$

a) Probar que los tres estimadores son insesgados.

b) ¿Cuál de los tres estimadores es más eficiente?

c) Hallar la eficiencia relativa de $\overline{X}$ con respecto a los otros estimadores.

153.- A una clase de estadística asisten estudiantes de Informática de Gestión y de Sistemas. En una muestra de diez estudiantes de Gestión se observaron las siguientes calificaciones en el examen final

62 57 85 59 64 63 71 58 77 72

En una muestra independiente de ocho estudiantes de Sistemas se observaron las siguientes calificaciones en el mismo examen

73 79 85 73 62 51 60 57

[150]Sol.: a) $\overline{X} = 3.375$; $S_{\overline{X}}^2 = 0.4993$; $\hat{p} = 0.3557$; b) para todos.

[152]Sol.: b) $\overline{X}$; c) $\frac{Var(\overline{X})}{Var(\hat{\mu}^{(1)})} = 0.8$; $\frac{Var(\overline{X})}{Var(\hat{\mu}^{(2)})} = 0.9$

a) Utilizar un método de estimación insesgado para obtener una estimación puntual de la diferencia de las calificaciones medias entre los estudiantes de Gestión y los de Sistemas. (Indicación: Utilizar el problema 151)

b) Utilizar un método de estimación insesgado para obtener una estimación puntual de la diferencia entre la proporción poblacional de estudiantes que obtuvieron una calificación mayor que 70 en el grupo de estudiantes de Gestión y el grupo de Sistemas. (Indicación: Utilizar el problema 151)

154.- Se toma una muestra aleatoria $X_1, X_2, \ldots, X_n$ de una población con media μ y varianza σ^2. Se considera el siguiente estimador de μ :

$$\hat{\mu} = \frac{2}{n(n+1)}(X_1 + 2X_2 + 3X_3 + \ldots + nX_n)$$

a) Probar que $\hat{\mu}$ es un estimador insesgado de μ.

b) Hallar la eficiencia relativa de $\hat{\mu}$ respecto a $\overline{X}$, la media muestral.

155.-

a) (Examen junio 2003) Calcular el estimador máximo verosímil (MLE[1]) para el parámetro λ de una población que sigue una ley $Exp(\lambda)$ para una muestra aleatoria simple de tamaño n.

b) (Examen septiembre 2004) Calcular el MLE para el parámetro λ de una población que sigue una ley $Po(\lambda)$ para una muestra aleatoria simple de tamaño n.

c) Calcular el MLE para el parámetro μ de una población que sigue una ley $N(\mu, \sigma^2)$ para una muestra aleatoria simple de tamaño n.

d) Calcular el MLE para el parámetro σ^2 de una población que sigue una ley $N(\mu, \sigma^2)$ para una muestra aleatoria simple de tamaño n.

e) Estudiar si los estimadores MLE de los apartados anteriores son insesgados.

Estimación por intervalos

156.- De una población de barras de hierro se extrae una muestra de 64 barras y se calcula la resistencia a la rotura por tracción se obtiene que $\overline{X} = 1012\ Kg/cm^2$. Se sabe por experiencia que en este tipo de barras $\sigma = 25$. Calcular un intervalo de confianza para μ al nivel 0.95.

---

[153]Sol.: a) 0.2444; b)$-\frac{1}{10}$

[154]Sol.: b) $Var(\hat{\mu}) = \left(\frac{2}{n(n+1)}\right)^2 \frac{n(n+1)(2n+1)}{6}\sigma^2$; $Eff.rel = \frac{Var(\hat{\mu})}{Var(\overline{X})} = \frac{2\,(1+2\,n)}{3\,(1+n)}$.

[1]Del inglés "Maximun Likelihood Estimator"

[156]Sol.: $(1005.88, 1018.13)$

157.- Para investigar el C.I. medio de una cierta población de estudiantes, se realiza un test a 400 estudiantes. La media y la desviación típica muestrales obtenidas son $\overline{x} = 86$ y $\tilde{s}_X = 10.2$. Calcular un intervalo para μ con un nivel de significación del 98%.

158.- Para investigar un nuevo tipo de combustible para cohetes espaciales, se disparan cuatro unidades y se miden las velocidades iniciales. Los resultados obtenidos, expresados en Km/h, son :19600, 20300, 20500, 19800. Calcular un intervalo para la velocidad media μ con un nivel de confianza del 95%, suponiendo que las velocidades son normales. 20718.3

159.- Un fabricante de cronómetros quiere calcular un intervalo de estimación de la desviación típica del tiempo marcado en 100 horas por todos los cronómetros de un cierto modelo. Para ello pone en marcha 10 cronómetros del modelo durante 100 horas y encuentra que $\tilde{s}_X = 50$ segundos. Encontrar un intervalo para el parámetro σ^2 con $\alpha = 0.01$, suponiendo que la población del tiempo marcado por los cronómetros es normal.

160.- Un auditor informático quiere investigar la proporción de rutinas de un programa que presentan una determinada irregularidad. Para ello observa 120 rutinas, resultando que 30 de ellas presentan alguna irregularidad. Con estos datos buscar unos límites de confianza para la proporción p de rutinas de la población que presentan esa irregularidad con probabilidad del 95%.

161.- (Examen septiembre 2003) Una infección por un virus puede haber perjudicado a muchos ordenadores con *Windwos*. Desde el Centro de Alerta Temprana (CAT) se quiere calcular la proporción de ordenadores infectados. El jefe del centro os pide que calculéis el tamaño de una muestra para que el intervalo de confianza de la proporción muestral de ordenadores infectados tenga amplitud de a lo sumo 0.01 con una probabilidad del 90%.

162.- (Examen junio 2003) Se han medido los siguientes valores (en miles de personas) para la audiencia de un programa de televisión en distintos días (supuestos igualmente distribuidos e independientes):

$$521, 742, 593, 635, 788, 717, 606, 639, 666, 624.$$

Construir un intervalo de confianza del 90%, para la audiencia poblacional media y otro para la varianza poblacional, bajo la hipótesis de que la población de audiencias sigue una ley normal.

Nota Suma de las audiencias=6531, Suma de los cuadrados de las audiencias=4320401.

163.- Supongamos que la empresa para la que trabajamos está en un proyecto de investigación, financiado con fondos de la Comunidad Europea, que pretende extender una nueva aplicación de las TIC. Una de las tareas del proyecto es realizar una encuesta de opinión sobre el grado de aceptación que tendría esta nueva tecnología en el mercado europeo. De

[157] Sol.: $(84.8117, 87.1883)$
[158] Sol.: $(19381.7, 20718.3)$
[159] Sol.: $(953.834, 12968.3)$
[160] Sol.: $(0.1725, 0.3275)$

entre todas las universidades y empresas participantes en el proyecto, es a tu empresa a la que le toca hacer el protocolo de la encuesta, llevarla a cabo y redactar esta parte del informe final. Como eres el último que llegó a la empresa y el resto de miembros del equipo no se acuerda de la estadística que vio en la carrera, te toca a ti cargar con la responsabilidad. Claro que el coste de la encuesta depende del número n de entrevistas que se realicen y el error de las proporciones de las contestaciones disminuye cuando n aumenta. Como no sabes cuánto dinero está dispuesto a gastar tu jefe, tabula los tamaños muestrales para los errores $\pm 5\%, \pm 3\%, \pm 2\%, \pm 1\%$, y para niveles de confianza 0.95 y 0.99, suponiendo el peor caso. Añade un comentario para que el equipo de dirección del proyecto, en el que hay componentes ignorantes en materia de encuestas, vea como quedarían redactado los datos técnicos de la encuesta, y pueda decidir el tamaño muestral leyendo tu informe.

164.- El número de reservas semanales de billetes de cierto vuelo de una compañía aérea sigue una distribución aproximadamente normal. Se toma un muestra aleatoria de 81 observaciones de números de reservas de este vuelo: el número medio de reservas muestral resulta ser 112, mientras que la desviación típica muestral es 36. Además de estos 81 vuelos, 30 llegaron a su destino con un retraso de más de 15 minutos.

a) Calcular un intervalo de confianza del 95% para el número medio poblacional de reservas en este vuelo.

b) Calcular un intervalo de confianza de 95% para la varianza poblacional de las reservas.

c) Calcular un intervalo de confianza del 95% para la proporción poblacional de vuelos que llegan con un retraso de más de 15 minutos.

d) Calcular el tamaño muestral que asegura un intervalo de confianza de amplitud 0.1 para la proporción de vuelos que llegan con un retraso de más de 15 minutos al nivel de confianza 95%.

165.- Una empresa cervecera sabe que las cantidades de cerveza que contienen sus latas sigue una distribución normal con desviación típica poblacional 0.03 litros.

a) Se extrae una muestra aleatoria de 25 latas y, a partir de la misma, un experto en estadística construye un intervalo de confianza para la media poblacional del contenido en litros de las latas que discurre entre 0.32 y 0.34 ¿Cuál es el nivel de confianza de este intervalo?

b) Un gerente de esta empresa exige un intervalo de confianza del 99% que tenga una amplitud máxima de 0.03 litros a cada lado de la media muestral ¿Cuántas observaciones son necesarias, como mínimo, para alcanzar este objetivo?

[164] Sol.: a) $(104.16, 119.84)$); b) $(972.343, 1814.08)$); c) $(0.265, 0.475)$); d) $n = 385$

[165] Sol.: a) 90.3%; b) $n = 7$

Contraste de hipótesis

166.- Siendo $\overline{x} = 63.5$ la media de una muestra aleatoria simple de tamaño 36 extraída de una población normal con $\sigma^2 = 144$, poner a prueba, con un nivel de significación $\alpha = 0.05$, la hipótesis nula $\mu = 60$ y decir si se rechaza en favor de la alternativa $\mu < 60$. Calcular el p-valor.

167.- Siendo $\overline{x} = 72.5$ la media de una muestra aleatoria simple de tamaño 100 extraída de una población normal con $\sigma^2 = 900$, poner a prueba, con un nivel de significación $\alpha = 0.10$, la hipótesis nula $\mu = 77$ y decir si se rechaza en favor de las hipótesis alternativas $\mu \neq 70$, $\mu > 70$, $\mu < 70$. Calcular el p-valor en cada caso.

168.- En un contraste bilateral, con $\alpha = 0.01$, ¿para qué valores de $\overline{X}$ rechazaríamos la hipótesis nula $H_0 : \mu = 70$, a partir de una muestra aleatoria simple de tamaño 64 extraída de una población normal con $\sigma^2 = 256$?

169.- El salario anual medio de 1600 personas, elegidas aleatoria e independientemente de cierta población de economistas con $\sigma = 20000$ euros, ha valido 45000 euros ¿Es compatible con este resultado la hipótesis nula, $H_0 : \mu = 43500$, suponiendo $\alpha = .01$? ¿Cuál es el intervalo de confianza para μ? Calcular el p-valor.

170.- Con los datos del ejercicio anterior , ¿son compatibles con el resultado obtenido los siguientes contrastes?:

a) $\begin{cases} H_0 : \mu = 44000 \\ H_1 : \mu > 44000 \end{cases}$

b) $\begin{cases} H_0 : \mu = 46250 \\ H_1 : \mu > 46250 \end{cases}$

171.- El peso medio de los paquetes de café puestos a la venta por la casa comercial CAFEINASA es supuestamente de 1 Kg. Para comprobar esta suposición, elegimos una muestra aleatoria simple de 100 paquetes y encontramos que su peso medio es de 0.978 Kg. y su desviación típica $s = 0.10$ kg. Siendo $\alpha = 0.05$ ¿es compatible este resultado con la hipótesis nula $H_0 : \mu = 1$ frente a $H_1 : \mu \neq 1$? ¿Lo es frente a $H_1 : \mu > 1$? Calcular el p-valor.

172.- El fabricante de la marca de tornillos FDE afirma que el diámetro medio de sus tornillos vale 20 mm. Para comprobar dicha afirmación, extraemos aleatoria e independientemente 16 tornillos , y vemos que la media de sus diámetros es 22 mm. y la desviación típica 4 mm. ¿Podemos aceptar la pretensión del fabricante, suponiendo $\alpha = 0.05$ y siendo el contraste bilateral? Calcular el p-valor.

173.- Para evitar basarse en su intuición los jefes de admisión de personal de las grandes empresas discriminan mediante un test diseñado por un gabinete de psicólogos, supuestamente especializado en selección de personal, a los aspirantes a trabajar en la empresa. La varianza del test de selección solía venir siendo 100. Aplicando un nuevo test a una muestra aleatoria simple de tamaño $n = 31$, se obtiene que $S = 129$. Suponiendo que la población se distribuye normalmente, ¿es compatible la hipótesis nula $H_0 : \sigma^2 = 100$, frente a la alternativa $H_1 : \sigma^2 > 100$, con $\alpha = 0.01$? Calcular el p-valor.

174.- Una máquina produce cierto tipo de piezas mecánicas. El tiempo en producirlas se distribuye normalmente con varianza desconocida σ^2. Elegida una muestra aleatoria simple de 21 de dichas piezas $(x_1, \ldots, x_{21})$, se obtiene que $\overline{x} = 30$ y $\sum_{i=1}^{21} x_i^2 = 19100$. Comprobar si es compatible la hipótesis nula $H_0 : \sigma^2 = 22$ frente $H_1 : \sigma^2 \neq 22$, con $\alpha = 0.1$, y construir un intervalo de confianza del $(1-\alpha)100\%$ para el verdadero valor de σ^2. Calcular el p-valor.

175.- A partir de las puntuaciones 15, 22, 20, 21, 19 ,23, construir el intervalo de confianza de σ^2 y decir si es compatible con estos resultado la hipótesis $H_0 : \sigma = 2$, siendo $\alpha = 0.01$ contra una H_1 bilateral. Decir si se utiliza alguna hipótesis adicional. Calcular el p-valor.

176.- Sabiendo que con $\hat{p} = 0.52$ ha sido rechazada $H_0 : p = 0.50$, al nivel de significación $\alpha = 0.05$, ¿cuál ha tenido que ser el tamaño mínimo de la muestra mediante la cual fue rechazada H_0

a) frente a $H_1 : p \neq 0.5$?

b) frente a $H_1 : p > 0.5$?

177.- Lanzamos una moneda al aire 10 veces consecutivas . ¿Con qué número de caras rechazaremos la hipótesis nula de que la moneda está bien balanceada, siendo $\alpha = 0.05$?

178.- Un fabricante de productos farmacéuticos tiene que mantener un estándar de impurezas en el proceso de producción de sus píldoras. Hasta ahora el número medio poblacional de impurezas es correcto pero está preocupado porque las impurezas en algunas de las partidas se salen del rango admitido de forma que provocan devoluciones y posibles reclamaciones por daños a la salud. El gabinete de control de calidad afirma que si la distribución de las impurezas es normal y que si el proceso de producción mantiene una varianza inferior a 1 no tendría que existir ningún problema pues las píldoras tendrían una concentración aceptable. Preocupado por esta tema la dirección encarga una prueba externa en la que se toma una muestra aleatoria de 100 de las partidas obteniéndose $S^2 = 1.1$. ¿Puede aceptar el director de la prueba externa que el proceso de producción cumple la recomendación del gabinete de control?

179.- Un IAP está preocupado por su estándar de calidad y quiere compararlo con el medio europeo. El estándar medio europeo dice que una empresa de este sector tiene una calidad aceptable si tiene un número de quejas que no excede del 3%.

Se sabe que la varianza de las quejas es 0.16. Examinando 64 clientes escogidos al azar se encuentra con que el porcentaje de quejas es del 3.07%. Calcular el p-valor.

a) Contrastar al nivel de significación del 5%, la hipótesis nula de que la media poblacional del porcentaje de quejas es del 3% frente a la alternativa de que es superior al 3%.

b) Hallar el p-valor del contraste.

c) Supongamos que la hipótesis alternativa fuese bilateral en lugar de unilateral(con hipótesis nula $H_0 : \mu = 3$). Deducir, sin hacer ningún cálculo, si el p-valor del contraste sería mayor, menor o igual que el del apartado anterior. Construir un gráfico para ilustrar el razonamiento.

d) En el contexto de este problema, explicar por qué una hipótesis alternativa unilateral es más apropiada que una bilateral.

180.- A partir de una muestra aleatoria se contrasta:

$$\begin{cases} H_0 : \mu = \mu_0 \\ H_1 : \mu > \mu_0 \end{cases}$$

y se acepta la hipótesis nula al nivel de significación del 5%.

a) ¿Implica esto necesariamente que μ_0 está contenido en el intervalo de confianza del 95% para μ?

b) Si la media muestral observada es mayor que μ_0, ¿implica necesariamente que μ_0 está contenido en el intervalo de confianza del 90% para μ?

181.- Una compañía que se dedica a la venta de franquicias afirma que, por término medio, los delegados obtienen un redimiendo del 10% en sus inversiones iniciales. Una muestra aleatoria de diez de estas franquicias presentaron los siguientes rendimientos el primer año de operación:

6.1, 9.2, 11.5, 8.6, 12.1, 3.9 , 8.4, 10.1, 9.4, 8.9

Asumiendo que los rendimientos poblacionales tienen distribución normal, contrastar la afirmación de la compañía.

182.- Una distribuidora de bebidas refrescantes afirma que una buena fotografía de tamaño real de un conocido actor, incrementará las ventas de un producto en los supermercados en una media de 50 cajas semanales. Para una muestra de 20 supermercados, el incremento medio fue de 41.3 cajas con una desviación típica de 12.2 cajas. Contrastar al nivel de significación $\alpha = 0.05$, la hipótesis nula de que la media poblacional del incremento en las ventas es al menos 50 cajas, indicando cualquier supuesto que se haga. Calcular el p-valor del contraste e interpretarlo.

Problemas de bondad de ajuste

183.- Una compañía de gas afirma, basándose en experiencias anteriores, que normalmente, al final del invierno, el 80% de las facturas han sido ya cobradas, un 10% se cobrará con pago aplazado a un mes, un 6% se cobrará a 2 meses y un 4% se cobrará a más de dos meses. Al final del invierno actual, la compañía selecciona una muestra aleatoria de 400 facturas, resultando que 287 de estas facturas cobradas, 49 a cobrar en un mes, 30 a cobrar en dos meses y 34 a cobrar en un periodo superior a dos meses. ¿Podemos concluir, a raíz de los resultados, que la experiencia de años anteriores se ha vuelto a repetir este invierno?

184.- El Rector de una Universidad opina que el 60% de los estudiantes consideran los cursos que realizan como muy útiles, el 20% como algo útiles y el 20% como nada útiles. Se toma una muestra aleatoria de 100 estudiantes, y se les pregunta sobre la utilidad de los cursos. Resultando que 68 estudiantes consideran que los cursos son muy útiles, 18 consideran que son poco útiles y 14 consideran que no son nada útiles. Contrastar la hipótesis nula de que los resultados obtenidos se corresponden con la opinión personal del Rector.

185.- Considerense los fondos de inversión ordenados en función de su rendimiento en el periodo 1995-99. Se realizó un seguimiento del rendimiento en los cinco años posteriores de una muestra aleatoria de 65 fondos entre el 25% más rentable del periodo 1995-99. En este segundo periodo se observó que 11 de los fondos de la muestra se hallan entre el 25% más rentable en este segundo periodo, 17 en el segundo 25%, 18 en el tercer 25% y 19 en el 25% menos rentable. Contrastar la hipótesis de que un fondo de inversión escogido azar del 25% más rentable en 1995-99 tenga la misma probabilidad de hallarse en cualquiera de las cuatro categorías de rendimiento en el periodo 2000-2004.

186.- A una muestra aleatoria de 502 consumidores se les preguntó la importancia que se le daba al precio a la hora de elegir un ordenador. Se les pidió que valoraran entre: "ninguna importancia", "alguna importancia" y "principal importancia". El número respectivo de respuestas en cada tipo fueron 169, 136 y 197. Contrastar la hipótesis nula de que la probabilidad de que un consumidor elegido al azar conteste cualquiera de las tres respuestas es la misma.

187.- Durante cien semanas se ha venido observando el número de veces a la semana que se ha fuera de servicio un servidor de una pequeña empresa de informática, presentándose los resultados de la siguiente tabla:

Núm. Fuera Servicio	0	1	2	3	4	5 o más
Núm. Semanas	10	24	32	23	6	5

El número medio de veces que quedo fuera de servicio por semana durante este periodo fue de 2.1. Contrastar la hipótesis nula de que la distribución de averías es una Poisson.

188.- A lo largo de 100 minutos, llegaron a una web de un periódico 100 internautas. La siguiente tabla muestra la frecuencia de llegadas a lo largo de ese intervalo de tiempo.

Núm. llegadas/min.	0	1	2	3	4 o más
Frec. Observada	10	26	35	24	5

Contrastar la hipótesis nula de que la distribución es Poisson.

KS test.

189.- Se quiere saber si el tiempo entre accesos, en una determinada franja horaria, a una cierta página web sigue una ley exponencial. Se dispone de la siguiente muestra de 25 intervalos entre tiempos de acceso:

$140.7, 13.7, 67.6, 7.8, 49.3, 128.5, 59.6, 234, 171.1, 205.8, 99.3, 199.8, 100.8, 13.5, 12, 33.9, 44.1, 12.3, 56.4, 9.4,$

Resolver manualmente o utilizando R las siguientes cuestiones.

a) Contrastar la hipótesis de que la distribución sigue una ley exponencial de parámetro $\lambda = 100$, al nivel $\alpha = 0.05$.

b) Contrastar la hipótesis de que la distribución sigue una ley Poisson de parámetro $\lambda = 105$, al nivel $\alpha = 0.05$.

c) Contrastar la hipótesis de que la distribución sigue una ley Poisson de parámetro $\lambda = 110$, al nivel $\alpha = 0.05$.

d) Contrastar la hipótesis de que la distribución sigue una ley Poisson, estimando el parámetro parámetro partir de la muestra, al nivel $\alpha = 0.05$.

190.- Resolver las mismas cuestiones que en el problema anterior para la muestra (decir si se viola algunas de las condiciones del test KS, pero resolver igualmente el ejercicio):

$$69.9, 31.5, 130.2, 80.5, 236.1, 151.2, 74.8, 13.8, 54.5, 147.6$$

En esta ocasión realizar los cálculos manualmente.

191.- Nos hemos bajado un generador de números aleatorios normales de internet. Queremos contrastar si funciona correctamente. Para ello generamos una muestra de 10 números aleatorios de una normal estándar:

$$-1.18, -0.77, -0.59, -0.27, -0.12, 0.27, 0.29, 0.40, 1.27, 1.60$$

a) Contrastar si provienen de una normal estándar al nivel de significación $\alpha = 0.05$ mediante el test KS. Decir si ha violado alguna de las suposiciones de este test.

b) Contrastar la hipótesis de normalidad contra una distribución normal de media y varianza la estimadas a partir de la muestra.

192.- Con la muestra:

$$0.60, -1.42, 1.05, -0.14, 0.57, 0.11, -0.59, 1.11, -1.55, -1.41$$

Contrastar con un test KS si los datos provienen de una distribución uniforme en el intervalo $(-2, 2)$ al nivel $\alpha = 0.05$

Contrastes de dos parámetros.

Comparación de medias.

Los siguientes problemas tratan de contrastes de parámetros entre dos muestras. Para cada uno de los enunciados contratar contra las hipótesis unilaterales y bilaterales. Calcular también el intervalo de confianza para la diferencia o el cociente de los parámetros. Tomar finalmente la decisión más correcta. Calcular todos los test e intervalos de confianza para $\alpha = 0.05$. Calcular el p-valor en cada caso.

193.- Para comparar la producción media de dos procedimientos de fabricación de cierto elemento se toman dos muestras, una con los elementos fabricados durante 25 días con el primer método y otra con los producidos durante 16 días con el segundo método. Por experiencia se sabe que la varianza del primer procedimiento es $\sigma_1^2 = 12$ y al del segundo $\sigma_2^2 = 10$. De las muestras obtenemos que $\overline{X}_1 = 136$ para el primer procedimiento y $\overline{X}_2 = 128$ para el segundo.

194.- Estamos interesados en comparar la vida media, expresada en horas de dos tipos de componentes electrónicos. Para ello se toma una muestra de cada tipo y se obtiene:

Tipo	tamaño	$\overline{X}$	S
1	50	1260	20
2	100	1240	18

Suponer si es necesario las poblaciones aproximadamente normales.

195.- Para reducir la concentración de ácido úrico en la sangre se prueban dos drogas. La primera se aplica a un grupo de 8 pacientes y la segunda a un grupo de 10. Las disminuciones observadas en las concentraciones de ácido úrico de los distintos pacientes expresadas en tantos por cien de concentración después de aplicado el tratamiento son:

droga 1	20	12	16	18	13	22	15	20		
droga 2	17	14	12	10	15	13	9	19	20	11

Suponer que las reducciones de ácido úrico siguen una distribución normal son independientes y de igual varianza. Ídem pero suponiendo que las varianza son distintas.

196.- Para comparar la dureza media de dos tipos de aleaciones (tipo 1 y tipo 2) se hacen 5 pruebas de dureza con la de tipo 1 y 7 con la de tipo 2. Obteniéndose los resultados siguientes:

$$\overline{X}_1 = 18.2, \quad S_1 = 0.2 \text{ y}$$

$$\overline{X}_2 = 17.8; \quad S_2 = 0.5$$

Suponer que la población de las durezas es normal y que las desviaciones típicas no son iguales. Hacer lo mismo si las varianzas son distintas.

197.- Se encuestó a dos muestras independientes de internautas, una en Menorca y otra en Mallorca, sobre si utilizaban telefonía por intenet. La encuesta de Menorca tuvo un tamaño $n_1 = 500$ y 100 usuarios mientras que en Mallorca se encuestarron a $n_2 = 750$ y se obtuvo un resultado de 138 usuarios.

198.- Se pregunta a un grupo de 100 personas elegido al azar asiste a una conferencia sobre tecnologías de la comunicación. Antes de la conferencia se les pregunta si consideran a internet peligrosa, después de la conferencia se les vuelve a preguntar cual es su opinión. Los resultados fueron los siguientes:

		Después	
		Sí es peligrosa	No es peligrosa
Antes	Sí es peligrosa	50	30
	No es peligrosa	5	15

199.- Tenemos 10 ordenadores, deseamos optimizar su funcionamiento. Con este fin se piensa en ampliar su memoria. Se les pasa una prueba de rendimiento antes y después de ampliar la memoria. Los resultados fueron:

	Ordenador									
Muestra/Tiempo	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
Antes ampliación	98.70	100.48	103.75	114.41	97.82	91.13	85.42	96.8	107.76	112.94
Después ampliación	99.51	114.44	108.74	97.92	103.54	104.75	109.69	90.8	110.04	110.09

200.- Las siguientes muestras provienen de dos poblaciones independientes y supuestamente normales. Se desea comparar la igualdan de sus medias, pero antes debemos contrastar si podemos o no aceptar que sus varianza son iguales o distintas. Se pide hacer el contraste de las medias en el caso en que se se decida aceptar varianzas iguales o distintas al nivel de significación $\alpha = 0.05$.

Contrastar tambien la hipótesis de igualdad de medias en el otro caso (es decir si se decide varianzas ditintas contrastar para iguales y viceversa).