# Variables Aleatorias Parte I

# Introducción

- Hasta ahora nuestros sucesos han sido de varios tipos: $\{C, +\}$ en la moneda, nombres de periódicos, ángulos en una ruleta, número de veces que sale cara en el lanzamiento de una moneda etc. . . .
- Necesitamos estandarizar de alguna manera todos estos sucesos. Una solución es asignar a cada suceso un cierto conjunto de números reales, es decir, convertir todos los sucesos en sucesos de números reales para trabajar con ellos de forma unificada.
- Para conseguirlo utilizaremos unas funciones que transformen los elementos del espacio muestral en números; esta funciones son las variables aleatorias.

# Definición de variable aleatoria

Comenzaremos dando una definición práctica de variable aleatoria.

**Definición**

Definición práctica de variable aleatoria (v.a.) es una aplicación que toma valores numéricos determinados por el resultado de un experimento aleatorio

$$X : \Omega \to \mathbb{R}$$

**Notación**:

- Normalmente representaremos las v.a. por letras mayúsculas $X, Y, Z \ldots$
- Los valores que "toman" las v.a. los representaremos por letras minúsculas (las mismas en principio) $x, y, z \ldots$

# Ejemplo

Lanzamos un dado convencional de parchís el espacio muestral del experimento es

$$\Omega = \{\epsdice{1}, \epsdice{2}, \epsdice{3}, \epsdice{4}, \epsdice{5}, \epsdice{6}\}$$

y una v.a $X : \Omega \to \mathbb{R}$ sobre este espacio queda definida por

$$X(\epsdice{1}) = 1, X(\epsdice{2}) = 2, X(\epsdice{3}) = 3,$$
$$X(\epsdice{4}) = 4, X(\epsdice{5}) = 5, X(\epsdice{6}) = 6.$$

Ahora el suceso $A = \{\epsdice{2}, \epsdice{4}, \epsdice{6}\}$, es decir "salir número par", es equivalente a $\{X = 2, X = 4, X = 6\}$.
El suceso $B = \{\epsdice{1}, \epsdice{2}, \epsdice{3}\}$, es decir "salir un número inferior o igual a 3" es en términos de la v.a. $\{X = 1, X = 2, X = 3\}$ o también $\{X \leqslant 3\}$.

# Ejemplo

Consideremos el experimento lanzar una anilla al cuello de una botella. Si acertamos a ensartar la anilla en la botella el resultado del experimento es éxito y fracaso en caso contrario.
El espacio muestral asociado a este experimento será $\Omega = \{\text{éxito, fracaso}\}$. Construyamos la siguiente variable aleatoria:

$$X : \{\text{éxito, fracaso}\} \to \mathbb{R}$$

definida por

$$X(\text{éxito}) = 1 \text{ y } X(\text{fracaso}) = 0.$$

Hay dos tipos fundamentales de variables aleatorias, las discretas y las continuas. Damos a continuación una definición informal de estos tipos.

### Definición

a) Una variable aleatoria es discreta si sólo puede tomar una cantidad numerable de valores con probabilidad positiva.
b) La variables aleatorias continuas toman valores en intervalos.
c) Variables aleatorias mixtas; con una parte discreta y otra continua.

# Ejemplo

Son variables aleatorias discretas:

- Número de artículos defectuosos en un cargamento.
- Número de clientes que llegan a una ventanilla de un banco en una hora.
- Número de errores detectados en las cuentas de una compañía.
- Número de reclamaciones de una póliza de un seguro médico.

Son variables aleatorias continuas:

- Renta anual de una familia.
- Cantidad de petróleo importado por un país
- Variación del precio de las acciones de una compañía de telecomunicaciones.
- Porcentaje de impurezas en un lote de productos químicos.

## Distribuciones de probabilidad para v.a. discretas.

- Pasamos ahora a describir el comportamiento de la v.a. Para ello utilizaremos distintas funciones que nos darán algunas probabilidades de la variable aleatoria.
- En el caso discreto estas funciones son la de probabilidad, y la función de distribución o de probabilidad acumulada.
- En el caso discreto la función de probabilidad es la que nos da las probabilidades de los sucesos elementales de la v.a. que definimos a continuación.

## Definición

La función de probabilidad (*probability mass function* o incluso abusando de notación *probability density function*) de una variable aleatoria discreta $X$ a la que denotaremos por $P_X(x)$ está definida por

$$P_X(x) = P(X = x)$$

es decir la probabilidad de que $X$ tome el valor $x$. Si $X$ no asume ese valor entonces $P_X(x) = 0$.
El conjunto

$$D_X = \{x \in \mathbb{R} \mid P_X(x) > 0\}$$

recibe el nombre de dominio de la v.a. y son los valores posibles de esta variable.
En el caso discreto lo más habitual es que $X(\Omega) = D_X$.

# Ejemplo

Lanzamos un dado de parchís una vez, en esta ocasión representaremos los sucesos elementales por el número de puntos de la cara obtenida, tenemos que

$$\Omega = \{1, 2, 3, 4, 5, 6\}$$

y la variables aleatoria $X : \Omega \to \mathbb{R}$ viene definida por

$$X(i) = i \text{ para } i = 1, 2, 3, 4, 5, 6.$$

Supongamos que el dado está bien balanceado. Entonces

$$P_X(1) = P_X(2) = P_X(3) = P_X(4) = P_X(5) = P_X(6) = \frac{1}{6}$$

Concretamente:

$$P_X(x) = \begin{cases} \frac{1}{6} & \text{si } x = 1, 2, 3, 4, 5, 6 \\ 0 & \text{en otro caso} \end{cases}$$

Su dominio es

$$D_X = \{1, 2, 3, 4, 5, 6\}.$$

# Ejemplo

Sea $X$ la v.a. asociada al lanzamiento de una moneda. Su espacio muestra es $\Omega = \{c, +\}$, la v.a. queda definida por:

$$X(\omega) = \begin{cases} 1 & \text{si } \omega = c \\ 0 & \text{si } \omega = + \end{cases}$$

entonces su función de probabilidad es:

$$P_X(x) = P(X = x) = \begin{cases} \frac{1}{2} & \text{si } x = 0, 1 \\ 0 & \text{en otro caso} \end{cases}$$

Finalmente su dominio es $D_X = \{0, 1\}$.

# Ejemplo

Tenemos una urna con tres bolas rojas,una negra y dos blancas. Realizamos una extracción y observamos el color de la bola entonces un espacio muestral es

$$\Omega = \{roja, blanca, negra\}.$$

Una variable aleatoria asociada al experimento es:

$$X(\omega) = \begin{cases} 1 & \text{si } \omega = roja \\ 2 & \text{si } \omega = negra \\ 3 & \text{si } \omega = blanca \end{cases}$$

entonces

$$P_X(x) = \begin{cases} \frac{3}{6} & \text{si } x = 1 \\ \frac{1}{6} & \text{si } x = 2 \\ \frac{2}{6} & \text{si } x = 3 \\ 0 & \text{en otro caso} \end{cases}$$

El dominio de $X$ es $D_X = \{1, 2, 3\}$.

# Propiedades de la función de probabilidad.

Sea $X$ una v.a. discreta $X : \Omega :\to \mathbb{R}$ con dominio $D_X$. Su función de probabilidad $P_X$ verifica las siguientes propiedades:

a) $0 \leqslant P_X(x) \leqslant 1$ para todo $x \in \mathbb{R}$

b) $\sum\limits_{x \in D_X} P_X(x) = 1$

# Ejemplo

Lanzamos al aire tres veces, de forma independiente, una moneda perfecta. El espacio muestral de este experimento es

$$\Omega = \{ccc, cc+, c+c, +cc, c++, +c+, ++c, +++\}$$

(expresados en orden de aparición).
Este espacio tiene todos los sucesos elementales equiprobables.
Consideremos la variable aleatoria asociada a este experimento $X =$ número de caras en los tres lanzamientos.

# Ejemplo

Entonces

$$
\begin{aligned}
&P(X=0) = P(\{+++\}) = \tfrac{1}{8}\\
&P(X=1) = P(\{c++, +c+, ++c\}) = \tfrac{3}{8}\\
&P(X=2) = P(\{cc+, c+c, +cc\}) = \tfrac{3}{8}\\
&P(X=3) = P(\{ccc\}) = \tfrac{1}{8}
\end{aligned}
$$

La función de probabilidad de $X$ es:

$$
P_X(x) = \begin{cases} \frac{1}{8} & \text{si } x = 0, 3 \\ \frac{3}{8} & \text{si } x = 1, 2 \\ 0 & \text{en otro caso} \end{cases}
$$

Efectivamente

$$
\sum_{x=0}^{3} P_X(x) = \frac{1}{8} + \frac{3}{8} + \frac{3}{8} + \frac{1}{8} = 1.
$$

# Función de distribución de variables aleatorias

## Definición

La función de distribución de probabilidad (acumulada) de la v.a. $X$ (de cualquier tipo; discreta o continua) $F_X(x)$ representa la probabilidad de que $X$ tome un menor o igual que $x$ es decir

$$F_X(x) = P(X \leqslant x)$$

Esta función también se denomina función de distribución de probabilidad o simplemente función de distribución de una v.a., y en inglés cumulative distribution function por lo que se abrevia con el acrónimo cdf.

# Propiedades

Sea $X$ una v.a. y $F_X$ su función de distribución:

1) $P(X > x) = 1 - P(X \leqslant x) = 1 - F_X(x)$
2) Sea a y b tales que $a < b$,
   $P(a < X \leqslant b) = P(X \leqslant b) - P(X \leqslant a) = F_X(b) - F_X(a)$

*Demostración:*

1. $\overline{\{X > x\}} = \{X \leqslant x\}$.
   $P(X > x) = 1 - P(\overline{\{X > x\}}) = 1 - P(X \leqslant x) = 1 - F_X(x)$
2. $\{a < X \leqslant b\} = \{X \leqslant b\} - \{X \leqslant a\}$
   $P(a < X \leqslant b) = P(\{X \leqslant b\} - \{X \leqslant a\}) =$
   $P(\{X \leqslant b\}) - P(\{X \leqslant a\}) = F_X(b) - F_X(a)$.

# Propiedades

Sea $F_X$ la función de distribución de una v.a. $X$ entonces:

a) $0 \leqslant F_X(x) \leqslant 1$.

b) La función $F_X$ es no decreciente.

c) La función $F_X$ es continua por la derecha.

d) Si denotamos por $F_X(x_0^-) = \lim_{x \to x_0^-} F(x)$, entonces se cumple que $P(X < x_0) = F_X(x_0^-)$ y que $P(X = x_0) = F_X(x_0) - F_X(x_0^-)$.

e) Se cumple que $\lim_{x \to \infty} F_X(x) = 1$; $\lim_{x \to -\infty} F_X(x) = 0$.

f) Toda función $F$ verificando las propiedades anteriores es función de distribución de alguna v.a. $X$.

g) $P(X > x) = 1 - F_X(x)$

h) Dados $a, b \in \mathbb{R}$ con $a < b$

$$P(a < X \leqslant b) = F_X(b) - F_X(a).$$

# Propiedades

En las propiedades anteriores no se pueden cambiar en general las desigualdades de estrictas o no estrictas, veamos que propiedades tenemos cuando se cambian estas desigualdades. Sea $F_X$ una función de distribución de la v.a. $X$ y denotamos por $F_X(x_0^-) = \lim_{x \to x_0^-} F_X(x)$, entonces.

a) $P(X = x) = F_X(x) - F_X(x^-)$
b) $P(a < X < b) = F_X(b^-) - F_X(a)$
c) $P(a \leqslant X < b) = F_X(b^-) - F_X(a^-)$
d) $P(X < a) = F_X(a^-)$
e) $P(a \leqslant X \leqslant b) = F_X(b) - F_X(a^-)$
f) $P(X \geqslant a) = 1 - F_X(a^-)$

# Propiedades

a) Si $F_X$ es continua en $x$ se tiene que $P(X=x)=0$. Así que si la v.a. es continua $P(X \leqslant a) = P(X < a) + P(X = a) = P(X < a)$ y propiedades similares.

b) Sea $X$ una variable aleatoria discreta que con dominio $D_X$ y que tiene por función de probabilidad $P_X(x)$ entonces su función de distribución $F_X(x_0)$ es

$$F_X(x_0) = \sum_{x \leqslant x_0} P_X(x)$$

donde $\sum_{x \leqslant x_0}$ indica que sumamos todos los $x \in D_X$ tales que $x \leqslant x_0$

**Demostración:**

a) Si $X$ es continua

$$P(X=a)=F(a)-F(a^{-})=F(a)-F(a)=0$$

por lo tanto

$$\begin{aligned} P(X\leqslant a) =& P(X<a)+P(X=a)\\ =& P(X<a)+0=P(X<a). \end{aligned}$$

b)

$$\begin{aligned} F_X(x_0) &= P(X\leqslant x_0)=P\left(\bigcup_{x\leqslant x_0;x\in D_X}\{x\}\right)\\ &=\sum_{x\leqslant x_0}P(X=x)=\sum_{x\leqslant x_0}P_X(x). \end{aligned}$$

# Ejemplo

En el experimento del dado se tiene que:

$$P_X(x) = \begin{cases} \frac{1}{6} & \text{si } x = 1, 2, 3, 4, 5, 6 \\ 0 & \text{en el resto de casos} \end{cases},$$

por lo tanto

$$F_X(x) = P(X \leqslant x) = \begin{cases} 0 & \text{si } x < 1 \\ \frac{1}{6} & \text{si } 1 \leqslant x < 2 \\ \frac{2}{6} & \text{si } 2 \leqslant x < 3 \\ \frac{3}{6} & \text{si } 3 \leqslant x < 4 \\ \frac{4}{6} & \text{si } 4 \leqslant x < 5 \\ \frac{5}{6} & \text{si } 5 \leqslant x < 6 \\ 1 & \text{si } 6 \leqslant x \end{cases}$$

# Ejemplo

Calculemos más detalladamente algún valor de $F_X$, por ejemplo:

$$\begin{aligned} F_X(3.5) =& P(X \leqslant 3.5) = P(\{X = 1\} \cup \{X = 2\} \cup \{X = 3\}) \\ =& P(\{X = 1\}) + P(\{X = 2\}) + P(\{X = 3\}) \\ =& \frac{1}{6} + \frac{1}{6} + \frac{1}{6} = \frac{3}{6} = \frac{1}{2}, \end{aligned}$$

o de otra forma

$$\begin{aligned} F_X(3.5) &= \sum_{x \leqslant 3.5} P_X(x) = \sum_{x=1}^{3} P(X = x) \\ &= \sum_{x=1}^{3} \frac{1}{6} = 3 \cdot \frac{1}{6} = \frac{1}{2}. \end{aligned}$$

# Propiedades de la función de distribución

Sea $X$ una variable con función de distribución $F_X$ entonces:

a) $0 \leqslant F_X(x) \leqslant 1$ para todo $x$

b) Si $x < x'$ entonces

$$F_X(x) \leqslant F_X(x').$$

Es una función creciente, no necesariamente estrictamente creciente.

c) $\lim_{x \to -\infty} F_X(x) = 0$ y $\lim_{x \to +\infty} F_X(x) = 1$

d) Es continua por la derecha $\lim_{x \to x_0^+} F_X(x) = F_X(x_0)$.

# Momentos de variables aleatorias discretas

- Al igual que en estadística descriptiva utilizamos distintas medidas para resumir los valores centrales y para medir la dispersión de una muestra, podemos definir las correspondiente medidas para variables aleatorias.
- Estas medidas se les suele añadir el adjetivo poblacionales mientras que a las que provienen de la muestra se las adjetiva como muestrales.

Por ejemplo podemos buscar un valor que resuma toda la variable. Este valor es el que "esperamos" que se resuma la v.a. o esperamos que las realizaciones de la v.a. queden cerca de él. Veamos su definición formal.

### Definición

El valor esperado o esperanza (*expected value* en inglés) $E(X)$ de una v.a. discreta $X$, se define como

$$E(X) = \sum_{x \in X(\Omega)} x P_X(x)$$

En ocasiones se le domina media (*mean* en inglés *mitjana* en catalán) poblacional o simplemente media y muy frecuentemente se la denota $\mu_X = E(X)$ o simplemente $\mu = E(X)$.

# Interpretación de la media aritmética

Supongamos que lanzamos un dado $n$ veces y obtenemos unas frecuencias absolutas $n_i$ para el resultado $i$ con $i = 1, \ldots, 6$. Sea $X$ la v.a. que nos representa el valor de una tirada del dado.
Calculemos la media aritmética (o media muestral) de los datos

$$\overline{x} = \frac{1 \cdot n_1 + 2 \cdot n_2 + 3 \cdot n_3 + 4 \cdot n_4 + 5 \cdot n_5 + 6 \cdot n_6}{n} = \sum_{x=1}^{6} x \frac{n_x}{n}.$$

# Interpretación de la media aritmética

Si $n \to \infty$ se tiene que

$$\lim_{n\to\infty} \frac{n_x}{n} = P_X(x).$$

Por lo tanto

$$E(X) = \lim_{n\to\infty} \sum_{x=1}^{6} x \frac{n_x}{n}.$$

Entonces el valor esperado en una v.a. discreta puede entenderse como el valor promedio que tomaría una v.a. en un número grande de repeticiones.

# Ejemplo

Sea $X=$ número de erratas en una página de un texto con dominio $D_X = \{0, 1, 2\}$, y resulta que

$$P(X = 0) = 0.42, P(X = 1) = 0.4, P(X = 2) = 0.18.$$

entonces

$$E(X) = 0 \cdot 0.42 + 1 \cdot 0.4 + 2 \cdot 0.18 = 0.76.$$

Elegida una página del texto al azar esperamos encontrar 0.76 errores.

# Ejemplo

Supongamos que en el ejemplo anterior el editor nos paga 2 euros por cada página que encontremos con 1 error y 3 euros por cada página con dos errores (y nada por las páginas correctas) ¿Cuánto esperamos cobrar si analizamos una página?

$$0 \cdot 0.42 + 2 \cdot 0.4 + 3 \cdot 0.18 = 1.34$$

# Esperanzas de funciones de variables aleatorias discretas

**Definición**

Sea $X$ una v.a. discreta con función de probabilidad $P_X$ y de distribución $F_X$. Entonces el valor esperado de una función $g(x)$ es :

$$E(g(X)) = \sum_{x} g(x) P_X(x).$$

# Propiedades de los valores esperados

a) $E(k) = k$ para cualquier constante $k$.

b) Si $a \leqslant X \leqslant b$ entonces $a \leqslant E(X) \leqslant b$.

c) Si $X$ es una v.a. discreta que toma valores enteros no negativos entonces $E(X) = \sum_{x=0}^{+\infty}(1 - F_X(x))$.

# Ejemplo

Supongamos que estamos sentados delante de nuestro ordenador con un amigo y le decimos que en dos minutos podemos programar una paleta para poner colores a unos gráficos.
Queremos la que paleta tenga dos botones con las opciones color rojo y color azul. Como hemos programado a gran velocidad resulta que el programa tiene un error; cada vez que se abre la paleta los colores se colocan al azar (con igual probabilidad) en cada botón, así que no sabemos en que color hemos de pinchar.
Además, como nos sobraron 15 segundos para hacer el programa y pensando en la comodidad del usuario, la paleta se cierra después de haber seleccionado un color y hay que volverla a abrir de nuevo.
La pregunta es ¿cuál es el valor esperado del número de veces que hemos pinchar el botón de color azul antes de obtener este color?

# Ejemplo

Llamemos $X$ al número de veces que pinchamos en el botón azul (y nos sale rojo) hasta obtener el primer azul. La variable $X$ toma valores en los enteros no negativos. Su función de probabilidad queda determinada por

$$P_X(x) = P(X = x) = P(\overbrace{rojo, rojo, \ldots, rojo}^{x \text{veces}}, azul) = \left(\frac{1}{2}\right)^{x+1}$$

# Propiedades de las series geométricas

Recordemos conceptos básicos de las series geométricas.

- Una progresión geométrica es una sucesión de la forma
$$r^0, r^1, \ldots, r^n, \ldots.$$
El valor $r$ recibe el nombre de razón de la progresión geométrica.
- La serie geométrica es la suma de todos los valores de la progresión geométrica $\displaystyle\sum_{k=0}^{+\infty} r^k$.
- Las sumas parciales desde el término $n_0$ al $n$ de una progresión geométrica son $\sum_{k=n_0}^{n} r^k = \frac{r^{n_0}-r^n r}{1-r}$.
- Si $|r| < 1$ la serie geométrica es convergente y $\displaystyle\sum_{k=0}^{+\infty} r^k = \frac{1}{1-r}$. En el caso en que se comience en $n_0$ se tiene que $\displaystyle\sum_{k=n_0}^{+\infty} r^k = \frac{r^{n_0}}{1-r}$.

# Conceptos básicos de series geométricas

- Si $|r| < 1$ también son convergentes las derivadas, respecto de $r$, de la serie geométrica y convergen a la derivada correspondiente. Así tenemos que

$$\begin{aligned}
\left(\sum_{k=0}^{+\infty} r^k\right)' &= \sum_{k=1}^{+\infty} k r^{k-1} \\
&= \left(\frac{1}{1-r}\right)' = \frac{1}{(1-r)^2}. \\
\left(\sum_{k=0}^{+\infty} r^k\right)'' &= \sum_{k=2}^{+\infty} k(k-1) r^{k-2} \\
&= \left(\frac{1}{1-r}\right)'' = \frac{2}{(1-r)^3}.
\end{aligned}$$

# Ejemplo

Su esperanza es

$$E(X) = \sum_{x=0}^{+\infty} xP(X = x) = \sum_{x=0}^{+\infty} x \left(\frac{1}{2}\right)^{x+1}$$
$$= \left(\frac{1}{2}\right)^2 \sum_{x=1}^{+\infty} x \left(\frac{1}{2}\right)^{x-1} = \left(\frac{1}{2}\right)^2 \frac{1}{\left(1 - \frac{1}{2}\right)^2} = 1.$$

Ahora calculemos su función de distribución

$$F_X(x) = P(X \leqslant x) = \sum_{k=0}^{x} P(X = k) = \sum_{k=0}^{x} \left(\frac{1}{2}\right)^{k+1}$$
$$= \frac{\frac{1}{2} - \frac{1}{2}^{x+1}\frac{1}{2}}{1 - \frac{1}{2}} = 1 - (\frac{1}{2})^{x+1}.$$

# Ejemplo

Como la variable toma valores enteros positivos, podemos calcular su valor esperado de esta otra manera

$$E(X) = \sum_{x=0}^{+\infty}(1 - F_X(x)) = \sum_{x=0}^{+\infty}(\frac{1}{2})^{x+1} = \frac{1}{2}\frac{1}{1-\frac{1}{2}} = 1.$$

Como ejercicio calculad el valor esperado de la variable

$Y =$ número de intentos para conseguir el color azul.

# Momentos de una variable aleatoria

**Definición**

- Llamaremos momento de orden $r$ respecto al punto $C$ a $E\left((X-C)^m\right)$.
- Cuando $C=0$ los momentos reciben el nombre de momentos respecto al origen.
- Cuando $C=E(X)$ reciben el nombre de momentos centrales o respecto de la media

Luego la esperanza es el momento de orden 1 respecto al origen. Estos momentos son la versión poblacional de los momentos que vimos en el capítulo de estadística descriptiva, recibiendo estos último el nombre de momentos muestrales.

- Hemos descrito el comportamiento aleatorio de una v.a. discreta mediante sus funciones de probabilidad $P_X$ y de distribución $F_X$.
- También tenemos un valor central; el valor esperado $E(X)$.
- Como medida básica nos queda definir una medida de lo lejos que están los datos del valor central $E(X)$ una de estas medidas es la varianza de $X$.

**Definición**

Sea $X$ una v.a. Llamaremos varianza de $X$ a

$$Var(X) = E((X - E(X))^2)$$

Por lo tanto la varianza es el momento central de orden 2. De forma frecuente se utiliza la notación

$$\sigma_X^2 = Var(X).$$

A la raíz cuadrada positiva de la varianza

$$\sigma_X = \sqrt{Var(X)}$$

se la denomina desviación típica o estándar de $X$.

# Propiedades de la varianza

a) Si $X$ es una v.a. discreta con función de probabilidad $P_X$ su varianza es

$$\sigma_X^2 = Var(X) = E((X - E(X))^2) = \sum_x (x - E(X))^2 P_X(x).$$

b) Sea $X$ una v.a.

$$Var(X) = E(X^2) - (E(X))^2 = \sum_x x^2 P_X(X) - (E(X))^2$$

**Demostración de b)**

$$
\begin{aligned}
Var(X) =& \sum_x (x - E(X))^2 P_X(x) \\
=& \sum_x (x^2 - 2xE(X) + (E(X)^2) P_X(x) \\
=& \sum_x x^2 P_X(x) - E(X) \sum_x 2x P_X(x) \\
& + (E(X)^2) \sum_x P_X(x) \\
=& E(X^2) - 2E(X)E(X) + (E(X))^2 \\
=& E(X^2) - (E(X))^2.
\end{aligned}
$$

## Ejemplo

Valculemos en el ejemplo anterior la varianza del número de errores. Recordemos que:

$$P(X=0)=0.42, \quad P(X=1)=0.4, \quad P(X=2)=0.18$$

y que

$$E(X)=0.76$$

Entonces:

$$Var(X)=E(X^2)-(E(X))^2=E(X^2)-(0.76)^2$$

# Ejemplo

Ahora necesitamos calcular

$$E(X^2) = 0^2(0.41) + 1^2(0.4) + 2^2(0.18) = 0.4 + 0.72 = 1.12$$

y por lo tanto

$$Var(X) = E(X^2) - (0.76)^2 = 1.12 - 0.5776 = 0.542$$

y

$$\sqrt{Var(X)} = \sqrt{0.542}$$

En resumen $\sigma_X^2 = 0.542$ y $\sigma_X = \sqrt{0.542}$

# Propiedades de la varianza

a) $Var(X) \geqslant 0$

b) $Var(cte) = E(cte^2) - (E(cte))^2 = cte^2 - cte^2 = 0$

c) El mínimo de $E((X - C)^2)$ se alcanza cuando $C = E(X)$ y es $Var(X)$. Esta propiedad es una de las que hace útil a la varianza como medida de dispersión.

*Demostración:*(ejercicio)

# Esperanza y varianza de transformaciones lineales. Propiedades

**Definición**

Un **cambio de variable lineal** o **transformación lineal** de una v.a. $X$ es otra v.a. $Y = a + bX$ donde $a, b \in \mathbb{R}$.

Sea $X$ una v.a. con $E(X) = \mu_X$ y $Var(X) = \sigma_X^2$ y $a, b \in \mathbb{R}$. Entonces si $Y = a + bX$ :

a) $E(Y) = E(a + bX) = a + bE(X) = a + b\mu_X$.

b) $Var(Y) = Var(a + bX) = b^2 Var(X) = b^2\sigma_X^2$

c) $\sigma_Y = \sqrt{Var(Y)} = \sqrt{b^2 Var(X)} = |b|\sigma_X$

*Demostración:*

$$\begin{aligned} E(Y) =& E(a+bX) = \sum_x (a+b\cdot X)\cdot P_X(x) \\ =& a\sum_x P_X(x) + b\sum_x x\cdot P_X(x) \\ =& a + b\cdot E(X) = a + b\mu_X \end{aligned}$$

Las demostración de las demás propiedades queda como ejercicio.