# INTRODUCCIÓ A L'ESTADÍSTICA INFERENCIAL

Arnau Mir Jaume Suñer

28 de setembre de 2019

# Prefaci

L'obra aquí presentada d'*Introducció a l'estadística inferencial* és el resultat de més de cinc anys de docència per part dels autors en els estudis de les Enginyeries Tècniques d'Informàtica de Gestió i de Sistemes a la Universitat de les Illes Balears.

Hem volgut escriure uns apunts d'estadística molt pràctics. Per aquest motiu, hem estructurat tots els capítols en tres parts: resum teòric, problemes resolts i problemes proposats.

L'obra es complementa amb el llibre *Introducció a l'estadística descriptiva i a la teoria de les probabilitats*, dels mateixos autors. De fet, es pot dir que aquests apunts són la continuació de l'esmentada obra.

Quan un pretén escriure uns apunts d'estadística inferencial, ha d'evitar un mal de molts llibres sobre el tema: explicar l'estadística com un receptari de cuina. En el nostre cas, la tasca és doble: evitar escriure un receptari de cuina sense donar una estadística massa teòrica que provocaria una pèrdua d'interès per part de l'alumne. Un tema on es manifesta de forma clara el fet anterior és el de contrasts d'hipòtesis en el qual donam només les regions crítiques dels contrasts més importants sense explicar la regió crítica en el cas general; o sigui, sense explicar el lema de Neyman-Pearson ni el criteri de la raó de versemblança.

Un altre canvi substancial respecte d'altres llibres d'estadística és el càlcul de l'error tipus I màxim en els contrasts d'hipòtesis, ja que és el mètode habitual per realitzar un contrast en molts paquests estadístics. La dificultat que hi ha quan es fan els contrasts d'aquesta manera són les taules estadístiques. Totes les taules estadístiques que hem vist són molt incompletes i, a vegades, redundants. En aquests apunts, hem volgut donar unes taules el més completes possible.

Les pràctiques d'estadística són la clau per acabar d'entendre tots els conceptes d'estadística inferencial. Per aquest motiu, hem volgut proposar una sèrie de pràctiques que l'alumne pot desenvolupar.

Un altre motiu que ens ha impulsat a escriure l'obra ha estat el pla d'estudis. Després de la darrera revisió dels plans d'estudis, quasi totes les assignatures han vist retallades les hores de classe sense retallar el temari. Si els alumnes tenen una sèrie de problemes resolts, podran seguir les classes més fàcilment ja que podran fer un estudi previ de cada tema.

Els autors volem agrair la col·laboració del professor Ricardo Alberich en l'elaboració de la taula dels contrasts d'hipòtesis i, en general, la de tots els membres del Departament de Matemàtiques i Informàtica de la Universitat de les Illes Balears pel bon ambient de feina.

# Índex

# Índex de figures

# Capítol 1

# Introducció al mostreig estadístic

## 1.1 Resum teòric

La inferència estadística tracta de l'estudi d'alguns conceptes numèrics relatius a un gran nombre d'individus (la **població**) a partir d'un subconjunt relativament petit (una **mostra** de la població). Per exemple, podem estar interessats a estimar el valor mitjà de tots els nombres que formen la població (**estimació puntual**) o a donar un interval de valors amb una probabilitat coneguda de contenir el valor mitjà (**interval de confiança**) o a saber si un nombre específic és igual al valor mitjà (**contrast d'hipòtesi**). En cada un d'aquests casos es vol una resposta basada exclusivament en informació parcial, o sigui, donada per una mostra de la població, més que en l'examen complet de tota la població.

Una població es modelitza mitjançant una variable aleatòria $X$, de manera que el seu rang de valors coincideix amb el conjunt de valors de la població. Perquè vagi bé la mostra s'ha de seleccionar de manera aleatòria. La definició formal de mostra és la següent:

**Definició 1.1** *Una* **mostra aleatòria simple** *de grandària $n$ d'una variable aleatòria $X$ és un conjunt de $n$ variables aleatòries $X_1, \ldots, X_n$ independents i idènticament distribuïdes, essent $F_X$ la funció de distribució comuna: $F_{X_i} = F_X \ \forall i = 1, \ldots, n$.*

Si $X_1, \ldots, X_n$ és una mostra aleatòria simple d'una variable aleatòria $X$, les variables aleatòries $X_1, \ldots, X_n$ s'anomenen els **elements de la mostra**. Una vegada que s'ha pres la mostra, es coneixen els valors observats de $X_1, \ldots, X_n$.

**Definició 1.2** *Una* **estadística** *és qualsevol funció dels elements d'una mostra aleatòria simple que no depèn dels paràmetres desconeguts.*

**Definició 1.3** *Donada una mostra aleatòria simple $X_1, \ldots, X_n$ d'una variable aleatòria $X$, direm:*

1. **k-èssim moment de la mostra**: $M_k = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} X_i^k$,
2. **Mitjana de la mostra**: $\bar{X} = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} X_i$,
3. **Variància de la mostra**: $S^2 = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}(X_i - \bar{X})^2 = \frac{\sum_{i=1}^{n} x_i^2}{n} - \bar{x}^2$,
4. **Desviació estàndard** *(o* **típica***)*: $S = +\sqrt{S^2}$,
5. **Quasivariància de la mostra** : $\tilde{S^2} = \frac{1}{n-1}\sum_{i=1}^{n}(X_i - \bar{X})^2 = \frac{n}{n-1}S^2$.

**Notes.**

1. Aquestes quatre estadístiques (i qualsevol altra) són funcions de variables aleatòries i, per tant, també són variables aleatòries.
2. $\tilde{S^2} = \frac{1}{n-1}\left(\sum_{i=1}^{n} X_i^2 - n\bar{X}^2\right)$.

**Definició 1.4** *Donada una mostra aleatòria simple $X_1, \ldots, X_n$ d'una variable aleatòria $X$, ordenam els elements de menor a major: $X_{(1)} \leq \cdots \leq X_{(n)}$. Aleshores direm* **estadística d'ordre $i$-èssim** *a $X_{(i)}$.*

**Definició 1.5** *Donada una mostra $X_1, \ldots, X_n$, la* **mediana de la mostra** *és: $M_0 = X_{((n+1)/2)}$ si $n$ és imparell, i $M_0 = \frac{1}{2}[X_{(n/2)} + X_{((n+2)/2)}]$ si $n$ és parell. El* **rang de la mostra** *és: $R_a = X_{(n)} - X_{(1)}$.*

**Propietat:** Sigui $X_1, \ldots, X_n$ una mostra aleatòria simple d'una variable aleatòria $X$ i sigui $M_k$ el k-èssim moment de la mostra. Aleshores:

$$\mathrm{E}M_k = m_k, \; VarM_k = \frac{1}{n}(m_{2k} - m_k^2),$$

on $m_k$ és el k-èssim moment de $X$, és a dir, $m_k = \mathrm{E}\left(X^k\right)$.

**Propietats.**

1. Donada una variable aleatòria $X$ amb distribució $N(\mu, \sigma^2)$, aleshores la variable aleatòria $W = \dfrac{(X-\mu)^2}{\sigma^2}$ s'anomena variable aleatòria $\chi^2$ **amb un grau de llibertat**. La seva funció de densitat és:
$$f_W(w) = \frac{w^{-1/2}}{\sqrt{2\pi}} e^{-w/2},\ w > 0,$$
i la seva funció generatriu de moments:
$$m_W(t) = \frac{1}{(1-2t)^{1/2}}, \qquad \text{per a } t < \tfrac{1}{2}.$$

2. Sigui $X_1, \ldots, X_n$ una mostra aleatòria simple d'una variable aleatòria $X$ amb distribució $N(\mu, \sigma^2)$. Aleshores $Y = \displaystyle\sum_{i=1}^{n} \frac{(X_i - \mu)^2}{\sigma^2}$ és una **variable aleatòria** $\chi^2$ **amb** $n$ **graus de llibertat**.

   **Nota:** Aquesta distribució $\chi^2$ apareix sovint en la inferència estadística. Si dibuixam la gràfica de la funció de densitat de $\chi^2$, observarem que si el nombre de graus de llibertat $d$ supera 2, la funció té un màxim en $d-2$. La mitjana és $d$ i la variància, $2d$. A mesura que $d$ creix, la funció de densitat es fa cada vegada més simètrica. De fet, en el límit, és una normal.

3. Sigui $Y$ una variable aleatòria $\chi^2$ amb $d > 30$ graus de llibertat. Aleshores $\sqrt{2Y} - \sqrt{2d-1}$ és aproximadament una variable aleatòria $N(0,1)$. Per tant
$$\begin{aligned} \alpha = p\left\{Y \leq \chi^2_\alpha\right\} &= p\left\{\sqrt{2Y} - \sqrt{2d-1} \leq \sqrt{2\chi^2_\alpha} - \sqrt{2d-1}\right\} \\ &\simeq p\left\{Z \leq \sqrt{2\chi^2_\alpha} - \sqrt{2d-1}\right\} \\ &= p\left\{Z \leq z_\alpha\right\}, \end{aligned}$$
on $z_\alpha$ és el percentil $100\alpha$-èssim de la distribució $N(0,1)$. Per tant, si $d > 30$,
$$\sqrt{2\chi^2_\alpha} - \sqrt{2d-1} \simeq z_\alpha \Longrightarrow \chi^2_\alpha \simeq \frac{1}{2}(z_\alpha + \sqrt{2d-1})^2.$$

4. Sigui $X_1, \ldots, X_n$ una mostra aleatòria simple d'una variable aleatòria normal $X$. Aleshores $\displaystyle\sum_{i=1}^{n} \frac{(X_i - \bar{X})^2}{\sigma^2}$ és una variable aleatòria $\chi^2$ amb $d = n-1$ graus de llibertat i $S^2$ i $\bar{X}$ són variables aleatòries independents.

   **Nota:** Observem que $S^2$ i $\bar{X}$ són funcions de les mateixes variables aleatòries, però en canvi resulten ser independents.

5. Sigui $X_1, \ldots, X_n$ una mostra aleatòria simple d'una variable aleatòria $X$ i sigui $X_{(i)}$ l'estadística d'ordre $i$ de la mostra, aleshores la funció de distribució de $X_{(i)}$ és:
$$F_{X_{(i)}}(t) = \sum_{k=i}^{n} \binom{n}{k} (F_X(t))^k (1 - F_X(t))^{n-k}.$$

## 1.2 Problemes resolts

**1.1.-** Es fabriquen bombetes amb durades distribuïdes normalment amb vida mitjana de 200 hores i desviació estàndard de 20 hores. Es trien a l'atzar 3 bombetes, quina és la probabilitat que les 3 bombetes durin més de 195 hores?

**Resolució.** Considerem la variable aleatòria $T$: "durada d'una bombeta". Tenim que $T$ és $N(\mu = 200\ h., \sigma = 20\ h.)$. Sigui $T_1, T_2, T_3$ una mostra aleatòria de $T$ de grandària 3, o sigui, la durada de tres bombetes escollides a l'atzar. Ens demanen calcular:

$$p\left\{(T_1 > 195) \cap (T_2 > 195) \cap (T_3 > 195)\right\}.$$

Gràcies a la independència, podem escriure que:

$$\begin{aligned} p\left\{(T_1 > 195) \cap (T_2 > 195) \cap (T_3 > 195)\right\} &= p\left\{T > 195\right\}^3 \\ &= p\left\{Z = N(0,1) > \frac{195 - 200}{20}\right\}^3 \\ &= p\left\{Z > -0.25\right\}^3 = p\left\{Z < 0.25\right\}^3 \\ &\approx 0.5987^3 \approx 0.2146 \end{aligned}$$

**1.2.-** Suposem que $X$ esta distribuïda uniformement en l'interval $(0,1)$. Si es pren una mostra aleatòria simple de 5 observacions de $X$, quina és la funció de densitat conjunta de la mostra?

**Resolució.** Recordem que la funció de densitat d'una variable uniforme en l'interval $(0,1)$ és:

$$f(x) = \begin{cases} 1, & \text{si } x \in (0,1), \\ 0, & \text{en cas contrari.} \end{cases}$$

Sigui $X_1, \ldots, X_5$ una mostra aleatòria d'$X$. A causa de la independència, la funció de densitat conjunta de la mostra serà el producte de les funcions de densitat de cada una de les variables aleatòries. Així, doncs, tenim que:

$$f_{X_1 \ldots X_5}(x_1, \ldots, x_5) = \prod_{i=1}^{5} f_{X_i}(x_i) = \begin{cases} 1, & \text{si } (x_1, \ldots, x_5) \in (0,1)\text{x} \cdots \text{x}(0,1), \\ 0, & \text{en cas contrari.} \end{cases}$$

**1.3.-** Se sap que els resultats de cert examen estan distribuïts normalment amb mitjana $\mu$ i variància $\sigma^2$. Si es trien a l'atzar 10 persones per examinar-les, quina és la funció de densitat conjunta dels seus resultats? Quina és la probabilitat que la mitjana de les 10 notes sigui menor que $\mu$?

**Resolució.** Si $X$ és $N(\mu, \sigma^2)$, la seva funció de densitat val:

$$f_X(x) = \frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}} \mathrm{e}^{-\frac{(x-\mu)^2}{2\sigma^2}}, \quad x \in \mathbb{R}.$$

Sigui $X_1, \ldots, X_{10}$ una mostra aleatòria de $X$ de grandària 10. La funció de densitat conjunta de la mostra, fent servir que les variables $X_i$ són independents, serà el producte de les funcions de densitat de cada variable:

$$f_{X_1 \ldots X_{10}}(x_1, \ldots, x_{10}) = \prod_{i=1}^{10} f_{X_i}(x_i) = \frac{1}{\sigma^{10}(2\pi)^5} \mathrm{e}^{-\frac{1}{2\sigma^2}\sum\limits_{i=1}^{10}(x_i-\mu)^2}.$$

La mitjana de les notes serà:

$$\overline{X} = \frac{X_1 + \cdots + X_{10}}{10}.$$

Si les variables $X_i$ són $N(\mu, \sigma^2)$, la variable $\overline{X}$ també serà normal $N\left(\mu, \frac{\sigma^2}{10}\right)$. Per tant:

$$p\left\{\overline{X} < \mu\right\} = p\left\{Z = N(0,1) = \frac{\overline{X} - \mu}{\frac{\sigma}{\sqrt{10}}} < 0\right\} = 0.5.$$

**1.4.-** Una moneda no trucada es llança 5 vegades a l'aire. Quina és la probabilitat que la proporció de la mostra de cares estigui com a màxim a distància 0.05 de $\frac{1}{2}$? I la que estigui com a màxim a distància 0.15 de $\frac{1}{2}$?

**Resolució.** Siguin $X_1, \ldots, X_5$ els resultats obtenguts, on

$$X_i = \begin{cases} 1, & \text{si surt cara,} \\ 0, & \text{si surt creu.} \end{cases}$$

Per tant, podem afirmar que $X_i$ és una variable de Bernoulli amb paràmetre $p = \frac{1}{2}$ ja que la moneda no està trucada.

Ens demanen calcular:

$$\begin{aligned} p_1 &= p\left\{\left|\overline{X}-\frac{1}{2}\right|<0.05\right\}, \\ p_2 &= p\left\{\left|\overline{X}-\frac{1}{2}\right|<0.15\right\}. \end{aligned}$$

Calculem $p_1$:

$$\begin{aligned} p_1 &= p\left\{\frac{1}{2}-0.05<\overline{X}<\frac{1}{2}+0.05\right\}=p\left\{0.45<\overline{X}<0.55\right\} \\ &= p\left\{2.25<\sum_{i=1}^{5}X_i<2.75\right\}=0, \end{aligned}$$

ja que la variable aleatòria $Y=\sum_{i=1}^{5}X_i$ és una variable binomial amb paràmetres $n=5$ i $p=\frac{1}{2}$ que pren valors enters i no hi ha cap enter entre 2.25 i 2.75.

A continuació, trobem $p_2$:

$$\begin{aligned} p_2 &= p\left\{\frac{1}{2}-0.15<\overline{X}<\frac{1}{2}+0.15\right\}=p\left\{0.35<\overline{X}<0.65\right\} \\ &= p\left\{1.75<Y=\sum_{i=1}^{5}X_i<3.25\right\}=f_Y(2)+f_Y(3) \\ &= \binom{5}{2}\left(\frac{1}{2}\right)^5+\binom{5}{3}\left(\frac{1}{2}\right)^5=20\left(\frac{1}{2}\right)^5=0.625 \end{aligned}$$

**1.5.-** Donada una mostra aleatòria simple $X_1, X_2, \ldots, X_n$ d'una variable de Bernoulli amb paràmetre $p$, demostrau que:

$$\begin{aligned} p\left\{X_{(n)}=1\right\} &= 1-(1-p)^n, \\ p\left\{X_{(1)}=1\right\} &= p^n. \end{aligned}$$

Recordem que $X_{(n)}=\max\{X_1,\ldots,X_n\}$ i $X_{(1)}=\min\{X_1,\ldots,X_n\}$.

**Resolució.** Trobarem primerament les funcions de probabilitat de les variables $X_{(n)}$ (màxim) i $X_{(1)}$ (mínim).

Fixau-vos que el rang de $X_{(n)}$ i $X_{(1)}$ serà el mateix que el rang d'$X$. O sigui

$$X_{(n)}(\Omega) = X_{(1)}(\Omega) = \{0, 1\}.$$

Basta trobar la funció de probabilitat en els valors 0 i 1.

Recordem que la relació entre les funcions de distribució de les variables $X_{(n)}$ i $X_{(1)}$ i la variable $X$ era:

$$\begin{aligned} F_{X_{(n)}}(t) &= F_X(t)^n, \\ F_{X_{(1)}}(t) &= 1 - (1 - F_X(t))^n. \end{aligned} \tag{1.1}$$

En el nostre cas, la funció de distribució d'$X$ és:

$$F_X(t) = \begin{cases} 0, & \text{si } x < 0, \\ (1-p), & \text{si } 0 \leq x < 1, \\ 1, & \text{si } x \geq 1. \end{cases}$$

Per tant, fent servir (1.1), podem trobar les funcions de distribució de $X_{(n)}$ i $X_{(1)}$:

$$\begin{aligned} F_{X_{(n)}}(t) &= \begin{cases} 0, & \text{si } x < 0, \\ (1-p)^n, & \text{si } 0 \leq x < 1, \\ 1, & \text{si } x \geq 1. \end{cases} \\ F_{X_{(1)}}(t) &= \begin{cases} 0, & \text{si } x < 0, \\ 1 - (1 - (1-p))^n = 1 - p^n, & \text{si } 0 \leq x < 1, \\ 1, & \text{si } x \geq 1. \end{cases} \end{aligned}$$

La funció de probabilitat de $X_{(n)}$ serà el salt en les discontinuïtats de $F_{X_{(n)}}(t)$ en $t = 0$ i $t = 1$:

| $x$ | 0 | 1 |
|---|---|---|
| $f_{X_{(n)}}$ | $(1-p)^n$ | $1 - (1-p)^n$ |

En particular deduïm que $p\left\{X_{(n)} = 1\right\} = f_{X_{(n)}}(1) = 1 - (1-p)^n$.

En el cas del mínim $X_{(1)}$, trobam la funció de probabilitat de la mateixa forma:

| $x$ | 0 | 1 |
|---|---|---|
| $f_{X_{(1)}}$ | $1 - p^n$ | $p^n$ |

En particular deduïm que $p\left\{X_{(1)} = 1\right\} = f_{X_{(1)}}(1) = p^n$.

**1.6.-** Donada una mostra aleatòria $X_1, X_2, \ldots, X_n$ d'una variable aleatòria contínua $X$, calculau els valors de $\mathrm{E}(F_X(X_{(n)}))$ i de $\mathrm{E}(F_X(X_{(1)}))$.
Indicació: $\int n(F_X(t))^n f_X(t)\,dt = \frac{n}{n+1}(F_X(t))^{n+1}$.

**Resolució.** Recordem que si la variable $X$ és contínua, les funcions de densitat de les variables aleatòries que ens donen el màxim i el mínim de la mostra les donen:

$$\begin{aligned} f_{X_{(1)}}(t) = &\ n f_X(t)(1-F_X(t))^{n-1}, \\ f_{X_{(n)}}(t) = &\ n f_X(t) F_X(t)^{n-1}. \end{aligned} \tag{1.2}$$

Per tant,

$$\begin{aligned} \mathrm{E}[F_X(X_{(n)})] &= \int_{\mathbb{R}} F_X(t) f_{X_{(n)}}(t)\,dt = \int_{\mathbb{R}} F_X(t) n f_X(t) F_X(t)^{n-1}\,dt \\ &= \int_{\mathbb{R}} n f_X(t) F_X(t)^n\,dt = \left[\frac{n}{n+1} F_X(t)^{n+1}\right]_{-\infty}^{\infty} = \frac{n}{n+1}, \end{aligned}$$

ja que $\lim_{t\to-\infty} F_X(t) = 0$ i $\lim_{t\to\infty} F_X(t) = 1$.

De la mateixa manera, fent servir (1.2) i tenint en compte els valors dels dos límits anteriors podem calcular $E[F_X(X_{(1)})]$:

$$\begin{aligned} \mathrm{E}[F_X(X_{(1)})] &= \int_{\mathbb{R}} F_X(t) f_{X_{(1)}}(t)\,dt = \int_{\mathbb{R}} F_X(t) n f_X(t)(1-F_X(t))^{n-1}\,dt \\ &= \int_{\mathbb{R}} -(1-F_X(t)-1) n f_X(t)(1-F_X(t))^{n-1}\,dt \\ &= -\int_{\mathbb{R}} n f_X(t)(1-F_X(t))^n\,dt + \int_{\mathbb{R}} n f_X(t)(1-F_X(t))^{n-1}\,dt \\ &= \left[n\frac{(1-F_X(t))^{n+1}}{n+1}\right]_{-\infty}^{\infty} - \left[(1-F_X(t))^n\right]_{-\infty}^{\infty} \\ &= \frac{n}{n+1}(0-1) - (0-1) = -\frac{n}{n+1} + 1 = \frac{1}{n+1}. \end{aligned}$$

**1.7.-** Calculau $\mathrm{E}(\tilde{S}^2)$ i $\mathrm{E}(\tilde{S})$ per a una mostra aleatòria simple d'una variable aleatòria normal.
Indicació: $\frac{(n-1)\tilde{S}^2}{\sigma^2}$ és una variable aleatòria $\chi^2_{n-1}$.

**Resolució.** Per trobar $\mathrm{E}\left[\tilde{S}^2\right]$ hem de tenir en compte que:

a) La variable aleatòria $\frac{(n-1)\tilde{S}^2}{\sigma^2} = \frac{1}{\sigma^2}\sum_{i=1}^{n}\left(X_i - \overline{X}\right)^2$ és una variable khi quadrat amb $n-1$ graus de llibertat.

b) Si $V = \chi^2_n$ (khi quadrat amb $n$ graus de llibertat) l'esperança i la variància de $Y$ valen: $\mathrm{E}V = n$ i Var $V = 2n$.

Per tant fent servir a) i b) podem escriure:

$$\mathrm{E}\left[\frac{(n-1)\tilde{S}^2}{\sigma^2}\right] = \frac{n-1}{\sigma^2}\mathrm{E}\left[\tilde{S}^2\right] = n-1.$$

D'on deduïm que $\mathrm{E}\left[\tilde{S}^2\right] = \sigma^2$.

Trobarem a continuació $\mathrm{E}\left[\tilde{S}\right]$. Considerem una variable $Y = \chi^2_{n-1}$. Podem escriure, fent servir a), que $\tilde{S}^2 = \frac{\sigma^2}{n-1}Y$. Per tant:

$$\mathrm{E}\left[\tilde{S}\right] = \frac{\sigma}{\sqrt{n-1}}\mathrm{E}\left[\sqrt{Y}\right].$$

Hem reduït el problema a trobar $E\left[\sqrt{Y}\right]$ on $Y$ és una variable $\chi^2_m$ (en el nostre cas, $m = n-1$).

Recordem que la funció de densitat d'una variable $Y = \chi^2_m$ val:

$$f_Y(t) = \frac{t^{\frac{m}{2}-1}}{2^{\frac{m}{2}}\Gamma\left(\frac{m}{2}\right)} \cdot \mathrm{e}^{-\frac{t}{2}},\ t > 0,$$

on $\Gamma(k) = \int_0^\infty t^{k-1}\mathrm{e}^{-t}\,dt$. Les propietats de la funció $\Gamma(k)$ són:

$$\begin{aligned}
\Gamma(k) &= (k-1)\Gamma(k-1),\\
\Gamma(n) &= (n-1)!, \text{ per a } n \in \mathbb{Z}^+,\\
\Gamma\left(\frac{1}{2}\right) &= \sqrt{\pi},\\
\Gamma\left(n+\frac{1}{2}\right) &= \frac{(2n-1)\cdot(2n-3)\dots 3\cdot 1}{2^n}\cdot\sqrt{\pi} = \frac{(2n-1)!!}{2^n}\cdot\sqrt{\pi}, \text{ per a } n \in \mathbb{Z}^+.
\end{aligned}$$

A continuació trobam $\mathrm{E}\left[\sqrt{Y}\right]$:

$$\mathrm{E}\left[\sqrt{Y}\right] = \int_0^\infty t^{\frac{1}{2}}\frac{t^{\frac{m}{2}-1}}{2^{\frac{m}{2}}\Gamma\left(\frac{m}{2}\right)}\cdot\mathrm{e}^{-\frac{t}{2}}\,dt = \int_0^\infty \frac{t^{\frac{m+1}{2}-1}}{2^{\frac{m}{2}}\Gamma\left(\frac{m}{2}\right)}\cdot\mathrm{e}^{-\frac{t}{2}}\,dt$$

$$= \int_0^\infty \frac{t^{\frac{m+1}{2}-1}}{2^{\frac{m+1}{2}}\Gamma\left(\frac{m+1}{2}\right)} \frac{1}{2^{-\frac{1}{2}}} \frac{\Gamma\left(\frac{m+1}{2}\right)}{\Gamma\left(\frac{m}{2}\right)} \cdot \mathrm{e}^{-\frac{t}{2}}\, dt$$

$$= \frac{\sqrt{2}\cdot\Gamma\left(\frac{m+1}{2}\right)}{\Gamma\left(\frac{m}{2}\right)} \int_0^\infty \frac{t^{\frac{m+1}{2}-1}}{2^{\frac{m+1}{2}}\Gamma\left(\frac{m+1}{2}\right)} \mathrm{e}^{-\frac{t}{2}}\, dt = \frac{\sqrt{2}\cdot\Gamma\left(\frac{m+1}{2}\right)}{\Gamma\left(\frac{m}{2}\right)},$$

ja que la darrera integral val 1 en ser la integral de la funció de densitat d'una variable aleatòria $\chi^2_{m+1}$.

En el nostre cas, recordem que $m = n-1$. Per tant, ja podem trobar $\mathrm{E}\left[\tilde{S}\right]$:

$$\mathrm{E}\left[\tilde{S}\right] = \frac{\sigma}{\sqrt{n-1}} \frac{\sqrt{2}\cdot\Gamma\left(\frac{n}{2}\right)}{\Gamma\left(\frac{n-1}{2}\right)} = \sqrt{\frac{2}{n-1}} \cdot \sigma \cdot \frac{\Gamma\left(\frac{n}{2}\right)}{\Gamma\left(\frac{n-1}{2}\right)}.$$

**1.8.-** Demostrau que si $W_1$ és una variable aleatòria $\chi^2$ amb $d_1$ graus de llibertat i $W_2$ és una variable aleatòria $\chi^2$ amb $d_2$ graus de llibertat, i són independents, aleshores $W_1 + W_2$ és una variable aleatòria $\chi^2$ amb $d_1 + d_2$ graus de llibertat.

**Resolució.** Per veure que $W_1 + W_2$ és $\chi^2_{d_1+d_2}$, provarem que la funció generatriu de moments de $W_1 + W_2$ coincideix amb la funció generatriu de moments d'una variable aleatòria $\chi^2_{d_1+d_2}$.

Recordem que si $X$ és $\chi^2_n$, la funció generatriu de moments val:

$$m_X(t) = \frac{1}{(1-2t)^{\frac{n}{2}}}.$$

Per tant, tenint en compte que $W_1$ i $W_2$ són independents, podem escriure:

$$m_{W_1+W_2}(t) = m_{W_1}(t)\cdot m_{W_2}(t) = \frac{1}{(1-2t)^{\frac{d_1}{2}}} \cdot \frac{1}{(1-2t)^{\frac{d_2}{2}}} = \frac{1}{(1-2t)^{\frac{d_1+d_2}{2}}},$$

funció que coincideix amb la funció generatriu de moments d'una variable $\chi^2_{d_1+d_2}$.

## 1.3 Problemes proposats

**1.1.-** Suposem que les vides mitjanes de certes bombetes estan distribuïdes exponencialment amb paràmetre $\lambda$. Si es pren una mostra aleatòria de $n$ d'aquestes bombetes i es representa per $X_i$ la durada de la $i-$èssima bombeta per a $i = 1, \ldots, n$, quina és la funció de densitat conjunta de la mostra?

**1.2.-** Suposem que $X_1, X_2, \ldots, X_{10}$ és una mostra aleatòria simple d'una variable aleatòria.

a) Es divideix la mostra de grandària 10 en dues parts. La primera queda formada pels primers 5 valors seleccionats i la segona pels 5 valors restants. Són independents les dues parts?

b) Ara es divideix la mostra de 10 en dues parts, però ara la primera part està formada pels 5 valors més petits. Són independents les dues parts?

**1.3.-** Un fabricant de cotxes esportius porta a la pista 6 cotxes del mateix model per saber com varia la velocitat màxima d'un cotxe a l'altre. Les velocitats màximes observades són de $190, 195, 193, 177, 201$ i 187 (mesurades en km/h.). Suposem que aquests nombres són els valors observats d'una mostra aleatòria simple d'una variable aleatòria $X$. Calculau els valors observats dels 3 primers moments de la mostra, de $\overline{X}$, de $\tilde{S}^2$, de $M_0$ (Mediana) i de $X_{(4)}$ (valor que ocupa el quart lloc suposats els valors ordenats).

**1.4.-** Quina és la probabilitat que el màxim valor d'una mostra de grandària 10 d'una variable distribuïda uniformement en l'interval $(0, 1)$ sigui més gran que 0.9? I la que sigui menor que $\frac{1}{2}$?

**1.5.-** Sigui $X_1, X_2, \ldots, X_n$ una mostra aleatòria simple d'una variable aleatòria normal amb paràmetres $\mu$ i $\sigma^2$. Trobau les funcions de densitat per a $X_{(1)}$ i $X_{(n)}$. Algunes d'aquestes variables està distribuïda normalment?

**1.6.-** Suposem que $X_1, X_2, \ldots, X_n$ és una mostra aleatòria d'una variable aleatòria amb mitjana $\mu$ desconeguda i variància $\sigma^2$ desconeguda. Definim $\overline{X} = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} X_i$.

a) Quina és la distribució de $\frac{\sqrt{n}(\overline{X}-\mu)}{\sigma}$?

b) És $\frac{\sqrt{n}(\overline{X}-\mu)}{\sigma}$ una estadística?

**1.7.-** Suposem que $X_1, X_2, \ldots, X_{10}$ és una mostra aleatòria simple d'una variable aleatòria normal estàndard. Calculau $p\left\{2.56 < \sum_{i=1}^{10} X_i^2 < 18.31\right\}$.

**1.8.-** Sigui $X_1, X_2, \ldots, X_{10}$ una mostra aleatòria simple d'una variable aleatòria $X\ N(\mu = 2, \sigma^2 = 16)$. Sigui la variable aleatòria $Y = \frac{\sum_{i=1}^{10} (X_i - 2)^2}{16}$. Trobau $p\{Y \leq 2.6\}$.

Final. Juny 94.

**1.9.-** Sigui $X$ una variable aleatòria $\chi^2_2$. Sigui $Y = X^n$. Trobau la funció de densitat de $Y$.

Final. Juny 95.

# Capítol 2

# Estimació de paràmetres

## 2.1 Resum teòric

En els problemes d'estimació es tracta de trobar una estadística que constitueixi una bona aproximació del valor d'un paràmetre desconegut d'una població donada. Aquesta estadística s'anomena un **estimador** del paràmetre desconegut. Observem que un estimador és una variable aleatòria i que s'anomena **estimada** del paràmetre el valor que pren l'estimador una vegada observats els valors de la mostra aleatòria simple.

### 2.1.1 Definicions bàsiques

Veurem dos mètodes per generar estimades de paràmetres desconeguts. El primer, anomenat **mètode dels moments**, és el mètode general més antic. El procediment que segueix és el següent:

Considerem una variable aleatòria $X$ amb funció de distribució $F_X$ que depèn d'un paràmetre desconegut $\gamma$. Indicarem el seu estimador amb $\tilde{\Gamma}$. En general, el primer moment de $X$ depèn en forma senzilla de $\gamma$, posem $\mu_X = g(\gamma)$. Donada una mostra de $n$ valors de $X$, podem definir el primer moment $\bar{X}$ de la mostra. Aleshores el mètode dels moments iguala $\bar{X}$ a $g(\tilde{\Gamma})$ i s'obté el valor de $\tilde{\Gamma}$.

Per exemple, si $X$ té una distribució uniforme en $(0, \gamma)$, sabem que $\mu_X = \dfrac{\gamma}{2}$, d'on $g(\gamma) = \dfrac{\gamma}{2}$. Si ara posam $\bar{X} = g(\tilde{\Gamma}) = \dfrac{\tilde{\Gamma}}{2}$, obtenim l'estimador de $\gamma$: $\tilde{\Gamma} = 2\bar{X}$.

Quan la distribució depèn de més d'un paràmetre desconegut, s'utilitzen tants de moments com paràmetres volem estimar. Per exemple, si es desconeixen $\gamma$ i $\lambda$, escrivim els dos primers moments de

$X$:

$$\mu_X = g(\gamma, \lambda), \quad \mathrm{E}\left(X^2\right) = h(\gamma, \lambda).$$

El mètode dels moments iguala els dos primers moments $\bar{X}$ i $M_2$ de la mostra a $g(\tilde{\Gamma}, \tilde{\Lambda})$ i $h(\tilde{\Gamma}, \tilde{\Lambda})$, respectivament, i d'aquí s'obtenen els dos estimadors $\tilde{\Gamma}$ i $\tilde{\Lambda}$.

Vegem ara l'altre mètode, anomenat el **mètode de la màxima versemblança**.

**Definició 2.1** *Sigui $X$ una variable aleatòria tal que la seva distribució depèn d'un paràmetre desconegut $\lambda$. Sigui $X_1, \ldots, X_n$ una mostra aleatòria simple de $X$ i $x_1, \ldots, x_n$ els valors observats de la mostra. Aleshores la* **funció de versemblança** *de la mostra és:*

$$L(\lambda) = f_X(x_1) \cdots f_X(x_n).$$

**Definició 2.2** *Donada la funció de versemblança $L(\lambda)$ d'una mostra, sigui $\hat{\lambda} = g(x_1, \ldots, x_n)$ el punt on hi ha el màxim de $L(\lambda)$, és a dir, $L(\hat{\lambda}) = \max_{\lambda} L(\lambda)$. Aleshores* **l'estimador de màxima versemblança** *de $\lambda$ és:*

$$\hat{\Lambda} = g(X_1, \ldots, X_n).$$

**Nota:** Com que $L(\lambda)$ és sempre positiu, podem definir $K(\lambda) = \ln L(\lambda)$. Aleshores el valor de $\lambda$ que maximitza $K$ també maximitza $L$ i és, en general, més fàcil maximitzar $K$ que $L$.

Quan la distribució de $X$ depèn de dos o més paràmetres, la funció de versemblança es defineix exactament igual, però ara serà funció de dues o més variables.

### 2.1.2 Propietats dels estimadors

1. Direm que un estimador $\Gamma$ d'un paràmetre desconegut $\lambda$ és **sense biaix** si $\mathrm{E}\Gamma = \gamma$.

   **Nota:** Aquesta propietat diu que si prenem mostres repetides de grandària $n$ i calculam per a cada una el valor esperat de $\Gamma$, aleshores la mitjana d'aquests valors observats és el paràmetre $\gamma$ que volem estimar.

2. Si $\Gamma_1$ i $\Gamma_2$ són dos estimadors sense biaix de $\gamma$ per a la mateixa mostra, aleshores direm que $\Gamma_1$ és **més eficient** que $\Gamma_2$ si $\mathrm{Var}\Gamma_1 < \mathrm{Var}\Gamma_2$.

3. Direm que $\Gamma$ és el **millor estimador lineal sense biaix** de $\gamma$ si

   (a) $\Gamma$ és funció lineal de $X_1, \ldots, X_n$,

   (b) $\mathrm{E}\Gamma = \gamma$,

(c) Si $\Gamma'$ és un altre estimador que també satisfà a) i b), aleshores

$$\mathrm{Var}\Gamma < \mathrm{Var}\Gamma'.$$

**Nota:** Aquesta propietat diu que el millor estimador lineal sense biaix té tant la propietat de ser sense biaix com la de tenir la menor variància dins d'una certa classe d'estimadors.

**Proposició 2.1** *Sigui $X$ una variable aleatòria amb mitjana $\mu$ i variància $\sigma^2$. Si $X_1, \ldots, X_n$ és una mostra aleatòria simple de $X$, aleshores $\bar{X}$ és el millor estimador lineal sense biaix de $\mu$.*

4. Direm que $\Gamma$ és un estimador **consistent** de $\gamma$ si

$$\lim_{n\to\infty} p\{|\Gamma_n - \gamma| > \varepsilon\} = 0, \quad \forall\varepsilon > 0,$$

o, equivalentment,

$$\lim_{n\to\infty} p\{|\Gamma_n - \gamma| < \varepsilon\} = 1, \quad \forall\varepsilon > 0.$$

($n$ indica la grandària de la mostra).

**Nota:** La consistència té a veure només amb el comportament en el límit d'un estimador a mesura que creix la grandària de la mostra i no implica que el valor observat $\Gamma_n$ sigui pròxim a $\gamma$ per a qualsevol grandària específica $n$ de la mostra.

**Proposició 2.2** *Si $\lim_{n\to\infty} \mathrm{E}\Gamma_n = \gamma$ i $\lim_{n\to\infty} \mathrm{Var}\ \Gamma_n = 0$, aleshores $\Gamma_n$ és un estimador consistent de $\gamma$.*

**Definició 2.3** *Donada una mostra aleatòria simple d'una variable aleatòria $X$ la distribució de la qual depèn d'un paràmetre desconegut $\gamma$, l'estadística $Y = g(X_1, \ldots, X_n)$ és una* **estadística suficient** *si, i només si, la distribució condicionada de qualsevol altra estadística $h(X_1, \ldots, X_n)$, donat que $Y = y$, no depèn de $\gamma$.*

**Nota:** Això vol dir que tota la informació relativa a $\gamma$ s'ha condensat en l'estadística $Y$.

El **criteri de factorització de Fisher-Neyman** dóna en general una forma bastant senzilla de trobar una estadística suficient per a un paràmetre desconegut.

**Proposició 2.3** *Sigui $X_1, \ldots, X_n$ una mostra aleatòria simple d'una variable aleatòria $X$ la distribució de la qual depèn d'un paràmetre desconegut $\gamma$. Sigui $Y = g(X_1, \ldots, X_n)$ una estadística. Aleshores $Y$ és una estadística suficient per a $\gamma$ si:*

$$\prod_{i=1}^{n} f_X(x_i) = G(g(x_1, \ldots, x_n), \gamma) \cdot H(x_1, \ldots, x_n).$$

**Nota:** La importància de les estadístiques suficients és que si en podem trobar una per a un paràmetre, aleshores un estimador que s'hi basa ha de contenir en certa forma tot el que pot oferir la mostra respecte del valor del paràmetre desconegut.

Es pot provar que si $\Gamma$ és l'estimador sense biaix de $\gamma$ basat en l'estadística suficient, aleshores $\Gamma$ té la menor variància d'entre tots els estimadors sense biaix de $\gamma$.

### 2.1.3 Propietats dels estimadors de màxima versemblança

1. **Propietat invariant**: sigui $\Gamma$ l'estimador de màxima versemblança d'un paràmetre $\gamma$ i suposem que volem estimar una funció de $\gamma$, $\theta = h(\gamma)$. Aleshores, l'estimador de màxima versemblança de $\theta$ s'obté a través de: $\hat{\Theta} = h(\Gamma)$.

2. Si existeix una estadística suficient $Y$ per a un paràmetre $\gamma$ desconegut de la distribució d'una variable aleatòria donada, basada en una mostra aleatòria simple de la variable aleatòria, aleshores l'estimador de màxima versemblança de $\gamma$ és funció de $Y$.

   Per tant, l'estimador de màxima versemblança utilitza tota la informació de la mostra relativa a $\gamma$. A més, els estimadors de màxima versemblança són generalment consistents i per a grandàries grans de mostres estan distribuïts aproximadament en forma normal, com indicam a continuació:

   **Proposició 2.4** *Si $X$ és una variable aleatòria amb funció de probabilitat (o densitat) $f_X$, que depèn d'un paràmetre desconegut $\gamma$, i $\tilde{\Gamma}$ és l'estimador de màxima versemblança basat en una mostra aleatòria simple de grandària $n$ de $X$, aleshores $\tilde{\Gamma}$ està distribuït aproximadament en forma normal per a $n$ gran amb mitjana $\gamma$ i variància*

$$\left\{ n\mathrm{E}\left[\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}\gamma}\ln f_X(x)\right]^2 \right\}^{-1}.$$

### 2.1.4 Estimadors de variància mínima

Finalment parlarem dels estimadors de variància mínima. Recordem que havíem dit que aquesta era una propietat molt desitjable per a un estimador. El problema és el següent: si tenim un estimador $\tilde{\theta}$ d'un paràmetre $\theta$ amb variància petita, com podem saber si és el millor de tots? La resposta és, en general, molt difícil.

Veurem primer de tot quin és el millor estimador lineal sense biaix del paràmetre $\mu = \mathrm{E}X$ d'una variable aleatòria $X$. Després donarem la **cota de Cramer-Rao**, que és el valor mínim per a la variància de qualsevol estimador; això vol dir que si trobam un estimador amb variància igual a la cota de Cramer-Rao, aleshores és el més eficient de tots.

El primer resultat és:

**Proposició 2.5** *Sigui $X$ una variable aleatòria amb mitjana $\mu$ i variància $\sigma^2$. Sigui $X_1, \ldots, X_n$ una mostra aleatòria simple de $X$. Aleshores l'estimador*

$$\bar{X} = \frac{X_1 + \cdots + X_n}{n}$$

*és el millor estimador lineal sense biaix de $\mu$.*

La cota de Cramer-Rao ens dóna, com hem dit, una cota mínima per a la variància. Més concretament, sigui $\tilde{\theta}$ un estimador del paràmetre $\theta$. Suposem que $\mathrm{E}(\tilde{\theta}) = a + b(\theta)$, o sigui, $|b(\theta)|$ és el biaix de $\tilde{\theta}$. Aleshores es compleix:

$$\mathrm{Var}(\tilde{\theta}) \geq \frac{(1 + b'(\theta))^2}{\mathrm{E}\left(\frac{\partial \ln L}{\partial \theta}\right)^2},$$

on $L$ és la funció de versemblança de mostra.

Si suposam que $\tilde{\theta}$ és un estimador sense biaix, $b(\theta) = 0$, obtenim una expressió més senzilla:

$$\mathrm{Var}(\tilde{\theta}) \geq \frac{1}{\mathrm{E}\left(\frac{\partial \ln L}{\partial \theta}\right)^2}.$$

Si posam l'expressió de la funció de versemblança i operam, obtenim:

$$\mathrm{Var}(\tilde{\theta}) \geq \frac{1}{n\mathrm{E}\left(\frac{\partial \ln f_X(x;\theta)}{\partial \theta}\right)^2}.$$

Per acabar, vegem que l'estimador $\bar{X}$ del paràmetre $\mu$ d'una variable aleatòria normal (amb $\sigma^2$ coneguda) assoleix la cota de Cramer-Rao. Tenim

$$f(x;\mu) = \frac{1}{(2\pi\sigma^2)^{\frac{1}{2}}} \exp\left(-\frac{(x-\mu)^2}{2\sigma^2}\right),$$

$$\ln f = -\frac{1}{2}\ln(2\pi\sigma^2) - \frac{(x-\mu)^2}{2\sigma^2},$$

$$\left(\frac{\partial \ln f}{\partial \mu}\right)^2 = \left(\frac{x-\mu}{\sigma^2}\right)^2.$$

Aleshores

$$\mathrm{E}\left(\left(\frac{\partial \ln f}{\partial \mu}\right)^2\right) = \frac{1}{\sigma^2}\mathrm{E}\left(\left(\frac{x-\mu}{\sigma}\right)^2\right) = \frac{1}{\sigma^2},$$

ja que $\dfrac{x-\mu}{\sigma}$ és $N(0,1)$. Per tant, la cota de Cramer-Rao val en aquest cas

$$\frac{1}{n \cdot \frac{1}{\sigma^2}} = \frac{\sigma^2}{n},$$

que coincideix amb $\mathrm{Var}(\bar{X})$.

## 2.2 Problemes resolts

**2.1.-** Se suposa que el nombre de cotxes que arriben a un aparcament d'un supermercat és una variable de Poisson amb paràmetre $\lambda$ cotxes per hora. S'observa que entre les 9.00 h. i les 10.00 h. del matí han arribat les següents quantitats de cotxes: $50, 47, 82, 91, 46$ i $64$. Trobau l'estimada de $\lambda$, $\tilde{\lambda}$, pel mètode dels moments.

**Resolució.** Si $X$ és una variable de Poisson de paràmetre $\lambda$, sabem que l'esperança de $X$ val: $\mathrm{E}X = \lambda$.

Per tant, fent servir el mètode dels moments, hem d'igualar el moment d'ordre 1 de la mostra a l'estimada de $\lambda$, $\tilde{\lambda}$. Així, doncs,

$$M_1 = \overline{X} = \tilde{\lambda}.$$

En el nostre cas tendrem $\tilde{\lambda} \approx 63.33$.

**2.2.-** Suposem que $X$ és una variable aleatòria normal amb mitjana $\mu = 10$ i variància $\sigma^2$ desconeguda. Quin és l'estimador de màxima versemblança per a $\sigma^2$, donada una mostra aleatòria simple de $X$ de grandària $n$?

**Resolució.** Si $X$ és $N(\mu = 10, \sigma^2)$, recordem que la funció de densitat de $X$ és:

$$f_X(x) = \frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}}\mathrm{e}^{-\frac{(x-10)^2}{2\sigma^2}},\ x \in \mathbb{R}.$$

Considerem $X_1, \ldots, X_n$ una mostra aleatòria simple de $X$. La funció de versemblança de la mostra valdrà:

$$L(x_1, \ldots, x_n; \sigma^2) = \prod_{i=1}^{n} f_X(x_i) = \frac{1}{(2\pi\sigma^2)^{\frac{n}{2}}} \mathrm{e}^{-\frac{1}{2\sigma^2}\sum\limits_{i=1}^{n}(x_i-10)^2}.$$

Per trobar l'estimador de màxima versemblança per a $\sigma^2$, hem de

derivar la funció anterior com a funció de $\sigma^2$ i igualar a zero. Observem, però, que en la funció anterior surten dos factors multiplicatius dependents de $\sigma^2$. Per tant, el càlcul es complicarà molt a l'hora de derivar. Amb vista a simplificar el càlcul, considerem la funció logaritme de $L$ per derivar, ja que aquesta funció ens transformarà els productes en sumes i és, per tant, més senzilla de derivar. Observem també que els màxims de $L$ i $\ln L$ són els mateixos, ja que la funció logaritme és una funció creixent.

Així, doncs, considerem:

$$K(x_1, \ldots, x_n; \sigma^2) := \ln L(x_1, \ldots, x_n; \sigma^2) = -\frac{n}{2}\ln\sigma^2 - \frac{n}{2}\ln(2\pi) - \frac{1}{2\sigma^2}\sum_{i=1}^{n}(x_i - 10)^2.$$

Per trobar l'estimador, hem de derivar la funció $K$ i igualar-la a zero:

$$\frac{\partial K}{\partial \sigma^2} = -\frac{n}{2} \cdot \frac{1}{\hat{\sigma}^2} + \frac{1}{2\hat{\sigma}^{2\,2}}\sum_{i=1}^{n}(x_i - 10)^2 = 0.$$

D'aquí deduïm que l'estimador de màxima versemblança per a $\sigma^2$ és:

$$\hat{\sigma}^2 = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}(x_i - 10)^2.$$

**2.3.-** Si $X$ és una variable aleatòria geomètrica amb paràmetre $p$, quin és l'estimador de màxima versemblança per a $p$ donada una mostra aleatòria de $n$ observacions de $X$?

**Resolució.** Repetim tot el mateix procés introduït en el problema 2.2.

(i) Funció de probabilitat de la variable geomètrica de paràmetre $p$:

$$f_X(x) = p \cdot (1-p)^{x-1}, \; x = 1, 2, \ldots$$

(ii) Sigui $X_1, \ldots, X_n$ una mostra aleatòria simple de $X$. La funció de versemblança de la mostra valdrà:

$$L(x_1, \ldots, x_n; p) = \prod_{i=1}^{n} f_X(x_i) = p^n \cdot (1-p)^{\sum\limits_{i=1}^{n} x_i - n}.$$

(iii) Funció logaritme de $L$:

$$K(x_1, \ldots, x_n; p) := \ln L(x_1, \ldots, x_n; p) = n \ln p + \left( \sum_{i=1}^{n} x_i - n \right) \ln(1-p).$$

(iv) Derivam la funció $K$ i igualam a zero:

$$\frac{\partial K}{\partial p} = \frac{n}{\hat{p}} - \frac{\sum\limits_{i=1}^{n} x_i - n}{1-\hat{p}} = 0. \tag{2.1}$$

(v) Resolem l'equació (2.1) per trobar l'estimador:

$$\begin{aligned} \frac{n}{\hat{p}} - \frac{\sum\limits_{i=1}^{n} x_i - n}{1-\hat{p}} &= 0, \\ (1-\hat{p})n &= \hat{p}\left( \sum_{i=1}^{n} x_i - n \right), \\ n &= \hat{p} \sum_{i=1}^{n} x_i, \\ \hat{p} &= \frac{n}{\sum\limits_{i=1}^{n} x_i} = \frac{1}{\overline{X}}. \end{aligned}$$

**2.4.-** Suposem que $X$ és una variable binomial amb paràmetres $n$ (conegut) i $p$. Quin és l'estimador de màxima versemblança per a $p$ donada una mostra aleatòria de $N$ observacions de $X$?

**Resolució.**

(i) Funció de probabilitat de la variable $X$ binomial amb paràmetres $n$ i $p$:

$$f_X(x) = \binom{n}{x} p^x \cdot (1-p)^{n-x}, \; x = 0, \ldots, n.$$

(ii) Sigui $X_1, \ldots, X_N$ una mostra aleatòria simple de $X$. La funció de versemblança de la mostra valdrà:

$$L(x_1, \ldots, x_N; n, p) = \prod_{i=1}^{N} f_X(x_i) = \left( \prod_{i=1}^{N} \binom{n}{x_i} \right) p^{\sum\limits_{i=1}^{N} x_i} \cdot (1-p)^{nN - \sum\limits_{i=1}^{N} x_i}.$$

(iii) Funció logaritme de $L$:

$$\begin{aligned} K(x_1, \ldots, x_N; n, p) &:= \ln L(x_1, \ldots, x_N; n, p) \\ &= \ln \left( \prod_{i=1}^{N} \binom{n}{x_i} \right) + \left( \sum_{i=1}^{N} x_i \right) \ln p + \left( nN - \sum_{i=1}^{N} x_i \right) \ln(1-p). \end{aligned}$$

(iv) Derivam la funció $K$ i igualam a zero:

$$\frac{\partial K}{\partial p} = \frac{\sum\limits_{i=1}^{N} x_i}{\hat{p}} - \frac{nN - \sum\limits_{i=1}^{N} x_i}{1 - \hat{p}} = 0. \tag{2.2}$$

(v) Resolem l'equació (2.2) per trobar l'estimador:

$$\begin{aligned} \frac{\sum\limits_{i=1}^{N} x_i}{\hat{p}} - \frac{nN - \sum\limits_{i=1}^{N} x_i}{1 - \hat{p}} &= 0, \\ \left( \sum_{i=1}^{N} x_i \right) (1 - \hat{p}) &= \left( nN - \sum_{i=1}^{N} x_i \right) \hat{p}, \\ \sum_{i=1}^{n} x_i &= nN\hat{p}, \\ \hat{p} &= \frac{\sum\limits_{i=1}^{N} x_i}{nN} = \frac{\overline{X}}{n}. \end{aligned}$$

**2.5.-** Suposem que tenim una mostra aleatòria de grandària $n_1$ d'una variable normal $X$ amb paràmetres $\mu_1$ i $\sigma_1^2$. També tenim una mostra aleatòria independent de grandària $n_2$ d'una variable aleatòria normal $Y$ amb paràmetres $\mu_2$ i $\sigma_2^2$.

a) Quines són les estimades pel mètode dels moments per a $\mu_1, \sigma_1^2, \mu_2$ i $\sigma_2^2$?

b) Quines són les estimades pel mètode de màxima versemblança per a $\mu_1, \sigma_1^2, \mu_2$ i $\sigma_2^2$?

**Resolució.** Sigui $X_1, \ldots, X_{n_1}$ una mostra aleatòria simple d'una variable aleatòria $X$ $N(\mu_1, \sigma_1^2)$ i sigui $Y_1, \ldots, Y_{n_2}$ una mostra aleatòria simple d'una variable aleatòria $Y$ $N(\mu_2, \sigma_2^2)$.

a) Trobem els estimadors de $\mu_1, \mu_2, \sigma_1^2$ i $\sigma_2^2$ pel mètode dels moments.

Tenint en compte que els dos primers moments de les variables $X$ i $Y$ valen:

$$
\begin{aligned}
\mathrm{E}X &= \mu_1, \\
\mathrm{E}Y &= \mu_2, \\
\mathrm{E}\left(X^2\right) &= \sigma_1^2 + \mu_1^2, \\
\mathrm{E}\left(Y^2\right) &= \sigma_2^2 + \mu_2^2,
\end{aligned}
$$

tenim que, igualant els dos primers moments mostrals $M_1$ i $M_2$ als moments de les variables substituint els paràmetres pels estimadors, podem trobar les estimades de $\mu_1, \mu_2, \sigma_1^2$ i $\sigma_2^2$:

$$
\begin{aligned}
\tilde{\mu}_1 &= M_{1X} = \overline{X}, \\
\tilde{\mu}_2 &= M_{1Y} = \overline{Y}, \\
\tilde{\sigma}_1^2 + \tilde{\mu}_1^2 &= M_{2X} = \frac{1}{n_1} \sum_{i=1}^{n_1} X_i^2, \Rightarrow \tilde{\sigma}_1^2 = \frac{1}{n_1} \sum_{i=1}^{n_1} X_i^2 - \overline{X}^2 = S_X^2, \\
\tilde{\sigma}_2^2 + \tilde{\mu}_2^2 &= M_{2Y} = \frac{1}{n_2} \sum_{i=1}^{n_2} Y_i^2, \Rightarrow \tilde{\sigma}_2^2 = \frac{1}{n_2} \sum_{i=1}^{n_2} Y_i^2 - \overline{Y}^2 = S_Y^2.
\end{aligned}
$$

b) Trobem els estimadors de $\mu_1, \mu_2, \sigma_1^2$ i $\sigma_2^2$ pel mètode de la màxima versemblança repetint tots els passos introduïts en alguns dels problemes anteriors.

(i) Funcions de densitat de les variables $X$ i $Y$:

$$
f_X(x) = \frac{1}{\sigma_1\sqrt{2\pi}} \mathrm{e}^{-\frac{(x-\mu_1)^2}{2\sigma_1^2}}, \quad f_Y(y) = \frac{1}{\sigma_2\sqrt{2\pi}} \mathrm{e}^{-\frac{(y-\mu_2)^2}{2\sigma_2^2}}.
$$

(ii) Funció de versemblança de la mostra:

$$L(x_1,\dots,x_{n_1},y_1,\dots,y_{n_2};\mu_1,\mu_2,\sigma_1^2,\sigma_2^2)=\prod_{i=1}^{n_1}f_X(x_i)\cdot\prod_{i=1}^{n_2}f_Y(y_i)$$
$$=\frac{1}{\sigma_1^{n_1}\sigma_2^{n_2}(2\pi)^{\frac{n_1+n_2}{2}}}\mathrm{e}^{-\frac{1}{2\sigma_1^2}\sum\limits_{i=1}^{n_1}(x_i-\mu_1)^2-\frac{1}{2\sigma_2^2}\sum\limits_{i=1}^{n_2}(y_i-\mu_2)^2}.$$

(iii) Consideram la funció $\ln L$:

$$\begin{aligned}
& K(x_1,\dots,x_{n_1},y_1,\dots,y_{n_2};\mu_1,\mu_2,\sigma_1^2,\sigma_2^2)\\
:= & \ln L(x_1,\dots,x_{n_1},y_1,\dots,y_{n_2};\mu_1,\mu_2,\sigma_1^2,\sigma_2^2)\\
= & -\frac{n_1}{2}\ln\sigma_1^2-\frac{n_2}{2}\ln\sigma_2^2-\left(\frac{(n_1+n_2)}{2}\right)\ln(2\pi)\\
& -\frac{1}{2\sigma_1^2}\sum_{i=1}^{n_1}(x_i-\mu_1)^2-\frac{1}{2\sigma_2^2}\sum_{i=1}^{n_2}(y_i-\mu_2)^2.
\end{aligned}$$

(iv) Calculam les derivades de la funció $K$ respecte dels quatre paràmetres $\mu_1,\mu_2,\sigma_1^2$ i $\sigma_2^2$ i igualam les derivades a zero:

$$\frac{\partial K}{\partial\mu_1}=\frac{1}{\hat\sigma_1^2}\sum_{i=1}^{n_1}(x_i-\hat\mu_1)=0, \tag{2.3}$$
$$\frac{\partial K}{\partial\mu_2}=\frac{1}{\hat\sigma_2^2}\sum_{i=1}^{n_2}(y_i-\hat\mu_2)=0, \tag{2.4}$$
$$\frac{\partial K}{\partial\sigma_1^2}=-\frac{n_1}{2}\frac{1}{\hat\sigma_1^2}+\frac{1}{2\hat\sigma_1^{2\,2}}\sum_{i=1}^{n_1}(x_i-\hat\mu_1)^2=0, \tag{2.5}$$
$$\frac{\partial K}{\partial\sigma_2^2}=-\frac{n_2}{2}\frac{1}{\hat\sigma_2^2}+\frac{1}{2\hat\sigma_2^{2\,2}}\sum_{i=1}^{n_2}(y_i-\hat\mu_2)^2=0. \tag{2.6}$$

(v) Resolem el sistema d'equacions anterior.

Fent servir les equacions (2.3) i (2.4) ja podem trobar les estimades de $\mu_1$ i $\mu_2$:

$$\hat\mu_1=\overline{X}=\frac{1}{n_1}\sum_{i=1}^{n_1}X_i,\quad \hat\mu_2=\overline{Y}=\frac{1}{n_2}\sum_{i=1}^{n_2}Y_i. \tag{2.7}$$

Tenint en compte (2.5), (2.6) i (2.7), podem deduir que les estimades dels paràmetres $\sigma_1^2$ i $\sigma_2^2$ són:

$$\begin{aligned}
\hat{\sigma}_1^2 &= \frac{1}{n_1}\sum_{i=1}^{n_1}(X_i-\overline{X})^2 = \frac{1}{n_1}\sum_{i=1}^{n_1}X_i^2-\overline{X}^2 = S_X^2,\\
\hat{\sigma}_2^2 &= \frac{1}{n_2}\sum_{i=1}^{n_2}(Y_i-\overline{Y})^2 = \frac{1}{n_2}\sum_{i=1}^{n_2}Y_i^2-\overline{Y}^2 = S_Y^2.
\end{aligned}$$

Observem que surten els mateixos estimadors tant pel mètode dels moments com pel mètode de la màxima versemblança.

**2.6.-** Feu l'exercici anterior però suposant ara que $\mu_1=\mu_2=\mu$ i $\sigma_1^2=\sigma_2^2=\sigma^2$, o sigui, trobau els estimadors de $\mu$ i $\sigma^2$ pel mètode dels moments i pel de la màxima versemblança.

**Resolució.** Per resoldre aquest exercici haurem de juntar les dues mostres, ja que en aquest cas les variables $X$ i $Y$ són la mateixa variable.

Sigui, doncs, $X_1,\ldots,X_{n_1},Y_1,\ldots,Y_{n_2}$ una mostra aleatòria simple d'una variable aleatòria $X$ $N(\mu,\sigma^2)$

a) Trobem els estimadors de $\mu$ i $\sigma^2$ pel mètode dels moments. Calculem primer els dos primers moments de la variable $X$:

$$\begin{aligned}
\mathrm{E}X &= \mu,\\
\mathrm{E}\left(X^2\right) &= \sigma^2+\mu^2.
\end{aligned}$$

Per trobar els estimadors, hem de fer servir les fórmules anteriors substituint els moments de la variable pels moments mostrals $M_1$ i $M_2$ i substituint també els paràmetres $\mu$ i $\sigma^2$ pels estimadors que s'han de cercar.

$$\begin{aligned}
\tilde{\mu} &= M_1 = \frac{1}{n_1+n_2}\left(\sum_{i=1}^{n_1}X_i+\sum_{i=1}^{n_2}Y_i\right) = \frac{1}{n_1+n_2}\left(n_1\overline{X}+n_2\overline{Y}\right),\\
\tilde{\sigma}^2+\tilde{\mu}^2 &= M_2 = \frac{1}{n_1+n_2}\left(\sum_{i=1}^{n_1}X_i^2+\sum_{i=1}^{n_2}Y_i^2\right),\\
&\Rightarrow\ \tilde{\sigma}^2 = \frac{1}{n_1+n_2}\left(\sum_{i=1}^{n_1}X_i^2+\sum_{i=1}^{n_2}Y_i^2\right)-\left(\frac{n_1\overline{X}+n_2\overline{Y}}{n_1+n_2}\right)^2.
\end{aligned}$$

b) Trobem els estimadors de $\mu$ i $\sigma^2$ pel mètode de la màxima versemblança repetint tots els passos introduïts en alguns dels problemes anteriors.

(i) Funció de densitat de la variable $X$:

$$f_X(x) = \frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}} \mathrm{e}^{-\frac{(x-\mu)^2}{2\sigma^2}}.$$

(ii) Funció de versemblança de la mostra:

$$\begin{aligned} & L(x_1, \ldots, x_{n_1}, y_1, \ldots, y_{n_2}; \mu, \sigma^2) = \prod_{i=1}^{n_1} f_X(x_i) \cdot \prod_{i=1}^{n_2} f_X(y_i) \\ = & \frac{1}{(2\pi\sigma^2)^{\frac{n_1+n_2}{2}}} \mathrm{e}^{-\frac{1}{2\sigma^2}\left(\sum\limits_{i=1}^{n_1}(x_i-\mu)^2 + \sum\limits_{i=1}^{n_2}(y_i-\mu)^2\right)}. \end{aligned}$$

(iii) Consideram la funció $\ln L$:

$$\begin{aligned} & K(x_1, \ldots, x_{n_1}, y_1, \ldots, y_{n_2}; \mu, \sigma^2) \\ := & \ln L(x_1, \ldots, x_{n_1}, y_1, \ldots, y_{n_2}; \mu, \sigma^2) \\ = & -\frac{n_1+n_2}{2} \ln(2\pi\sigma^2) - \frac{1}{2\sigma^2}\left(\sum_{i=1}^{n_1}(x_i-\mu)^2 + \sum_{i=1}^{n_2}(y_i-\mu)^2\right). \end{aligned}$$

(iv) Calculam les derivades de la funció $K$ respecte dels dos paràmetres $\mu$ i $\sigma^2$ i igualam les derivades a zero:

$$\frac{\partial K}{\partial \mu} = \frac{1}{\hat{\sigma}^2}\left(\sum_{i=1}^{n_1}(x_i-\hat{\mu}) + \sum_{i=1}^{n_2}(y_i-\hat{\mu})\right) = 0, \tag{2.8}$$

$$\frac{\partial K}{\partial \sigma^2} = -\frac{n_1+n_2}{2}\frac{1}{\hat{\sigma}^2} + \frac{1}{2\hat{\sigma}^{2^2}}\left(\sum_{i=1}^{n_1}(x_i-\hat{\mu})^2 + \sum_{i=1}^{n_2}(y_i-\hat{\mu})^2\right) = 0. \tag{2.9}$$

(v) Resolem el sistema d'equacions anterior.
Fent servir l'equació (2.8) ja podem trobar l'estimada de $\mu$:

$$\begin{gathered} \sum_{i=1}^{n_1} X_i - n_1\hat{\mu} + \sum_{i=1}^{n_2} Y_i - n_2\hat{\mu} = 0, \\ \hat{\mu} = \frac{1}{n_1+n_2}\left(\sum_{i=1}^{n_1} X_i + \sum_{i=1}^{n_2} Y_i\right) = \frac{1}{n_1+n_2}\left(n_1\overline{X} + n_2\overline{Y}\right). \end{gathered} \tag{2.10}$$

Tenint en compte (2.9) i (2.10), podem deduir que l'estimada del paràmetre $\sigma^2$ és:

$$\begin{aligned}
\hat{\sigma}^2 &= \frac{1}{n_1+n_2}\left(\sum_{i=1}^{n_1}(X_i-\hat{\mu})^2+\sum_{i=1}^{n_2}(Y_i-\hat{\mu})^2\right)\\
&= \frac{1}{n_1+n_2}\left(\sum_{i=1}^{n_1}X_i^2+n_1\hat{\mu}^2-2n_1\overline{X}\hat{\mu}+\sum_{i=1}^{n_2}Y_i^2+n_2\hat{\mu}^2-2n_2\overline{Y}\hat{\mu}\right)\\
&= \frac{1}{n_1+n_2}\left(\sum_{i=1}^{n_1}X_i^2+\sum_{i=1}^{n_2}Y_i^2\right)+\hat{\mu}^2-\frac{2\hat{\mu}}{n_1+n_2}\left(n_1\overline{X}+n_2\overline{Y}\right)\\
&= \frac{1}{n_1+n_2}\left(\sum_{i=1}^{n_1}X_i^2+\sum_{i=1}^{n_2}Y_i^2\right)+\hat{\mu}^2-2\hat{\mu}^2\\
&= \frac{1}{n_1+n_2}\left(\sum_{i=1}^{n_1}X_i^2+\sum_{i=1}^{n_2}Y_i^2\right)-\left(\frac{1}{n_1+n_2}\left(n_1\overline{X}+n_2\overline{Y}\right)\right)^2.
\end{aligned}$$

Observem també que en aquest cas surten els mateixos estimadors tant pel mètode dels moments com pel mètode de la màxima versemblança.

**2.7.-** Suposem que $X_1,\ldots,X_n$ és una mostra aleatòria d'una variable aleatòria normal amb mitjana $\mu$ i variància $\sigma^2$ amb $n$ nombre parell. Es pot dir que

$$\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{\frac{n}{2}}(X_{2i}-X_{2i-1})^2,$$

és un estimador consistent per a $\sigma^2$?

**Resolució.** Considerem $X_1,\ldots,X_n$ una mostra aleatòria simple d'una variable $X=N(\mu,\sigma^2)$. Hem d'estudiar la consistència de l'estimador

$$T=\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{\frac{n}{2}}(X_{2i}-X_{2i-1})^2,$$

suposant $n$ parell.

Això és equivalent a comprovar dues coses:

a) Que el biaix de $T$ té límit zero quan $n$ tendeix a infinit o que $T$ no té biaix:

$$\lim_{n\to\infty}\mathrm{E}T=\sigma^2.$$

b) Que la variància de $T$ té límit zero quan $n$ tendeix a infinit:

$$\lim_{n\to\infty} \text{Var } T = 0.$$

Vegem primer a) trobant l'esperança de $T$:

$$\mathrm{E}T = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{\frac{n}{2}} \mathrm{E}\left((X_{2i} - X_{2i-1})^2\right)$$

Tenim que $X_{2i}$ és $N(\mu, \sigma^2)$ i $X_{2i-1}$ és $N(\mu, \sigma^2)$. Per tant $X_{2i} - X_{2i-1}$ és $N(0, 2\sigma^2)$. D'aquí deduïm que l'esperança de la variable $(X_{2i} - X_{2i-1})^2$ val:

$$\begin{aligned} E\left((X_{2i} - X_{2i-1})^2\right) &= \text{Var } (X_{2i} - X_{2i-1}) + (\mathrm{E}(X_{2i} - X_{2i-1}))^2 \\ &= \text{Var } (X_{2i} - X_{2i-1}) = 2\sigma^2. \end{aligned}$$

Deduïm que l'esperança de $T$ val:

$$\mathrm{E}T = \frac{1}{n} \cdot \frac{n}{2}\mathrm{E}\left((X_2 - X_1)^2\right) = \frac{1}{2} \cdot 2 \cdot \sigma^2 = \sigma^2.$$

Tenim que $T$ és un estimador sense biaix. Per tant, es compleix a).

A continuació trobem la variància de $T$:

$$\text{Var } T = \frac{1}{n^2}\text{Var } \left(\sum_{i=1}^{\frac{n}{2}} (X_{2i} - X_{2i-1})^2\right). \tag{2.11}$$

Observem que les variables aleatòries $(X_{2i} - X_{2i-1})^2$, $i = 1, \ldots \frac{n}{2}$ són independents ja que cada variable $X_k$ per a $k = 1, \ldots, n$ només està en un sol sumand de $\sum_{i=1}^{\frac{n}{2}} (X_{2i} - X_{2i-1})^2$.

Per tant, podem fer servir que la variància de la suma és la suma de variàncies en la fórmula (2.11):

$$\text{Var } T = \frac{1}{n^2}\sum_{i=1}^{\frac{n}{2}} \text{Var } (X_{2i} - X_{2i-1})^2.$$

A continuació trobem Var $(X_{2i} - X_{2i-1})^2$.

Recordem que $X_{2i} - X_{2i-1}$ és $N(0, 2\sigma^2)$. Per tant, $\frac{X_{2i}-X_{2i-1}}{\sqrt{2}\sigma}$ és $N(0, 1)$.

La variable aleatòria $\frac{(X_{2i}-X_{2i-1})^2}{2\sigma^2}$ és $\chi^2_1$.

Fent servir que Var $\chi_1^2 = 2$, podem trobar Var $(X_{2i} - X_{2i-1})^2$:

$$\text{Var } (X_{2i} - X_{2i-1})^2 = 4\sigma^4 \text{Var } \frac{(X_{2i} - X_{2i-1})^2}{2\sigma^2} = 8\sigma^4.$$

La variància de $T$ valdrà:

$$\text{Var } T = \frac{1}{n^2} \cdot \frac{n}{2} \cdot 8 \cdot \sigma^4 = \frac{4\sigma^4}{n}.$$

La variància de $T$ té límit zero. Queda vist b) i la consistència de l'estimador.

**2.8.-** Suposem que $X$ és uniforme en l'interval $(0, \gamma)$. Donada una mostra aleatòria de $n$ observacions, l'estimador de màxima versemblança és $\hat{\Gamma} = \max\{X_1, \ldots, X_n\}$, mentre que l'estimador pel mètode dels moments és $\tilde{\Gamma} = 2\overline{X}$. Calculau $E(\hat{\Gamma})$, $E(\tilde{\Gamma})$, Var $(\hat{\Gamma})$ i Var $(\tilde{\Gamma})$. Quin dels dos és millor? Són consistents?

**Resolució.**

I. Estudi de la consistència de l'estimador $\hat{\Gamma} = \max\{X_1, \ldots, X_n\} = X_{(n)}$.

Recordem que per veure que un estimador és consistent hem de veure que no té biaix o que el biaix tendeix a zero i que la variància de l'estimador també té límit zero quan $n$ tendeix cap a infinit.

Abans de comprovar res, trobem la funció de densitat de $\hat{\Gamma}$. Recordem que la funció de densitat i de distribució de la variable $X = U(0, \gamma)$ són:

$$f_X(x) = \begin{cases} \frac{1}{\gamma}, & \text{si } x \in (0, \gamma), \\ 0, & \text{en cas contrari}, \end{cases} \qquad F_X(x) = \begin{cases} 0, & \text{si } x \leq 0, \\ \frac{x}{\gamma}, & \text{si } 0 < x < \gamma, \\ 1, & \text{si } x \geq \gamma. \end{cases}$$

La funció de densitat de $\hat{\Gamma}$ s'obtendrà fent servir la fórmula per trobar la funció de densitat del màxim:

$$f_{\hat{\Gamma}}(x) = n f_X(x) F_X(x)^{n-1} = \begin{cases} n \cdot \frac{1}{\gamma} \cdot \frac{x^{n-1}}{\gamma^{n-1}} = \frac{n x^{n-1}}{\gamma^n}, & \text{si } 0 < x < \gamma, \\ 0, & \text{en cas contrari.} \end{cases}$$

Calculem l'esperança de $\hat{\Gamma}$:

$$\mathrm{E}(\hat{\Gamma}) = \int_0^\gamma x f_{\hat{\Gamma}}(x)\, dx = \int_0^\gamma \frac{n x^n}{\gamma^n}\, dx = \frac{n}{\gamma^n} \left[ \frac{x^{n+1}}{n+1} \right]_0^\gamma = \frac{n}{n+1}\gamma.$$

Per tant, l'estimador $\hat{\Gamma}$ té biaix però el biaix de $\hat{\Gamma}$ tendeix a zero quan $n$ tendeix cap a infinit:

$$\lim_{n\to\infty} \mathrm{E}\hat{\Gamma} = \lim_{n\to\infty} \frac{n}{n+1}\gamma = \gamma.$$

Calculem ara la variància de $\hat{\Gamma}$:

$$\text{Var } \hat{\Gamma} = \mathrm{E}\left(\hat{\Gamma}^2\right) - \left(\mathrm{E}\hat{\Gamma}\right)^2.$$

Calculem $\mathrm{E}\left(\hat{\Gamma}^2\right)$:

$$\mathrm{E}\left(\hat{\Gamma}^2\right) = \int_0^\gamma x^2 f_{\hat{\Gamma}}(x)\,dx = \int_0^\gamma \frac{nx^{n+1}}{\gamma^n}\,dx = \frac{n}{\gamma^n}\left[\frac{x^{n+2}}{n+2}\right]_0^\gamma = \frac{n\gamma^2}{n+2}.$$

La variància de $\hat{\Gamma}$ valdrà:

$$\begin{aligned}\text{Var } \hat{\Gamma} &= \mathrm{E}\left(\hat{\Gamma}^2\right) - \left(\mathrm{E}\hat{\Gamma}\right)^2 = \frac{n}{n+2}\gamma^2 - \frac{n^2}{(n+1)^2}\gamma^2 \\ &= \gamma^2\left(\frac{n}{n+2} - \frac{n^2}{(n+1)^2}\right) = \frac{n}{(n+2)(n+1)^2}\gamma^2.\end{aligned}$$

Observem que $\lim_{n\to\infty} \text{Var } \hat{\Gamma} = 0$. Per tant $\hat{\Gamma}$ és un estimador consistent.

II. Estudi de la consistència de l'estimador $\tilde{\Gamma} = 2\overline{X}$.

Calculem primer l'esperança de $\tilde{\Gamma}$ recordant que l'esperança de la variable $U(0,\gamma)$ val $\frac{\gamma}{2}$:

$$\mathrm{E}\tilde{\Gamma} = \mathrm{E}\left(2\overline{X}\right) = 2\cdot\frac{1}{n}\cdot n\mathrm{E}X_i = 2\cdot\frac{\gamma}{2} = \gamma.$$

Deduïm, doncs, que $\tilde{\Gamma}$ no té biaix.

Calculem a continuació Var $\tilde{\Gamma}$ recordant que Var $X = \frac{\gamma^2}{12}$ per veure si l'estimador és consistent:

$$\text{Var } \tilde{\Gamma} = \text{Var }\left(2\overline{X}\right) = 4\cdot\frac{1}{n^2}\cdot n\text{Var } X = \frac{4}{n}\cdot\frac{\gamma^2}{12} = \frac{\gamma^2}{3n}.$$

Per tant, deduïm que $\tilde{\Gamma}$ és consistent ja que no té biaix i el límit de la variància de $\tilde{\Gamma}$ és zero quan $n$ tendeix cap a infinit.

III. Estudi de l'eficiència entre els estimadors $\hat{\Gamma} = \max\{X_1,\ldots,X_n\} = X_{(n)}$ i $\tilde{\Gamma} = 2\overline{X}$.

L'estimador més eficient és aquell que té la variància més petita.

Recordem que les variàncies dels dos estimadors són:

$$\begin{aligned}\text{Var } \hat{\Gamma} &= \frac{n}{(n+2)(n+1)^2}\gamma^2, \\ \text{Var } \tilde{\Gamma} &= \frac{1}{3n}\gamma^2.\end{aligned}$$

Per a $n$ gran observem que Var $\hat{\Gamma} \sim \frac{1}{n^2}\gamma^2$ i Var $\tilde{\Gamma} = \frac{1}{3n}\gamma^2$. Per tant, podem conjecturar que el més eficient serà $\hat{\Gamma}$. Vegem-ho:

$$\begin{aligned} \text{Var } \hat{\Gamma} &< \text{Var } \tilde{\Gamma} \iff \\ \frac{n}{(n+2)(n+1)^2} &< \frac{1}{3n} \iff \\ 3n^2 &< (n+2)(n+1)^2 \iff \\ 0 &< n^3 + n^2 + 5n + 2. \end{aligned}$$

La darrera desigualtat és certa. Per tant, també ho són les altres desigualtats i concloem que $\hat{\Gamma}$ és més eficient que $\tilde{\Gamma}$.

**2.9.-** Considerem una biblioteca que té en total $N$ llibres on $N$ és un paràmetre desconegut. Suposem que tots els llibres estan numerats de 1 a $N$.
Escollim un llibre a l'atzar i sigui $X$ la variable aleatòria que ens dóna el número del llibre.

a) Suposant que tots els llibres tenen la mateixa probabilitat de sortir, trobau la funció de probabilitat, esperança i variància de $X$.

Indicació:
$$\sum_{i=1}^{N} i = \frac{N(N+1)}{2}, \quad \sum_{i=1}^{N} i^2 = \frac{N(N+1)(2N+1)}{6}.$$

b) Sigui $X_1, X_2, \ldots, X_n$ una mostra aleatòria simple de $X$ de grandària $n$. Sigui $T$ el següent estimador de $N$: $T = 2\overline{X} - 1$.

Comprovau que $T$ no té biaix i trobau Var $T$.

Considerau que és un bon estimador? Per què?

Final. Juny 93.

**Resolució.**

a) El rang de la variable aleatòria $X$ és:

$$X(\Omega) = \{1, \ldots, N\}.$$

La funció de probabilitat de $X$ val, tenint en compte que tots els llibres tenen la mateixa probabilitat de sortir:

| $x$ | 1 | $\ldots$ | $N$ |
|---|---|---|---|
| $f(x)$ | $\frac{1}{N}$ | $\ldots$ | $\frac{1}{N}$ |

Els valors de $\mathrm{E}X$ i Var $X$ valdran:

$$\begin{aligned}
\mathrm{E}X &= \sum_{i=1}^{N} i \cdot f_X(i) = \frac{1}{N}\sum_{i=1}^{N} i = \frac{1}{N}\cdot\frac{(N+1)N}{2} = \frac{N+1}{2},\\
\text{Var } X &= \mathrm{E}\left(X^2\right) - (\mathrm{E}X)^2 = \sum_{i=1}^{N} i^2 \cdot \frac{1}{N} - \left(\frac{N+1}{2}\right)^2\\
&= \frac{(N+1)(2N+1)}{6} - \frac{(N+1)^2}{4} = \frac{N^2-1}{12}.
\end{aligned}$$

b) Comprovem primer que $T$ no té biaix o que $\mathrm{E}T = N$:

$$\mathrm{E}T = 2\mathrm{E}(\overline{X}) - 1 = 2\cdot\frac{1}{n}\cdot n\cdot \mathrm{E}X - 1 = N.$$

Calculem a continuació Var $T$.

$$\text{Var } T = 4\text{Var } (\overline{X}) = 4\cdot\frac{1}{n^2}\cdot n\cdot \text{Var } X = \frac{4}{n}\cdot\frac{N^2-1}{12} = \frac{N^2-1}{3n}.$$

Per tant, $T$ és un bon estimador en ser consistent ja que $\lim_{n\to\infty} \text{Var } T = 0$.

**2.10.-** Sigui $X_1, \ldots, X_{2n}$ una mostra aleatòria simple d'una variable aleatòria $U(0,\theta)$. Considerem els següents estimadors de $\theta^2$:

$$\begin{aligned}
T_1 &= \frac{4}{n}\sum_{i=1}^{n} X_{2i-1}\cdot X_{2i},\\
T_2 &= (X_{(2n)})^2 = (\max_n\{X_1,\ldots,X_{2n}\})^2.
\end{aligned}$$

a) Provau que $T_1$ i $T_2$ són consistents.

b) Quin dels dos és mes eficient?

Final. Setembre 94.

**Resolució.**

a) Consistència de $T_1$ i $T_2$.

a.1) Consistència de $T_1$. Calculem primer $\mathrm{E}(T_1)$:

$$\begin{aligned}\mathrm{E}(T_1) &= \frac{4}{n}\mathrm{E}\left(\sum_{i=1}^{n}\mathrm{E}(X_{2i-1}\cdot X_{2i})\right) = \frac{4}{n}\cdot n\cdot \mathrm{E}(X_1\cdot X_2)\\ &= 4(\mathrm{E}(X))^2 = 4\cdot\frac{\theta^2}{4} = \theta^2.\end{aligned}$$

Fixau-vos que podem escriure que $\mathrm{E}(X_{2i-1}\cdot X_{2i}) = \mathrm{E}(X_1\cdot X_2)$ ja que totes les $X_i$ són variables uniformes en $(0,\theta)$. A més a més, podem afirmar que $\mathrm{E}(X_1\cdot X_2) = (\mathrm{E}(X))^2$ ja que les variables $X_1$ i $X_2$ són independents.

Concloem, doncs, que $T_1$ és un estimador sense biaix.

Trobem a continuació la variància de $T_1$ per estudiar la consistència.

$$\text{Var } T_1 = \frac{16}{n^2}\text{Var }\left(\sum_{i=1}^{n}(X_{2i-1}\cdot X_{2i})\right) = \frac{16}{n^2}\cdot n\text{Var }(X_1\cdot X_2). \tag{2.12}$$

En l'últim càlcul hem fet servir que la variància de la suma és la suma de variàncies i això sabem que és cert només quan les variables aleatòries que intervenen en la suma són independents. En el nostre cas, fixau-vos que cada variable $X_i$ només apareix una vegada en cada sumatori. Per tant, podem assegurar que totes les variables que hi ha en el sumatori de la darrera fórmula són independents.

Per acabar de trobar Var $T_1$ ens fa falta calcular Var $(X_1\cdot X_2)$:

$$\text{Var }(X_1\cdot X_2) = \mathrm{E}\left(X_1^2\cdot X_2^2\right) - \mathrm{E}\left(X_1\cdot X_2\right)^2 = \mathrm{E}\left(X^2\right)^2 - \mathrm{E}(X)^4.$$

Tenint en compte que si $X$ és $U(0,\theta)$, $\mathrm{E}(X) = \frac{\theta}{2}$ i $\mathrm{E}\left(X^2\right) = \frac{\theta^2}{3}$, el càlcul anterior es redueix a:

$$\text{Var }(X_1\cdot X_2) = \frac{\theta^4}{9} - \frac{\theta^4}{16} = \frac{7\theta^4}{144}.$$

La variància de $T_1$, fent servir (2.12), valdrà:

$$\text{Var } T_1 = \frac{16}{n}\cdot\frac{7\theta^4}{144} = \frac{7\theta^4}{9n}.$$

Queda provada la consistència de $T_1$ en complir-se que $\lim\limits_{n\to\infty}$ Var $T_1 = 0$.

a.2) Consistència de $T_2$.

Calculem primer la funció de densitat de la variable $X_{(2n)}$ ja que ens serà molt útil per trobar $\mathrm{E}(T_2)$ i Var $T_2$.

Per fer-ho hem de tenir en compte tres fórmules: la funció de densitat i de distribució de la variable $X$ i la funció de densitat del màxim per a una mostra aleatòria simple d'una variable contínua:

$$\begin{aligned}
f_X(t) &= \begin{cases} \frac{1}{\theta}, & \text{si } 0 \leq t \leq \theta, \\ 0, & \text{en cas contrari,} \end{cases} \\
F_X(t) &= \begin{cases} 0, & \text{si } t < 0, \\ \frac{t}{\theta}, & \text{si } 0 \leq t \leq \theta, \\ 1, & \text{si } t > \theta, \end{cases} \\
f_{X_{(2n)}}(t) &= 2nf_X(t)F_X(t)^{2n-1} = \frac{2nt^{2n-1}}{\theta^{2n}},\ 0 \leq t \leq \theta.
\end{aligned}$$

A continuació mirem si l'estimador $T_2$ té biaix:

$$\begin{aligned}
\mathrm{E}(T_2) &= \mathrm{E}\left((X_{(2n)})^2\right) = \int_0^\theta \frac{2nt^{2n+1}}{\theta^{2n}}\,dt \\
&= \frac{2n}{\theta^{2n}}\left[\frac{t^{2n+2}}{2n+2}\right]_0^\theta = \frac{n\theta^2}{n+1}.
\end{aligned}$$

Concloem, doncs, que l'estimador $T_2$ té biaix però el biaix tendeix a zero ja que $\lim_{n\to\infty} \mathrm{E}(T_2) = \theta^2$. Vegem a continuació la consistència de $T_2$ calculant la seva variància:

$$\begin{aligned}
\text{Var } T_2 &= \mathrm{E}\left(T_2^2\right) - (\mathrm{E}(T_2))^2 = \mathrm{E}\left((X_{(2n)})^4\right) - \left(\frac{n\theta^2}{n+1}\right)^2 \\
&= \int_0^\theta \frac{2nt^{2n+3}}{\theta^{2n}}\,dt = \frac{n\theta^4}{n+2} - \left(\frac{n\theta^2}{n+1}\right)^2 = \frac{n\theta^4}{n^3+4n^2+5n+2}.
\end{aligned}$$

Concloem que $T_2$ és consistent ja que el biaix de $T_2$ tendeix a zero i la variància també.

b) Eficiència. L'estimador més eficient és $T_2$ ja que:

$$\begin{aligned}
\text{Var}T_1 &\geq \text{Var } T_2 \iff \\
\frac{7\theta^4}{9n} &\geq \frac{n\theta^4}{n^3+4n^2+5n+2} \iff \\
7n^3+28n^2+35n+14 &\geq 9n^2.
\end{aligned}$$

## 2.3 Problemes proposats

**2.1.-** Suposem que la quantitat de pluja registrada en una certa estació en un dia determinat està distribuïda uniformement en l'interval $(0, b)$. Ens donen la següent mostra dels registres dels darrers 10 anys en el dia esmentat:

$$0, 0, 0.7, 1, 0.1, 0, 0.2, 0.5, 0, 0.6$$

Estimau el paràmetre $b$ a partir del seu estimador $\tilde{b}$.

**2.2.-** Suposem que el grau de creixement de pins de 0.3 metres d'alçada en un any és una variable aleatòria normal amb mitjana i variància desconegudes. Es registren els creixements de 5 arbres i els resultats són: $0.9144, 1.524, 0.6096, 0.4572$ i $1.0668$ metres. Trobau les estimades pel mètode dels moments per a $\mu$ i $\sigma^2$.

**2.3.-** $X$ és una variable geomètrica amb paràmetre $p$. Donada una mostra aleatòria de $n$ observacions de $X$, quin és l'estimador de $p$ pel mètode dels moments?

**2.4.-** Se suposa que el nombre d'hores que funciona una bombeta és una variable exponencial amb paràmetre $\lambda$. Donada una mostra de $n$ durades, calculau l'estimador pel mètode dels moments per a $\lambda$.

**2.5.-** Si se suposa que $X$ està distribuïda uniformement en l'interval $(b - \frac{1}{4}, b + 5)$, quin és l'estimador pel mètode dels moments per a $b$ en base a una mostra aleatòria de $n$ observacions?

**2.6.-** Suposem que $X$ és una variable aleatòria de Poisson amb paràmetre $\lambda$. Donada una mostra aleatòria de $n$ observacions de $X$, quin és l'estimador de màxima versemblança per a $\lambda$?

**2.7.-** Suposem que $X$ està distribuïda uniformement en l'interval $\left(b - \frac{1}{2}, b + \frac{1}{2}\right)$. Quin és l'estimador de màxima versemblança per a $b$ donada una mostra aleatòria de grandària $n$ per $X$?

**2.8.-** Quin és l'estimador de màxima versemblança per al paràmetre $\lambda$ d'una variable exponencial per a una mostra de grandària $n$?

**2.9.-** Es registren els temps de duració de 30 bombetes. Suposem que el temps de duració d'aquestes bombetes és una variable exponencial. Si la suma dels temps és $\sum x_i = 32916$ hores, quina és l'estimada de màxima versemblança per al paràmetre de la distribució exponencial de duració de les bombetes?

**2.10.-** Suposem que $X_1, X_2, \ldots, X_6$ és una mostra aleatòria d'una variable aleatòria normal amb mitjana $\mu$ i variància $\sigma^2$. Trobau la constant $C$ tal que

$$C((X_1 - X_2)^2 + (X_3 - X_4)^2 + (X_5 - X_6)^2),$$

sigui un estimador sense biaix de $\sigma^2$.

**2.11.-** Un venedor de cotxes pensa que el nombre de vendes de cotxes nous que fa en un dia no festiu és una variable aleatòria de Poisson amb paràmetre $\lambda$.

Examinant els seus registres de l'any anterior (que va tenir 310 dies no festius), veu que va vendre un total de 279 cotxes. Calculau pel mètode de la màxima versemblança la probabilitat que no vengui cap cotxe el seu pròxim dia de treball.

**2.12.-** Suposem que els anys de vida dels homes dels Estats Units estan distribuïts normalment amb mitjana $\mu$ i variància $\sigma^2$. Una mostra aleatòria de 10000 antecedents de mortalitat d'homes d'Estats Units va donar com a resultat $\overline{x} = 72.1$ anys, $s^2 = 144$ anys. Trobau pel mètode de la màxima versemblança la probabilitat que un home americà visqui fins als 50 anys d'edat i la probabilitat que no visqui fins als 90 anys.

**2.13.-** Suposem que $\Theta_1$ i $\Theta_2$ són estimadors sense biaix d'un paràmetre desconegut $\theta$, amb variàncies conegudes $\sigma_1^2$ i $\sigma_2^2$, respectivament.

a) Provau que $\Theta = (1 - a)\Theta_1 + a\Theta_2$ també és sense biax per a qualsevol valor de $a$.

b) Trobau el valor de $a$ que minimitza Var $\Theta$.

**2.14.-** Sigui $X$ una variable aleatòria $N(\mu, \sigma^2)$ amb $\sigma$ coneguda i $X_1, \ldots, X_n$ una mostra aleatòria simple de $X$. Considerem els següents estimadors del paràmetre $\lambda = \mu^2$:

$$T_1 = \overline{X}^2 = \left(\frac{\sum_{i=1}^{n} X_i}{n}\right)^2,$$

$$T_2 = \frac{\sum_{i=1}^{n} X_i^2}{n} - \sigma^2.$$

Es demana:

a) Provau que $T_1$ i $T_2$ són estimadors consistents.

b) Quin estimador és més eficient?

Final. Juny 94.

**2.15.-** Sigui $X_1, \ldots, X_{2n}$ una mostra aleatòria simple d'una variable aleatòria $N(\mu, \sigma^2)$. Sigui:

$$T = C\left(\left(\sum_{i=1}^{2n} X_i\right)^2 - 4n\sum_{i=1}^{n} X_{2i}X_{2i-1}\right)$$

un estimador del paràmetre $\sigma^2$. Quin és el valor de $C$ perquè $T$ sigui un estimador sense biaix?
Segon parcial. Juny 95.

**2.16.-** Es diu que la variable aleatòria $X$ segueix la distribució de Rayleigh amb paràmetre $\theta > 0$ si és una variable aleatòria amb valors $x > 0$ i funció de densitat:

$$f(x) = \frac{x}{\theta} e^{-\frac{x^2}{2\theta}}.$$

Trobau l'estimador de $\theta$ pel:

a) mètode dels moments.

b) mètode de la màxima versemblança.

Segon parcial. Juny 95.

**2.17.-** Considerem una variable aleatòria $X$ Exp($\lambda$). Sigui $X_1, \ldots, X_n$ una mostra aleatòria simple de $X$. Considerem els següents estimadors del paràmetre $\frac{1}{\lambda^2}$:

$$\begin{aligned} T_1 &= \overline{X}^2, \\ T_2 &= \frac{1}{2n}\sum_{i=1}^{n} X_i^2. \end{aligned}$$

a) Són estimadors sense biaix?

b) Quin dels dos estimadors és més eficient?

Indicació: La variable aleatòria $2\lambda \sum_{i=1}^{n} X_i$ és una variable $\chi^2_{2n}$.
Examen extraordinari de febrer 95.

**2.18.-** Sigui $X_1, \ldots, X_n$ una mostra aleatòria simple d'una variable aleatòria $X$ uniforme en l'interval $[0, b]$. Considerem el següent estimador del paràmetre $b$:

$$\tilde{b} = a\sum_{i=1}^{n} X_i,$$

on $a$ és una constant. Una vegada trobat $a$ perquè $\tilde{b}$ sigui un estimador sense biaix, trobau el valor de Var $\tilde{b}$.
Final. Setembre 95.

**2.19.-** Trobau els estimadors pel mètode dels moments i pel de la màxima versemblança pel paràmetre $\alpha$ de la distribució de Maxwell:

$$f(x) = \frac{4}{\alpha^3\sqrt{\pi}} x^2 e^{-\frac{x^2}{\alpha^2}},\ x \geq 0,\ \alpha > 0.$$

Final. Setembre 95.

**2.20.-** Sigui $X_1, \cdots, X_n$ una mostra aleatòria simple d'una variable aletòria $X$ amb E$(X) = \mu$ i Var $X = \sigma^2$. Considerem els següents estimadors del paràmetre $\mu$:

$$T_1 = \overline{X} = \frac{\sum_{i=1}^{n} X_i}{n}, \quad T_2 = k\sum_{i=1}^{n} iX_i.$$

Es demana:

a) El valor de la constant $k$ perque $T_2$ sigui sense biaix.

b) Provau que $T_1$ i $T_2$ són consistents.

c) Quin estimador és més eficient?

Ajuda: $\sum_{i=1}^{n} i^2 = \frac{n(n+1)(2n+1)}{6}$.
Final. Febrer 96.

**2.21.-** Sigui $X_1, \ldots, X_n$ una mostra aleatòria simple d'una variable aleatòria $X$ tal que $F_X$ depèn d'un paràmetre desconegut $\lambda$ amb $\mathrm{E}(X) = \lambda$ i $\mathrm{Var}\ X = \lambda^2$. Considerem el següent estimador de $\lambda$:

$$\tilde{\lambda} = \frac{1}{2}\left(\frac{1}{m}(X_1 + \cdots X_m) + \frac{1}{n-m}(X_{m+1} + \cdots X_n)\right),$$

amb $m = \frac{n}{3}$, on suposam que $n$ és múltiple de 3. Trobau la variància de $\tilde{\lambda}$.
Final. Juny 96.

**2.22.-** Sigui $X$ una variable aleatòria tal que $\mathrm{E}(X) = \mu$ i $\mathrm{Var}\ (X) = \sigma^2$. Sigui $X_1, X_2$ una mostra aleatòria simple de $X$ de grandària 2. Considerem el següent estimador del paràmetre $\mu$: $\tilde{\mu} = 2aX_1 + (1 - 2a)X_2$. Trobau el valor de $a$ que fa $\tilde{\mu}$ el més eficient possible.
Final. Setembre 96.

# Capítol 3

# Intervals de confiança

## 3.1 Resum teòric

En el tema anterior s'ha estudiat el problema de trobar:

- un estimador puntual $\Gamma$ d'un paràmetre desconegut $\gamma$ donada una mostra aleatòria d'observacions d'una variable aleatòria.
- criteris per comparar dos o més estimadors del mateix paràmetre.

El nom d'estimador puntual fa referència al fet que després de fer el mostreig i observar el valor de l'estimador, el producte final és un únic nombre, que és una bona estimació per al vertader valor desconegut del paràmetre.

Ara estudiarem els intervals de confiança com a indicadors del grau de confiança que es pot tenir, en base a la mostra, que s'ha donat una indicació correcta del valor numèric possible del paràmetre.

**Definició 3.1** *Suposem que $X$ és una variable aleatòria la distribució de la qual depèn d'un paràmetre desconegut $\gamma$. Donada una mostra aleatòria simple de $X$, les dues estadístiques $L_1$ i $L_2$ formen un* **interval de confiança del** $100(1-\alpha)\%$ *per a $\gamma$ si:*

$$p\left\{L_1 \leq \gamma \leq L_2\right\} = 1 - \alpha.$$

*$L_1$ i $L_2$ poden ser $-\infty$ i $+\infty$.*

**Nota:** L'interval és aleatori, ja que els dos extrems són variables aleatòries.

**Proposició 3.1** *Si $X_1, \dots, X_n$ és una mostra aleatòria simple d'una variable aleatòria $N(\mu, \sigma^2)$, amb $\sigma^2$ coneguda, aleshores*

$$L_1 = \bar{X} - z_{1-\alpha/2}\frac{\sigma}{\sqrt{n}}, \quad L_2 = \bar{X} + z_{1-\alpha/2}\frac{\sigma}{\sqrt{n}}$$

*formen un interval de confiança del $100(1-\alpha)\%$ per a $\mu$.*
*($z_{1-\alpha/2}$ és el $100(1-\alpha/2)$-èssim percentil de la distribució $N(0,1)$).*

**Proposició 3.2** *Si $X_1, \dots, X_n$ és una mostra aleatòria simple d'una variable aleatòria $N(\mu, \sigma^2)$, amb $\mu$ desconeguda, aleshores*

$$L_1 = \frac{\sum(X_i - \bar{X})^2}{\chi^2_{1-\alpha/2}}, \quad L_2 = \frac{\sum(X_i - \bar{X})^2}{\chi^2_{\alpha/2}}$$

*formen un interval de confiança del $100(1-\alpha)\%$ per a $\sigma^2$. ($\chi^2_{1-\alpha/2}$ i $\chi^2_{\alpha/2}$ són els $100\alpha/2$ i $100(1-\alpha/2)$-èssims percentils de la distribució $\chi^2$ amb $n-1$ graus de llibertat.)*

*$\sqrt{L_1}$ i $\sqrt{L_2}$ formen un interval de confiança del $100(1-\alpha)\%$ per a $\sigma$.*

En general ni $\mu$ ni $\sigma^2$ seran conegudes. Vegem que es fa en aquest cas.

**Proposició 3.3** *Si $Z$ és $N(0,1)$ i $V$ és $\chi^2$ amb $n$ graus de llibertat, aleshores, si $Z$ i $V$ són independents, la variable aleatòria $T = \dfrac{Z}{\sqrt{V/n}}$ té la densitat*

$$f_T(t) = \frac{\Gamma(\frac{n+1}{2})}{\Gamma(\frac{n}{2}) \cdot \sqrt{n\pi}} \left(1 + \frac{t^2}{n}\right)^{-(n+1)/2},$$

*coneguda com la* **distribució $t$ de Student amb $n$ graus de llibertat**.

**Nota:** Les propietats de la funció gamma $\Gamma$ es poden trobar en el problema 1.7.

**Proposició 3.4** *Sigui $X$ una variable aleatòria amb distribució $N(\mu, \sigma^2)$. Si $X_1, \dots, X_n$ és una mostra aleatòria simple de $X$, aleshores $\dfrac{\bar{X} - \mu}{\tilde{S}/\sqrt{n}}$ té la distribució $t$ amb $n-1$ graus de llibertat. ($\tilde{S}$ és la desviació estàndard de la mostra.)*

**Proposició 3.5** *Sigui $X$ una variable aleatòria amb distribució $N(\mu, \sigma^2)$, amb $\mu$ i $\sigma^2$ desconegudes. Sigui $X_1, \dots, X_n$ una mostra aleatòria simple de $X$. Aleshores*

$$L_1 = \bar{X} - t_{1-\alpha/2}\frac{\tilde{S}}{\sqrt{n}}, \quad L_2 = \bar{X} + t_{1-\alpha/2}\frac{\tilde{S}}{\sqrt{n}}$$

*formen un interval de confiança del* $100(1-\alpha)\%$ *per a* $\mu$. *(*$t_{1-\alpha/2}$ *és el* $100(1-\alpha/2)$*-èssim percentil de la distribució* $t$ *amb* $n-1$ *graus de llibertat.)*

**Proposició 3.6** *Suposem que* $X_1, \ldots, X_n$ *és una mostra aleatòria simple d'una variable aleatòria exponencial amb paràmetre* $\lambda$. *Aleshores*

$$L_1 = \frac{\chi^2_{\alpha/2}}{2n\bar{X}}, \quad L_2 = \frac{\chi^2_{1-\alpha/2}}{2n\bar{X}}$$

*formen un interval de confiança del* $100(1-\alpha)\%$ *per a* $\lambda$.

**Nota:** De vegades interessa un interval de confiança unilateral. En aquests casos, es fa constant $L_1$ o $L_2$, segons interessi.

**Proposició 3.7** *Siguin* $U$ *i* $V$ *dues variables aleatòries independents que tenen distribucions* $\chi^2_{n_1}$ *i* $\chi^2_{n_2}$, *respectivament. Aleshores la variable aleatòria*

$$F = \frac{U/n_1}{V/n_2}$$

*té una funció de densitat donada per:*

$$f_F(x) = \begin{cases} \frac{\Gamma[(n_1+n_2)/2](n_1/n_2)^{n_1/2}}{\Gamma(n_1/2)\Gamma(n_2/2)} \frac{x^{n_1/2-1}}{(1+n_1x/n_2)^{(n_1+n_2)/2}}, & 0 < x < \infty, \\ 0, & \text{en cas contrari,} \end{cases}$$

*i es diu que té la* **distribució** $F$ **de Fisher-Snedecor amb** $n_1$ **i** $n_2$ **graus de llibertat.**

L'apèndix A mostra els intervals de confiança per als paràmetres i distribucions més típics.

## 3.2 Problemes resolts

**3.1.-** Trobau una estadística $L_2$ tal que

$$p\left\{\sigma^2 \leq L_2\right\} = 1-\alpha,$$

donada una mostra aleatòria simple de grandària $n$ d'una variable aleatòria normal amb mitjana $\mu$ i variància $\sigma^2$.

**Resolució.** Recordem que la variable aleatòria

$$\frac{\sum_{i=1}^{n}(X_i-\overline{X})^2}{\sigma^2}$$

es distribueix segons una variable khi quadrat amb $n-1$ graus de llibertat.

Per tant, podem escriure:

$$p\left\{\frac{\sum_{i=1}^{n}(X_i-\overline{X})^2}{\sigma^2}\geq\chi^2_\alpha\right\}=1-\alpha, \tag{3.1}$$

on $\chi^2_\alpha$ és el $100\alpha$-èssim percentil per a la distribució $\chi^2_{n-1}$.

Aïllant $\sigma^2$ de (3.1), tenim que:

$$p\left\{\frac{\sum_{i=1}^{n}(X_i-\overline{X})^2}{\chi^2_\alpha}\geq\sigma^2\right\}=p\left\{\sigma^2\leq\frac{\sum_{i=1}^{n}(X_i-\overline{X})^2}{\chi^2_\alpha}\right\}=1-\alpha.$$

Per tant, $L_2=\frac{\sum_{i=1}^{n}(X_i-\overline{X})^2}{\chi^2_\alpha}$.

**3.2.-** Suposem que $X_1,X_2,\ldots,X_{n_1}$ és una mostra aleatòria simple d'una variable aleatòria normal $X$ amb mitjana $\mu_X$ i variància $\sigma^2$. $Y_1,Y_2,\ldots,Y_{n_2}$ és una mostra aleatòria simple independent d'una variable aleatòria normal $Y$ amb mitjana $\mu_Y$ i variància $\sigma^2$. (Notem que les variàncies són iguals.) Trobau un interval de confiança al $100(1-\alpha)\%$ per a la diferència $\mu_X-\mu_Y$.

Indicació: Si $s^2_X$ és la variància mostral de la mostra aleatòria simple de $X$ i $s^2_Y$ és la variància mostral de la mostra aleatòria simple de $Y$, considerau la distribució $\frac{(n_1-1)\tilde{s}^2_X+(n_2-1)\tilde{s}^2_Y}{\sigma^2}$, que és independent de $\overline{X}-\overline{Y}$.

**Resolució.** Recordem que les variables $\overline{X}$ i $\overline{Y}$ són normals amb els paràmetres següents:

$$\overline{X}=N\left(\mu_X,\frac{\sigma^2}{n_1}\right),\ \overline{Y}=N\left(\mu_Y,\frac{\sigma^2}{n_2}\right).$$

Per tant, la variable aleatòria $\overline{X}-\overline{Y}$ serà normal amb paràmetres:

$$\overline{X}-\overline{Y}=N\left(\mu_X-\mu_Y,\sigma^2\left(\frac{1}{n_1}+\frac{1}{n_2}\right)\right).$$

D'on deduïm, passant a una normal estàndard, que la següent variable és $N(0,1)$:

$$Z = \frac{\overline{X} - \overline{Y} - (\mu_X - \mu_Y)}{\sigma\sqrt{\frac{1}{n_1} + \frac{1}{n_2}}}.$$

A més a més, tenim que la variable $V = \frac{(n_1-1)\tilde{S}_X^2 + (n_2-1)\tilde{S}_Y^2}{\sigma^2}$ segueix la distribució khi quadrat amb $n_1 + n_2 - 2$ graus de llibertat ja que:

$$V = \frac{(n_1-1)\tilde{S}_X^2 + (n_2-1)\tilde{S}_Y^2}{\sigma^2} = \frac{\sum\limits_{i=1}^{n_1} (X_i - \overline{X})^2}{\sigma^2} + \frac{\sum\limits_{i=1}^{n_2} (Y_i - \overline{Y})^2}{\sigma^2}.$$

Tenint en compte que si $Z$ és $N(0,1)$ i $U$ és $\chi_n^2$, aleshores $T = \frac{Z}{\sqrt{\frac{U}{n}}}$ és $t_n$ (distribució $t$ de Student amb $n$ graus de llibertat), i podem assegurar que la variable:

$$T = \frac{Z}{\sqrt{\frac{V}{n_1+n_2-2}}} = \frac{\left(\overline{X} - \overline{Y} - (\mu_X - \mu_Y)\right)\sqrt{n_1+n_2-2}}{\sqrt{\left((n_1-1)\tilde{S}_X^2 + (n_2-1)\tilde{S}_Y^2\right)\left(\frac{1}{n_1} + \frac{1}{n_2}\right)}},$$

segueix la distribució $t$ de Student amb $n_1 + n_2 - 2$ graus de llibertat.

Podem escriure, doncs:

$$p\left\{-t_{1-\frac{\alpha}{2}} \leq \frac{\left(\overline{X} - \overline{Y} - (\mu_X - \mu_Y)\right)}{\sqrt{\frac{\left((n_1-1)\tilde{S}_X^2 + (n_2-1)\tilde{S}_Y^2\right)}{n_1+n_2-2}\left(\frac{1}{n_1} + \frac{1}{n_2}\right)}} \leq t_{1-\frac{\alpha}{2}}\right\} = 1 - \alpha, \tag{3.2}$$

on $t_{1-\frac{\alpha}{2}}$ és el $100\left(1 - \frac{\alpha}{2}\right)$-èssim percentil de la distribució $t_{n_1+n_2-2}$.

Fent servir (3.2), podem trobar un interval de confiança bilateral per al paràmetre $\mu_X - \mu_Y$:

$$p\Bigg\{\overline{X} - \overline{Y} - t_{1-\frac{\alpha}{2}}\sqrt{\frac{\left((n_1-1)\tilde{S}_X^2 + (n_2-1)\tilde{S}_Y^2\right)}{n_1+n_2-2}\left(\frac{1}{n_1} + \frac{1}{n_2}\right)} \leq \mu_X - \mu_Y \leq$$

$$\overline{X} - \overline{Y} + t_{1-\frac{\alpha}{2}}\sqrt{\frac{\left((n_1-1)\tilde{S}_X^2 + (n_2-1)\tilde{S}_Y^2\right)}{n_1+n_2-2}\left(\frac{1}{n_1} + \frac{1}{n_2}\right)}\Bigg\} = 1 - \alpha.$$

**3.3.-** Suposem que el temps de ruptura d'un fil de 9.14 m. de llargada és una variable aleatòria normal amb $\sigma = 1$ any.

a) Quina és la funció de confiabilitat per a aquest fil per a $t$ anys?

b) Trobau un interval de confiança per a $R(t)$, donada una mostra aleatòria simple de $n$ valors d'aquesta distribució.

c) Suposem que es proven $n = 10$ fils d'aquest tipus i que la suma dels temps de falla és 111 hores. Calculau un interval de confiança bilateral al 95% per $R(10)$.

**Resolució.** Recordem que si tenim una variable aleatòria $X$, la confiabilitat per a un període $t$ és:

$$R(t) = p\{X > t\}, \; t > 0.$$

a) En el nostre cas, $X$ és $N(\mu, \sigma = 1 \text{ any})$. Per tant, la confiabilitat per a $t$ anys serà:

$$R(t) = p\{X > t\} = p\left\{\frac{X-\mu}{\sigma = 1} > \frac{t-\mu}{\sigma = 1}\right\} = 1 - F_Z(t-\mu),$$

on $F_Z(z)$ és la funció de distribució de la variable normal estàndard.

b) Sigui $X_1, \ldots, X_n$ una mostra aleatòria de $X$. Recordem que l'interval de confiança per el paràmetre $\mu$ és:

$$p\left\{\overline{X} - \frac{\sigma}{\sqrt{n}} z_{1-\frac{\alpha}{2}} \le \mu \le \overline{X} + \frac{\sigma}{\sqrt{n}} z_{1-\frac{\alpha}{2}}\right\} = 1 - \alpha, \tag{3.3}$$

on $z_{1-\frac{\alpha}{2}}$ és el percentil $100\left(1 - \frac{\alpha}{2}\right)\%$ de la distribució normal estàndard.

Fent servir (3.3), podem trobar un interval de confiança per a $R(t)$:

$$\begin{aligned}
p\left\{t - \frac{z_{1-\frac{\alpha}{2}}}{\sqrt{n}} - \overline{X} \le t - \mu \le t + \frac{z_{1-\frac{\alpha}{2}}}{\sqrt{n}} - \overline{X}\right\} &= 1 - \alpha, \\
p\left\{F_Z\left(t - \frac{z_{1-\frac{\alpha}{2}}}{\sqrt{n}} - \overline{X}\right) \le F_Z(t-\mu) \le F_Z\left(t + \frac{z_{1-\frac{\alpha}{2}}}{\sqrt{n}} - \overline{X}\right)\right\} &= 1 - \alpha, \\
p\Bigg\{1 - F_Z\left(t + \frac{z_{1-\frac{\alpha}{2}}}{\sqrt{n}} - \overline{X}\right) \le R(t) = 1 - F_Z(t-\mu) \le & \\
1 - F_Z\left(t - \frac{z_{1-\frac{\alpha}{2}}}{\sqrt{n}} - \overline{X}\right)\Bigg\} &= 1 - \alpha,
\end{aligned}$$

ja que la funció $F_Z(z)$ és creixent.

c) Suposem que $n = 10$, $\sum X_i = 111$. Trobem amb aquestes dades, i fent servir l'apartat anterior, un interval de confiança per a $R(t = 10)$ al $95\%$ de confiança ($\alpha = 0.05$).

En aquest cas, $\overline{X} = \frac{\sum X_i}{n} = \frac{111}{10} = 11.1$ i $z_{1-\frac{\alpha}{2}} = z_{0.975} = 1.96$.

Els extrems esquerre i dret de l'interval s'obtendran fent servir les fórmules trobades a l'apartat b):

$$\begin{aligned} L_1 &= 1 - F_Z\left(10 - 11.1 + \frac{1.96}{\sqrt{10}}\right) = 1 - F_Z(-0.480) = F_Z(0.480) \approx 0.6844, \\ L_2 &= 1 - F_Z\left(10 - 11.1 - \frac{1.96}{\sqrt{10}}\right) = 1 - F_Z(-1.719) = F_Z(1.719) \approx 0.9573. \end{aligned}$$

**3.4.-** Suposem que una variable aleatòria $X$ està distribuïda uniformement en l'interval $(0, b)$. Fent servir el màxim valor d'una mostra aleatòria simple de grandària $n$ de $X$, trobau un interval de confiança per a $b$.

Indicació: feu servir la distribució de $\frac{X_{(n)}}{b}$.

**Resolució.** Abans de començar a fer el problema, recordem que si $X$ és $U(0, b)$, aleshores la funció de densitat i de distribució de $X$ són:

$$f_X(t) = \begin{cases} \frac{1}{b}, & \text{si } t \in (0, b), \\ 0, & \text{en cas contrari,} \end{cases} \qquad F_X(t) = \begin{cases} 0, & \text{si } t < 0, \\ \frac{t}{b}, & \text{si } 0 \leq t \leq b, \\ 1, & \text{si } t > 1. \end{cases}$$

A més a més, recordem que si $X_1, \ldots, X_n$ és una mostra aleatòria simple d'una variable contínua $X$, la funció de densitat de $X_{(n)}$ (màxim de les $X_i$) val:

$$f_{X_{(n)}}(t) = n f_X(t) F_X(t)^{n-1} = \begin{cases} n \cdot \frac{1}{b} \cdot \frac{t^{n-1}}{b^n} = \frac{n t^{n-1}}{b^n}, & \text{si } t \in (0, b), \\ 0, & \text{en cas contrari.} \end{cases}$$

Ja que hem de fer servir la variable $X_{(n)}$ per trobar l'interval de confiança per al paràmetre $b$, trobem els percentils $100\left(1 - \frac{\alpha}{2}\right)\%$ $\left(X_{(n),1-\frac{\alpha}{2}}\right)$ i $100\frac{\alpha}{2}\%$ $\left(X_{(n),\frac{\alpha}{2}}\right)$. En aquest exercici trobarem un interval de confiança bilateral. Deixam com a exercici per al lector trobar els corresponents intervals de confiança unilaterals. Així doncs:

$$\int_0^{X_{(n),1-\frac{\alpha}{2}}} f_{X_{(n)}}(t)\, dt = 1 - \frac{\alpha}{2},$$

$$\begin{aligned}\int_0^{X_{(n),1-\frac{\alpha}{2}}} \frac{nt^{n-1}}{b^n}\,dt &= 1-\frac{\alpha}{2},\\ \frac{X_{(n),1-\frac{\alpha}{2}}{}^n}{b^n} = 1-\frac{\alpha}{2}.\end{aligned}$$

D'on deduïm que:

$$X_{(n),1-\frac{\alpha}{2}} = b\sqrt[n]{1-\frac{\alpha}{2}}.$$

Fent un raonament semblant podem trobar el percentil $100\frac{\alpha}{2}\%$:

$$X_{(n),\frac{\alpha}{2}} = b\sqrt[n]{\frac{\alpha}{2}}.$$

Podem escriure, per tant:

$$\begin{aligned} p\left\{X_{(n),\frac{\alpha}{2}} \le X_{(n)} \le X_{(n),1-\frac{\alpha}{2}}\right\} &= 1-\alpha,\\ p\left\{b\sqrt[n]{\frac{\alpha}{2}} \le X_{(n)} \le b\sqrt[n]{1-\frac{\alpha}{2}}\right\} &= 1-\alpha,\\ p\left\{\sqrt[n]{\frac{\alpha}{2}} \le \frac{X_{(n)}}{b} \le \sqrt[n]{1-\frac{\alpha}{2}}\right\} &= 1-\alpha,\\ p\left\{X_{(n)}\sqrt[n]{\frac{2}{2-\alpha}} \le b \le X_{(n)}\sqrt[n]{\frac{2}{\alpha}}\right\} &= 1-\alpha.\end{aligned}$$

## 3.3 Problemes proposats

**3.1.-** Suposem que la velocitat màxima a què pot arribar un cert model de cotxe de competició és una variable aleatòria normal $X$ amb mitjana $\mu$ desconeguda i desviació estàndard $\sigma$. Es tria una mostra aleatòria simple de 10 cotxes construïts d'acord amb aquest disseny i es prova cada cotxe. La suma de les velocitats màximes (en km/h.) i la suma dels seus quadrats són:

$$\sum_{i=1}^{10} x_i = 2633.13, \quad \sum_{i=1}^{10} x_i^2 = 731865$$

Trobau un interval de confiança per al paràmetre $\mu$ al 95% de confiança.

**3.2.-** Es volen comparar dos règims alimentaris distints per engreixar el bestiar. En el primer es fan servir $n_1 = 8$ vaques durant 1 mes; la suma dels augments de pes i la suma dels seus quadrats són: $\sum x_i = 416$, $\sum x_i^2 = 21807$. En el segon règim, es fan servir $n_2 = 10$ vaques; la suma dels augments de pes i la suma dels seus quadrats són: $\sum x_i = 468$, $\sum x_i^2 = 22172$.
Feu servir l'exercici 3.2 per obtenir un interval de confiança al 95% per a la diferència dels augments mitjans, $\mu_X - \mu_Y$.

**3.3.-** Suposem que el temps en què pot fallar una bombeta és una variable aleatòria exponencial de paràmetre $\lambda$. Es posen a prova $n = 20$ bombetes i es troba que la suma dels seus temps de duració és de 20169 hores.

a) Quin és l'estimador de màxima versemblança de $R(1000)$, o sigui, la confiabilitat de la bombeta per a 1000 hores?

b) Trobau un límit inferior de confiança al 90% per a $R(1000)$.

**3.4.-** Trobau uns intervals de confiança de la forma $(0, L_1)$ i $(L_2, \infty)$ per al paràmetre $\lambda$ d'una variable aleatòria exponencial donada una mostra aleatòria simple $X_1, \ldots, X_n$ de l'esmentada variable.
Final. Juny 93.

**3.5.-** Es varen prendre mostres independents de dos cursos i es registraren les qualificacions següents:

| Mostra 1 | Mostra 2 |
|---|---|
| 75 | 52 |
| 70 | 60 |
| 60 | 42 |
| 75 | 58 |

Trobau un interval de confiança del 95% per a:

a) La diferència de mitjanes dels grups $\mu_1 - \mu_2$.

b) La mitjana de cada classe: $\mu_1$ i $\mu_2$.

Segon Parcial. Juny 91.

**3.6.-** Sigui $X$ una variable uniforme en l'interval $(a, b)$ on $a$ és conegut i fix. Sigui $X_1, \ldots, X_n$ una mostra aleatòria simple de $X$. Trobau un interval de confiança bilateral per al paràmetre $b$ al nivell de significació $\alpha$ fent servir la distribució $X_{(n)}$ (màxim de $X_1, \ldots, X_n$).
Segon parcial. Juny 95.

**3.7.-** Sigui $X_1, \ldots, X_{50}$ una mostra aleatòria simple d'una variable aleatòria $N(\mu, \sigma^2)$ tal que $\sum X_i = 200$ i $\sum X_i^2 = 1000$. Trobau un interval de confiança al 90% per al paràmetre $\sigma^2$.
Final. Juny 96.

**3.8.-** Considerem la següent mostra aleatòria simple d'una variable aleatòria $N(\mu, \sigma^2)$:

$$28.3, 26.4, 27.0, 22.5, 23.5, 29.1, 26.8, 26.7, 30.9, 25.0$$

Trobau un interval de confiança al 90% per al paràmetre $\mu$.
Final. Setembre 96.

**3.9.-** Sigui $X_1, \ldots, X_n$ una mostra aleatòria simple d'una variable aleatòria

$X$ $N(\mu, \sigma^2)$. Suposem $n = 20$. Sigui $Y = \frac{\overline{X}-\mu}{\frac{\tilde{S}}{\sqrt{n}}}$ on $\tilde{S}^2 = \frac{\sum_{i=1}^{n}(X_i-\overline{X})^2}{n-1}$. Trobau $p\{Y \leq 1.328\}$.

Final. Setembre 94.

# Capítol 4

# Contrasts d'hipòtesi

## 4.1 Resum teòric

En molts de casos s'ha de decidir *a priori* entre dues opcions possibles sobre la distribució d'una variable aleatòria donada. Les dues possibilitats s'anomenen **hipòtesi nul·la** $H_0$ i **hipòtesi alternativa** $H_1$. Per exemple, si $X$ és una variable aleatòria $N(\mu, 4)$ amb $\mu$ desconeguda, $H_0 : \mu = 2,\ H_1 : \mu \neq 2$.

Un test o contrast d'hipòtesi és una regla que permet decidir quina de les dues hipòtesis és acceptada, partint d'una sèrie d'experiments.

El mètode consisteix a determinar un succés $E$ que pot ocórrer o no desprès de cada experiment i tal que, si $H_0$ és certa, la probabilitat que ocorri $E^c$ és quasi 1 i, si $H_1$ és certa, la probabilitat de $E$ és pròxima a 1. Aleshores es realitza l'experiment. Si ocorre $E^c$ es conclou que $H_0$ és certa, i si ocorre $E$ es decideix que $H_1$ és certa.

Així hem dividit l'espai mostral en dues parts, una part que fa acceptar $H_0$ i l'altra, anomenada **regió crítica**, que fa rebutjar $H_0$.

En tot contrast d'hipòtesi, podem distingir dos possibles errors: l'**error de tipus I** que es comet en rebutjar $H_0$ si és certa, i l'**error de tipus II**, comès en acceptar $H_0$ si és falsa.

Quan provam hipòtesis respecte d'un paràmetre $\gamma$, la probabilitat d'acceptar $H_0$ és una funció de $\gamma$, denotada per $C(\gamma)$, i s'anomena la **corba OC** (Operating Characteristic) de la prova. A $Q(\gamma) = 1 - C(\gamma)$ se l'anomena la **funció de potència del test**.

### 4.1.1 Hipòtesis simples

Una hipòtesi simple és la que especifica completament la funció de probabilitat o densitat d'una variable aleatòria. Per exemple, si $f_X$ només depèn d'un paràmetre $\gamma$, aleshores

$H_0 : \gamma = \gamma_0$.

$H_1 : \gamma = \gamma_1$.

és un contrast d'hipòtesi simple davant d'alternativa simple.

En aquest cas, les probabilitats d'error de tipus I i II estan ben definides i es denoten per $\alpha$ i $\beta$, respectivament; és a dir,

$$p\,\{\text{rebutjar } H_0/H_0 \text{ certa}\} = \alpha,\ p\,\{\text{ acceptar } H_0/H_1 \text{ certa}\} = \beta.$$

Donada una regió crítica $R.C.$, s'anomena **nivell de significació** de la regió a $p\,\{X \in R.C./H_0\}$. Observem que el nivell de significació coincideix amb $\alpha$, la probabilitat de l'error de tipus I.

Normalment no és complicat trobar una regió crítica. De totes formes, sovint en tenim més d'una i volem determinar quina utilitzar. D'entre totes les regions crítiques $R.C.$ amb nivell de significació $\alpha$, volem determinar una regió crítica $R.C.^*$ amb error de tipus II mínim. Si existeix $R.C.^*$, s'anomena **regió crítica òptima**.

Existeix un resultat que permet obtenir regions crítiques òptimes.

**Lema de Neyman-Pearson.**

Suposem que $X$ és una variable aleatòria amb funció de distribució dependent d'un paràmetre $\gamma$. Sigui $X_1, \ldots, X_n$ una mostra aleatòria simple de $X$. Sigui $L(\gamma)$ la funció de versemblança de la mostra. Volem contrastar

$H_0 : \gamma = \gamma_0$.

$H_1 : \gamma = \gamma_1$.

Aleshores

$$R.C. = \left\{(x = (x_1, \ldots, x_n) : \frac{L(\gamma_1)}{L(\gamma_0)} \geq k\right\}$$

és una regió crítica òptima amb nivell de significació $\alpha$, on $k$ s'elegeix de manera que $p\,\{X \in R.C./H_0\} = \alpha$.

**Proposició 4.1** *Sigui* $X_1, \ldots, X_n$ *una mostra aleatòria simple d'una variable aleatòria* $N(\mu, \sigma^2)$ *amb* $\sigma^2$ *coneguda. Aleshores la regió crítica òptima amb nivell de significació* $\alpha$ *per al contrast* $H_0 : \mu = \mu_0$ *davant de* $H_1 : \mu = \mu_1$ *s'obté amb*

$$\bar{x} \geq \mu_0 + \frac{\sigma}{\sqrt{n}} z_{1-\alpha} \quad (\mu_1 > \mu_0),$$

$$\bar{x} \leq \mu_0 - \frac{\sigma}{\sqrt{n}} z_{1-\alpha} \quad (\mu_1 < \mu_0),$$

*on* $z_{1-\alpha}$ *és el* $100(1-\alpha)$*-èssim percentil d'una* $N(0,1)$.

**Proposició 4.2** *Sigui* $X_1, \ldots, X_n$ *una mostra aleatòria simple d'una variable aleatòria* $N(\mu, \sigma^2)$. *Aleshores la regió crítica òptima amb nivell de significació* $\alpha$ *per al contrast* $H_0 : \sigma = \sigma_0$ *davant de* $H_1 : \sigma = \sigma_1$ *s'obté amb*

$$\sum (x_i - \overline{x})^2 > \sigma_0^2 \chi^2_{1-\alpha} \quad (\sigma_1 > \sigma_0),$$

$$\sum (x_i - \overline{x})^2 < \sigma_0^2 \chi^2_{\alpha} \quad (\sigma_1 < \sigma_0),$$

*on* $\chi^2_{1-\alpha}$ *i* $\chi^2_\alpha$ *són, respectivament, el* $100(1-\alpha)$ *i el* $100\alpha$*-èssim percentils d'una* $\chi^2$ *amb* $n-1$ *graus de llibertat.*

Si la hipòtesi alternativa és unilateral, per exemple $H_1 : \mu > \mu_1$, aleshores la regió crítica de Neyman-Pearson és la que dóna la funció de potència més alta possible.

La regió crítica de Neyman-Pearson dóna el valor més petit possible per a $\beta$ d'entre totes les proves amb el mateix valor de $\alpha$.

Una altra característica desitjable dels contrasts d'hipòtesi és que en general siguin una funció de l'estadística suficient per al paràmetre, si existeix. El resultat següent tracta aquest aspecte.

**Proposició 4.3** *Suposem que* $X_1, \ldots, X_n$ *és una mostra aleatòria simple d'una variable aleatòria* $X$ *i que la funció de distribució de* $X$ *depèn d'un sol paràmetre desconegut* $\gamma$. *Suposem que* $Y = g(X_1, \ldots, X_n)$ *és una estadística suficient per a* $\gamma$. *Aleshores la regió crítica de Neyman-Pearson és funció de* $Y$.

### 4.1.2 Hipòtesis compostes

Quan $H_0$ i/o $H_1$ són compostes, aleshores no es disposa d'un resultat com el lema de Neyman-Pearson que doni la regió crítica òptima. De totes formes, hi ha un procediment general semblant al donat pel lema que produeix un bon contrast.

Primer de tot observem que si $H_0$ és composta, aleshores no tenim un únic valor per a la probabilitat de l'error de tipus I. En aquestes situacions s'acostuma a indicar amb $\alpha$ el valor més gran de la probabilitat de l'error de tipus I per a tots els possibles valors del paràmetre especificats per $H_0$.

Aleshores, per a totes les proves possibles amb aquesta $\alpha$, se selecciona la que té la corba OC més baixa per a tots els valors especificats per $H_1$, si existeix.

El **criteri de contrast de la raó de versemblança** és un mètode que es pot utilitzar per obtenir una regió crítica per provar $H_0$ davant de $H_1$, àdhuc quan una, o les dues hipòtesis, és composta. Vegem quin és.

Suposem que $X_1, \ldots, X_n$ és una mostra aleatòria simple d'una variable aleatòria $X$ amb distribució dependent de $\gamma_1, \ldots, \gamma_r$. Per provar $H_0$ davant de $H_1$, on una o les dues hipòtesis poden ser compostes, sigui $L(\hat{\omega})$ el valor màxim de la funció de versemblança de la mostra en què els paràmetres $\gamma_1, \ldots, \gamma_r$ estan restringits als valors especificats per $H_0$, i sigui $L(\hat{\Omega})$ el valor màxim de la funció de versemblança de la mostra en què els paràmetres poden prendre qualsevol valor especificat per la unió de $H_0$ i $H_1$. Aleshores la regió crítica $R.C.$ està formada pels resultats de la mostra tals que

$$\lambda = \frac{L(\hat{\omega})}{L(\hat{\Omega})} < A,$$

on $A$ es tria de manera que $P(\text{error de tipus I}) = \alpha$.

L'apèndix A mostra una sèrie de taules on s'especifiquen tots els contrasts d'hipòtesi paramètrics més usuals. Es donen les condicions per a cada contrast, l'estadística a utilitzar en cada cas, la regió crítica i l'interval de confiança corresponent a cada paràmetre que surt en el contrast.

## 4.2 Problemes resolts

**4.1.-** Suposem que $X$ és una variable aleatòria normal amb mitjana $\mu$ desconeguda i variància 9. Si es pren una mostra aleatòria simple de 16 observacions de $X$ i es vol provar $H_0 : \mu = 2$, demostrau que cada una de les següents regions crítiques és de grandària 0.05, o sigui, que l'error tipus I per a cada regió crítica és de 0.05:

$$\text{a) } \overline{X} > 3.23, \quad \text{b) } \overline{X} < 0.77, \quad \text{c) } 1.952 < \overline{X} < 2.048.$$

Quin tipus d'hipòtesi alternativa $H_1$ seria apropiada per a cada una de les regions crítiques anteriors?

**Resolució.** Tenint en compte que les regions crítiques han d'estar en consonància amb la hipòtesi alternativa $H_1$ i que l'estimador millor per al paràmetre $\mu$ és $\overline{X}$, les hipòtesis alternatives corresponents a les regions crítiques anteriors són:

a) $H_1 : \mu > 2$

Trobem l'error tipus I $\alpha$:

$$\begin{aligned}
\alpha &= p\{\text{Rebutjar } H_0/H_0 \text{ certa}\} = p\{R.C./\mu = 2\} \\
&= p\left\{\overline{X} > 3.23/\mu = 2\right\} = p\left\{Z = N(0,1) = \frac{\overline{X} - \mu}{\frac{\sigma}{\sqrt{n}}} > \frac{3.23 - 2}{\frac{3}{\sqrt{16}}}\right\} \\
&= p\{Z > 1.64\} = 1 - F_Z(1.64) = 1 - 0.95 = 0.05,
\end{aligned}$$

tenint en compte que la variable $\overline{X}$ és normal $N\left(\mu, \frac{\sigma^2}{n}\right)$.

b) $H_1 : \mu < 2$. Error tipus I:

$$\begin{aligned}
\alpha &= p\left\{\overline{X} < 0.77/\mu = 2\right\} = p\left\{Z = N(0,1) < \frac{0.77 - 2}{\frac{3}{\sqrt{16}}}\right\} \\
&= p\{Z < -1.64\} = p\{Z > 1.64\} = 0.05.
\end{aligned}$$

c) En aquest cas, no té sentit escollir cap $H_1$ ja que la regió crítica escollida està en contradicció amb la filosofia de realitzar un contrast d'hipòtesi. Fixau-vos que en aquest cas $\mu = 2 \in R.C.$ Per tant, dir que $H_0$ és certa seria equivalent a afirmar que $\overline{X} \in R.C.$

Comprovació que l'error tipus I val $0.05$:

$$\begin{aligned}\alpha &= p\left\{1.952 < \overline{X} < 2.048\right\} = p\left\{\frac{1.952-2}{\frac{3}{\sqrt{16}}} < Z = N(0,1) < \frac{2.048-2}{\frac{3}{\sqrt{16}}}\right\} \\ &= p\left\{-0.064 < Z < 0.064\right\} = 2F_Z(0.064) - 1 \approx 0.05.\end{aligned}$$

**4.2.-** Suposem que $X$ és una variable aleatòria uniforme en l'interval que va des de 0 fins a $\theta$. S'observa un valor de $X$ i es vol provar $H_0 : \theta = 1$ en funció de $H_1 : \theta > 1$. Es decideix rebutjar $H_0$ si el valor de la mostra és més gran que 0.99. Trobau l'error tipus I per a aquest contrast i feu un dibuix de la funció de potència.

**Resolució.** La situació de forma esquemàtica és la següent:

Tenim una variable aleatòria $X\ U(0,\theta)$.

Tenim una mostra aleatòria simple de $X$ de grandària: $X_1$.

Volem fer el contrast següent:

$$\left.\begin{array}{ll} H_0: & \theta = 1, \\ H_1: & \theta > 1. \end{array}\right\}$$

Regió crítica escollida: $R.C. = \{X_1 > 0.99\}$.

Trobem l'error tipus I $\alpha$:

$$\begin{aligned}\alpha &= p\left\{\text{rebutjar } H_0/H_0 \text{ certa}\right\} = p\left\{X_1 > 0.99/\theta = 1\right\} \\ &= \int_{0.99}^{1} 1\, dx = 1 - 0.99 = 0.01,\end{aligned}$$

tenint en compte que la funció de densitat de $X_1$ val, si $H_0$ és certa:

$$f_{X_1}(x) = f_X(x) = \begin{cases} 1, & \text{si } x \in (0,1), \\ 0, & \text{en cas contrari.} \end{cases}$$

Funció de potència:

$$\begin{aligned}Q(\theta) &= p\left\{\text{rebutjar } H_0\right\} = 1 - p\left\{\text{acceptar } H_0\right\} = 1 - p\left\{X_1 \le 0.99\right\} \\ &= 1 - \int_0^{0.99} \frac{1}{\theta}\, dx = 1 - \frac{0.99}{\theta}.\end{aligned}$$

El gràfic de la funció de potència es pot veure en la figura 4.1.

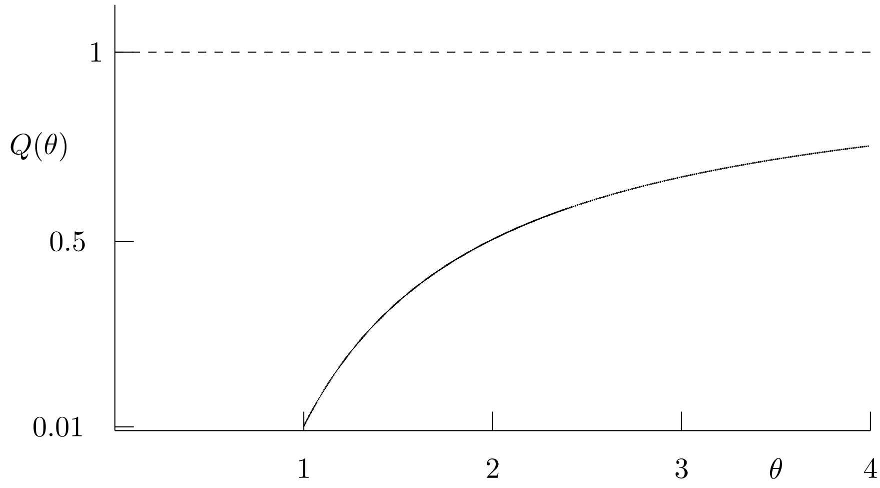


Figura 4.1: Gràfic de la funció de potència per a l'exercici 4.2

**4.3.-** Suposem que $X$ és una variable aleatòria de Bernoulli amb paràmetre $p$. Es pren una mostra aleatòria simple de 4 observacions de $X$ i es vol provar $H_0 : p = \frac{1}{4}$ contra $H_1 : p = \frac{3}{4}$. Es rebutja $H_0$ si s'obtenen 4 èxits en la mostra. Trobau els valors de $\alpha$ (error tipus I) i $\beta$ (error tipus II).

**Resolució.** Considerem $X_1, X_2, X_3, X_4$ una mostra aleatòria simple d'una variable aleatòria $X$ Bernoulli $(p)$.

Es rebutja $H_0$ si hi ha 4 èxits en la mostra. Per tant, la regió crítica serà:

$$R.C. = \{X_1 = 1 \cap X_2 = 1 \cap X_3 = 1 \cap X_4 = 1\} = \{\min\{X_1, X_2, X_3, X_4\} = X_{(1)} = 1\},$$

ja que considerar 4 èxits en la mostra és equivalent a dir que el mínim de les $X_i$ val 1.

En el problema 1.5 varem veure que la funció de probabilitat de $X_{(1)}$ era:

| $x$ | 0 | 1 |
|---|---|---|
| $f_{X_{(1)}}$ | $1-p^4$ | $p^4$ |

Per tant, podem deduir que $p\left\{X_{(1)} = 1\right\} = p^4$ i $p\left\{X_{(1)} = 0\right\} = 1 - p^4$.

Trobem l'error tipus I ($\alpha$) i tipus II ($\beta$):

$$\alpha \;=\; p\left\{\text{rebutjar } H_0/H_0 \text{ certa}\right\} = p\left\{X_{(1)} = 1/p = \frac{1}{4}\right\} = \left(\frac{1}{4}\right)^4 \approx 0.003906,$$

$$\beta \;=\; p\left\{\text{acceptar } H_0/H_0 \text{ falsa}\right\} = p\left\{X_{(1)} = 0/p = \frac{3}{4}\right\} = 1 - \left(\frac{3}{4}\right)^4 \approx 0.6836.$$

**4.4.-** Si $X$ és una variable aleatòria normal amb mitjana 0, trobau la prova uniforme més poderosa de $H_0 : \sigma^2 = 2$ contra $H_1 : \sigma^2 > 2$ de grandària $\alpha$, donada una mostra aleatòria simple de $n$ observacions de $X$.

**Resolució.** Considerem $X_1, \ldots, X_n$ una mostra aleatòria simple de la variable aleatòria $X = N(\mu = 0, \sigma^2)$. Sigui $\sigma_1$ un valor fix amb $\sigma_1^2 > 2$. Considerem el contrast següent:

$$\left.\begin{array}{ll} H_0: & \sigma^2 = 2, \\ H_1: & \sigma^2 = \sigma_1^2. \end{array}\right\} \tag{4.1}$$

on l'error tipus I és $\alpha$.

Aplicant el teorema de Neyman-Pearson, la regió crítica més bona (la que té l'error tipus II més petit) per al contrast anterior és:

$$R.C. = \left\{\frac{L\left(\sigma_1^2\right)}{L(2)} \geq k_\alpha\right\},$$

on $L\left(\sigma^2\right)$ és la funció de versemblança de la mostra:

$$L\left(\sigma^2\right) = \frac{1}{(2\pi)^{\frac{n}{2}}\sigma^n} \mathrm{e}^{-\frac{1}{2\sigma^2}\sum\limits_{i=1}^n X_i^2}.$$

Per tant, el quocient que apareix en la regió crítica anterior val:

$$\frac{L\left(\sigma_1^2\right)}{L(2)} = \frac{2^{\frac{n}{2}}}{\sigma_1^n} \mathrm{e}^{-\left(\frac{1}{2\sigma_1^2} - \frac{1}{4}\right)\sum\limits_{i=1}^n X_i^2}.$$

Per tant, escriure $\frac{L\left(\sigma_1^2\right)}{L(2)} \geq k_\alpha$ és equivalent a:

$$\sum_{i=1}^n X_i^2 \geq \frac{\ln\left(\frac{k_\alpha \sigma_1^2}{2^{\frac{n}{2}}}\right)}{\frac{1}{4} - \frac{1}{2\sigma_1^2}} := C_\alpha.$$

La regió crítica per al contrast 4.1 serà, per tant:

$$R.C. = \left\{\sum_{i=1}^n X_i^2 \geq C_\alpha\right\}.$$

A continuació, trobem $C_\alpha$.

Si $H_0$ és certa, aleshores les variables $X_i$ són normals $N(0, \sigma^2 = 2)$. Per tant les variables $\frac{X_i}{\sqrt{2}}$ són $N(0,1)$. D'aquí deduïm que la variable $\frac{\sum_{i=1}^{n} X_i^2}{2}$ és una variable khi quadrat amb $n$ graus de llibertat. Tenint en compte que l'error tipus I val $\alpha$, podem trobar el valor de la constant $C_\alpha$:

$$\alpha = p\left\{\text{rebutjar } H_0/H_0 \text{ certa}\right\} = p\left\{\frac{\sum\limits_{i=1}^{n} X_i^2}{2} \geq \frac{C_\alpha}{2}\right\} = p\left\{\chi_n^2 \geq \frac{C_\alpha}{2}\right\}.$$

Per tant $C_\alpha = 2\chi_{1-\alpha}^2$ on $\chi_{1-\alpha}^2$ és el $100(1-\alpha)$-èssim percentil per la distribució $\chi_n^2$.

Concloem que la millor regió crítica per al contrast (4.1) és:

$$R.C. = \left\{\sum_{i=1}^{n} X_i^2 \geq 2\chi_{1-\alpha}^2\right\}. \tag{4.2}$$

Prenem com a regió crítica del contrast original

$$\left.\begin{array}{ll} H_0: & \sigma^2 = 2, \\ H_1: & \sigma^2 > 2. \end{array}\right\} \tag{4.3}$$

la regió crítica (4.2) anterior.

Vegem que aquesta és la millor regió crítica per al contrast (4.3).

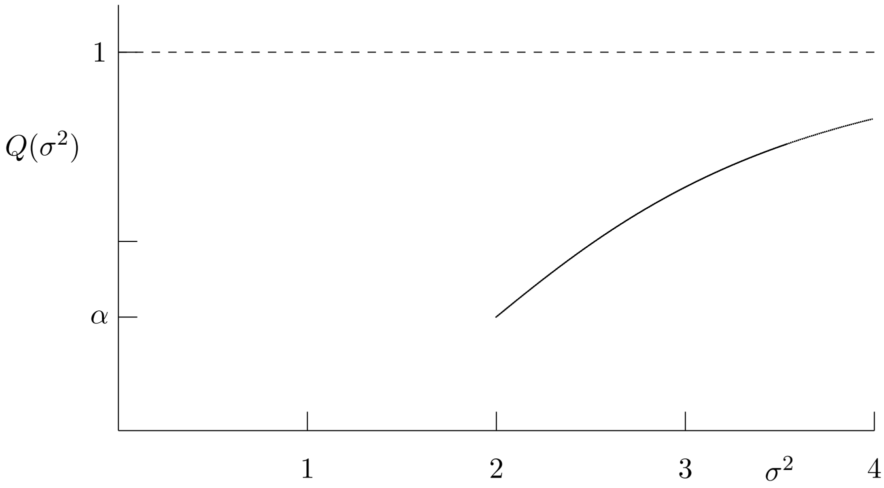


Figura 4.2: Gràfic de la funció de potència per a l'exercici 4.4

Trobem la funció de potència:

$$\begin{aligned} Q\left(\sigma^2\right) &= 1 - p\{\text{acceptar } H_0\} = p\left\{\sum_{i=1}^{n} X_i^2 \geq 2\chi^2_{1-\alpha}\right\} \\ &= p\left\{\frac{\sum_{i=1}^{n} X_i^2}{\sigma^2} = \chi^2_n \geq \frac{2}{\sigma^2}\chi^2_{1-\alpha}\right\} = 1 - F_{\chi^2_n}\left(\frac{2}{\sigma^2}\chi^2_{1-\alpha}\right). \end{aligned}$$

La representació gràfica de la funció de potència es pot veure en la figura 4.2.

Suposem ara que tenim una altra regió crítica $R.C.'$ més bona que la donada per (4.2). Això voldria dir que la funció de potència $Q'\left(\sigma^2\right)$ donada per $R.C.'$ hauria d'estar per damunt de la funció de potència $Q\left(\sigma^2\right)$ donada per la regió crítica (4.2). Però això és absurd ja que sabem que, per a $\sigma^2 = \sigma_1^2 > 2$, la funció de potència del contrast (4.1) pren el valor màxim en $Q\left(\sigma_1^2\right)$ ja que la $R.C.$ donada per (4.2) és la millor regió crítica del contrast (4.1).

**4.5.-** Suposem que la precipitació de pluja anual registrada en una determinada estació és una variable aleatòria normal amb mitjana $\mu$ i desviació estàndard de 0.05 metres. S'estudia una mostra aleatòria simple de grandària 5. La pluja registrada (en metres) en cada un dels 5 anys va ser:

$$0.46,\ 0.52,\ 0.44,\ 0.38 \text{ i } 0.57.$$

Feu el contrast d'hipòtesi següent:

$$\left.\begin{array}{ll} H_0: & \mu = 0.5334, \\ H_1: & \mu < 0.5334. \end{array}\right\}$$

O sigui, trobau l'error tipus I màxim per poder acceptar $H_0$.

**Resolució.** Hem de fer un contrast respecte del paràmetre $\mu$ d'una variable aleatòria $X$ normal amb paràmetres $\mu$ i $\sigma = 0.05$ coneguda. La regió crítica corresponent a aquest contrast (vegeu apèndix A.1 cas II) és:

$$R.C. = \{Z \leq z_\alpha\},$$

on $Z$ és una normal $N(0,1)$ i $z_\alpha$ és el percentil $100\alpha\%$ de la mateixa variable $N(0,1)$.

L'estadístic a fer servir és (està en el mateix apèndix):

$$Z = \frac{\overline{X} - \mu_0}{\frac{\sigma}{\sqrt{n}}} = \frac{0.474 - 0.5334}{\frac{0.05}{\sqrt{5}}} \approx -2.6564.$$

L'error $\alpha_{\text{max}}$ per poder acceptar $H_0$ serà:

$$\alpha_{\text{max}} = p\{Z \leq -2.6564\} = 1 - p\{Z \leq 2.6564\} \approx 1 - 0.996 = 0.004,$$

ja que si $\alpha < 0.004$, aleshores $Z = -2.6564 > z_\alpha$ i, per tant, el valor de l'estadístic $Z$ està fora de la regió crítica.

Com que $\alpha_{\text{max}}$ és molt petit, rebutjam $H_0$ i concloem que $\mu < 0.5334$.

**4.6.-** Fent servir la prova del criteri de la raó de versemblança, trobau la regió crítica per a la hipòtesi $H_0 : \lambda \leq \lambda_0$ contra l'alternativa $H_1 : \lambda > \lambda_0$ on $\lambda$ és el paràmetre d'una variable aleatòria exponencial. Suposem que disposam d'una mostra aleatòria simple de $n$ observacions de $X$ i volem que l'error tipus I sigui $\alpha$.

**Resolució.** Les funcions de densitat i de versemblança corresponents a la variable $X$ Exp $(\lambda)$ i la mostra aleatòria simple, respectivament, són:

$$\begin{aligned} f_X(x) &= \lambda \mathrm{e}^{-\lambda x},\ x>0, \\ L(\lambda) &= \prod_{i=1}^n f_{X_i}(x_i) = \lambda^n \mathrm{e}^{-\lambda \sum_{i=1}^n x_i},\ x_i > 0. \end{aligned}$$

Segons el criteri de la raó de versemblança, la millor regió crítica és:

$$R.C. = \left\{ \frac{L(\omega)}{L(\Omega)} < A \right\}, \tag{4.4}$$

on

$$L(\omega) = \max_{\lambda \in H_0} L(\lambda),\ L(\Omega) = \max_{\lambda \in H_0 \cup H_1} L(\lambda),$$

i $A$ s'ha d'escollir de tal forma que l'error tipus I sigui $\alpha$.

En el nostre cas,

$$L(\omega) = \max_{\lambda \le \lambda_0} L(\lambda) \text{ i } L(\Omega) = \max_{\lambda \in \mathbb{R}} L(\lambda)$$

Quan estudiàvem els estimadors de máxima versemblança (vegeu problema 2.8), vàrem veure que l'estimador de màxima versemblança del paràmetre $\lambda$ era $\frac{1}{\overline{X}}$. Per tant, podem afirmar que:

$$\begin{aligned} L(\Omega) &= L\left(\frac{1}{\overline{X}}\right) = \frac{\mathrm{e}^{-n}}{\overline{X}^n}, \\ L(\omega) &= \max_{\lambda \le \lambda_0} L(\lambda) = \begin{cases} L(\lambda_0) = \lambda_0^n \mathrm{e}^{-n\lambda_0 \overline{X}}, & \text{si } \lambda_0 < \frac{1}{\overline{X}}, \\ L\left(\frac{1}{\overline{X}}\right) = \frac{\mathrm{e}^{-n}}{\overline{X}^n}, & \text{si } \lambda_0 \ge \frac{1}{\overline{X}}. \end{cases} \end{aligned}$$

El quocient $\frac{L(\omega)}{L(\Omega)}$ que surt en la regió crítica valdrà:

$$\frac{L(\omega)}{L(\Omega)} = \begin{cases} (\lambda_0 \overline{X})^n e^{-n(\lambda_0 \overline{X} - 1)}, & \text{si } \lambda_0 < \frac{1}{\overline{X}}, \\ 1, & \text{si } \lambda_0 \ge \frac{1}{\overline{X}}. \end{cases}$$

El gràfic de la funció $\frac{L(\omega)}{L(\Omega)}$ com a funció de la variable $\frac{1}{\overline{X}}$ es pot veure en la figura 4.3. Fixau-vos que dir que $\frac{L(\omega)}{L(\Omega)} < A$ és equivalent a dir que existeix una constant $C'$ tal que $\frac{1}{\overline{X}} > C'$. Per tant, la regió crítica 4.4 es pot escriure com:

$$R.C. = \left\{ \frac{1}{\overline{X}} > C' \right\} = \left\{ \overline{X} < C \right\},$$

on $C = \frac{1}{C'}$. Per acabar, diguem com trobar $C$.

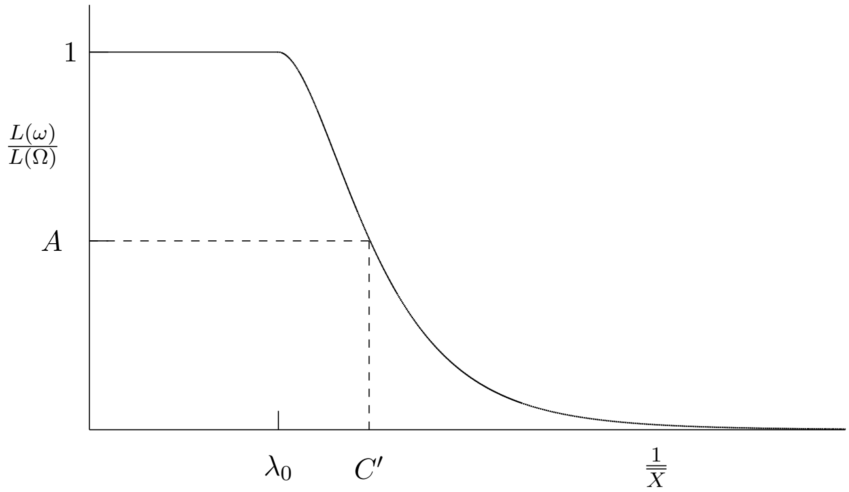


Figura 4.3: Gràfic de la funció $\frac{L(\omega)}{L(\Omega)}$ per a l'exercici 4.6

Sabem que si $X_1, \ldots, X_n$ és una mostra aleatòria simple d'una variable aleatòria Exp $(\lambda)$, aleshores la variable $Y = 2\lambda \sum_{i=1}^{n} X_i$ es distribueix segons una distribució $\chi^2$ amb $2n$ graus de llibertat.

Per tant, tenint en compte que l'error tipus I és $\alpha$, trobem el valor de $C$:

$$\alpha = p\left\{\overline{X} < C\right\} = p\left\{2\lambda_0 \sum_{i=1}^{n} X_i < 2\lambda_0 nC\right\} = p\left\{\chi^2_{2n} < 2\lambda_0 nC\right\}.$$

Per tant, tendrem que $2\lambda_0 nC = \chi^2_{2n,\alpha}$ (percentil $100\alpha\%$ de la distribució $\chi^2$ amb $2n$ graus de llibertat). D'on deduïm que el valor de $C$ és:

$$C = \frac{\chi^2_{2n,\alpha}}{2\lambda_0 n}.$$

La regió crítica obtenguda serà:

$$R.C. = \left\{\overline{X} < \frac{\chi^2_{2n,\alpha}}{2\lambda_0 n}\right\}.$$

**4.7.-** Suposem que $X_1, X_2, \ldots, X_n$ és una mostra aleatòria simple d'una variable aleatòria normal amb mitjana $\mu_X$ i variància $\sigma^2$. Suposem també que $Y_1, Y_2, \ldots, Y_n$ és una mostra aleatòria simple independent d'una variable aleatòria normal amb mitjana $\mu_Y$ i variància $\sigma^2$ (notau que les variàncies són iguals). Provau que si s'aplica la prova de la raó de versemblança al contrast

$$\left.\begin{array}{ll} H_0: & \mu_X = \mu_Y, \\ H_1: & \mu_X \neq \mu_Y, \end{array}\right\}$$

la regió crítica que surt es pot posar en funció de la variable aleatòria

$$\frac{(\overline{X}-\overline{Y})\sqrt{n}}{S\sqrt{2}}, \text{ on } S^2 = \frac{\sum\limits_{i=1}^{n}(X_i-\overline{X})^2 + \sum\limits_{i=1}^{n}(Y_i-\overline{Y})^2}{2(n-1)}.$$

Quina és la distribució de la variable aleatòria anterior si $H_0$ és certa?

**Resolució.** Les funcions de densitat de les mostres corresponents a les variables $X$ i $Y$ i la funció de versemblança de la mostra són:

$$\begin{aligned}
f_X(x;\mu_X,\sigma^2) &= \frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}}\mathrm{e}^{-\frac{(x-\mu_X)^2}{2\sigma^2}}, \\
f_Y(y;\mu_Y,\sigma^2) &= \frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}}\mathrm{e}^{-\frac{(y-\mu_Y)^2}{2\sigma^2}}, \\
L(\mu_X,\mu_Y,\sigma^2) &= \frac{1}{(2\pi\sigma^2)^n}\mathrm{e}^{-\frac{1}{2\sigma^2}\left(\sum\limits_{i=1}^{n}(X_i-\mu_X)^2+\sum\limits_{i=1}^{n}(Y_i-\mu_Y)^2\right)}.
\end{aligned}$$

La millor regió crítica fent servir el mètode de la raó de versemblança serà:

$$R.C = \left\{\frac{L(\omega)}{L(\Omega)} < A\right\} = \left\{\frac{\max\limits_{\mu_X=\mu_Y,\sigma^2} L(\mu_X,\mu_Y,\sigma^2)}{\max\limits_{\mu_X,\mu_Y,\sigma^2} L(\mu_X,\mu_Y,\sigma^2)} < A\right\}.$$

Fent servir els problemes 2.5 i 2.6 podem trobar els valors de $L(\omega)$ i $L(\Omega)$:

$$\begin{aligned}
L(\omega) &= \max_{\mu_X=\mu_Y,\sigma^2} L(\mu_X,\mu_Y,\sigma^2) \\
&= L\left(\tilde{\mu}_{\mathsf{max}} := \frac{\overline{X}+\overline{Y}}{2}, \tilde{S}^2_{\mathsf{max}} := \frac{1}{2n}\left(\sum_{i=1}^{n} X_i^2 + \sum_{i=1}^{n} Y_i^2\right) - \left(\frac{\overline{X}+\overline{Y}}{2}\right)^2\right)
\end{aligned}$$

$$
\begin{aligned}
&= \frac{1}{\left(\frac{\pi}{n}\left(\sum_{i=1}^{n}(X_i-\tilde{\mu}_{\mathsf{max}})^2+\sum_{i=1}^{n}(Y_i-\tilde{\mu}_{\mathsf{max}})^2\right)\right)^n}\mathrm{e}^{-n},\\
L(\Omega) &= \max_{\mu_X,\mu_Y,\sigma^2} L(\mu_X,\mu_Y,\sigma^2)\\
&= L\left(\overline{X},\overline{Y},\frac{\sum_{i=1}^{n}(X_i-\overline{X})^2+\sum_{i=1}^{n}(Y_i-\overline{Y})^2}{2n}\right)\\
&= \frac{1}{\left(\frac{\pi}{n}\left(\sum_{i=1}^{n}(X_i-\overline{X})^2+\sum_{i=1}^{n}(Y_i-\overline{Y})^2\right)\right)^n}\mathrm{e}^{-n}.
\end{aligned}
$$

Per tant, el quocient $\frac{L(\omega)}{L(\Omega)}$ val:

$$
\frac{L(\omega)}{L(\Omega)} = \left(\frac{\sum_{i=1}^{n}(X_i-\overline{X})^2+\sum_{i=1}^{n}(Y_i-\overline{Y})^2}{\sum_{i=1}^{n}(X_i-\tilde{\mu})^2+\sum_{i=1}^{n}(Y_i-\tilde{\mu})^2}\right)^n,
$$

on recordem que $\tilde{\mu}=\frac{\overline{X}+\overline{Y}}{2}$.

Fent servir que

$$
\begin{aligned}
\sum_{i=1}^{n}(X_i-\tilde{\mu}_{\mathsf{max}})^2 &= \sum_{i=1}^{n}(X_i-\overline{X})^2+\frac{n}{4}(\overline{X}-\overline{Y})^2\\
\sum_{i=1}^{n}(Y_i-\tilde{\mu}_{\mathsf{max}})^2 &= \sum_{i=1}^{n}(Y_i-\overline{Y})^2+\frac{n}{4}(\overline{X}-\overline{Y})^2,
\end{aligned}
$$

podem escriure el quocient anterior de la manera següent:

$$
\begin{aligned}
\frac{L(\omega)}{L(\Omega)} &= \left(\frac{\sum_{i=1}^{n}(X_i-\overline{X})^2+\sum_{i=1}^{n}(Y_i-\overline{Y})^2}{\sum_{i=1}^{n}(X_i-\overline{X})^2+\sum_{i=1}^{n}(Y_i-\overline{Y})^2+(n/2)\cdot(\overline{X}-\overline{Y})^2}\right)^n\\
&= \left(\frac{1}{1+\frac{(n/2)\cdot(\overline{X}-\overline{Y})^2}{\sum_{i=1}^{n}(X_i-\overline{X})^2+\sum_{i=1}^{n}(Y_i-\overline{Y})^2}}\right)^n.
\end{aligned}
\tag{4.5}
$$

A continuació, relacionarem la variable que surt en el denominador de la darrera fórmula amb alguna distribució coneguda. Per fer-ho, hem de tenir en compte unes quantes consideracions.

- Fent servir que les distribucions de les variables $\overline{X}$ i $\overline{Y}$ són normals $N\left(\mu_X, \frac{\sigma^2}{n}\right)$ i $N\left(\mu_Y, \frac{\sigma^2}{n}\right)$, si la hipòtesi nul·la $H_0$ és certa, podem dir que la variable $\overline{X}-\overline{Y}$ és normal $N\left(0, \frac{2\sigma^2}{n}\right)$. Per tant, la variable aleatòria $\frac{\sqrt{n}(\overline{X}-\overline{Y})}{\sqrt{2}\sigma}$ es distribuirà segons una normal $N(0,1)$.

- Tenint en compte que les variables $\frac{\sum_{i=1}^n (X_i-\overline{X})^2}{\sigma^2}$ i $\frac{\sum_{i=1}^n (Y_i-\overline{Y})^2}{\sigma^2}$ es distribueixen segons una distribució $\chi^2_{n-1}$, podem assegurar que la variable

$$\frac{\sum_{i=1}^n (X_i-\overline{X})^2 + \sum_{i=1}^n (Y_i-\overline{Y})^2}{\sigma^2}$$

  és $\chi^2_{2n-2}$, ja que fent servir el problema 1.8 sabem que la suma de dues variables independents amb distribucions $\chi^2_{n_1}$ i $\chi^2_{n_2}$ es distribueix segons una distribució $\chi^2_{n_1+n_2}$.

- Fent servir les dues consideracions anteriors i tenint en compte que la variable $t_m$ ($t$ de Student amb $m$ graus de llibertat) es defineix com $t_m = \frac{Z}{\sqrt{\frac{V}{m}}}$ on $Z$ és $N(0,1)$ i $V$ és $\chi^2_m$, podem assegurar que la variable següent es distribueix segons una variable $t$ de Student amb $2(n-1)$ graus de llibertat:

$$t := \frac{\frac{\sqrt{n}(\overline{X}-\overline{Y})}{\sqrt{2}}}{\sqrt{\frac{\sum_{i=1}^n (X_i-\overline{X})^2 + \sum_{i=1}^n (Y_i-\overline{Y})^2}{2(n-1)}}} = \frac{\sqrt{n}(\overline{X}-\overline{Y})}{S\sqrt{2}}.$$

Fent servir les considerancions anteriors, el quocient 4.5 es pot posar com:

$$\frac{L(\omega)}{L(\Omega)} = \left(\frac{1}{1+\frac{t^2}{2(n-1)}}\right)^n.$$

La millor regió crítica ens quedarà, doncs:

$$\begin{aligned} R.C. &= \left\{\frac{L(\omega)}{L(\Omega)} < A\right\} = \left\{\frac{1}{1+\frac{t^2}{2(n-1)}} < A^{\frac{1}{n}}\right\} \\ &= \{t < -C\} \cup \{t > C\}, \end{aligned}$$

on $C = \sqrt{2(n-1)\left(A^{-\frac{1}{n}}-1\right)}$.

El nostre objectiu és trobar $C$. Fent servir que la distribució de $t$ és $t_{2(n-1)}$ i que l'error tipus I és $\alpha$, podem escriure que:

$$p\{t < -C\} = \frac{\alpha}{2},$$

D'aquí deduïm que $C = -t_{2(n-1),\frac{\alpha}{2}}$ (percentil $100\frac{\alpha}{2}\%$ de la distribució $t$ de Student de $2(n-1)$ graus de llibertat.)

Concloem que la millor regió crítica per realitzar aquest contrast és:

$$\{t < t_{2(n-1),\frac{\alpha}{2}}\} \cup \{t > t_{2(n-1),1-\frac{\alpha}{2}}\}.$$

**4.8.-** Aplicació pràctica de l'exercici 4.7. Un determinat grup de 20 alumnes rep l'ensenyament de lectura pel mètode tradicional durant un any. La suma de les qualificacions d'aquest grup i la dels seus quadrats són $\sum x_i = 1950$, $\sum x_i^2 = 192861$. A un segon grup de 20 estudiants se'ls ensenya a llegir per un nou mètode, diferent del tradicional. Les qualificacions d'aquest segon grup al final d'any són $\sum y_i = 2020$, $\sum y_i^2 = 205920$. Suposant que les mostres són independents i de distribucions normals amb la mateixa variància, feu el contrast

$$\left.\begin{array}{ll} H_0: & \mu_X = \mu_Y, \\ H_1: & \mu_X \neq \mu_Y. \end{array}\right\}$$

Trobau l'$\alpha_{\max}$ per poder acceptar $H_0$.

**Resolució.** Fent servir l'exercici 4.7 tenim que la millor regió crítica per poder realitzar el contrast és:

$$\{t < t_{m,\frac{\alpha}{2}}\} \cup \{t > -t_{m,\frac{\alpha}{2}}\},$$

on $m = 2(n-1) = 2(20-1) = 38$ i l'estadístic $t$ val en aquest cas

$$t = \frac{\sqrt{n}\left(\overline{X} - \overline{Y}\right)}{S\sqrt{2}}.$$

A continuació, trobam els valors de $\overline{X}$, $\overline{Y}$ i $S$.

$$\begin{aligned} \overline{X} &= \frac{1950}{20} = 97.5, \quad \overline{Y} = \frac{2020}{20} = 101, \\ S^2 &= \frac{\sum_{i=1}^{n}(X_i - \overline{X})^2 + \sum_{i=1}^{n}(Y_i - \overline{Y})^2}{2(n-1)} = \frac{\sum_{i=1}^{n} X_i^2 - n\overline{X}^2 + \sum_{i=1}^{n} Y_i^2 - n\overline{Y}^2}{2 \cdot 19} \\ &= \frac{192861 - 20 \cdot 97.5^2 + 205920 - 20 \cdot 101^2}{38} = \frac{4636}{38} = 122. \end{aligned}$$

El valor de l'estadístic $t$ serà:

$$t = \frac{\sqrt{n}\left(\overline{X} - \overline{Y}\right)}{S\sqrt{2}} = \frac{\sqrt{20} \cdot (97.5 - 101)}{\sqrt{122 \cdot 2}} = -1.00204708.$$

L'error tipus I màxim que es podrà cometre en acceptar $H_0$ en les condicions del problema serà:

$$\frac{\alpha_{\mathsf{max}}}{2} = p\left\{t_{38} \leq -1.00204\right\} = 1 - F_{t_{38}}(1.00204) \approx 1 - 0.85 = 0.15.$$

Concloem, doncs, que l'error tipus I màxim val aproximadament $0.3$ i, per tant, és coherent acceptar que els dos mètodes d'ensenyament tenen la mateixa eficàcia.

## 4.3 Problemes proposats

**4.1.-** Suposem que $X$ és un variable aleatòria de Poisson amb paràmetre $\lambda$. Es pren una mostra aleatòria simple $X_1, X_2, \ldots, X_n$ de $X$ i es vol provar $H_0 : \lambda = 2$ en funció de $H_1 : \lambda > 2$. Quina pot ser una regió crítica raonable?

**4.2.-** Suposem que el nombre de grams que carrega una màquina embotelladora de refrescs és una variable aleatòria normal amb mitjana $\mu$ i variància $\sigma^2$. Si $\sigma^2$ és massa gran, s'omplen massa botelles i la màquina es desborda. Una $\sigma^2$ tolerable seria aquella que no fos més gran que 7. Suposem que es pren una mostra aleatòria simple de 20 botelles omplides per la màquina i es vol provar $H_0 : \sigma^2 = 7$ en funció de $H_1 : \sigma^2 > 7$. Es decideix rebutjar $H_0$ si

$$\sum_{i=1}^{20} \left(X_i - \overline{X}\right)^2 > 213.64.$$

Quina és l'error tipus I en aquest contrast?

**4.3.-** Suposem que el temps de falla (en hores) d'un determinat tipus de bombeta és una variable aleatòria exponencial de paràmetre $\lambda$. Es fa una prova en 10 bombetes i es vol provar la hipòtesi $H_0 : \lambda = 0.001$ en funció de $H_1 : \lambda < 0.001$. Es decideix acceptar fins que falli la primera bombeta i es rebutja $H_0$ si el temps de falla no és més gran que 5.13 hores. Provau que l'error tipus I per a aquest contrast és de 0.05.

**4.4.-** Donada una variable aleatòria $X$ uniforme en l'interval $(0, \theta)$, es vol provar $H_0 : \theta = 1$ en contra de $H_1 : \theta = 2$. Es pren una mostra aleatòria simple de 2 observacions de $X$ i es rebutja $H_0$ si $\overline{X} > 0.99$. Calculau $\alpha$ i $\beta$ per a aquest contrast.

**4.5.-** Suposem que la probabilitat que surti cara en una sola tirada d'una moneda és $p$. Trobau la millor regió crítica (la que té l'error tipus II més petit) per provar $H_0 : p = \frac{1}{2}$ contra $H_1 : p = \frac{3}{4}$, donada una mostra aleatòria simple de $n$ tirades de la moneda.

**4.6.-** Suposem que $X$ és una variable aleatòria normal amb mitjana $\mu$ desconeguda i variància $\sigma^2$ coneguda. Trobau pel criteri de la raó de versemblança, la regió crítica dels contrasts següents:

$$\text{a)} \left.\begin{array}{ll} H_0: & \mu = \mu_0, \\ H_1: & \mu \neq \mu_0. \end{array}\right\} \quad \text{b)} \left.\begin{array}{ll} H_0: & \mu = \mu_0, \\ H_1: & \mu > \mu_0. \end{array}\right\} \quad \text{c)} \left.\begin{array}{ll} H_0: & \mu = \mu_0, \\ H_1: & \mu < \mu_0. \end{array}\right\}$$

**4.7.-** Per decidir si un determinat tipus de planta és apropiat per formar jardins, és important que cada planta tengui poca variabilitat en el creixement per any (suposades les plantes de la mateixa edat). Suposem que els creixements d'aquest determinat tipus de planta és una variable aleatòria normal amb mitjana $\mu$ i variància $\sigma^2$. Aleshores, es decideix fer el següent contrast per veure si la planta és adequada:

$$\left.\begin{array}{ll} H_0: & \sigma^2 = 0.08, \\ H_1: & \sigma^2 < 0.08. \end{array}\right\} \text{(amidament en metres).}$$

S'enregistra el creixement de 5 plantes durant 1 any i aquests valen:

$$0.58,\ 0.34,\ 0.82,\ 0.49 \text{ i } 0.61 \text{ metres.}$$

Hem d'acceptar $H_0$? O sigui, quin és l'error tipus I màxim per poder acceptar $H_0$?

**4.8.-** Se sap que el temps en què pot fallar un determinat aparell electrònic és una variable aleatòria exponencial amb paràmetre $\lambda$. Es posen a prova 1000 aparells d'aquest tipus i es troba que la suma dels temps de falla és de 109652 hores. Quin és l'error tipus I màxim per poder acceptar $H_0 : \lambda \leq 0.008$ en contra de $H_1 : \lambda > 0.008$, donada aquella mostra aleatòria simple?

**4.9.-** El nombre de vegades que es pot encendre i apagar una interruptor és una variable aleatòria geomètrica $X$ amb paràmetre $p$ (aleshores $X$ és el nombre de vegades que encenem l'interruptor fins que falla). Donada una mostra aleatòria simple de grandària 10, s'ha trobat que la suma de les vegades que s'encén i s'apaga l'interruptor ha estat de 15169. Quin és l'error tipus I màxim per poder acceptar $H_0 : p = 0.00005$ contra $H_1 : p > 0.00005$? (Feu servir el teorema límit per a la prova de raó de versemblança.)

**4.10.-** Una empresa alimentària indica en un paquet d'arròs que el seu pes mitjà és de 900 gr. En una inspecció s'agafen 9 paquets, que pesen

$$894,\ 890,\ 900,\ 892,\ 895,\ 896,\ 894,\ 903 \text{ i } 899.$$

Està d'acord la mostra amb el pes indicat en el paquet? (Trobau l'error tipus I màxim per poder acceptar que el pes mitjà del paquet és de 900 gr.)
Final. Juny 91.

**4.11.-** Sigui $X$ una variable aleatòria $N(\mu, \sigma^2)$. Sigui $X_1, X_2, \ldots, X_n$ una mostra aleatòria simple de $X$. Considerem el contrast

$$\left.\begin{array}{ll} H_0: & \mu = 0, \\ H_1: & \mu \neq 0. \end{array}\right\}$$

a) Trobau, raonant tots els passos, la millor regió crítica en el cas que $\sigma = 1$ coneguda i en el cas que $\sigma$ sigui desconeguda.

b) Aplicau l'apartat anterior a la mostra següent
$1.12,\ -0.19,\ -0.32,\ -0.6,\ -1.1,\ 0.14,\ 0.19,\ 0.23,\ -1.12,\ -1.4.$

Final. Setembre 93.

**4.12.-** Sigui $X$ una variable aleatòria exponencial de paràmetre $\lambda$. Volem fer el contrast següent:

$$\left.\begin{array}{ll} H_0: & \lambda = \lambda_0, \\ H_1: & \lambda = \lambda_1. \end{array}\right\}$$

a) Digau quina és la millor regió crítica a un nivell de significació $\alpha$. Digau també com trobar-la.

b) Sigui $X$ una variable aleatòria exponencial de paràmetre $\lambda$. Feu el contrast:

$$\left.\begin{array}{ll} H_0: & \lambda = 1, \\ H_1: & \lambda = 2, \end{array}\right\}$$

amb la següent mostra aleatòria simple de $X$:

$$0.735,\ 0.949,\ 0.739,\ 0.535,\ 0.910,\ 0.989,\ 0.851,\ 0.786,\ 0.904,\ 0.932,$$

aplicant l'apartat a). Trobau l'error tipus I màxim per poder acceptar $H_0$.

Final. Juny 93.

**4.13.-** Sigui la mostra aleatòria simple $1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9, 10$ d'una variable aleatòria $N(\mu, \sigma^2)$. Feim el contrast:

$$\left.\begin{array}{ll} H_0: & \sigma = 3, \\ H_1: & \sigma > 3. \end{array}\right\}$$

Digau quina condició és vàlida per a $\alpha$ (error tipus I) per tal de rebutjar $H_0$.
Final. Setembre 94.

**4.14.-** Sigui $X$ una variable aleatòria $Poiss(\lambda)$. Sigui $X_1, \ldots, X_n$ una mostra aleatòria simple de $X$. Fent servir el criteri de raó de màxima versemblança, trobau la regió crítica òptima per fer el contrast:

$$\left.\begin{array}{ll} H_0: & \lambda = \lambda_0, \\ H_1: & \lambda > \lambda_0. \end{array}\right\}$$

Aplicació pràctica. Suposem que la mostra és:

$$1,\ 2,\ 1.5,\ 1.7,\ 1.6,\ 0.9,\ 2,$$

i $\lambda_0 = 1$, digau a partir de quin $\alpha$ (error tipus I) acceptariem $H_0$.
Examen extraordinari de febrer 95.

**4.15.-** Sigui $X$ una variable aleatòria de Bernoulli amb paràmetre $p$. Prenem una mostra aleatòria simple de $n$ observacions $X_1, \ldots, X_n$. Volem fer el contrast:

$$\left.\begin{array}{ll} H_0: & p = p_0, \\ H_1: & p = p_1. \end{array}\right\}$$

Rebutjam $H_0$ si $\overline{X} \leq \frac{p_0}{2}$. Trobau els valors de $\alpha$ (error tipus I) i $\beta$ (error tipus II).
Segon parcial. Juny 95.

**4.16.-** Considerem el contrast d'hipòtesi següent:

$$\left.\begin{array}{ll} H_0: & \sigma = \sigma_0, \\ H_1: & \sigma \neq \sigma_0. \end{array}\right\}$$

on $\sigma$ correspon a una variable aleatòria $N(\mu, \sigma^2)$ amb $\mu$ desconeguda.

Suposant $\sigma_0 = 1$, $\tilde{S} = 1.2$ i que tenim una mostra aleatòria simple de 20 observacions, trobau l'error $\alpha_{\max}$ per poder acceptar $H_0$.
Final. Setembre 95.

**4.17.-** Considerem les dues mostres següents de dues normals independents de grandària 20:

| | | | | | | |
|---|---|---|---|---|---|---|
| Mostra 1 | 0.53009 | 2.65819 | 3.26338 | 2.54875 | 1.72988 | 2.76075 |
| | 1.58425 | 1.36660 | 0.56713 | 2.72981 | 3.34947 | 1.55879 |
| | 2.03271 | 1.70223 | 5.15895 | 3.20326 | 3.11516 | 2.65967 |
| | 3.34316 | 4.55594 | | | | |
| Mostra 2 | 2.38721 | 1.48624 | 3.76097 | 0.53768 | 2.64521 | 0.54878 |
| | 2.84931 | 0.81125 | 3.07246 | 1.67631 | 1.05417 | 1.71277 |
| | 2.31605 | 1.90741 | 1.98674 | 1.94790 | 0.84796 | 1.81512 |
| | 2.99567 | 1.83909 | | | | |

Trobau l'error tipus I màxim ($\alpha_{\text{màx}}$) per poder acceptar $H_0$ en el contrast següent:

$$\left.\begin{array}{ll} H_0: & \mu_1 = \mu_2, \\ H_1: & \mu_1 \neq \mu_2. \end{array}\right\}$$

Indicació: heu de realitzar el contrast previ d'igualtat de variàncies.
Final. Febrer 96.

**4.18.-** Sigui $X_1, \ldots, X_{40}$ una mostra aleatòria simple d'una variable aleatòria $N(\mu, \sigma^2)$ tal que $\sum X_i = 100$ i $\sum X_i^2 = 1000$. Volem fer el contrast següent:

$$\left.\begin{array}{ll} H_0: & \mu = 3, \\ H_1: & \mu \neq 3. \end{array}\right\}$$

Trobau l'error tipus I màxim $\alpha_{\max}$ per poder acceptar la hipòtesi nul·la $H_0$.
Final. Juny 96.

**4.19.-** Ens donen dues mostres de dues variables aleatòries normals independents:

Mostra 1: 5,6,7,4,8,9,6,5,7,6.

Mostra 2: 2,3,4,3,4,4,3,1,5,4.

Trobau l'error tipus I màxim $\alpha_{\max}$ per poder acceptar igualtat de variàncies.
Final. Setembre 96.

# Capítol 5

# Proves de la bondat d'ajustament i d'independència

## 5.1 Resum teòric

Els contrasts d'hipòtesi vists en el tema anterior tractaven de confrontar afirmacions respecte de paràmetres desconeguts de les distribucions de poblacions d'interès. Ara veurem els contrasts d'-hipòtesi on, en lloc de paràmetres, el que desconeixem és qualque propietat de la forma de la funció de distribució que se mostreja. Endemés també discutirem les proves d'independència de dues variables aleatòries en les quals l'evidència mostral s'obté mitjançant la classificació de cada variable aleatòria en un cert nombre de categories.

Un mètode per provar les hipòtesis referents a distribucions és la prova de la bondat d'ajustament $\chi^2$. Es basa en el resultat següent:

**Proposició 5.1** *Si* $(X_1, \ldots, X_k)$ *és un vector aleatori multinomial amb paràmetres* $n, p_1, \ldots, p_k$*, aleshores la funció de distribució de la variable aleatòria*

$$U = \sum_{i=1}^{k} \frac{(X_i - np_i)^2}{np_i}$$

*s'aproxima a la funció de distribució* $\chi^2$ *amb* $k-1$ *graus de llibertat quan* $n \to \infty$*.*

Així, si volem provar la hipòtesi que $(X_1, \ldots, X_k)$ és un vector aleatori multinomial amb paràmetres especificats $n, p_1, \ldots, p_k$, aleshores es pren una mostra, es calcula

$$u = \sum_{i=1}^{k} \frac{(x_i - np_i)^2}{np_i},$$

i es rebutja la hipòtesi si $u > \chi^2_{1-\alpha}$, el $100(1-\alpha)$-èssim percentil de la distribució $\chi^2$ amb $k-1$ graus de llibertat.

Si la hipòtesi és certa, aleshores $\alpha$ és la probabilitat de rebutjar-la, és a dir, és la probabilitat de l'error de tipus I.

Es pren com a cert que l'aproximació $\chi^2$ és bona per a $u$ sempre que $np_i \geq 5$, $\forall i = 1, \ldots, k$. Si no és així, es poden combinar algunes de les classes perquè se satisfaci aquest requisit.

Podem ara aplicar la prova multinomial per provar la hipòtesi que la funció de distribució $F_Y$ d'una variable aleatòria té qualsevol forma especificada.

**Proposició 5.2** *Suposem que $Y$ té una funció de distribució $F_Y$, i que $Y_1, \ldots, Y_n$ és una mostra aleatòria simple de $Y$. Definim*

$$\begin{aligned} I_1 &= \{y : y \leq a_1\}, \\ I_i &= \{y : a_{i-1} < y \leq a_i\},\ i = 2, \ldots, k-1, \\ I_k &= \{y : a_{k-1} < y\}, \end{aligned}$$

*per a uns certs $a_1, \ldots, a_{k-1}$. Sigui $X_i$ la variable aleatòria que dóna el nombre de valors mostrals que cauen dins $I_i$, $\forall i = 1, \ldots, k$.*

*Aleshores $(X_1, \ldots, X_k)$ és un vector aleatori multinomial amb paràmetres $n, p_1, \ldots, p_k$, on $n$ és la grandària de la mostra (de $Y$) i $p_i = p\{Y \text{ cau en } I_i\}$, $i = 1, \ldots, k$.*

Segons aquest resultat, es pot provar que $Y$ té funció de distribució $F_Y$ provant la hipòtesi que $(X_1, \ldots, X_k)$ té els paràmetres $n, p_1, \ldots, p_k$ sense importar la forma de $F_Y$.

Si es rebutja aquesta hipòtesi, aleshores aparentment $F_Y$ no és apropiada comparada amb la mostra. Si, en canvi, s'accepta la hipòtesi, aleshores pareix que $F_Y$ és consistent amb els valors de la mostra.

Quan la variable aleatòria és discreta, els intervals $I_i$ es determinen segons els valors discrets que pot prendre la variable. En el cas continu, no hi ha cap regla general, només s'ha de tenir en compte que el nombre d'intervals ha de ser tan gran com sigui possible, sempre verificant que $np_i \geq 5$ $\forall i = 1, \ldots, k$.

Sovint interessa provar la hipòtesi que la funció de distribució té una forma determinada sense haver d'especificar també els valors dels paràmetres de la funció de distribució. Per exemple, podem voler provar la hipòtesi que una variable aleatòria $Y$ segueix una distribució de Poisson sense dir que el paràmetre val, posem, $\lambda = 0.6$. En aquests casos només cal fer una petita adaptació del mètode. El següent resultat dóna la metodologia.

**Proposició 5.3** *Suposem que $Y$ té una funció de distribució $F_Y$ que satisfà certes condicions de regularitat, amb $r$ paràmetres desconeguts $\gamma_1, \ldots, \gamma_r$. Sigui $Y_1, \ldots, Y_n$ una mostra aleatòria simple de $Y$, i $\hat{\Gamma}_1, \ldots, \hat{\Gamma}_r$ els estimadors de màxima versemblança per a $\gamma_1, \ldots, \gamma_r$, respectivament. Definim $I_1, \ldots, I_k$ i $X_1, \ldots, X_k$ com a la proposició anterior. Aleshores, si definim $\hat{P}_i = p\{Y \text{ cau en } I_i\}$, $i = 1, \ldots, k$, on es reemplacen $\gamma_1, \ldots, \gamma_r$ en $F_Y$ per $\hat{\Gamma}_1, \ldots, \hat{\Gamma}_r$, la distribució de l'estadística*

$$V = \sum_{i=1}^{k} \frac{(X_i - n\hat{P}_i)^2}{n\hat{P}_i}$$

*tendeix a la distribució d'una $\chi^2$ amb $k - r - 1$ graus de llibertat quan $n \to \infty$.*

Per tant, si volem provar que $F_Y$ té una forma determinada sense indicar res respecte dels seus paràmetres, basta utilitzar les dades per estimar-los i llavors procedir com abans. És a dir, es calcula el valor observat de $V$ i si és major que el $100(1-\alpha)$-èssim percentil de la distribució $\chi^2$ amb $k-r-1$ graus de llibertat, es rebutja $H_0$. Observem que hem perdut un grau de llibertat per cada paràmetre que s'ha hagut d'estimar.

Vegem finalment les proves d'independència. Sovint els elements d'una mostra es classifiquen segons dos o més criteris i llavors es vol saber si els mètodes de classificació són independents. Considerem el cas de dos mètodes de classificació.

Suposem que tenim una mostra de grandària $n$ i dues maneres de classificar els elements de la mostra. Suposem que el primer mètode de classificació té $r$ nivells (o classes) i que el segon en té $c$.

Sigui $x_{ij}$ el nombre observat d'elements de la mostra que cauen en el $i$-èssim nivell de classificació 1 i en el $j$-èssim nivell de classificació 2, amb $i = 1, \ldots, r$ i $j = 1, \ldots, c$. Anomenarem **taula de contingència** una representació tabular dels $x_{ij}$. Volem determinar si els dos mètodes de classificació són independents.

La prova d'independència en una taula de contingència és simplement un cas particular del resultat donat en la proposició anterior.

Suposem que tenim una població infinita, amb cada un dels seus elements en exactament un nivell de classificació 1 i exactament un nivell de classificació 2, essent $r$ i $c$ els nombres totals de nivells de classificació 1 i 2, respectivament. Sigui $p_{ij}$ la probabilitat que un element seleccionat a l'atzar caigui en el $i$-èssim nivell de classificació 1 i en el $j$-èssim nivell de classificació 2. Aleshores $\sum_i \sum_j p_{ij} = 1$.

Elegim una mostra a l'atzar de $n$ elements i definim $X_{ij}$ = nombre d'elements de la mostra en el $i$-èssim nivell de classificació 1 i en el $j$-èssim nivell de classificació 2, amb $i = 1, \ldots, r$ i $j = 1, \ldots, c$.

Aleshores, el vector aleatori format per les $r{\cdot}c$ variables aleatòries $X_{ij}$ és multinomial amb paràmetres $n, p_{ij}$ $(i = 1, \ldots, r,\ j = 1, \ldots, c)$. Endemés, si els dos mètodes de classificació són independents, $p_{ij} = w_i \cdot s_j,\ i = 1, \ldots, r,\ j = 1, \ldots, c$, on $w_i$ (resp. $s_j$) és la probabilitat que un element seleccionat a l'atzar caigui en la classe $i$ (resp. $j$).

Aleshores, si suposam independència dels dos mètodes de classificació, l'estimador de màxima versemblança de $w_i$ és

$$\hat{W}_i = \frac{X_{i\bullet}}{n} = \frac{1}{n}\sum_j X_{ij},\ i = 1, \ldots, r,$$

ja que $(X_{1\bullet}, \ldots, X_{r\bullet})$ seria multinomial amb paràmetres $n, w_1, \ldots, w_r$. (Hem usat la notació $X_{i\bullet} = \sum_j X_{ij}$.)

Anàlogament, l'estimador de màxima versemblança de $s_j$ serà

$$\hat{S}_j = \frac{X_{\bullet j}}{n} = \frac{1}{n}\sum_i X_{ij},\ j = 1, \ldots, c.$$

(Hem usat la notació $X_{\bullet j} = \sum_i X_{ij}$.)

Aleshores,

$$V = \sum_i \sum_j \frac{(X_{ij} - n\hat{W}_i\hat{S}_j)^2}{n\hat{W}_i\hat{S}_j}$$

és aproximadament una variable aleatòria $\chi^2$ amb $rc - (c-1) - (r-1) - 1 = (r-1)(c-1)$ graus de llibertat per a $n$ gran.

Aquesta estadística s'utilitza de manera idèntica a com s'ha comentat per a les proves de la bondat d'ajustament.

Aquestes taules de contingència es poden generalitzar a tres o més nivells de classificació i el criteri aplicat és bàsicament el mateix.

## 5.2 Problemes resolts

**5.1.-** Un atleta universitari va fer 100 llançaments durant una setmana de pràctica. En la següent taula surten les distàncies a les quals va efectuar els llançaments (mesurades en metres)

| Distància $y$ | Freqüència $x$ |
|---|---|
| $y \leq 18.6$ | 12 |
| $18.6 < y \leq 19.2$ | 20 |
| $19.2 < y \leq 19.8$ | 40 |
| $19.8 < y \leq 20.4$ | 25 |
| $y > 20.4$ | 3 |

Trobau l'error tipus I màxim que es pot cometre en acceptar la hipòtesi que la distància $Y$ a què pot efectuar un llançament és una variable aleatòria normal amb $\mu = 19.2$ metres i $\sigma = 0.61$ metres.

**Resolució.** Apliquem el test de la $\chi^2$ per resoldre el problema.

L'estadístic a trobar és:

$$\chi^2 = \sum \frac{(Y_i - np_i)^2}{np_i},$$

on $Y_i$ són les freqüències empíriques i $np_i$ les freqüències teòriques. $n$ representa la grandària de la mostra; en el nostre cas, $n = 100$.

A continuació, construïm la taula per trobar l'estadístic $\chi^2$:

| Intervals $I_i$ | $Y_i$ | $p_i$ | $np_i$ | $\lvert Y_i - np_i\rvert$ | $\frac{(Y_i-np_i)^2}{np_i}$ |
|---|---|---|---|---|---|
| $(-\infty$,18.6] | 12 | 0.1635 | 16.35 | 4.35 | 1.1573 |
| (18.6,19.2] | 20 | 0.3365 | 33.65 | 13.65 | 5.5370 |
| (19.2,19.8] | 40 | 0.3365 | 33.65 | 6.35 | 1.1982 |
| (19.8,20.4] | 25 | 0.1385 | 13.85 | 11.15 | 8.3011 |
| (20.4,$\infty$) | 3 | 0.0250 | 2.50 | 0.5 | |
| | | | | | $\chi^2 = 16.1937$ |

Fixau-vos que hem hagut de juntar els dos últims intervals ja que $np_i = 2.5$ és més petit que 5 en el darrer interval.

El càlcul de les probabilitats teòriques $p_i$ és el següent:

$$\begin{aligned}
p_1 &= p\{X \leq 18.6\} = p\left\{Z = N(0,1) \leq \frac{18.6-19.2}{0.61}\right\} \\
&= P\{Z \leq -0.9836\} = 0.1635, \\
p_2 &= p\{18.6 \leq X \leq 19.2\} = p\{-0.9836 \leq Z = N(0,1) \leq 0\} \\
&= 0.5 - 0.1635 = 0.3365, \\
p_3 &= p\{19.2 \leq X \leq 19.8\} = p\{0 \leq Z = N(0,1) \leq 0.9836\} \\
&= 0.8365 - 0 = 0.3365, \\
p_4 &= p\{19.8 \leq X \leq 20.4\} = p\{0.9836 \leq Z = N(0,1) \leq 1.9672\} \\
&= 0.975 - 0.8365 = 0.1385, \\
p_5 &= p\{X \geq 20.4\} = 1 - p\{Z = N(0,1) \leq 1.9672\} \\
&= 1 - 0.975 = 0.025.
\end{aligned}$$

En aquest cas la distribució de l'estadístic

$\chi^2$ s'aproxima a la distribució $\chi^2$ amb $3$ graus de llibertat ja que el nombre d'intervals considerats en la partició és $4$ (recordem que hem juntat els dos darrers intervals).

La fórmula dels graus de llibertat és:

g.ll. $=$ nombre d'intervals - paràmetres estimats - 1.

La regió crítica per fer el contrast és:

$$R.C. = \{\chi^2 \geq \chi^2_{1-\alpha}\},$$

on $\alpha$ és l'error tipus I.

L'error tipus I $\alpha_{\mathsf{max}}$ màxim, per sota del qual podem acceptar que la distribució $X$ és una normal $N(\mu = 19.2, \sigma = 0.61)$ val:

$$\alpha_{\mathsf{max}} = p\left\{\chi^2_3 \geq 16.1937\right\} \leq 1 - 0.995 = 0.005$$

Com que l'error anterior $\alpha_{\mathsf{max}}$ és molt petit, rebutjam normalitat.

**5.2.-** El nombre de cotxes que arriben a un supermercat és un procés de Poisson. Per tant, el temps entre les arribades successives és una variable aleatòria exponencial. S'enregistraren les hores d'arribada per a tots els cotxes durant dues hores i els temps entre arribades (en minuts) són els que mostra la taula adjunta.

| Temps $t$ entre arribades | Freqüència |
|---|---|
| $t \leq 1$ | 40 |
| $1 < t \leq 2$ | 29 |
| $2 < t \leq 3$ | 15 |
| $t > 3$ | 8 |
| Total | 92 |

Provau la hipòtesi que aquesta distribució de temps és consistent amb una distribució exponencial.

**Resolució.** El primer que hem de fer és estimar el paràmetre $\lambda$ del qual depèn la distribució exponencial. El millor estimador de $\lambda$ és $\frac{1}{\overline{X}}$. Trobem, doncs, $\overline{X}$:

$$\overline{X} = \frac{0.5 \cdot 40 + 1.5 \cdot 29 + 2.5 \cdot 15 + 3.5 \cdot 8}{92} \approx 1.4022.$$

L'estimada de $\lambda$ valdrà: $\tilde{\lambda} = \frac{1}{\overline{X}} \approx 0.7132$.

A continuació construïm la taula per trobar l'estadístic $\chi^2$:

| Intervals $I_i$ | $Y_i$ | $p_i$ | $np_i$ | $\lvert Y_i - np_i \rvert$ | $\frac{(Y_i - np_i)^2}{np_i}$ |
|---|---|---|---|---|---|
| $(-\infty,1]$ | 40 | 0.5099 | 46.9122 | 6.9122 | 1.0184 |
| $(1,2]$ | 29 | 0.2499 | 22.9909 | 6.0090 | 1.5705 |
| $(2,3]$ | 15 | 0.1225 | 11.2675 | 3.7324 | 1.2364 |
| $(3,\infty)$ | 8 | 0.1177 | 10.8292 | 2.8292 | 0.7391 |
| | | | | | $\chi^2 = 4.5646$ |

Amb vista a donar els càlculs de les probabilitats teòriques $p_i$, recordem que la funció de distribució d'una variable aleatòria Exp $(\lambda)$ és: $F_X(t) = 1 - e^{-\lambda t}$.

$$p_1 = p\{X \leq 1\} = 1 - e^{-\tilde{\lambda}} \approx 0.5099,$$

$$\begin{aligned} p_2 &= p\{1 \le X \le 2\} = e^{-\tilde{\lambda}} - e^{-2\tilde{\lambda}} \approx 0.2499, \\ p_3 &= p\{2 \le X \le 3\} = e^{-2\tilde{\lambda}} - e^{-3\tilde{\lambda}} \approx 0.1225, \\ p_4 &= p\{X \ge 3\} = e^{-3\tilde{\lambda}} \approx 0.1177. \end{aligned}$$

Tenint en compte que la distribució de l'estadístic $\chi^2$ s'aproxima a una distribució $\chi^2$ amb $2$ graus de llibertat (g.ll. $= 4 - 1 - 1$) i que la regió crítica és

$$R.C. = \{\chi^2 \ge \chi^2_{1-\alpha}\},$$

on $\alpha$ és l'error tipus I, l'error tipus I màxim per sota del qual podem acceptar que la distribució és exponencial, compleix:

$$0.1 \le \alpha_{\mathsf{max}} = p\left\{\chi^2_2 \ge 4.5646\right\} \le 0.15.$$

En vista del valor de $\alpha_{\mathsf{max}}$, podem acceptar que la mostra correspon a una distribució exponencial.

**5.3.-** En un període de 72 hores en els Estats Units varen tenir lloc en total 290 accidents de trànsit. El nombre d'accidents per hora durant aquest període va ser

| Nombre d'accidents per hora | Nombre d'hores |
|---|---|
| 0 o 1 | 6 |
| 2 | 11 |
| 3 | 15 |
| 4 | 14 |
| 5 | 12 |
| 6 | 8 |
| 7 o més | 6 |

Provau la hipòtesi que el nombre d'accidents per hora durant un període semblant és una variable aleatòria de Poisson.

**Resolució.** El problema és verificar si la variable $X =$"Nombre d'accidents per hora" segueix la distribució de Poisson amb paràmetre $\lambda$. Per tant, el primer que hem de fer és estimar el paràmetre $\lambda$. El millor estimador de $\lambda$ és $\overline{X}$. Per tant, el valor estimat de $\lambda$ valdrà:

$$\tilde{\lambda} = \overline{X} = \frac{290}{72} \approx 4.0277,$$

ja que hi ha hagut $290$ accidents en un total de $72$ hores.

La taula per trobar l'estadístic $\chi^2$ és:

| Intervals $I_i$ | $Y_i$ | $p_i$ | $np_i$ | $\lvert Y_i - np_i \rvert$ | $\frac{(Y_i-np_i)^2}{np_i}$ |
|---|---|---|---|---|---|
| $(-\infty,1.5]$ | 6 | 0.0895 | 6.4486 | 0.4486 | 0.0312 |
| $(1.5,2.5]$ | 11 | 0.1445 | 10.4037 | 0.5962 | 0.0341 |
| $(2.5,3.5]$ | 15 | 0.1940 | 13.9680 | 1.0319 | 0.0762 |
| $(3.5,4.5]$ | 14 | 0.1953 | 14.0650 | 0.0650 | 0.0003 |
| $(4.5,5.5]$ | 12 | 0.1573 | 11.3301 | 0.6698 | 0.0395 |
| $(5.5,6.5]$ | 8 | 0.1056 | 7.6059 | 0.3940 | 0.0204 |
| $(6.5,\infty)$ | 6 | 0.1138 | 8.1943 | 2.1943 | 0.5876 |
| | | | | | $\chi^2 = 0.7895$ |

Recordem que la funció de probabilitat de la variable aleatòria de Poisson és:

$$f_X(k) = \frac{\lambda^k}{k!} e^{-\lambda}.$$

Fent servir la fórmula anterior, podem trobar les probabilitats teòriques $p_i$:

$$\begin{aligned}
p_1 &= f_X(0) + f_X(1) = e^{-\tilde{\lambda}}(1+\tilde{\lambda}) \approx 0.0895,\\
p_2 &= f_X(2) = e^{-\tilde{\lambda}}\frac{\tilde{\lambda}^2}{2!} \approx 0.1444,\\
p_3 &= f_X(3) = e^{-\tilde{\lambda}}\frac{\tilde{\lambda}^3}{3!} \approx 0.1940,\\
p_4 &= f_X(4) = e^{-\tilde{\lambda}}\frac{\tilde{\lambda}^4}{4!} \approx 0.1953,\\
p_5 &= f_X(5) = e^{-\tilde{\lambda}}\frac{\tilde{\lambda}^5}{5!} \approx 0.1573,\\
p_6 &= f_X(6) = e^{-\tilde{\lambda}}\frac{\tilde{\lambda}^6}{6!} \approx 0.1573,\\
p_7 &= p\{X \geq 7\} = 1 - \sum_{i=0}^{6} f_X(i) = 0.1138.
\end{aligned}$$

Tenint en compte que la distribució de l'estadístic $\chi^2$ s'aproxima a la distribució $\chi^2_5$, l'error tipus I màxim per sota del qual podem acceptar que $X$ segueix la distribució de Poisson compleix:

$$0.95 \leq \alpha_{\mathsf{max}} = p\left\{\chi^2_5 \geq 0.7895\right\} \leq 0.99.$$

Concloem, doncs, que es pot acceptar que $X$ segueix la distribució de Poisson.

**5.4.-** Es va examinar una mostra de 2000 defuncions amb els següents resultats

| | Mort per càncer | Mort per altres causes | Totals |
|---|---|---|---|
| Fumadors | 22 | 1178 | 1200 |
| No Fumadors | 26 | 774 | 800 |
| Totals | 48 | 1952 | 2000 |

Suposem que aquests resultats són el producte d'una mostra aleatòria simple d'una població determinada i provau que les dues classificacions no són independents, o sigui, trobau l'error tipus I màxim per poder acceptar independència i comprovau que aquest error és petit.

**Resolució.** Resoldrem aquest problema fent servir el test d'independència de la $\chi^2$.

En aquest cas, l'estadístic a fer servir és:

$$\chi^2 = \sum \frac{(n_{ij} - \text{teor}_{ij})^2}{\text{teor}_{ij}},$$

on $n_{ij}$ són les freqüències empíriques (les donades per la taula del problema) i $\text{teor}_{ij}$ són les freqüències teòriques. Recordem que la freqüència teòrica corresponent al nivell $i - j$ val:

$$\text{teor}_{ij} = \frac{n_{i\bullet} n_{\bullet j}}{n},$$

on $n_{i\bullet}$ és el nombre total d'individus que pertanyen al nivell $i$ segons el criteri de classificació 1 i $n_{\bullet j}$ és el nombre total d'individus que pertanyen al nivell $j$ segons el criteri de classificació 2.

A continuació construïm la taula de freqüències teòriques:

| | Mort per càncer | Mort per altres causes | Totals |
|---|---|---|---|
| Fumadors | $\frac{1200 \cdot 48}{2000} = 28.8$ | $\frac{1200 \cdot 1952}{2000} = 1171.2$ | 1200 |
| No Fumadors | $\frac{800 \cdot 48}{2000} = 19.2$ | $\frac{800 \cdot 1952}{2000} = 780.8$ | 800 |

El valor de l'estadístic $\chi^2$ valdrà:

$$\begin{aligned} \chi^2 &= \frac{(22-28.8)^2}{28.8} + \frac{(1178-1171.2)^2}{1171.2} + \frac{(26-19.2)^2}{19.2} + \frac{(774-780.8)^2}{780.8} \\ &= 4.1125. \end{aligned}$$

La distribució de l'estadístic $\chi^2$ s'aproxima a la distribució $\chi^2$ amb $(f-1)\cdot(c-1)$ graus de llibertat on $f$ és el nombre de files (nombre de nivells segons el criteri de classificació 1) i $c$ és el nombre de columnes (nombre de nivells segons el criteri de classificació 2). En el nostre cas, l'estadístic $\chi^2$ s'aproximarà a una variable $\chi^2_1$.

Tenint en compte que la regió crítica per a aquest tipus de contrast és:

$$R.C. = \{\chi^2 \geq \chi^2_{1,1-\alpha}\},$$

on $\alpha$ és l'error tipus I, l'error tipus I màxim per sota del qual acceptam independència complirà:

$$0.025 \leq \alpha_{\mathsf{max}} = p\left\{\chi^2_1 \geq 4.1125\right\} \leq 0.05.$$

Rebutjam, doncs, independència.

**5.5.-** Suposem que $X_{ij}$ amb $i=1,\ldots,r$, $j=1,\ldots,s$ és una mostra aleatòria simple d'una variable aleatòria multinomial amb paràmetres $n$ i $p_{ij}=w_i s_j$. ($w_i$ és la probabilitat que $X_{ij}$ estigui en la classe $(i,1)$, $(i,2)$,..., $(i,s)$ i $s_j$ és la probabilitat que $X_{ij}$ estigui en la classe $(1,j)$, $(2,j)$,..., $(r,j)$). Provau que els estimadors de màxima versemblança de $w_i$ i $s_j$ són

$$\hat{W}_i = \frac{X_{i\bullet}}{n} = \frac{\sum_{j=1}^{s} X_{ij}}{n}, \quad \hat{S}_j = \frac{X_{\bullet j}}{n} = \frac{\sum_{i=1}^{r} X_{ij}}{n}.$$

**Resolució.** Recordem la funció de probabilitat d'una variable aleatòria multinomial amb paràmetres $n, p_{11},\ldots,p_{rs}$ val:

$$f(x_{11},\ldots x_{rs}) = \frac{n!}{x_{11}!\ldots x_{rs}!} p_{11}^{x_{11}}\ldots p_{rs}^{x_{rs}}.$$

A partir del mètode de la màxima versemblança, trobarem els estimadors dels paràmetres $p_{ij}$.

El primer pas seria derivar la fórmula anterior respecte de cada una de les variables $p_{ij}$. Fixau-vos que hi ha molts de productes; per tant, traguem logaritmes per simplificar el càlcul de les derivades.

$$K := \ln f(x_{11},\ldots x_{rs}) = \ln\left(\frac{n!}{x_{11}!\ldots x_{rs}!}\right) + \sum_{i=1}^{r}\sum_{j=1}^{s} x_{ij}\ln p_{ij}.$$

Abans de començar a derivar, hem de tenir en compte que les variables $x_{ij}$ i els paràmetres $p_{ij}$, $i=1,\ldots,r$, $j=1,\ldots,s$ no són independents ja que:

$$\begin{aligned} x_{rs} &= n - \sum_{(i,j)\neq(r,s)} x_{ij}, \\ p_{rs} &= 1 - \sum_{(i,j)\neq(r,s)} p_{ij}. \end{aligned} \tag{5.1}$$

Per tant, les derivades de la funció $K$ respecte del paràmetre $p_{ij}$ valen:

$$\frac{\partial K}{\partial p_{ij}} = \frac{x_{ij}}{p_{ij}} + \frac{x_{rs}}{p_{rs}} \cdot \frac{\partial p_{rs}}{\partial p_{ij}} = \frac{x_{ij}}{p_{ij}} - \frac{x_{rs}}{p_{rs}}, \ \forall (i,j) \neq (r,s).$$

El sistema a resoldre de cara a trobar els estimadors de màxima versemblança $\tilde{p}_{ij}$ del paràmetre $p_{ij}$ és

$$\frac{\partial K}{\partial p_{ij}} = \frac{x_{ij}}{\tilde{p}_{ij}} - \frac{x_{rs}}{\tilde{p}_{rs}} = 0 \ \forall (i,j) \neq (r,s).$$

El sistema d'equacions anterior es pot posar de forma equivalent com:

$$\frac{\tilde{p}_{ij}}{\tilde{p}_{rs}} = \frac{x_{ij}}{x_{rs}} \ \forall (i,j) \neq (r,s). \tag{5.2}$$

Sumant totes les equacions anteriors per a tot $(i,j) \neq (r,s)$ i tenint en compte (5.1), arribam a la següent expressió per a l'estimador $\tilde{p}_{rs}$:

$$\frac{1-\tilde{p}_{rs}}{\tilde{p}_{rs}} = \frac{n - x_{rs}}{x_{rs}}.$$

D'on podem trobar el valor de $\tilde{p}_{rs}$:

$$\tilde{p}_{rs} = \frac{x_{rs}}{n}.$$

Tenint en compte (5.2), podem trobar tots els valors dels altres paràmetres $\tilde{p}_{ij}$:

$$\tilde{p}_{ij} = \frac{x_{ij}}{x_{rs}} \tilde{p}_{rs} = \frac{x_{ij}}{n}.$$

A continuació, trobam els estimadors $\tilde{w}_i$ i $\tilde{s}_j$ dels paràmetres $w_i$ i $s_j$.

Fent servir les següents relacions entre els paràmetres $w_i$, $s_j$ i $p_{ij}$

$$w_i = \sum_{j=1}^{s} p_{ij}, \ s_j = \sum_{i=1}^{r} p_{ij},$$

i tenint en compte les fórmules trobades per als estimadors $\tilde{p}_{ij}$ dels paràmetres $p_{ij}$ arribam a la següent expressió per als estimadors $\tilde{w}_i$ i $\tilde{s}_j$:

$$\tilde{w}_i = \sum_{j=1}^{s} \tilde{p}_{ij} = \frac{\sum\limits_{j=1}^{s} x_{ij}}{n}, \ \tilde{s}_j = \sum_{i=1}^{r} \tilde{p}_{ij} = \frac{\sum\limits_{i=1}^{r} x_{ij}}{n}.$$

**5.6.-** Sigui $X$ una variable aleatòria uniforme en l'interval $[0,1]$. Sigui $F(x)$ una funció real contínua, estrictament creixent i derivable definida a tot $\mathbb{R}$ tal que $F(x) \in [0,1]$ $\forall x \in \mathbb{R}$ i que $\lim_{x \to -\infty} F(x) = 0$, $\lim_{x \to \infty} F(x) = 1$.

a) Provau que la variable aleatòria $Y = F^{-1}(X)$ té com a funció de distribució $F(x)$.

b) Aplicant l'apartat a) i donada la següent mostra aleatòria simple d'una variable aleatòria uniforme en $[0,1]$, contruïu una mostra aleatòria simple d'una variable aleatòria $Y$ que tengui com a funció de densitat

$$f_Y(y) = \frac{1}{\pi(1+y^2)}, \quad y \in \mathbb{R}.$$

Mostra aleatòria simple de $X$:

| | | | | | | | |
|---|---|---|---|---|---|---|---|
| 0.526, | 0.973, | 0.055, | 0.826, | 0.131, | 0.285, | 0.101, | 0.165, |
| 0.638, | 0.586, | 0.706, | 0.487, | 0.239, | 0.362, | 0.813, | 0.497, |
| 0.288, | 0.270, | 0.056, | 0.692, | 0.915, | 0.706, | 0.609, | 0.717, |
| 0.600, | 0.138, | 0.675, | 0.340, | 0.019, | 0.022, | 0.735, | 0.844. |

c) Vegeu mitjançant el test de la $\chi^2$ si la mostra anterior correspon a una mostra de la variable $Y$.

Condició per fer el problema: heu d'agafar com a mínim 4 intervals.

Final. Juny 93.

**Resolució.**

a) Calculem la funció de distribució de la variable aleatòria $Y$:

$$F_Y(t) = p\{Y \leq t\} = p\left\{F^{-1}(X) \leq t\right\} = p\{X \leq F(t)\} = F_X(F(t)).$$

La penúltima igualtat és certa ja que la funció $F$ és estrictament creixent.

L'únic que hem de trobar ara és la funció de distribució de $X$. Recordem que $X$ és $U[0,1]$ (uniforme en l'interval $[0,1]$). Per tant, la funció de distribució valdrà:

$$F_X(s) = \begin{cases} 0, & \text{si } s \leq 0, \\ s, & \text{si } 0 < s \leq 1, \\ 1, & \text{si } s > 1. \end{cases}$$

Tenint en compte que $F(t) \in [0,1]$ per a tot $t \in \mathbb{R}$, tenim que:

$$F_Y(t) = F_X(F(t)) = F(t).$$

Concloem, doncs, que la funció de distribució de $Y$ és $F$.

b) Sigui ara una variable $Y$ amb funció de densitat: $f_Y(y) = \frac{1}{\pi(1+y^2)}$, $y \in \mathbb{R}$. Hem de construir una mostra aleatòria simple de $Y$ a partir d'una mostra aleatòria simple d'una variable uniforme $X$ en l'interval $[0,1]$.

Per fer-ho, aplicarem l'apartat anterior i trobarem la funció de distribució de la variable $Y$ $F_Y(y)$. Una vegada trobada la funció de distribució, trobarem la inversa $F_Y^{-1}$. L'únic que quedarà fer per trobar la mostra de $Y$ és aplicar la següent fórmula a tots els valors de la mostra de $X$:

$$Y = F_Y^{-1}(X).$$

Fixau-vos que aquest és un mètode que val per trobar qualsevol mostra aleatòria simple de qualsevol variable aleatòria $Y$. Aquest mètode es diu **mètode de la transformada inversa**.

Trobem la funció de distribució $F_Y(t)$:

$$F_Y(t) = \int_{-\infty}^{y} \frac{1}{\pi(1+y^2)}\, dy = \frac{1}{\pi}[\text{arctan } y]_{-\infty}^{y} = \frac{1}{2} + \frac{\text{arctan } y}{\pi}.$$

A continuació, trobem la seva inversa $F_Y^{-1}(t)$:

$$\begin{array}{c} F_Y(y) = t, \implies \frac{1}{2} + \frac{1}{\pi}\text{arctan } y = t, \\ \text{arctan } y = \left(t - \frac{1}{2}\right)\pi, \implies y = F_Y^{-1}(t) = \tan\left(\pi\left(t - \frac{1}{2}\right)\right). \end{array}$$

La mostra aleatòria simple de la variable $Y$ aplicant la fórmula anterior és

| | | | | | |
|---|---|---|---|---|---|
| 0.0818, | 11.7609, | -5.7297, | 1.6434, | -2.2910, | -0.8011, |
| -3.045, | -1.7531, | 0.4629, | 0.2769, | 0.7557, | -0.0408, |
| -1.0716, | -0.4629, | 1.5017, | -0.0094, | -0.7857, | -0.8816, |
| -5.6253, | 0.6888, | 3.6553, | 0.7557, | 0.3564, | 0.8115, |
| 0.3249, | -2.1602, | 0.6128, | -0.5497, | -16.733, | -14.445, |
| 0.9099, | 1.8744, | . | . | . | . |

c) Construïm la taula per trobar l'estadístic del test de la $\chi^2$:

| Intervals $I_i$ | $Y_i$ | $p_i$ | $np_i$ | $\lvert Y_i - np_i \rvert$ | $\frac{(Y_i-np_i)^2}{np_i}$ |
|---|---|---|---|---|---|
| $(-\infty,-1]$ | 9 | 0.25 | 8 | 1 | 0.125 |
| $(-1,0]$ | 7 | 0.25 | 8 | 1 | 0.125 |
| $(0,1]$ | 11 | 0.25 | 8 | 3 | 1.125 |
| $(1,\infty)$ | 5 | 0.25 | 8 | 3 | 1.125 |
| | | | | | $\chi^2 = 2.5$ |

Càlcul de les probabilitats teòriques $p_i$:

$$\begin{aligned} p_1 &= F_Y(-1) = \frac{1}{2} + \frac{\text{arctan }(-1)}{\pi} = 0.25, \\ p_2 &= F_Y(0) - F_Y(-1) = 0.5 - 0.25 = 0.25, \\ p_3 &= F_Y(1) - F_Y(0) = \frac{1}{2} + \frac{\text{arctan } 1}{\pi} - 0.5 = 0.25, \\ p_4 &= 1 - F_Y(1) = 1 - 0.75 = 0.25. \end{aligned}$$

L'estadístic $\chi^2$ s'aproxima a la distribució $\chi^2_3$.

Regió crítica: $R.C. = \{\chi^2 \geq \chi^2_{3,1-\alpha}\}$ on $\alpha$ és l'error tipus I.

L'error tipus I màxim per sota del qual acceptam que la mostra anterior segueix la mateixa distribució de $Y$ compleix:

$$0.45 \leq \alpha_{\text{max}} = p\left\{\chi^2_3 \geq 2.5\right\} \leq 0.5.$$

Acceptam, doncs, que la funció de distribució de la mostra anterior és $F_Y$.

## 5.3 Problemes proposats

**5.1.-** Un parell de daus es varen llançar 500 vegades. En la taula següent es mostren les sumes que varen tenir lloc. Provau la hipòtesi que els daus no estaven trucats, o sigui, comprovau que l'error tipus I màxim comès en acceptar que els daus no estan trucats no és gaire petit.

| Suma | Freqüència |
|---|---|
| $2, 3$ o $4$ | 74 |
| 5 o 6 | 120 |
| 7 | 83 |
| 8 o 9 | 135 |
| $10, 11$ o $12$ | 88 |

**5.2.-** El 1972, l'informe oficial va donar la següent distribució del nombre de dies que varen ser internats en l'hospital els malalts durant 1971.

| Nombre de dies | Nombre de malalts |
|---|---|
| 1 | 89 |
| 2 | 152 |
| 3 | 105 |
| $4-5$ | 165 |
| $6-9$ | 221 |
| $10-14$ | 124 |
| $15-30$ | 106 |
| 31 o més | 38 |

Provau la hipòtesi que aquestes dades es varen obtenir d'una distribució $\chi^2$ amb 4 graus de llibertat.

**5.3.-** Es va seleccionar una mostra de 3000 taronges de València. Cada taronja es va classificar segons el seu color (clar, mig i obscur) i es va determinar el seu contengut de sucre (dolça o no dolça). Els resultats varen ser

| Color | Molt Dolça | No Dolça | Totals |
|---|---|---|---|
| Clar | 1300 | 200 | 1500 |
| Mig | 500 | 500 | 1000 |
| Obscur | 200 | 300 | 500 |
| Totals | 2000 | 1000 | 3000 |

Provau la hipòtesi que la dolçor i el color són independents.

**5.4.-** Es va fer una prova d'intel·ligència a 100 estudiants. En la taula següent es mostren les qualificacions obtengudes:

| Qualificació $x$ | Freqüència |
|---|---|
| $70 < x \leq 90$ | 8 |
| $90 < x \leq 110$ | 38 |
| $110 < x \leq 130$ | 45 |
| $130 < x \leq 150$ | 9 |

Es pot suposar que aquestes qualificacions són una mostra aleatòria de les que tendrien totes les persones possibles que fessin la prova. Provau la hipòtesi que les qualificacions obtengudes per la població (conceptualment infinita) estarien distribuïdes normalment.
Final. Juny 91.

**5.5.-** Considerem la següent mostra aleatòria simple d'una v.a. $X$ tal que $X(\Omega) = [0, 1]$. Provau, mitjançant el test $\chi^2$, que podem considerar que $X$ segueix una distribució uniforme en $[0, 1]$.(Preneu intervals d'amplada 0.25.)

| | | | | |
|---|---|---|---|---|
| 0.479, | 0.889, | 0.216, | 0.596, | 0.359 |
| 0.347, | 0.646, | 0.359, | 0.991, | 0.227 |
| 0.774, | 0.760, | 0.448, | 0.992, | 0.742 |
| 0.402, | 0.049, | 0.213, | 0.296, | 0.711 |

Final. Setembre 91.

**5.6.-** Sigui $X$ la variable aleatòria que té com a funció de densitat:

$$f(x) = \begin{cases} x+1, & \text{si } x \in [-1, 0], \\ 1-x, & \text{si } x \in [0, 1], \\ 0, & \text{en cas contrari.} \end{cases}$$

Comprovau mitjançant el test de la $\chi^2$ que la següent mostra aleatòria simple segueix la mateixa distribució que $X$:

| | | | | | | | |
|---|---|---|---|---|---|---|---|
| 0.183, | 0.647, | 0.148, | -0.143, | -0.625, | 0.858, | -0.177, | 0.350, |
| -0.188, | -0.059, | 0.845, | 0.031, | -0.156, | 0.564, | -0.235, | 0.237, |
| 0.294, | -0.257, | 0.110, | 0.478, | 0.647, | 0.276, | -0.528, | -0.075, |
| -0.498, | 0.395, | -0.163, | -0.075, | -0.623, | 0.053, | -0.647, | 0.348, |
| -0.795, | -0.132, | -0.381, | -0.017, | -0.227, | 0.277, | 0.590, | -0.832 |

Final. Setembre 93.

**5.7.-** Ens donen les notes de certa assignatura de 3 grups d'alumnes $A$, $B$ i $C$:

| | | | | | | | | | | |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| $A$ | 4.6 | 5. | 5.1 | 5.6 | 4.6 | 5. | 5.7 | 5.4 | 4.4 | 8. |
| $B$ | 4.6 | 3.4 | 5.3 | 4. | 3.5 | 4. | 5. | 4.7 | 3.6 | 4.1 |
| $C$ | 7.2 | 7.3 | 5.7 | 4.1 | 5.7 | 6.1 | 6. | 7.8 | 7. | 3.8 |

Els classificam segons 2 criteris: per grup i per nota tenint en compte que:
**Suspens** significa una nota més petita que 5 (nota $< 5$).
**Aprovat** significa una nota entre 5 i 6 ($5 \leq$ nota $\leq 6$).
**Notable** significa una nota més gran que 6 (nota $> 6$).
Vegeu a partir del test $\chi^2$ per a quins valors de $\alpha$ (error tipus I) podem acceptar que els dos criteris són independents.
Final. Juny 94.

**5.8.-** Llançam un dau 100 vegades on: 15 vegades ha sortit la cara 1, 15 vegades ha sortit la cara 2, 30 vegades ha sortit la cara 3, 15 vegades ha sortit la cara 4, 15 vegades ha sortit la cara 5, 10 vegades ha sortit la cara 6. Fent servir els test $\chi^2$, trobau el $\alpha$ màxim (error tipus I) per al qual acceptam que el dau no està trucat.
Final. Juny 94.

**5.9.-** Trobau l'error tipus I màxim per poder acceptar que la següent mostra aleatòria simple segueix una distribució exponencial fent servir el test de la $\chi^2$.

| | | | | | | | | | |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| 1.68, | 1.17, | 0.6, | 2.84, | 1.55, | 1.26, | 1.24, | 0.04, | 0.28, | 0.33, |
| 0.38, | 0.67, | 0.18, | 0.27, | 0.95, | 2.9, | 1.93, | 0.12, | 0.14, | 0.86, |
| 1.71, | 0.76, | 0.7, | 0.02, | 0.53, | 1.24, | 1.27, | 0., | 1.1, | 1.9, |
| 1.02, | 0.18, | 0.63, | 1.72, | 1.9, | 1.72, | 0.12, | 0.17, | 2.76, | 1.19, |
| 0.31, | 0.45, | 0.58, | 1.97, | 0.8, | 0.35, | 2.14, | 0.29, | 3.57, | 2.91, |

Condició per fer el problema: considerau la següent partició de $[0, \infty)$:

$$[0, \infty) = [0, 0.25) \cup [0.25, 0.5) \cup [0.5, 0.75) \cup [0.75, 1) \cup [1, \infty).$$

Final. Setembre 94.

**5.10.-** Es vol provar la hipòtesi que el diàmetre, en mm., d'una peça és una variable aleatòria amb funció de densitat:

$$f(x) = \frac{3}{37}x^2, \ 3 \leq x \leq 4.$$

Per fer el contrast se selecciona una mostra aleatòria simple de grandària 1000 amb els resultats següents:

| Interval | Freqüència |
|---|---|
| 3.0-3.2 | 157 |
| 3.2-3.4 | 174 |
| 3.4-3.6 | 190 |
| 3.6-3.8 | 226 |
| 3.8-4.0 | 253 |

Fent servir el test $\chi^2$, trobau l'$\alpha_{\max}$ (error tipus I màxim) per poder acceptar la hipòtesi.
Segon parcial. Juny 95.

**5.11.-** Classificam $N$ individus segons dos criteris. Cada criteri té dos nivells. La taula de contingència és:

| $C2\backslash C1$ | $A_1$ | $A_2$ |
|---|---|---|
| $B_1$ | 10 | 5 |
| $B_2$ | 5 | 10 |

Trobau l'error tipus I màxim per poder acceptar que els dos criteris són independents fent servir el test de la $\chi^2$.
Final. Juny 96.

**5.12.-** A partir de la següent mostra aleatòria simple d'una variable aleatòria $X$ $U(0,1)$ (uniforme en l'interval $(0,1)$), generau una mostra aleatòria simple d'una variable aleatòria $Y$ $\operatorname{Exp}(\lambda = 1)$ i comprovau a partir del test de la bondat d'ajustament que la mostra anterior correspon a la variable aleatòria $Y$. Preneu la següent partició de $\mathbb{R}$:

$$\mathbb{R} = (-\infty, 0.5) \cap [0.5, 1) \cap [1, \infty).$$

| | | | | |
|---|---|---|---|---|
| 0.033, | 0.890, | 0.548, | 0.405, | 0.281 |
| 0.858, | 0.820, | 0.819, | 0.531, | 0.198 |
| 0.038, | 0.290, | 0.917, | 0.601, | 0.912 |
| 0.333, | 0.658, | 0.428, | 0.400, | 0.208 |
| 0.369, | 0.252, | 0.154, | 0.566, | 0.575 |

Final. Juny 96.

**5.13.-** Llançam un dau 200 vegades amb els resultats següents:

| Cara | 1 | 2 | 3 | 4 | 5 | 6 |
|---|---|---|---|---|---|---|
| Vegades | 40 | 40 | 30 | 20 | 30 | 40 |

Trobau l'error tipus I màxim per poder acceptar que el dau no està trucat fent servir el test de la $\chi^2$.
Final. Setembre 96.

# Capítol 6

# Test de Kolmogorov-Smirnov

## 6.1 Resum teòric

Quan la distribució proposada en una prova de la bondat d'ajustament és contínua i la mostra aleatòria simple és petita, una prova més apropiada és la basada en l'estadística de Kolmogorov-Smirnov. Aquesta prova no necessita que les dades estiguin agrupades.

Sigui $X$ una variable aleatòria contínua. Siguin $x_1, \ldots, x_n$ els valors observats en una mostra aleatòria simple. Suposem-los ordenats: $x_1 < \cdots < x_n$.

Sigui $F_0$ la funció de distribució que volem contrastar. Ens plantejam el contrast d'hipòtesi següent:

$H_0$: La distribució de la mostra és $F_0$.

$H_1$: La distribució de la mostra no és $F_0$.

Considerem la funció de distribució empírica de la mostra:

$$S_n(x) = \frac{\#\{x_i : x_i \leq x\}}{n} = \begin{cases} 0, & \text{si } x < x_1, \\ k/n, & \text{si } x_k \leq x < x_{k+1}, \\ 1, & \text{si } x \geq x_n. \end{cases}$$

($\#\{x_i : x_i \leq x\}$ és el nombre d'elements de la mostra inferiors o iguals a $x$).

Si $H_0$ és certa, la diferència entre $S_n$ i $F_0$ serà relativament petita. Definim **l'estadística de Kolmogorov-Smirnov** com:

$$D_n = \max_{x \in R} |F_0(x) - S_n(x)|.$$

$D_n$ té una distribució independent del model proposat sota $H_0$, pel que es diu que és una estadística independent de la distribució. Això vol dir que $D_n$ es pot avaluar només en funció de la grandària de la mostra, i després utilitzar per a qualsevol $F_0(x)$. A l'apèndix C, hi trobam la funció de distribució de $D_n$ tabulada per a diferents valors de $n$.

Per a un valor $\alpha$ de l'error de tipus I, la regió crítica és de la forma

$$\left\{D_n > \frac{a}{\sqrt{n}}\right\},$$

on $a$ es determina imposant que $p\left\{D_n > \frac{a}{\sqrt{n}}\right\} = \alpha$.

Aleshores, es rebutja la hipòtesi nul·la $H_0$ si per a qualsevol valor $x$ observat, el valor de $D_n$ es troba dins la regió crítica amb nivell de significació $\alpha$, és a dir, si el valor calculat de $D_n$ és més gran que el valor trobat a les taules.

## 6.2 Problemes resolts

**6.1.-** La vida (en milers d'hores operatives) de 10 unitats digitals en una fàbrica aeronàutica val:

0.4, 2.6, 4.4, 4.9, 10.6, 11.3, 11.8, 12.6, 23.0, 40.8

Es demana, fent servir el test de Kolmogorov-Smirnov, si aquestes dades es corresponen amb una variable exponencial amb paràmetre $\lambda = 0.1$, o sigui, trobau l'error tipus màxim per sota del qual acceptam que la mostra anterior correspon a una variable aleatòria exponencial.

**Resolució.** Construïm la taula següent on hi ha la funció de distribució teòrica donada per la hipòtesi nul·la $H_0$:

$$F_0(x) = F_{\mathsf{Exp}\ (0.1)}(x),$$

i la funció de distribució empírica de la mostra:

$$S_n(x) = \frac{\#\{x_i | x_i \leq x\}}{n},$$

on el símbol # significa cardinal del conjunt $\{x_i | x_i \leq x\}$ i $n$ és la grandària de la mostra.

| $x$ | $F_0(x)$ | $S_n(x)$ | $\|F_0(x) - S_n(x)\|$ |
|---|---|---|---|
| 0.2 | 0.0198 | 0.1 | 0.0801 |
| 2.6 | 0.2289 | 0.2 | 0.0289 |
| 4.4 | 0.3559 | 0.3 | 0.0559 |
| 4.9 | 0.3873 | 0.4 | 0.0126 |
| 10.6 | 0.6535 | 0.5 | 0.1535 |
| 11.3 | 0.6769 | 0.6 | 0.0769 |
| 11.8 | 0.6927 | 0.7 | 0.0072 |
| 12.6 | 0.7163 | 0.8 | 0.0836 |
| 23.0 | 0.8997 | 0.9 | 0.0002 |
| 40.8 | 0.9830 | 1.0 | 0.0169 |

Per trobar el valor de $F_0(x)$, hem de recordar que la funció de distribució d'una variable aleatòria exponencial amb paràmetre $\lambda$ és:

$$F_0(x) = 1 - e^{-\lambda x}.$$

El valor de l'estadístic de Kolmogorov

$$D_n = \max_{x \in \mathbb{R}} |F_0(x) - S_n(x)|,$$

val, en aquest cas, $D_{10} = 0.1535$.

Mirant en la taula que ens dóna la funció de distribució de $D_n$, podem trobar la condició que verifica l'error tipus I màxim per sota del qual acceptam que la mostra anterior correspon a una variable exponencial:

$$\alpha_{\mathsf{max}} = p\{D_{10} > 0.1535\} = 1 - F_{D_{10}}(0.1535) \geq 1 - 0.6 = 0.4.$$

A la vista del resultat anterior, acceptam segons el test de Kolmogorov que la mostra anterior és exponencial amb paràmetre $\lambda = 0.1$.

**6.2.-** Es va fer una enquesta per saber quin seria el preu raonable en un determinat producte per a la llar. Les respostes varen ser (en cents de ptes.):

18, 23, 36, 33, 21, 26, 26, 16, 31, 30, 41, 27, 29, 40, 38

Vegeu si les dades anteriors s'adapten a una distribució uniforme en l'interval $(15, 45)$ fent servir el test de Kolmogorov-Smirnov.

**Resolució.** Les funcions de densitat i de distribució d'una variable $X$ uniforme en l'interval $(15, 45)$

són:

$$f_X(x) = \begin{cases} \frac{1}{30}, & \text{si } x \in (15,45), \\ 0, & \text{en cas contrari,} \end{cases} \qquad F_X(x) = \begin{cases} 0, & \text{si } x < 15, \\ \frac{x-15}{30}, & \text{si } 15 \leq x \leq 45, \\ 1, & \text{si } x > 45. \end{cases}$$

En aquest problema, la grandària de la mostra val $n = 15$ i la taula on vénen reflectits els càlculs de les funcions de densitat teòriques i empíriques és:

| $x$ | $F_0(x)$ | $S_n(x)$ | $\lvert F_0(x) - S_n(x)\rvert$ |
|---|---|---|---|
| 16 | 0.0333 | 0.0666 | 0.0333 |
| 18 | 0.1000 | 0.1333 | 0.0333 |
| 21 | 0.2000 | 0.2000 | 0.0000 |
| 23 | 0.2666 | 0.2666 | 0.0000 |
| 26 | 0.3666 | 0.4000 | 0.0333 |
| 27 | 0.4000 | 0.4666 | 0.0666 |
| 29 | 0.4666 | 0.5333 | 0.0666 |
| 30 | 0.5000 | 0.6000 | 0.1000 |
| 31 | 0.5333 | 0.6666 | 0.1333 |
| 33 | 0.6000 | 0.7333 | 0.1333 |
| 36 | 0.7000 | 0.8000 | 0.1000 |
| 38 | 0.7666 | 0.8666 | 0.1000 |
| 40 | 0.8333 | 0.9333 | 0.1000 |
| 41 | 0.8666 | 1.0000 | 0.1333 |

Fixau-vos que en el cas en què $x = 26$, tenint en compte que es repeteix dues vegades, la funció de distribució empírica val:

$$S_{15}(26) = \frac{\#\{x_i | x_i \leq 26\}}{15} = \frac{6}{15} = 0.4.$$

El valor de l'estadístic de Kolmogorov valdrà en aquest cas:

$$D_{15} = \max_{x \in \mathbb{R}} |F_0(x) - S_{15}(x)| = 0.1333.$$

Per tant, l'error tipus I màxim per sota del qual acceptam que la mostra anterior és uniforme compleix:

$$\alpha_{\mathsf{max}} = p\{D_{15} > 0.1333\} = 1 - F_{D_{15}}(0.1333) \geq 1 - 0.6 = 0.4.$$

Concloem que, segons el test de Kolmogorov, la mostra anterior correspon a una variable uniforme.

## 6.3 Problemes proposats

**6.1.-** Volem saber si la durada per arreglar una determinada avaria elèctrica és una variable aleatòria exponencial amb una mitjana de 0.8 hores. Les dades de les darreres 10 avaries són (en hores):

$$0.16,\ 0.23,\ 0.25,\ 0.39,\ 0.4,\ 0.45,\ 0.53,\ 0.71,\ 1.05,\ 1.17$$

Fent servir el test de Kolmogorov-Smirnov, vegeu si la hipòtesi és certa.

**6.2.-** Vegeu si la mostra del problema anterior és normal amb mitjana $\overline{x}$ i variància $s^2$ fent servir el test de Kolmogorov-Smirnov.

**6.3.-** Sigui la següent mostra aleatòria simple d'una variable aleatòria $X$:
$1, 1, 1, 2, 2, 2, 2, 3, 3, 3$. Aplicam el test de Kolmogorov-Smirnov per veure si la mostra anterior és normal. Trobau quina condició ha de verificar $\alpha$ (error tipus I) per poder acceptar que la mostra anterior és normal.
Final. Setembre 94.

# Capítol 7

# Anàlisi de la variància

## 7.1 Resum teòric

És un conjunt de tècniques d'anàlisi estadística que permeten analitzar com operen diversos factors simultàniament. Podem comprovar, per exemple, la significació estadística entre les mitjanes de dues o més mostres, determinant si les diferències observades es poden assignar o no a fluctuacions del mostreig.

Normalment, es vol estudiar com es diferencien els nivells d'un cert factor subjecte a estudi (factor tractament), tenint en compte la incidència d'altres factors (ambientals), la influència dels quals s'elimina mitjançant una adequada descomposició de la variabilitat.

### 7.1.1 Anàlisi de la variància d'un factor

Considerem el problema següent:

Siguin $Y_1, \ldots, Y_k$ $k$ variables aleatòries normals amb mitjanes respectives $\mu_1, \ldots, \mu_k$ i totes amb la mateixa variància $\sigma^2$. Volem veure si totes tenen la mateixa mitjana, o sigui, volem fer el contrast d'hipòtesi següent:

$H_0 : \mu_1 = \cdots = \mu_k$.

$H_1$ : no totes les $\mu_i$ són iguals.

Un exemple d'aplicació del problema anterior podria ser estudiar $k$ diferents tipus d'ensenyament i veure si tenen la mateixa eficàcia. Per fer-ho, s'agafen $k$ classes d'alumnes i a cada classe li és aplicat un mètode d'ensenyament diferent.

En general tendrem:

$Y_{1j}, \ldots, Y_{n_j j}$ una mostra aleatòria simple de la variable aleatòria $Y_j$.

Considerem les variables aleatòries $\varepsilon_{ij} = Y_{ij} - \mu_j,\ i = 1, \ldots, n_j,\ j = 1 \ldots, k$. Totes són $N(0, \sigma^2)$ i independents.

Definim els paràmetres

$$\mu = \frac{\sum_{j=1}^{k} n_j \mu_j}{n}, \quad \alpha_j = \mu_j - \mu,$$

on $n = \sum_{j=1}^{k} n_j$.

1. **Estimadors dels paràmetres**

   – Estimador de $\mu_j$:
   Com que $Y_{1j}, \ldots, Y_{n_j j}$ és una mostra aleatòria simple de la variable aleatòria $Y_j$, l'estimador de màxima versemblança de $\mu_j$ val:

   $$\hat{\mu}_j = \frac{\sum_{i=1}^{n_j} Y_{ij}}{n_j} := \bar{Y}_j.$$

   – Estimador de $\mu$:
   A partir de l'expressió de $\mu$, obtenim el seu estimador de màxima versemblança:

   $$\hat{\mu} = \frac{\sum_{j=1}^{k} n_j \hat{\mu}_j}{n} = \frac{\sum_{j=1}^{k} \sum_{i=1}^{n_j} Y_{ij}}{n} := \bar{Y}.$$

   – Estimador de $\alpha_j$:
   Com que $\alpha_j = \mu_j - \mu$, l'estimador de màxima versemblança de $\alpha_j$ és:

   $$\hat{\alpha}_j = \hat{\mu}_j - \hat{\mu} = \bar{Y}_j - \bar{Y}.$$

2. **Variabilitat**

   Definim la variabilitat total de la mostra com:

$$VT = \sum_{j=1}^{k}\sum_{i=1}^{n_j}(Y_{ij} - \bar{Y})^2,$$

   i la descomposam de la manera següent:

$$VT = \sum_{j=1}^{k}\sum_{i=1}^{n_j}(Y_{ij} - \bar{Y}_j)^2 + \sum_{j=1}^{k}\sum_{i=1}^{n_j}(\bar{Y}_j - \bar{Y})^2 + 2\sum_{j=1}^{k}\sum_{i=1}^{n_j}(Y_{ij} - \bar{Y}_j)(\bar{Y}_j - \bar{Y}).$$

   El darrer sumand és 0 i, per tant, resulta:

$$\begin{aligned} VT &= \sum_{j=1}^{k}\sum_{i=1}^{n_j}(Y_{ij} - \bar{Y}_j)^2 + \sum_{j=1}^{k}\sum_{i=1}^{n_j}(\bar{Y}_j - \bar{Y})^2 \\ &= \sum_{j=1}^{k}\sum_{i=1}^{n_j}(Y_{ij} - \bar{Y}_j)^2 + \sum_{j=1}^{k} n_j(\bar{Y}_j - \bar{Y})^2 := V_1 + V_2. \end{aligned}$$

   $V_1$ és la variabilitat deguda a les diferències entre els valors dins cada grup, i $V_2$ és la variabilitat deguda a les diferències entre els grups.

   Definim ara les mitjanes quadràtiques següents:

   – Mitjana quadràtica total: $MC_t = \frac{VT}{n-1} = \frac{\sum_{j=1}^{k}\sum_{i=1}^{n_j}(Y_{ij}-\bar{Y})^2}{n-1}$.

   – Mitjana quadràtica intragrup: $MC_{tra} = \frac{V_1}{n-k} = \frac{\sum_{j=1}^{k}\sum_{i=1}^{n_j}(Y_{ij}-\bar{Y}_j)^2}{n-k}$.

   – Mitjana quadràtica intergrup: $MC_{ter} = \frac{V_2}{k-1} = \frac{\sum_{j=1}^{k} n_j(\bar{Y}_j-\bar{Y})^2}{k-1}$.

3. **Estadístic de contrast**

   Volem trobar un estadístic de tal forma que, si $H_0$ és certa, puguem dir quin tipus de distribució segueix.

Primerament, observem que

$$
\begin{aligned}
Q &:= \sum_{j=1}^{k}\sum_{i=1}^{n_j}\frac{(Y_{ij}-\mu_j)^2}{\sigma^2}\\
&= \frac{\sum_{j=1}^{k}\sum_{i=1}^{n_j}(Y_{ij}-\bar{Y}_j)^2}{\sigma^2}+\frac{\sum_{j=1}^{k}n_j(\bar{Y}_j-\bar{Y}-\alpha_j)^2}{\sigma^2}+\frac{n(\bar{Y}-\mu)^2}{\sigma^2}\\
&:= Q_1+Q_2+Q_3.
\end{aligned}
$$

Aleshores:

– La variable aleatòria $Q$ segueix la distribució $\chi^2_n$.

– La variable aleatòria $Q_1$ segueix la distribució $\chi^2_{n-k}$.

– La variable aleatòria $Q_2$ segueix la distribució $\chi^2_{k-1}$.

– La variable aleatòria $Q_3$ segueix la distribució $\chi^2_1$.

Si $H_0$ és certa, aleshores $\alpha_1 = \cdots = \alpha_k = 0$. Per tant resulta:

$$Q_2 = \frac{\sum_{j=1}^{k} n_j(\bar{Y}_j-\bar{Y})^2}{\sigma^2}.$$

D'aquí deduïm que

$$F := \frac{Q_2/(k-1)}{Q_1/(n-k)} = \frac{MC_{ter}}{MC_{tra}}$$

segueix la distribució $F$ de Fisher-Snedecor amb $k-1$ i $n-k$ graus de llibertat.

La regió crítica serà de la forma $\{F > F_{k-1,n-k,1-\alpha}\}$.

Les fórmules següents permeten calcular les diferents variabilitats de manera més senzilla:

- $VT = \sum_{j=1}^{k}\sum_{i=1}^{n_j} Y_{ij} - \frac{\left(\sum_{j=1}^{k}\sum_{i=1}^{n_j} Y_{ij}^2\right)^2}{n}.$

- $V_1 = \sum_{j=1}^{k}\sum_{i=1}^{n_j} Y_{ij}^2 - \sum_{j=1}^{k}\frac{\left(\sum_{i=1}^{n_j} Y_{ij}\right)^2}{n_j}.$

- $V_2 = VT - V_1 = \sum\limits_{j=1}^{k} \dfrac{\left(\sum\limits_{i=1}^{n_j} Y_{ij}\right)^2}{n_j} - \dfrac{\left(\sum\limits_{j=1}^{k}\sum\limits_{i=1}^{n_j} Y_{ij}^2\right)^2}{n}.$

Després, com ja hem dit, es calculen les mitjanes quadràtiques i, finalment, l'estadístic $F$.

4. **Comprovació d'hipòtesis prèvies**

   Per tal de comprovar la igualtat de les variàncies,

$$\sigma_1^2 = \cdots = \sigma_k^2,$$

   Bartlett va proposar l'estadístic de contrast següent:

$$B = \frac{2.3026}{A}\left[\sum_{j=1}^{k}(n_j-1)\log_{10}\frac{\sum\limits_{j=1}^{k}(n_j-1)\tilde{S}_j^2}{\sum\limits_{j=1}^{k}(n_j-1)} - \sum_{j=1}^{k}(n_j-1)\log_{10}\tilde{S}_j^2\right] = \frac{C}{A},$$

   on

$$\tilde{S_j}^2 = \frac{\sum\limits_{i=1}^{n_j}(Y_{ij}-\bar{Y}_j)^2}{n_j-1}, \quad A = 1 + \frac{1}{3(k-1)}\left[\sum_{j=1}^{k}\frac{1}{n_j-1} - \frac{1}{\sum\limits_{j=1}^{k} n_j - 1}\right].$$

   L'estadístic $B$ es distribueix segons una $\chi^2_{k-1}$ i, per tant, la regió crítica vendrà donada per:

$$\{B > \chi_{k-1,1-\alpha}\}.$$

5. **Comprovació de la normalitat de les $Y_{ij}$**

   S'aplica el test $\chi^2$ si les $n_j$ són grans o el test de Kolmogorov-Smirnov, en cas contrari.

6. **Variables que tenen les mitjanes diferents**

   Si hem rebutjat $H_0$, ens interessarà saber quines $Y_j$ tenen les mitjanes diferents. La tècnica més utilitzada és el test de Scheffé, que diu que, si hem rebutjat $H_0$, acceptarem que $\mu_i \neq \mu_j$ al nivell de significació $\alpha$ si

$$\frac{|\bar{Y}_i - \bar{Y}_j|}{\sqrt{MC_{tra}\cdot(\frac{1}{n_i}+\frac{1}{n_j})}} \geq \sqrt{(k-1)F_{k-1,n-k,1-\alpha}}.$$

### 7.1.2 Anàlisi de la variància de dos factors

En el cas anterior suposàvem que la variació de les variables aleatòries $Y_i$ només era deguda a un factor: el mètode d'ensenyament, per exemple. Ara suposarem, continuant amb l'exemple anterior, que l'eficàcia dels alumnes depèn de dos factors: el mètode d'ensenyament i el nivell social.

Així, doncs, sigui $Y_{rs}$ la variable aleatòria que ens indica el rendiment dels alumnes ensenyats pel mètode $r$ i que pertanyen al nivell social $s$ $(r = 1, \ldots, f,\ s = 1, \ldots, c)$. Suposem que les variables aleatòries $Y_{rs}$ són $N(\mu_{rs}, \sigma^2)$ i independents.

Sigui $Y_{1rs}, \ldots, Y_{nrs}$ una mostra aleatòria simple de la variable aleatòria $Y_{rs}$ $\forall r = 1, \ldots, f$, i $\forall s = 1, \ldots, c$. (Suposem que totes les mostres tenen la mateixa grandària.)

Considerem les variables aleatòries $N(0, \sigma^2)$ $\varepsilon_{irs} = Y_{irs} - \mu_{rs}$. Introduïm els paràmetres següents:

– Rendiment mitjà de totes les persones ensenyades pel mètode $r$:

$$\mu_{r\bullet} = \frac{\sum_{s=1}^{c} \mu_{rs}}{c}.$$

– Rendiment mitjà de totes les persones que pertanyen al nivell social $s$:

$$\mu_{\bullet s} = \frac{\sum_{r=1}^{f} \mu_{rs}}{f}.$$

– Rendiment mitjà de totes les persones:

$$\mu_{\bullet\bullet} = \frac{\sum_{s=1}^{c} \sum_{r=1}^{f} \mu_{rs}}{fc} = \frac{\sum_{r=1}^{f} \mu_{r\bullet}}{f} = \frac{\sum_{s=1}^{c} \mu_{\bullet s}}{c}.$$

Considerem els paràmetres:

- $\alpha_r = \mu_{r\bullet} - \mu_{\bullet\bullet}$ (diferències degudes al mètode).
- $\beta_s = \mu_{\bullet s} - \mu_{\bullet\bullet}$ (diferències degudes al nivell social).
- $\gamma_{rs} = \mu_{rs} - \mu_{r\bullet} - \mu_{\bullet s} + \mu_{\bullet\bullet}$ (interacció).

Aleshores

$$Y_{irs} = \mu_{rs} + \varepsilon_{irs} = \mu_{\bullet\bullet} + \alpha_r + \beta_s + \gamma_{rs} + \varepsilon_{irs}.$$

Direm que hi ha interacció entre els dos factors si $\gamma_{rs} \neq 0$ per a algun $r$ i algun $s$.

De forma esquemàtica, la situació és la següent:

**FACTOR I: Nivell Social**

**FACTOR II: Metodologia Docent**

| | 1 | 2 | $\ldots$ | $c$ | |
|---|---|---|---|---|---|
| 1 | $\mu_{11}$ | $\mu_{12}$ | $\cdots$ | $\mu_{1c}$ | $\mu_{1\bullet}$ |
| 2 | $\mu_{21}$ | $\mu_{22}$ | $\cdots$ | $\mu_{2c}$ | $\mu_{2\bullet}$ |
| $\vdots$ | $\vdots$ | $\vdots$ | $\ddots$ | $\vdots$ | $\vdots$ |
| $f$ | $\mu_{f1}$ | $\mu_{f2}$ | $\cdots$ | $\mu_{fc}$ | $\mu_{f\bullet}$ |
| | $\mu_{\bullet 1}$ | $\mu_{\bullet 2}$ | $\cdots$ | $\mu_{\bullet c}$ | $\mu_{\bullet\bullet}$ |

1. **Estimadors dels paràmetres**

   A partir de les definicions dels diferents paràmetres i tenint en compte que l'estimador de $\mu_{rs}$ és

   $$\hat{\mu}_{rs} = \frac{\sum\limits_{i=1}^{n} Y_{irs}}{n},$$

   obtenim els estimadors següents:

   - $\hat{\mu}_{r\bullet} = \dfrac{\sum\limits_{s=1}^{c}\sum\limits_{i=1}^{n} Y_{irs}}{nc} := \hat{Y}_{r\bullet}$,
   - $\hat{\mu}_{\bullet s} = \dfrac{\sum\limits_{r=1}^{f}\sum\limits_{i=1}^{n} Y_{irs}}{nf} := \hat{Y}_{\bullet s}$,
   - $\hat{\mu}_{\bullet\bullet} = \dfrac{\sum\limits_{s=1}^{c}\sum\limits_{r=1}^{f}\sum\limits_{i=1}^{n} Y_{irs}}{nfc} := \hat{Y}_{\bullet\bullet}$,
   - $\hat{\alpha}_r = \hat{Y}_{r\bullet} - \hat{Y}_{\bullet\bullet}$,
   - $\hat{\beta}_s = \hat{Y}_{\bullet s} - \hat{Y}_{\bullet\bullet}$,
   - $\hat{\gamma}_{rs} = \hat{Y}_{rs} - \hat{Y}_{r\bullet} - \hat{Y}_{\bullet s} + \hat{Y}_{\bullet\bullet}$.

2. **Variabilitat**

Definim la variabilitat total de la mostra com:

$$VT = \sum_{s=1}^{c}\sum_{r=1}^{f}\sum_{i=1}^{n}(Y_{irs} - \hat{Y}_{\bullet\bullet})^2,$$

i la descomponem de la manera següent:

$$\begin{aligned} VT &= \sum_{s=1}^{c}\sum_{r=1}^{f}\sum_{i=1}^{n}(Y_{irs} - \hat{Y}_{rs})^2 + nc\sum_{r=1}^{f}(\hat{Y}_{r\bullet} - \hat{Y}_{\bullet\bullet})^2 + nf\sum_{s=1}^{c}(\hat{Y}_{\bullet s} - \hat{Y}_{\bullet\bullet})^2 \\ &\quad + n\sum_{s=1}^{c}\sum_{r=1}^{f}(\hat{Y}_{rs} - \hat{Y}_{r\bullet} - \hat{Y}_{\bullet s} + \hat{Y}_{\bullet\bullet})^2. \end{aligned}$$

Així hem descompost $VT$ en

$$VT = VT_e + VT_f + VT_c + VT_{int},$$

on

- $VT_e$ és la variació deguda a les diferències entre els valors dins cada grup.
- $VT_f$ és la variació deguda a les diferències entre files (Factor II: metodologia docent).
- $VT_c$ és la variació deguda a les diferències entre columnes (Factor I: classe social).
- $VT_{int}$ és la variació deguda a la interacció entre els dos factors.

Definim ara les mitjanes quadràtiques següents:

- Mitjana quadràtica de l'error: $MC_e = \frac{VT_e}{(n-1)fc}$.
- Mitjana quadràtica per files: $MC_f = \frac{VT_f}{f-1}$ (factor II).
- Mitjana quadràtica per columnes: $MC_c = \frac{VT_c}{c-1}$ (factor I).
- Mitjana quadràtica d'interacció: $MC_{int} = \frac{VT_{int}}{(f-1)(c-1)}$.

3. **Estadístics de contrast**

   Quan feim una anàlisi de la variància de dos factors, tenim tres possibles contrasts amb les següents hipòtesis nul·les:

   (a) $H_{01} : \alpha_1 = \cdots = \alpha_f = 0$ o $\mu_{1\bullet} = \cdots = \mu_{f\bullet} = \mu_{\bullet\bullet}$.
   (No hi ha variació entre files (factor II)).

(b) $H_{02} : \beta_1 = \cdots = \beta_c = 0$ o $\mu_{\bullet 1} = \cdots = \mu_{\bullet c} = \mu_{\bullet\bullet}$
(No hi ha variació entre columnes (factor I)).

(c) $H_{03} : \gamma_{rs} = 0\ \forall r = 1, \ldots, f$ i $s = 1, \ldots, c$, o $\mu_{rs} - \mu_{\bullet\bullet} = (\mu_{r\bullet} - \mu_{\bullet\bullet}) + (\mu_{\bullet s} - \mu_{\bullet\bullet}) = \alpha_r + \beta_s\ \forall r = 1, \ldots, f$ i $s = 1, \ldots, c$
(No hi ha interacció).

Haurem de donar un estadístic per a cada tipus de contrast. Observem que

$$
\begin{aligned}
Q &:= \frac{\sum_{s=1}^{c}\sum_{r=1}^{f}\sum_{i=1}^{n}(Y_{irs}-\mu_{rs})^2}{\sigma^2} = \frac{\sum_{s=1}^{c}\sum_{r=1}^{f}\sum_{i=1}^{n}(Y_{irs}-\hat{Y}_{rs})^2}{\sigma^2} \\
&\quad + \frac{nc\sum_{r=1}^{f}(\hat{Y}_{r\bullet}-\hat{Y}_{\bullet\bullet}-\alpha_r)^2}{\sigma^2} + \frac{nf\sum_{s=1}^{c}(\hat{Y}_{\bullet s}-\hat{Y}_{\bullet\bullet}-\beta_s)^2}{\sigma_2} \\
&\quad + \frac{n\sum_{s=1}^{c}\sum_{r=1}^{f}(\hat{Y}_{rs}-\hat{Y}_{r\bullet}-\hat{Y}_{\bullet s}+\hat{Y}_{\bullet\bullet}-\gamma_{rs})^2}{\sigma^2} + \frac{nfc(\hat{Y}_{\bullet\bullet}-\mu)^2}{\sigma^2} \\
&:= Q_1 + Q_2 + Q_3 + Q_4 + Q_5.
\end{aligned}
$$

Aleshores:

- La variable aleatòria $Q$ segueix la distribució $\chi^2_{nfc}$.
- La variable aleatòria $Q_1$ segueix la distribució $\chi^2_{(n-1)fc}$.
- La variable aleatòria $Q_2$ segueix la distribució $\chi^2_{f-1}$.
- La variable aleatòria $Q_3$ segueix la distribució $\chi^2_{c-1}$.
- La variable aleatòria $Q_4$ segueix la distribució $\chi^2_{(f-1)(c-1)}$.
- La variable aleatòria $Q_5$ segueix la distribució $\chi^2_{1}$.

A continuació donarem els diferents estadístics de contrast.

(a) Si $H_{01}$ és certa, aleshores $\alpha_1 = \cdots = \alpha_f = 0$. Per tant resulta que

$$\bar{F}_f := \frac{Q_2/(f-1)}{Q_1/((n-1)fc)} = \frac{MC_f}{MC_e}$$

segueix la distribució $F$ de Fisher-Snedecor amb $f-1$ i $(n-1)fc$ graus de llibertat. La regió crítica serà de la forma $\{\bar{F}_f > F_{f-1,(n-1)fc,1-\alpha}\}$.

(b) Si $H_{02}$ és certa, aleshores $\beta_1 = \cdots = \beta_c = 0$. Per tant resulta que

$$\bar{F}_c := \frac{Q_3/(c-1)}{Q_1/((n-1)fc)} = \frac{MC_c}{MC_e}$$

segueix la distribució $F$ de Fisher-Snedecor amb $c-1$ i $(n-1)fc$ graus de llibertat. La regió crítica serà de la forma $\{\bar{F}_c > F_{c-1,(n-1)fc,1-\alpha}\}$.

(c) Si $H_{03}$ és certa, aleshores $\gamma_{rs} = 0\ \forall r = 1,\ldots,f$ i $s = 1,\ldots,c$. Per tant resulta que

$$\bar{F}_{int} := \frac{Q_4/(f-1)(c-1)}{Q_1/((n-1)fc)} = \frac{MC_{int}}{MC_e}$$

segueix la distribució $F$ de Fisher-Snedecor amb $(f-1)(c-1)$ i $(n-1)fc$ graus de llibertat. La regió crítica serà de la forma $\{\bar{F}_{int} > F_{(f-1)(c-1),(n-1)fc,1-\alpha}\}$.

Les fórmules següents permeten calcular les diferents variabilitats de manera més senzilla:

- $VT = \sum\limits_{r=1}^{f}\sum\limits_{s=1}^{c}\sum\limits_{i=1}^{n} Y_{irs}^2 - \dfrac{\left(\sum\limits_{r=1}^{f}\sum\limits_{s=1}^{c}\sum\limits_{i=1}^{n} Y_{irs}\right)^2}{nfc}.$
- $VT_e = \sum\limits_{r=1}^{f}\sum\limits_{s=1}^{c}\sum\limits_{i=1}^{n} Y_{irs}^2 - \dfrac{\sum\limits_{r=1}^{f}\sum\limits_{s=1}^{c}\left(\sum\limits_{i=1}^{n} Y_{irs}\right)^2}{n}.$
- $VT_f = \dfrac{\sum\limits_{r=1}^{f}\left(\sum\limits_{s=1}^{c}\sum\limits_{i=1}^{n} Y_{irs}\right)^2}{nc} - \dfrac{\left(\sum\limits_{r=1}^{f}\sum\limits_{s=1}^{c}\sum\limits_{i=1}^{n} Y_{irs}\right)^2}{nfc}.$
- $VT_c = \dfrac{\sum\limits_{s=1}^{c}\left(\sum\limits_{r=1}^{f}\sum\limits_{i=1}^{n} Y_{irs}\right)^2}{nf} - \dfrac{\left(\sum\limits_{r=1}^{f}\sum\limits_{s=1}^{c}\sum\limits_{i=1}^{n} Y_{irs}\right)^2}{nfc}.$
- $V_{int} = VT - VT_e - VT_f - VT_c.$

Després, com ja hem dit, es calculen les mitjanes quadràtiques i, finalment, els estadístics $\bar{F}$.

4. **Variables que tenen les mitjanes diferents**

(a) Si hem rebutjat $H_{01}$, seguint amb la mateixa filosofia que la part d'anàlisi de la variància amb un sol factor, direm que $\mu_{r\bullet} \neq \mu_{r'\bullet}$ al nivell de significació $\alpha$ si:

$$\frac{|\bar{Y_{r\bullet}} - \bar{Y_{r'\bullet}}|}{\sqrt{MC_e \cdot (\frac{1}{n_{r\bullet}} + \frac{1}{n_{r'\bullet}})}} \geq \sqrt{(f-1)F_{f-1,(n-1)fc,1-\alpha}}.$$

En el nostre cas, $n_{r\bullet} = n_{r'\bullet} = n \cdot c$.

(b) Si hem rebutjat $H_{02}$, direm que $\mu_{\bullet s} \neq \mu_{\bullet s'}$ al nivell de significació $\alpha$ si:

$$\frac{|\bar{Y_{\bullet s}} - \bar{Y_{\bullet s'}}|}{\sqrt{MC_e \cdot (\frac{1}{n_{\bullet s}} + \frac{1}{n_{\bullet s'}})}} \geq \sqrt{(c-1)F_{c-1,(n-1)fc,1-\alpha}}.$$

En el nostre cas, $n_{\bullet s} = n_{\bullet s'} = n \cdot f$.

(c) Si hem rebutjat $H_{03}$, direm que $\mu_{rs} \neq \mu_{r's'}$ al nivell de significació $\alpha$ si:

$$\frac{|\bar{Y}_{rs} - \bar{Y}_{r's'}|}{\sqrt{MC_e \cdot (\frac{1}{n} + \frac{1}{n})}} \geq \sqrt{(f-1)(c-1)F_{(f-1)(c-1),(n-1)fc,1-\alpha}}.$$

## 7.2 Problemes resolts

**7.1.-** Desitjam conèixer els efectes de l'alcohol en la realització de sumes. Per això, triam a l'atzar 8 persones que subdividim aleatòriament en tres grups (amb 3,2 i 3 persones respectivament) als quals aplicam, també aleatòriament, tres tractaments distints: $T_1$ (placebo), $T_2$ (baixa dosi d'alcohol), $T_3$ (alta dosi d'alcohol). Els resultats del quadre adjunt representen el nombre d'errors comesos per cada una de les 8 persones:

| $T_1$ | $T_2$ | $T_3$ |
|---|---|---|
| 2 | 7 | 10 |
| 4 | 8 | 10 |
| | 9 | 6 |

És compatible la hipòtesi $H_0 : \mu_1 = \mu_2 = \mu_3$, igual mitjana d'errors en les 3 poblacions, amb els resultats obtenguts? (trobau l'error tipus I màxim per sota del qual acceptam la igualtat de mitjanes d'errors.)

**Resolució.** Construïm primer la taula que ens donarà les quantitats de què depenen les variabilitats.

| $T_1$ | $T_2$ | $T_3$ | $T_1^2$ | $T_2^2$ | $T_3^2$ |
|---|---|---|---|---|---|
| 2 | 7 | 10 | 4 | 49 | 100 |
| 4 | 8 | 10 | 16 | 64 | 100 |
| | 9 | 6 | | 81 | 36 |
| 6 | 24 | 26 | 20 | 194 | 236 |

Fixau-vos que, en el nostre cas, el nombre de grups val $k=3$, la grandària de cada mostra corresponent a cada grup és $n_1=2$, $n_2=3$ i $n_3=3$ i la grandària total de la mostra val $n=n_1+n_2+n_3=8$.

Per tant, el valor de les quantitats anteriors és:

$$\begin{aligned}
\sum_{j=1}^{k}\sum_{i=1}^{n_j} Y_{ij}^2 &= 20+194+236=450,\\
\frac{\left(\sum\limits_{j=1}^{k}\sum\limits_{i=1}^{n_j} Y_{ij}\right)^2}{n} &= \frac{(6+24+26)^2}{2+3+3}=\frac{3136}{8}=392,\\
\sum_{j=1}^{k}\frac{\left(\sum\limits_{i=1}^{n_j} Y_{ij}\right)^2}{n_j} &= \frac{6^2}{2}+\frac{24^2}{3}+\frac{26^2}{3}=435.33.
\end{aligned}$$

Els valors de les variabilitats totals ($VT$), intragrups ($V_{tra}$) i intergrups ($V_{ter}$) són, respectivament:

$$\begin{aligned}
VT &= \sum_{j=1}^{k}\sum_{i=1}^{n_j} Y_{ij}^2 - \frac{\left(\sum\limits_{j=1}^{k}\sum\limits_{i=1}^{n_j} Y_{ij}\right)^2}{n} = 450-392=58,\\
V_{tra} &= \sum_{j=1}^{k}\sum_{i=1}^{n_j} Y_{ij}^2 - \sum_{j=1}^{k}\frac{\left(\sum\limits_{i=1}^{n_j} Y_{ij}\right)^2}{n_j} = 450-435.33=14.66,\\
V_{ter} &= VT - V_{tra} = 58-14.66=43.33.
\end{aligned}$$

Finalment, construïm la taula per trobar l'estadístic de contrast $F$ on F.V. vol dir Font de Variació, g. ll. vol dir graus de llibertat i $MQ$, mitjana quadràtica:

| F.V. | $V$ | g. ll. | $MQ=\frac{V}{\text{g. ll.}}$ | $F=\frac{MQ_{ter}}{MQ_{tra}}$ |
|---|---|---|---|---|
| Inter | $43.33$ | $k-1=3-1=2$ | $MQ_{ter}=\frac{43.33}{2}=21.66$ | $F=\frac{21.66}{2.93}=7.3864$ |
| Intra | $14.66$ | $n-k=8-3=5$ | $MQ_{tra}=\frac{14.66}{5}=2.93$ | |
| Total | $58.00$ | $n-1=8-1=7$ | | |

La distribució de l'estadístic $F$ és aproximadament la funció $F$ de Fisher-Snedecor amb graus de llibertat $k-1=2$ i $n-k=5$.

Tenint en compte que la regió crítica per realitzar el contrast és:

$$R.C. = \{F > F_{2,5,1-\alpha}\},$$

on $\alpha$ és l'error tipus I, l'error tipus I màxim per sota del qual acceptarem igualtat de mitjanes compleix:

$$\alpha_{\mathsf{max}} = p\{F_{2,5} > 7.3864\} \leq 1 - 0.975 = 0.025.$$

En vista del resultat anterior, rebutjam $H_0$ i concloem que les mitjanes de tots els grups no són iguals.

**7.2.-** Sigui una mostra aleatòria simple que dividim aleatòriament en 3 submostres de grandàries $n_1 = 3$, $n_2 = 4$ i $n_3 = 3$, respectivament. Desitjam comprovar si la lluminositat ambiental modifica la percepció visual. Per això, sotmetem la primera mostra a una tasca de reconeixement de lletres amb baixa lluminositat ambiental. La segona realitza la tasca amb alta lluminositat i la tercera la realitza sota un nivell mitjà de lluminositat. Els resultats són els següents (en nombre de lletres reconegudes correctament):

| Lluminositat baixa | Lluminositat alta | Lluminositat mitjana |
|---|---|---|
| 4 | 9 | 12 |
| 5 | 9 | 15 |
| | 11 | |

Trobau l'error tipus I màxim per poder acceptar que el nombre de lletres reconegudes sota cada un dels 3 nivells de lluminositat és el mateix. Fent servir el mètode de Scheffé, trobau entre quins tractaments hi ha diferències.

**Resolució.** En aquest problema, el nombre de grups val $k = 3$, la grandària de cada mostra corresponent a cada grup és $n_1 = 2$, $n_2 = 3$ i $n_3 = 2$ i la grandària total de la mostra val $n = n_1 + n_2 + n_3 = 7$.

Vegem primer que no podem acceptar que el nombre de lletres reconegudes sota cada un dels tres nivell de lluminositat és el mateix.

a) Càlcul de les quantitats de què depenen les variabilitats:

| $Y_1$ | $Y_2$ | $Y_3$ | $Y_1^2$ | $Y_2^2$ | $Y_3^2$ |
|---|---|---|---|---|---|
| 4 | 9 | 12 | 16 | 81 | 144 |
| 5 | 9 | 15 | 25 | 81 | 225 |
| | 11 | | | 121 | |
| 9 | 29 | 27 | 41 | 283 | 369 |

Quantitats:

$$\begin{aligned}
\sum_{j=1}^{k}\sum_{i=1}^{n_j} Y_{ij}^2 &= 41+283+369=693,\\
\frac{\left(\sum_{j=1}^{k}\sum_{i=1}^{n_j} Y_{ij}\right)^2}{n} &= \frac{(9+29+27)^2}{2+3+2}=\frac{4225}{7}=603.5714,\\
\sum_{j=1}^{k}\frac{\left(\sum_{i=1}^{n_j} Y_{ij}\right)^2}{n_j} &= \frac{9^2}{2}+\frac{29^2}{3}+\frac{27^2}{2}=685.3333.
\end{aligned}$$

b) Càlcul de les variabilitats:

$$\begin{aligned}
VT &= \sum_{j=1}^{k}\sum_{i=1}^{n_j} Y_{ij}^2-\frac{\left(\sum_{j=1}^{k}\sum_{i=1}^{n_j} Y_{ij}\right)^2}{n}=693-603.5714=89.4285,\\
V_{tra} &= \sum_{j=1}^{k}\sum_{i=1}^{n_j} Y_{ij}^2-\sum_{j=1}^{k}\frac{\left(\sum_{i=1}^{n_j} Y_{ij}\right)^2}{n_j}=693-685.3333=7.6666,\\
V_{ter} &= VT-V_{tra}=89.4285-7.6666=81.7619.
\end{aligned}$$

c) Taula per trobar l'estadístic $F$:

Recordem que F.V. vol dir Font de Variació, g. ll. vol dir graus de llibertat i $MQ$, mitjana quadràtica:

| F.V. | $V$ | g. ll. | $MQ=\frac{V}{\text{g. ll.}}$ | $F=\frac{MQ_{ter}}{MQ_{tra}}$ |
|---|---|---|---|---|
| Inter | $81.76$ | $k-1=3-1=2$ | $MQ_{ter}=\frac{81.76}{2}=40.80$ | $F=\frac{40.88}{1.916}=21.33$ |
| Intra | $7.66$ | $n-k=7-3=4$ | $MQ_{tra}=\frac{7.66}{4}=1.916$ | |
| Total | $89.42$ | $n-1=7-1=6$ | | |

La distribució de l'estadístic $F$ és aproximadament la distribució $F$ de Fisher-Snedecor amb $2$ i $4$ graus de llibertat.

La regió crítica és:

$$R.C.=\{F>F_{2,4,1-\alpha}\},$$

on $\alpha$ és l'error tipus I.

L'error tipus I màxim, per sota del qual acceptam que la mitjana del nombre de lletres reconegudes és el mateix sota cada un dels tres nivells de lluminositat, compleix:

$$0.005 \leq \alpha_{\mathsf{max}} = p\{F_{2,4} > 21.33\} \leq 0.01.$$

En vista del resultat anterior, rebutjam $H_0$ i concloem que els distints tipus de lluminositat modifiquen la percepció visual

A continuació, fent servir el mètode de Scheffé, vegem entre quins tractaments hi ha diferències.

Considerarem que hi ha diferències entre el tractament $i$ i el $j$ al nivell de significació $\alpha$ si:

$$\frac{\overline{Y}_i - \overline{Y}_j}{\sqrt{MQ_{tra}\left(\frac{1}{n_1} + \frac{1}{n_2}\right)}} \geq \sqrt{(k-1)F_{k-1,n-k,1-\alpha}}. \tag{7.1}$$

En el nostre cas, tenim que:

$$k = 3,\ n = 7,\ \overline{Y}_1 = 4.5,\ \overline{Y}_2 = 9.66,\ \overline{Y}_3 = 13.5 \text{ i } MQ_{tra} = 1.916.$$

El que farem és trobar, en cada cas, l'error tipus I màxim per sota del qual acceptarem que no hi ha diferències entre el tractament $i$ i el $j$.

Abans de començar fixau-vos que la condició (7.1) és equivalent a:

$$\frac{\left(\overline{Y}_i - \overline{Y}_j\right)^2}{(k-1)\cdot MQ_{tra}\left(\frac{1}{n_1} + \frac{1}{n_2}\right)} \geq F_{k-1,n-k,1-\alpha}.$$

Aquest darrera condició serà la que farem servir.

- Tractaments 1 i 2.

  Fent càlculs, acceptarem que hi ha diferències entre els tractaments 1 i 2 si:

  $$\frac{(\overline{Y}_1 - \overline{Y}_2)^2}{2\cdot MQ_{tra}\left(\frac{1}{2} + \frac{1}{3}\right)} = 8.3565 \geq F_{2,4,1-\alpha}.$$

  Per tant, l'error tipus I màxim per sota del qual acceptarem que no hi ha diferències entre els tractaments 1 i 2 compleix:

  $$0.01 \leq \alpha_{\mathsf{max},1,2} = p\{F_{2,4} > 8.35\} \leq 0.05.$$

  Concloem, doncs, que hi ha diferències entre els tractaments 1 i 2.

- Tractaments $1$ i $3$.

  Acceptarem que hi ha diferències entre els tractaments $1$ i $3$ si:

$$\frac{\left(\overline{Y}_1 - \overline{Y}_3\right)^2}{2 \cdot MQ_{tra}\left(\frac{1}{2}+\frac{1}{2}\right)} = 21.1304 \geq F_{2,4,1-\alpha}.$$

  Per tant, l'error tipus I màxim per sota del qual acceptarem que no hi ha diferències entre els tractaments $1$ i $3$ compleix:

$$0.005 \leq \alpha_{\mathsf{max},1,3} = p\left\{F_{2,4} > 21.13\right\} \leq 0.01.$$

  Concloem, doncs, que hi ha diferències entre els tractaments $1$ i $3$.

- Tractaments $2$ i $3$.

  Acceptarem que hi ha diferències entre els tractaments $2$ i $3$ si:

$$\frac{\left(\overline{Y}_2 - \overline{Y}_3\right)^2}{2 \cdot MQ_{tra}\left(\frac{1}{3}+\frac{1}{2}\right)} = 4.6 \geq F_{2,4,1-\alpha}.$$

  Per tant, l'error tipus I màxim per sota del qual acceptarem que no hi ha diferències entre els tractaments $2$ i $3$ compleix:

$$0.05 \leq \alpha_{\mathsf{max},2,3} = p\left\{F_{2,4} > 4.6\right\} \leq 0.1.$$

  Podem acceptar, tenint en compte que el valor de $\alpha_{\mathsf{max},2,3}$ és més gran que $0.05$, que no hi ha diferències entre els tractaments $2$ i $3$.

**7.3.-** Per estudiar les diferències entre 4 fertilitzants damunt la producció de patates, es va disposar de 5 finques, cada una de les quals es va dividir en 4 parcel·les de la mateixa grandària i tipus. Els fertilitzants varen ser assignats a l'atzar en les parcel·les de cada finca. El rendiment en tones va ser:

| | | Finca | | | | |
|---|---|---|---|---|---|---|
| | | 1 | 2 | 3 | 4 | 5 |
| Fertilitzant | 1 | 2.1 | 2.2 | 1.8 | 2.0 | 1.9 |
| | 2 | 2.2 | 2.6 | 2.7 | 2.5 | 2.8 |
| | 3 | 1.8 | 1.9 | 1.6 | 2.0 | 1.9 |
| | 4 | 2.1 | 2.0 | 2.2 | 2.4 | 2.1 |

Es desitja saber si existeixen diferències entre els fertilitzants i entre les finques.

**Resolució.** En aquest problema el nombre de nivells de variació per al factor **Fertilitzant** val $f = 4$, el nombre de nivells de variació per al factor **Finca** val $c = 5$ i la grandària de la mostra corresponent al nivell $i$ per al factor **Fertilitzant** i al nivell $j$ per al factor **Finca** val $n = 1$.

Com ja es pot veure, es tracta d'un contrast ANOVA de dos factors.

Per trobar els estadístics que ens donaran tota la informació per saber si hi ha diferències entre els fertilitzants i entre les finques, primer hem de trobar les variabilitats. I abans d'això, hem de trobar les quantitats de què depenen les variabilitats o variacions:

$$\begin{aligned}
\sum_{r=1}^{f}\sum_{s=1}^{c}\sum_{i=1}^{n} Y_{irs}^2 &= 93.52, \\
\frac{\left(\sum\limits_{r=1}^{f}\sum\limits_{s=1}^{c}\sum\limits_{i=1}^{n} Y_{irs}\right)^2}{nfc} &= \frac{42.8^2}{20} = 91.592, \\
\frac{\sum\limits_{r=1}^{f}\sum\limits_{s=1}^{c}\left(\sum\limits_{i=1}^{n} Y_{irs}\right)^2}{n} &= 93.52, \\
\frac{\sum\limits_{r=1}^{f}\left(\sum\limits_{s=1}^{c}\sum\limits_{i=1}^{n} Y_{irs}\right)^2}{nc} &= \frac{10^2}{5} + \frac{12.8^2}{5} + \frac{9.2^2}{5} + \frac{10.8^2}{5} = 93.024, \\
\frac{\sum\limits_{s=1}^{c}\left(\sum\limits_{r=1}^{f}\sum\limits_{i=1}^{n} Y_{irs}\right)^2}{nf} &= \frac{8.2^2}{4} + \frac{8.7^2}{4} + \frac{8.3^2}{4} + \frac{8.9^2}{4} + \frac{8.7^2}{4} = 91.68.
\end{aligned}$$

A continuació, calculem les variacions. Direm $VT$ a la variació total, $V_{int}$ a la variació deguda a la interacció entre els dos factors, $V_f$ a la variació deguda a la diferència entre files (en el nostre cas, Fertilitzants), $V_c$ a la variació deguda a la diferència entre les columnes (en el nostre cas, Finques) i $V_e$ a la variació no explicada per diferències entre files, entre columnes ni entre interacció.

$$\begin{aligned}
VT &= \sum_{r=1}^{f}\sum_{s=1}^{c}\sum_{i=1}^{n} Y_{irs}^2 - \frac{\left(\sum\limits_{r=1}^{f}\sum\limits_{s=1}^{c}\sum\limits_{i=1}^{n} Y_{irs}\right)^2}{nfc} = 93.52 - 91.592 = 1.928, \\
V_e &= \sum_{r=1}^{f}\sum_{s=1}^{c}\sum_{i=1}^{n} Y_{irs}^2 - \frac{\sum\limits_{r=1}^{f}\sum\limits_{s=1}^{c}\left(\sum\limits_{i=1}^{n} Y_{irs}\right)^2}{n} = 93.52 - 93.52 = 0,
\end{aligned}$$

$$
\begin{aligned}
V_f &= \frac{\sum\limits_{r=1}^{f}\left(\sum\limits_{s=1}^{c}\sum\limits_{i=1}^{n} Y_{irs}\right)^2}{nc} - \frac{\left(\sum\limits_{r=1}^{f}\sum\limits_{s=1}^{c}\sum\limits_{i=1}^{n} Y_{irs}\right)^2}{nfc} = 93.024 - 91.592 = 1.432,\\
V_c &= \frac{\sum\limits_{s=1}^{c}\left(\sum\limits_{r=1}^{f}\sum\limits_{i=1}^{n} Y_{irs}\right)^2}{nf} - \frac{\left(\sum\limits_{r=1}^{f}\sum\limits_{s=1}^{c}\sum\limits_{i=1}^{n} Y_{irs}\right)^2}{nfc} = 91.68 - 91.592 = 0.088,\\
V_{int} &= VT - V_e - V_f - V_c = 1.928 - 1.432 - 0.088 = 0.408.
\end{aligned}
$$

A continuació, obtenim la taula per trobar els estadístics $F$ per estudiar la variació entre files, entre columnes i interacció fila-columna.

Recordem que FV significa Font de Variació, g.ll., graus de llibertat i $MQ$, mitjana quadràtica. Introduïm el paràmetre $N$: nombre total d'elements. En el nostre cas $N = nfc = 20$.

| FV | $V$ | g. ll. | $MQ = \frac{V}{\text{g. ll.}}$ | $F = \frac{MQ}{MQ_e}$ |
|---|---|---|---|---|
| Fertilitzant | $1.43$ | $f-1=4-1=3$ | $0.47$ | $F_f = \frac{0.47}{0} = ??$ |
| Finca | $0.08$ | $c-1=5-1=4$ | $0.02$ | $F_c = \frac{0.02}{0} = ??$ |
| Interacció | $0.40$ | $(f-1)(c-1)=12$ | $0.03$ | $F_{int} = \frac{0.03}{0} = ??$ |
| Error | $0.00$ | $(n-1)fc=0$ | $0.00$ | |
| Total | $1.92$ | $N-1=19$ | | |

Com podem observar, no podem trobar els estadístics $F_f$, $F_c$ i $F_{int}$ per estudiar diferències entre files, columnes i interacció fila-columna respectivament, ja que la mitjana quadràtica corresponent a l'error val zero. Això ens passarà sempre que $n = 1$. El motiu és que no tenim prou informació per estudiar la interacció entre els dos factors, ja que per estudiar la interacció la grandària de la mostra corresponent al nivell $i - j$ ha de valer com a mínim $2$.

Així, en aquest cas (i en tots el casos on $n = 1$), hem de descompondre la variabilitat total en només $3$ factors: el degut a la variació entre files, el degut a la variació entre columnes i el degut a la variació no explicada, anomenat error:

$$VT = V_f + V_c + V_e.$$

A continuació, construïm novament la taula per trobar els estadístics per estudiar la variació entre els fertilitzants i entre les finques:

| FV | $V$ | g. ll. | $MQ = \frac{V}{\text{g. ll.}}$ | $F = \frac{MQ}{MQ_e}$ |
|---|---|---|---|---|
| Fertilitzant | $1.43$ | $f - 1 = 3$ | $0.47$ | $F_f = \frac{0.47}{0.03} \approx 14.04$ |
| Finca | $0.08$ | $c - 1 = 4$ | $0.02$ | $F_c = \frac{0.02}{0.03} \approx 0.65$ |
| Error | $0.40$ | $(f-1)(c-1) = 12$ | $0.03$ | |
| Total | $1.92$ | $N - 1 = 19$ | | |

A continuació, vegem si hi ha diferències entre fertilitzants i entre finques:

a) Diferències entre fertilitzants.

En aquest cas, tenim que l'estadístic $F_f$ es distribueix aproximadament segons la distribució de Fisher-Snedecor amb graus de llibertat $3$ i $12$.

La regió crítica val:

$$R.C. = \{F_f > F_{3,12,1-\alpha}\},$$

on $\alpha$ és l'error tipus I.

Per tant, l'error tipus I màxim per sota del qual acceptarem que no hi ha diferències entre fertilitzants compleix:

$$\alpha_{\text{max}} = p\{F_{3,12} > 14.03\} \leq 0.005.$$

Concloem, doncs, que hi ha diferències entre fertilitzants.

b) Diferències entre finques.

En aquest cas, tenim que l'estadístic $F_c$ es distribueix aproximadament segons la distribució de Fisher-Snedecor amb graus de llibertat $4$ i $12$.

La regió crítica val:

$$R.C. = \{F_c > F_{4,12,1-\alpha}\},$$

on $\alpha$ és l'error tipus I.

Per tant, l'error tipus I màxim per sota del qual acceptarem que no hi ha diferències entre finques compleix:

$$\begin{aligned} 0.6 \quad \leq & \quad \alpha_{\text{max}} = p\{F_{4,12} > 0.64\} = 1 - p\left\{F_{12,4} > \frac{1}{0.64}\right\} \\ = & \quad 1 - p\{F_{12,4} > 1.54\} \leq 0.7. \end{aligned}$$

Concloem, doncs, que no hi ha diferències entre finques.

**7.4.-** S'han estudiat les taxes de consum d'oxigen en dues espècies de mol·luscs (*Acmaea Scabra* i *Acmaea Digitalis*) en 3 concentracions d'aigua de mar.
La variable mesurada és $\mu l O_2/($mg. de cos sec. minut) a $22^0$ C.
Els resultats obtenguts són:

| | | CONCENTRACIÓ D'AIGUA DE MAR | | |
|---|---|---|---|---|
| | | 100% | 75% | 50% |
| ESPÈCIE | *A. Scabra* | 7.16 | 5.20 | 11.11 |
| | | 6.78 | 5.20 | 9.74 |
| | | 13.60 | 7.18 | 18.8 |
| | | 8.93 | 6.37 | 9.74 |
| | | 8.26 | 13.20 | 10.50 |
| | | 14.00 | 8.39 | 14.60 |
| | | 16.10 | 10.40 | 11.10 |
| | | 9.66 | 7.18 | 11.80 |
| | *A. Digitalis* | 6.14 | 4.47 | 9.63 |
| | | 3.86 | 9.90 | 6.38 |
| | | 10.40 | 5.75 | 13.40 |
| | | 5.49 | 11.8 | 14.50 |
| | | 6.14 | 4.95 | 14.50 |
| | | 10.00 | 6.49 | 10.20 |
| | | 11.60 | 5.44 | 17.70 |
| | | 5.80 | 9.90 | 12.30 |

Es desitja saber si hi ha diferències entre les concentracions d'aigua de mar i entre les diferents espècies i si hi ha interacció entre la concentració d'aigua de mar i l'espècie.

**Resolució.** Per resoldre el problema, hem de realitzar un contrast ANOVA de dos factors amb interacció.

El nombre de nivells del factor fila o ESPÈCIE és $f = 2$, el nombre de nivells del factor columna o CONCENTRACIÓ D'AIGUA DE MAR és $c = 3$ i la grandària de la mostra corresponent al nivell fila $i$ i al nivell columna $j$ és $n = 8$. La grandària total de la mostra serà doncs: $N = nfc = 8 \cdot 2 \cdot 3 = 48$.

a) Càlcul de les quantitats de què depenen les variabilitats.

$$\sum_{r=1}^{f}\sum_{s=1}^{c}\sum_{i=1}^{n} Y_{irs}^2 \quad = \quad 5065.153,$$

$$
\begin{aligned}
\frac{\left(\sum\limits_{r=1}^{f}\sum\limits_{s=1}^{c}\sum\limits_{i=1}^{n}Y_{irs}\right)^2}{nfc} &= \frac{461.74^2}{48} = 4441.7464,\\
\frac{\sum\limits_{r=1}^{f}\sum\limits_{s=1}^{c}\left(\sum\limits_{i=1}^{n}Y_{irs}\right)^2}{n} &= \frac{1}{8}(84.49^2+59.43^2+63.12^2+58.7^2+97.39^2+98.61^2)\\
&= 4663.6317,\\
\frac{\sum\limits_{r=1}^{f}\left(\sum\limits_{s=1}^{c}\sum\limits_{i=1}^{n}Y_{irs}\right)^2}{nc} &= \frac{245^2}{8\cdot 3}+\frac{216.74^2}{8\cdot 3} = 4458.3844,\\
\frac{\sum\limits_{s=1}^{c}\left(\sum\limits_{r=1}^{f}\sum\limits_{i=1}^{n}Y_{irs}\right)^2}{nf} &= \frac{143.92^2}{8\cdot 2}+\frac{121.82^2}{8\cdot 2}+\frac{196^2}{8\cdot 2} = 4623.0674.
\end{aligned}
$$

b) Càlcul de les variabilitats, on recordem que:

- $VT$ vol dir variació total.
- $V_f$ vol dir variació deguda a la diferència entre files (ESPÈCIE).
- $V_c$ vol dir variació deguda a la diferència entre columnes (CONCENTRACIÓ D'AIGUA DE MAR).
- $V_{int}$ vol dir variació deguda a la interacció fila-columna.
- $V_e$ vol dir variació no explicada.

$$
\begin{aligned}
VT &= \sum_{r=1}^{f}\sum_{s=1}^{c}\sum_{i=1}^{n}Y_{irs}^2 - \frac{\left(\sum\limits_{r=1}^{f}\sum\limits_{s=1}^{c}\sum\limits_{i=1}^{n}Y_{irs}\right)^2}{nfc} = 5063.153 - 4441.74\\
&= 623.4065,\\
V_e &= \sum_{r=1}^{f}\sum_{s=1}^{c}\sum_{i=1}^{n}Y_{irs}^2 - \frac{\sum\limits_{r=1}^{f}\sum\limits_{s=1}^{c}\left(\sum\limits_{i=1}^{n}Y_{irs}\right)^2}{n} = 5065.153 - 4663.6317\\
&= 401.5213,\\
V_f &= \frac{\sum\limits_{r=1}^{f}\left(\sum\limits_{s=1}^{c}\sum\limits_{i=1}^{n}Y_{irs}\right)^2}{nc} - \frac{\left(\sum\limits_{r=1}^{f}\sum\limits_{s=1}^{c}\sum\limits_{i=1}^{n}Y_{irs}\right)^2}{nfc} = 4458.3844 - 4441.74\\
&= 16.6380,
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
V_c &= \frac{\sum\limits_{s=1}^{c}\left(\sum\limits_{r=1}^{f}\sum\limits_{i=1}^{n} Y_{irs}\right)^2}{nf} - \frac{\left(\sum\limits_{r=1}^{f}\sum\limits_{s=1}^{c}\sum\limits_{i=1}^{n} Y_{irs}\right)^2}{nfc} = 4623.0674 - 4441.74 \\
&= 181.3210, \\
V_{int} &= VT - V_e - V_f - V_c = 623.4065 - 401.5213 - 16.6380 - 181.3210 \\
&= 23.9262.
\end{aligned}
$$

c) Taula per trobar els estadístics.

| FV | $V$ | g. ll. | $MQ = \frac{V}{\text{g. ll.}}$ | $F = \frac{MQ}{MQ_e}$ |
|---|---|---|---|---|
| ESPÈCIE | $16.63$ | $f-1=2-1=1$ | $16.63$ | $F_f = \frac{16.63}{9.56} = 1.74$ |
| CONCENT. | $181.32$ | $c-1=3-1=2$ | $90.66$ | $F_c = \frac{90.66}{9.56} = 9.48$ |
| Interacció | $23.92$ | $(f-1)(c-1)=2$ | $11.96$ | $F_{int} = \frac{11.96}{9.56} = 1.25$ |
| Error | $401.52$ | $(n-1)fc = 42$ | $9.56$ | |
| Total | $623.40$ | $N-1=47$ | | |

Finalment, analitzem si hi ha hagut diferències entre files, entre columnes i interacció fila-columna.

- Estudi de la variació entre files. (factor ESPÈCIE)

  En aquest cas, l'estadístic $F_f$ s'aproxima a la distribució $F$ de Fisher-Snedecor amb $1$ i $42$ graus de llibertat.

  La regió crítica val:
  $$R.C. = \{F_f > F_{1,42,1-\alpha}\},$$
  on $\alpha$ és l'error tipus I.

  L'error tipus I màxim per sota del qual acceptam que no hi ha diferències entre files compleix:
  $$0.1 \leq \alpha_{\mathsf{max}} = p\{F_{1,42} > 1.74\} \leq 0.2.$$

  Acceptam, doncs, que no hi ha diferències degudes a l'espècie.

- Estudi de la variació entre columnes. (factor CONCENTRACIÓ D'AIGUA DE MAR)

  En aquest cas, l'estadístic $F_c$ s'aproxima a la distribució $F$ de Fisher-Snedecor amb $2$ i $42$ graus de llibertat.

La regió crítica val:

$$R.C. = \{F_c > F_{2,42,1-\alpha}\},$$

on $\alpha$ és l'error tipus I.

L'error tipus I màxim per sota del qual acceptam que no hi ha diferències entre columnes compleix:

$$\alpha_{\mathsf{max}} = p\{F_{2,42} > 9.48\} \leq 0.005.$$

Concloem que hi ha diferències entre les distintes concentracions d'aigua de mar.

- Estudi de la interacció fila columna. (ESPÈCIE-CONCENTRACIÓ D'AIGUA DE MAR)

  En aquest cas, l'estadístic $F_{int}$ s'aproxima a la distribució $F$ de Fisher-Snedecor amb $2$ i $42$ graus de llibertat.

  La regió crítica val:

  $$R.C. = \{F_{int} > F_{2,42,1-\alpha}\},$$

  on $\alpha$ és l'error tipus I.

  L'error tipus I màxim per sota del qual acceptam que no hi ha interacció compleix:

  $$0.2 \leq \alpha_{\mathsf{max}} = p\{F_{2,42} > 1.25\} \leq 0.3.$$

  Concloem, doncs, que no hi ha interacció.

Com que a les taules no surt la distribució $F_{1,42}$, hem agafat en el seu lloc $F_{1,40}$ ja que l'error que hem comès és despreciable.

## 7.3 Problemes proposats

**7.1.-** Dotze persones són distribuïdes en 4 grups de 3 persones cada un. A cada grup, li és assignat aleatòriament un temps distint d'entrenament abans de realitzar una tasca. Els resultats en l'esmentada tasca, amb el corresponent temps d'entrenament, es donen a la taula següent:

| 0.5 hores | 1 hora | 1.5 hores | 2 hores |
|---|---|---|---|
| 1 | 4 | 3 | 8 |
| 3 | 6 | 5 | 10 |
| 5 | 2 | 7 | 6 |

Vegeu si podem rebutjar la hipòtesi nul·la $H_0 : \mu_1 = \mu_2 = \mu_3 = \mu_4$.

**7.2.-** Es varen registrar les freqüències dels dies del mes que va ploure a diferents hores, durant els mesos de gener, març, maig i juliol. Les dades obtengudes, durant un període de 10 anys, varen ser:

| Hora | gener | febrer | març | juliol | Total |
|---|---|---|---|---|---|
| 9 | 22 | 25 | 24 | 11 | 82 |
| 10 | 21 | 19 | 18 | 16 | 74 |
| 11 | 17 | 23 | 26 | 17 | 83 |
| 12 | 20 | 31 | 25 | 24 | 100 |
| 13 | 16 | 15 | 23 | 24 | 78 |
| 14 | 21 | 35 | 23 | 20 | 99 |
| Total | 117 | 148 | 139 | 112 | 536 |

Estudiau la variabilitat entre mesos i entre hores.

**7.3.-** Es realitzà un estudi per determinar el nivell d'aigua i el tipus de planta sobre la llargada global del tronc de les plantes de pèsols. Es varen utilitzar 3 nivells d'aigua i 2 tipus de plantes. Es disposa per a l'estudi de 18 plantes sense fulles. Es divideixen aleatòriament aquestes plantes en 3 subgrups i després se'ls assigna els nivells d'aigua aleatòriament. Se segueix un procediment semblant amb 18 plantes convencionals. Es varen obtenir els resultats següents (la llargada del tronc es dóna en centímetres):

| | | FACTOR AIGUA | | |
|---|---|---|---|---|
| | | baix | mitjà | alt |
| FACTOR PLANTA | Sense Fulles | 69.0 | 96.1 | 121.0 |
| | | 71.3 | 102.3 | 122.9 |
| | | 73.2 | 107.5 | 123.1 |
| | | 75.1 | 103.6 | 125.7 |
| | | 74.4 | 100.7 | 125.2 |
| | | 75.0 | 101.8 | 120.1 |
| | Amb Fulles | 71.1 | 81.0 | 101.1 |
| | | 69.2 | 85.8 | 103.2 |
| | | 70.4 | 86.0 | 106.1 |
| | | 73.2 | 87.5 | 109.7 |
| | | 71.2 | 88.1 | 109.0 |
| | | 70.9 | 87.6 | 106.9 |

Es desitja saber si hi ha diferècies entre els nivells d'aigua i entre els diferents tipus de planta. També es vol saber si hi ha interacció entre els nivells d'aigua i els tipus de plantes.

**7.4.-** Les variables aleatòries $X_i$ segueixen la distribució $N(m_i, \sigma^2)$, $i = 1, 2, 3, 4$. Considerem les següents mostres de grandàries $n_i = 7$ de les esmentades variables aleatòries:

| | | | | | | | |
|---|---|---|---|---|---|---|---|
| $X_1$ | 20 | 26 | 26 | 24 | 23 | 26 | 21 |
| $X_2$ | 24 | 22 | 20 | 21 | 21 | 22 | 20 |
| $X_3$ | 16 | 18 | 20 | 21 | 24 | 15 | 17 |
| $X_4$ | 19 | 15 | 13 | 16 | 12 | 11 | 14 |

a) Comprovau si les variàncies són iguals.

b) Contrastau la igualtat de mitjanes.

Final. Juny 91.

**7.5.-** Vegeu problema 5.7 (problemes proposats). Suposant normalitat en cada grup i igualtat de variàncies, vegeu si podem acceptar que tots els grups tenen la mateixa nota mitjana.
Final. Juny 94.

# Capítol 8

# Teoria de la regressió

## 8.1 Resum teòric

A la pràctica, sovint ens trobam amb problemes que involucren més d'una variable, que sabem que estan relacionades. També pot ocórrer que una de les variables sigui fàcil d'observar, o que coneguem la seva distribució, mentre que l'altra (o les altres) no. Aleshores serà interessant conèixer la relació que tenen, perquè així les tendrem totes especificades.

En la majoria d'aplicacions tenim una sola variable independent o **resposta** $Y$, no controlada en l'experiment. Aquesta resposta depèn d'una o més variables independents o **variables de regressió**, $x^1, \ldots, x^k$, les quals es mesuren amb un error despreciable i normalment són controlades en l'experiment. Així, les variables independents no són aleatòries.

La relació fixa per a un conjunt de dades experimentals es caracteritza per l'equació de predicció, anomenada **equació de regressió**. Veurem en aquest tema la **regressió lineal simple**, amb una sola variable de regressió.

### 8.1.1 Definicions bàsiques

En aquesta situació tendrem una mostra aleatòria de grandària $n$ de la variable $Y$ amb els corresponents valors associats de $x$, $(x_1, Y_1), \ldots, (x_n, Y_n)$. Representem per $Y|x$ la variable aleatòria $Y$ corresponent al valor fix $x$.

El terme **regressió lineal** implica que la mitjana d'aquesta variable, $\mu_{X|x_i}$, està linealment relacionada amb $x_i$ a través de l'equació:

$$\mu_{X|x_i} = \alpha + \beta x_i,$$

on els **coeficients de regressió** $\alpha$ i $\beta$ són paràmetres que s'han d'estimar a partir de les dades de la mostra.

Si ara imposam que totes les mitjanes $\mu_{X|x_i}$ caiguin sobre una recta, aleshores cada variable $Y|x_i$ es pot escriure mitjançant el **model de regressió lineal simple**:

$$Y|x_i = \mu_{Y|x_i} + E_i = \alpha + \beta x_i + E_i,$$

on $E_i$ és un error aleatori, l'**error del model**, que ha de tenir una mitjana 0.

Cada observació $(x_i, y_i)$ de la mostra satisfà l'equació: $y_i = \alpha + \beta x_i + \varepsilon_i$, on $\varepsilon_i$ és el valor que pren $E_i$ quan $Y|x_i$ pren el valor $y_i$.

Si ara $a$ i $b$ representen les estimacions de $\alpha$ i $\beta$, aleshores podem estimar $\mu_{Y|x_i}$ per $\hat{y}$ i obtenim la **recta de regressió ajustada o estimada**:

$$\hat{y} = a + bx.$$

En aquest cas tendrem:

$$y_i = a + bx_i + e_i,$$

on $e_i = y_i - \hat{y}_i$ s'anomena **residu** i descriu l'error en l'ajust del model en el punt $i$ de les dades.

### 8.1.2 Mètode dels mínims quadrats

El **mètode dels mínims quadrats** és un procediment per determinar els coeficients $a$ i $b$ imposant que la suma dels quadrats dels residus sigui mínima. Aquesta suma s'anomena $SSE$. Tenim

$$SSE = \sum_{i=1}^{n} e_i^2 = \sum_{i=1}^{n} (y_i - \hat{y}_i)^2 = \sum_{i=1}^{n} (y_i - a - bx_i)^2.$$

Si volem que això sigui mínim, igualam les derivades parcials de $SSE$ respecte de $a$ i de $b$ a 0 i resolem el sistema:

$$\left\{ \begin{array}{l} \frac{\partial SSE}{\partial a} = -2 \sum\limits_{i=1}^{n} (y_i - a - bx_i) = 0, \\ \\ \frac{\partial SSE}{\partial b} = -2 \sum\limits_{i=1}^{n} (y_i - a - bx_i)x_i = 0. \end{array} \right.$$

Arreglant una mica aquestes equacions, obtenim les anomenades **equacions normals**:

$$\begin{cases} na + b \sum\limits_{i=1}^{n} x_i = \sum\limits_{i=1}^{n} y_i, \\ \\ a \sum\limits_{i=1}^{n} x_i + b \sum\limits_{i=1}^{n} x_i^2 = \sum\limits_{i=1}^{n} x_i y_i, \end{cases}$$

Si ara resolem el sistema, obtenim

$$\begin{cases} b = \dfrac{n \sum\limits_{i=1}^{n} x_i y_i - \sum\limits_{i=1}^{n} x_i \cdot \sum\limits_{i=1}^{n} y_i}{n \sum\limits_{i=1}^{n} x_i^2 - \left( \sum\limits_{i=1}^{n} x_i \right)^2}, \\ \\ a = \dfrac{\sum\limits_{i=1}^{n} y_i - b \sum\limits_{i=1}^{n} x_i}{n} = \bar{y} - b\bar{x}. \end{cases}$$

### 8.1.3 Propietats dels estimadors dels mínims quadrats

Posem ara

$$Y_i = Y|x_i = \alpha + \beta x_i + E_i.$$

Suposem ara que les $E_i$ tenen la mateixa variància $\sigma^2$ i que són independents, i recordem que $\mathrm{E}(E_i) = 0$. Amb aquestes hipòtesis, podem trobar les mitjanes i les variàncies dels estimadors de $\alpha$ i $\beta$.

Observem primer que els valors de $a$ i $b$, donada una mostra de $n$ observacions, són només estimacions dels paràmetres $\alpha$ i $\beta$, però si repetim l'experiment moltes vegades, cada vegada que utilitzem els mateixos valors de $x$ és molt probable que les estimacions resultants de $\alpha$ i $\beta$ difereixin d'un experiment a l'altre. Aquestes estimacions diferents es poden considerar com els valors assumits per dues variables aleatòries $A$ i $B$.

Tenim

$$B = \frac{n \sum\limits_{i=1}^{n} x_i Y_i - \sum\limits_{i=1}^{n} x_i \cdot \sum\limits_{i=1}^{n} Y_i}{n \sum\limits_{i=1}^{n} x_i^2 - \left( \sum\limits_{i=1}^{n} x_i \right)^2} = \frac{\sum\limits_{i=1}^{n} (x_i - \bar{x}) Y_i}{\sum\limits_{i=1}^{n} (x_i - \bar{x})^2},$$

d'on

$$\mathrm{E}B = \frac{\sum\limits_{i=1}^{n} (x_i - \bar{x}) \mathrm{E}Y_i}{\sum\limits_{i=1}^{n} (x_i - \bar{x})^2} = \frac{\sum\limits_{i=1}^{n} (x_i - \bar{x})(\alpha + \beta x_i)}{\sum\limits_{i=1}^{n} (x_i - \bar{x})^2} = \beta.$$

També

$$\mathrm{Var}B = \frac{\sum_{i=1}^{n}(x_i-\bar{x})^2\mathrm{Var}Y_i}{\left[\sum_{i=1}^{n}(x_i-\bar{x})^2\right]^2} = \frac{\sigma^2}{\sum_{i=1}^{n}(x_i-\bar{x})^2}.$$

Anàlogament tenim

$$A = \frac{\sum_{i=1}^{n}Y_i - B\cdot\sum_{i=1}^{n}x_i}{n},$$

d'on

$$\mathrm{E}A = \alpha, \quad \mathrm{Var}A = \frac{\sum_{i=1}^{n}x_i^2}{n\sum_{i=1}^{n}(x_i-\bar{x})^2}\cdot\sigma^2.$$

Es veu, per tant, que els estimadors dels mínims quadrats per a $\alpha$ i $\beta$ són sense biaix.

Finalment resulta que

$$\mathrm{Cov}(A,B) = \frac{-\sigma^2\bar{x}}{\sum_{i=1}^{n}(x_i-\bar{x})^2}.$$

Obtenguem ara una estimació per al paràmetre $\sigma^2$, la variància de l'error del model.

Posem:

$$S_{xx} = \sum_{i=1}^{n}(x_i-\bar{x})^2,\ S_{yy} = \sum_{i=1}^{n}(Y_i-\bar{Y})^2,\quad S_{xy} = \sum_{i=1}^{n}(x_i-\bar{x})\cdot(Y_i-\bar{Y}).$$

Aleshores resulta

$$SSE = S_{yy} - BS_{xy}.$$

**Proposició 8.1** *Un estimador sense biaix de $\sigma^2$ és*

$$s^2 = \frac{SSE}{n-2} = \frac{S_{yy}-BS_{xy}}{n-2}.$$

### 8.1.4 Inferències sobre els coeficients de regressió

Suposem a partir d'ara que les variables aleatòries $Y_i$ són normals $N(\alpha+\beta x_i,\sigma^2)$. Per tant, les $E_i$ són també normals amb distribució $N(0,\sigma^2)$, i $\bar{Y}$ és $N(\alpha+\beta\bar{x},\frac{\sigma^2}{n})$.

Obtenguem resultats sobre els coeficients de regressió. Com que $A$ i $B$ són funcions lineals de $Y_i$, també seran normals: $A$ serà $N\left(\alpha, \frac{\sigma^2 \sum_{i=1}^{n} x_i^2}{nS_{xx}}\right)$ i $B$ és $N\left(\beta, \frac{\sigma^2}{S_{xx}}\right)$.

Donam a continuació un interval de confiança per a $\beta$:

$$L_1 = B - t_{1-\gamma/2} \cdot \frac{S}{\sqrt{S_{xx}}}, \quad L_2 = B + t_{1-\gamma/2} \cdot \frac{S}{\sqrt{S_{xx}}},$$

on $t_{1-\gamma/2}$ és el percentil $(1-\gamma/2)100\%$ de $t_{n-2}$.

El corresponent interval de confiança per a $\alpha$ és:

$$L_1 = A - t_{1-\gamma/2} \cdot S \cdot \sqrt{\frac{\sum_{i=1}^{n} x_i^2}{nS_{xx}}}, \quad L_2 = A + t_{1-\gamma/2} \cdot S \cdot \sqrt{\frac{\sum_{i=1}^{n} x_i^2}{nS_{xx}}},$$

on $t_{1-\gamma/2}$ és el percentil $(1-\gamma/2)100\%$ de $t_{n-2}$.

Donarem a continuació les regions crítiques per als següents contrasts d'hipòtesi sobre $\beta$ i sobre $\alpha$.

1. $H_0 : \beta = \beta_0$.
   $H_1 : \beta \neq \beta_0$.
   La regió crítica és:
   $$\left\{B < \beta_0 - t_{1-\gamma/2}\frac{S}{\sqrt{S_{xx}}}\right\} \cup \left\{B > \beta_0 + t_{1-\gamma/2}\frac{S}{\sqrt{S_{xx}}}\right\}.$$

2. $H_0 : \beta = \beta_0$.
   $H_1 : \beta < \beta_0$.
   La regió crítica és:
   $$\left\{B < \beta_0 - t_{1-\gamma}\frac{S}{\sqrt{S_{xx}}}\right\}.$$

3. $H_0 : \beta = \beta_0$.
   $H_1 : \beta > \beta_0$.
   La regió crítica és:
   $$\left\{B > \beta_0 + t_{1-\gamma}\frac{S}{\sqrt{S_{xx}}}\right\}.$$

4. $H_0 : \alpha = \alpha_0$.

$H_1 : \alpha \neq \alpha_0$.

La regió crítica és:

$$\left\{ A < \alpha_0 - t_{1-\gamma/2} \cdot S \cdot \sqrt{\frac{\sum_{i=1}^{n} x_i^2}{nS_{xx}}} \right\} \cup \left\{ A > \alpha_0 + t_{1-\gamma/2} \cdot S \cdot \sqrt{\frac{\sum_{i=1}^{n} x_i^2}{nS_{xx}}} \right\}.$$

5. $H_0 : \alpha = \alpha_0$.
   $H_1 : \alpha < \alpha_0$.
   La regió crítica és:
$$\left\{ A < \alpha_0 - t_{1-\gamma} \cdot S \cdot \sqrt{\frac{\sum_{i=1}^{n} x_i^2}{nS_{xx}}} \right\}.$$

6. $H_0 : \alpha = \alpha_0$.
   $H_1 : \alpha > \alpha_0$.
   La regió crítica és:
$$\left\{ A > \alpha_0 + t_{1-\gamma} \cdot S \cdot \sqrt{\frac{\sum_{i=1}^{n} x_i^2}{nS_{xx}}} \right\}.$$

### 8.1.5 Predicció

**Problema 1**: Obtenir qualque informació sobre el valor $\mu_{Y|x_0}$, on $x_0$ no és necessàriament cap dels $x_i, i = 1, \ldots, n$.

Obtenguem un interval de confiança per a $\mu_{Y|x_0}$. Farem servir l'estimador $\hat{Y}_0 = A + Bx_0$.

La mitjana i la variància de $\hat{Y}_0$ valen:

$$\mathrm{E}\hat{Y}_0 = \alpha + \beta x_0, \qquad \hat{Y}_0 = \frac{\sum x_i^2}{nS_{xx}}\sigma^2 + \frac{x_0^2\sigma^2}{S_{xx}} = \sigma^2 \left[ \frac{1}{n} + \frac{(x_0 - \bar{x})^2}{S_{xx}} \right].$$

Resulta que, amb la hipòtesi de normalitat,

$$T = \frac{\hat{Y}_0 - \mu_{Y|x_0}}{S\sqrt{\frac{1}{n} + \frac{(x_0-\bar{x})^2}{S_{xx}}}}$$

segueix una distribució $t_{n-2}$. Per tant un interval de confiança per al paràmetre $\mu_{Y|x_0}$ al $100(1-\alpha)\%$ de confiança és:

$$L_1 = \hat{Y}_0 - t_{1-\alpha/2} S \sqrt{\frac{1}{n} + \frac{(x_0-\bar{x})^2}{S_{xx}}}, \quad L_2 = \hat{Y}_0 + t_{1-\alpha/2} S \sqrt{\frac{1}{n} + \frac{(x_0-\bar{x})^2}{S_{xx}}}.$$

**Problema 2**: Donar un interval de predicció per a un sol valor $y_0$ de la variable $Y_0$.

Tenim $\hat{Y}_0 - Y_0 = A + Bx_0 - Y_0$, on $\alpha + \beta x_0 = y_0$. L'esperança i la variància de $\hat{Y}_0 - Y_0$ valen:

$$\mathrm{E}(\hat{Y}_0 - Y_0) = 0, \quad \mathrm{Var}(\hat{Y}_0 - Y_0) = \sigma^2 \left(1 + \frac{1}{n} + \frac{(x_0-\bar{x})^2}{S_{xx}}\right),$$

ja que

$$\begin{aligned}
\mathrm{Var}(\hat{Y}_0) &= \mathrm{Var}A + x_0^2 \mathrm{Var}(x_0) + 2x_0 \mathrm{Cov}(A,B) \\
&= \sigma^2 \left[ \frac{\sum\limits_{i=1}^{n} x_i^2}{nS_{xx}} + \frac{x_0^2}{S_{xx}} - \frac{2x_0\bar{x}}{S_{xx}} \right] = \frac{\sigma^2}{nS_{xx}} \left[ \sum_{i=1}^{n} x_i^2 + nx_0^2 - 2nx_0\bar{x} \right] \\
&= \frac{\sigma^2}{nS_{xx}} \left[ S_{xx} + n\bar{x}^2 + nx_0^2 - 2nx_0\bar{x} \right] = \sigma^2 \left[ \frac{1}{n} + \frac{(x_0-\bar{x})^2}{S_{xx}} \right]
\end{aligned}$$

Per tant

$$T = \frac{\hat{Y}_0 - Y_0}{S\sqrt{\frac{1}{n} + \frac{(x_0-\bar{x})^2}{S_{xx}} + 1}}$$

segueix una distribució $t_{n-2}$.

Un interval de confiança per a $Y_0$ al nivell de confiança del $100(1-\alpha)\%$ és

$$\begin{aligned}
L_1 &= \hat{Y}_0 - t_{1-\alpha/2} S \sqrt{\frac{1}{n} + \frac{(x_0-\bar{x})^2}{S_{xx}} + 1}, \\
L_2 &= \hat{Y}_0 + t_{1-\alpha/2} S \sqrt{\frac{1}{n} + \frac{(x_0-\bar{x})^2}{S_{xx}} + 1}.
\end{aligned}$$

### 8.1.6 Estudi de la regressió des del punt de vista de l'anàlisi de la variància

Sigui $(x_1, Y_1), \ldots, (x_n, Y_n)$ el conjunt de dades on $x_i$ és la variable independent i les $Y_i$ són les variables aleatòries per a cada $x_i$.

Sigui $\hat{Y}_i = A + Bx_i$ la variable aleatòria donada per la recta de regressió i $\bar{Y} = A + B\bar{x}$,

Podem escriure

$$S_{yy} = \sum_{i=1}^{n}(Y_i - \bar{Y})^2 = \sum_{i=1}^{n}(\hat{Y}_i - \bar{Y})^2 + \sum_{i=1}^{n}(Y_i - \hat{Y}_i)^2.$$

Posem:

$SST = S_{yy} = \sum\limits_{i=1}^{n}(Y_i - \bar{Y})^2$ (suma total de quadrats),

$SSR = \sum\limits_{i=1}^{n}(\hat{Y}_i - \bar{Y})^2$ (suma de quadrats de regressió explicada pel model),

$SSE = \sum\limits_{i=1}^{n}(Y_i - \hat{Y}_i)^2$ (suma de quadrats deguda a l'error comès).

Es pot veure que les variables aleatòries $\frac{SSR}{\sigma^2}$, $\frac{SSE}{\sigma^2}$ i $\frac{SST}{\sigma^2}$ segueixen, respectivament, distribucions $\chi^2_1, \chi^2_{n-2}$ i $\chi^2_{n-1}$. Per tant, la variable aleatòria

$$F = \frac{SSR}{SSE/(n-2)} = \frac{SSR}{S^2}$$

segueix la distribució $F$ de Fisher-Snedecor amb 1 i $n-2$ graus de llibertat.

Aquest estadístic es fa servir per al contrast següent:

$H_0 : \beta = 0.$

$H_1 : \beta \neq 0.$

Observem que la hipòtesi nul·la afirma que la recta de regressió té pendent 0, o sigui, $\mu_{Y|x} = \alpha$.

La regió crítica per a aquest contrast és:

$$\{F > F_{1-\alpha,1,n-2}\},$$

on $F_{1-\alpha,1,n-2}$ és el percentil $100(1-\alpha)\%$ per a la distribució de Fisher-Snedecor amb 1 i $n-2$ graus de llibertat.

**Nota:** Quan hem estudiat les inferències sobre els paràmetres de regressió hem donat una altra forma de resoldre aquest problema. Concretament, hem obtengut la regió crítica següent:

$$\{B < \beta_0 - t_{1-\alpha/2}\frac{S}{\sqrt{S_{xx}}}\} \cup \{B > \beta_0 + t_{1-\alpha/2}\frac{S}{\sqrt{S_{xx}}}\},$$

que es pot veure que és igual a

$$\left\{ \frac{(B-\beta_0)^2}{S^2/S_{xx}} > t^2_{1-\alpha/2} \right\}.$$

Quan $\beta_0 = 0$, els dos problemes coincideixen. El següent resultat dóna l'equivalència dels dos mètodes:

**Proposició 8.2** *Si $t_{1-\alpha/2}$ és el percentil $100(1-\frac{\alpha}{2})\%$ per a la distribució $t$ de Student amb $n$ graus de llibertat i $F_{1-\alpha}$ és el percentil $100(1-\alpha)\%$ de la distribució $F$ de Fisher-Snedecor amb 1 i $n$ graus de llibertat, aleshores*

$$t^2_{1-\alpha/2} = F_{1-\alpha}.$$

### 8.1.7 Prova de la linealitat de la regressió

Donarem una prova per veure si el model de regressió lineal és adequat per al nostre problema. Per poder realitzar aquesta prova, necessitam més d'una observació de $Y$ per a cada valor fixat de $x$.

Siguin $x_1, \ldots, x_k$ els $k$ valors diferents de $x$. Sigui $n_i$ el nombre de valors observats per a $x = x_i$ $(i = 1, \ldots, k)$. Per tant $n = \sum\limits_{i=1}^{k} n_i$.

Sigui $Y_{ij}$ el $j$-èssim valor de la variable aleatòria $Y_i = Y|x = x_i$ $(j = 1, \ldots, n_i)$. Considerem $Y_{i\bullet} = T_{i\bullet} = \sum\limits_{j=1}^{n_i} Y_{ij}$, $\bar{Y}_{i\bullet} = \frac{T_{i\bullet}}{n_i}$.

En el nostre cas, la suma de quadrats de l'error es descompon en dues parts:

$$SSE = \sum_{i=1}^{k}\sum_{j=1}^{n_i}(Y_{ij} - \hat{Y}_{ij})^2 = \sum_{i=1}^{k}\sum_{j=1}^{n_i}(Y_{ij} - \bar{Y}_{i\bullet})^2 + \sum_{i=1}^{k}\sum_{j=1}^{n_i}(\bar{Y}_{i\bullet} - \hat{Y}_{ij})^2.$$

El primer terme és degut a la variació i l'anomenarem suma de quadrats de l'error pur:

$$SSE(\text{pur}) = \sum_{i=1}^{k}\sum_{j=1}^{n_i}(Y_{ij} - \bar{Y}_{i\bullet})^2.$$

El segon sumand és degut a la falta d'ajustament; com més gran sigui, més falta d'ajustament tendrem.

L'estadístic de contrast a fer servir és:

$$F = \frac{SSE - SSE(\text{pur})}{S^2(k-2)}, \text{ on } S^2 = \frac{SSE(\text{pur})}{n-k}.$$

$F$ es distribueix segons una $F_{k-2,n-k}$, i per tant la regió crítica és:

$$\{F > F_{k-2,n-k,1-\alpha}\}.$$

La taula següent esquematitza la prova:

| Font de variació | Suma de quadrats | Graus de llibertat | Quadrats mitjans | Estadístic $F$ |
|---|---|---|---|---|
| Regressió | $SSR$ | 1 | $SSR$ | $SSR/S^2$ |
| Error | $SSE$ | $n-2$ | | |
| Falta d'ajustament | $SSE - SSE(\text{pur})$ | $k-2$ | $\frac{SSE-SSE(\text{pur})}{k-2}$ | $\frac{SSE-SSE(\text{pur})}{(k-2)S^2}$ |
| Error pur | $SSE(\text{pur})$ | $n-k$ | $S^2 = \frac{SSE(\text{pur})}{n-k}$ | |
| Total | $SST$ | $n-1$ | | |

### 8.1.8 Correlació

A partir d'ara canviarem un poc el model de regressió per fer-lo una mica més realista. La variable independent $x$ serà a partir d'ara una variable aleatòria $X$ tal com la variable aleatòria $Y$. L'anàlisi de correlació vol mesurar la relació entre les variables aleatòries $X$ i $Y$ mitjançant el coeficient de correlació. Vegem com introduir aquest concepte.

Suposarem que la variable aleatòria $Y|X$ ($Y$ condicionada per $X$) és normal amb mitjana $\alpha + \beta x$ i variància $\sigma^2$ i que la variable aleatòria $X$ també és normal amb mitjana $\mu_X$ i variància $\sigma_X^2$.

La funció de densitat conjunta $f(x,y)$ serà:

$$f(x,y) = f(y|x)\cdot f_X(x) = \frac{1}{2\pi\sigma\sigma_X}\cdot\exp\left(-\frac{1}{2}\left(\frac{y-\alpha-\beta x}{\sigma}\right)^2 + \left(\frac{x-\mu_X}{\sigma_X}\right)^2\right).$$

Escrivim la variable aleatòria $Y$ com $Y = \alpha + \beta X + E$, on $E$ és una variable aleatòria independent de $X$ amb $\mathrm{E}(E) = 0$ i $\mathrm{Var}E = \sigma^2$. D'aquí podem calcular $\mathrm{E}(Y)$ i $\mathrm{Var}Y$:

$$\mu_Y = \mathrm{E}(Y) = \alpha + \beta\mu_X, \quad \sigma_Y^2 = \mathrm{Var}Y = \beta^2\sigma_X^2 + \sigma^2.$$

Si ho substituïm a la fórmula de $f(x,y)$, obtenim:

$$\begin{aligned} f(x,y) &= \frac{1}{2\pi\sigma_X\sigma_Y\sqrt{1-\rho^2}}\cdot\exp(g(x,y)), \\ g(x,y) &= -\frac{1}{2(1-\rho^2)}\left[\left(\frac{x-\mu_X}{\sigma_X}\right)^2 - 2\rho\frac{(x-\mu_X)}{\sigma_X}\frac{(y-\mu_Y)}{\sigma_Y} + \left(\frac{y-\mu_Y}{\sigma_Y}\right)^2\right], \end{aligned}$$

on $\rho^2 = 1 - \frac{\sigma^2}{\sigma_Y^2} = \beta^2 \cdot \frac{\sigma_X^2}{\sigma_Y^2}$.

La constant $\rho$ és el coeficient de correlació poblacional i verifica les propietats següents:

- $-1 \leq \rho \leq 1$,
- Si $\rho = \pm 1 \Longrightarrow E = 0$, o sigui, hi ha una relació lineal perfecta entre $X$ i $Y$: $Y = \alpha + \beta Y$.

El paràmetre $\rho$ s'estima mitjançant el coeficient de correlació mostral $R$:

$$R = B\sqrt{\frac{S_{xx}}{S_{yy}}} = \frac{S_{xy}}{\sqrt{S_{xx} \cdot S_{yy}}}.$$

Si $\rho^2$ està molt pròxim a 1 vol dir que la relació lineal entre $X$ i $Y$ és molt bona. En cas contrari, si $\rho^2 \simeq 0$, vol dir que no hi ha relació lineal entre les dues variables. Aleshores serà interessant fer el contrast d'hipòtesi següent:

$H_0 : \rho = 0.$

$H_1 : \rho \neq 0.$

S'utilitza l'estadístic de contrast $T = \frac{B}{S/\sqrt{S_{xx}}}$, que segueix una distribució $t_{n-2}$. La regió crítica és:

$$\{T < -t_{1-\alpha/2}\} \cup \{T > t_{1-\alpha/2}\}.$$

## 8.2 Problemes resolts

**8.1.-** Suposem que $Y$ és una variable aleatòria amb $E[Y|x] = bx$ per a qualsevol $x$ i que la variància de $Y$ és $\sigma^2$, independent de $x$. Suposant que $(x_1, Y_1), \ldots, (x_n, Y_n)$ és una mostra aleatòria de $Y$ amb els corresponents valors associats de $x$, trobau l'estimador pel mètode dels mínims quadrats de $b$. Definiu un estimador sense biaix de $\sigma^2$ i provau que és sense biaix.

**Resolució.** El model a considerar és $Y = bx$. Seguint la mateixa filosofia desenvolupada en el mètode dels mínims quadrats, hem de trobar l'estimador del paràmetre $b$ $B$ que minimitzi la funció:

$$F(b) = \sum_{i=1}^{n} (Y_i - bx_i)^2.$$

Derivant la funció anterior i igualant la derivada a zero obtenim:

$$F'(B) = -2 \sum_{i=1}^{n} (Y_i - BY_i)x_i = 0,$$
$$\sum_{i=1}^{n} x_i Y_i - B \sum_{i=1}^{n} x_i^2 = 0,$$
$$B = \frac{\sum_{i=1}^{n} x_i Y_i}{\sum_{i=1}^{n} x_i^2}.$$

Fixau-vos que $B$ és un mínim, ja que si feim la derivada segona de $F$, resulta que aquesta és positiva:

$$F''(B) = 2\sum_{i=1}^{n} x_i^2 > 0.$$

Vegem que $B$ és un estimador sense biaix, o sigui, vegem que $\mathrm{E}(B) = b$:

$$\mathrm{E}(B) = \frac{\sum_{i=1}^{n} x_i \mathrm{E}(Y_i)}{\sum_{i=1}^{n} x_i^2} = \frac{\sum_{i=1}^{n} x_i b x_i}{\sum_{i=1}^{n} x_i^2} = b.$$

Per definir l'estimador de $\sigma^2$, considerem el següent estimador dependent d'una constant $C$:

$$\overline{S}^2 = C\left(\sum_{i=1}^{n} Y_i^2 - B^2 \sum_{i=1}^{n} x_i^2\right).$$

L'únic que hem de fer és trobar $C$ per tal que $\overline{S}^2$ sigui sense biaix o, dit en altres paraules, $\mathrm{E}\left(\overline{S}^2\right) = \sigma^2$.

Calculem ara $\mathrm{E}\left(\overline{S}^2\right)$:

$$\mathrm{E}\left(\overline{S}^2\right) = C\left(\sum_{i=1}^{n} \mathrm{E}\left(Y_i^2\right) - \sum_{i=1}^{n} x_i^2 \mathrm{E}\left(B^2\right)\right).$$

Abans de continuar amb el càlcul anterior, trobem $\sum_{i=1}^{n} \mathrm{E}\left(Y_i^2\right)$ i $\mathrm{E}\left(B^2\right)$:

$$\begin{aligned}
\mathrm{E}\left(\sum_{i=1}^{n} Y_i^2\right) &= \sum_{i=1}^{n}\left(\mathsf{Var}\ Y_i + (\mathrm{E}(Y_i))^2\right) = \sum_{i=1}^{n}(\sigma^2 + b^2 x_i^2) = n\sigma^2 + b^2 \sum_{i=1}^{n} x_i^2. \\
\mathrm{E}\left(B^2\right) &= (\mathrm{E}(B))^2 + \mathsf{Var}\ B = b^2 + \frac{1}{\left(\sum_{i=1}^{n} x_i^2\right)^2} \cdot \sum_{i=1}^{n} x_i^2\, \mathsf{Var}\ Y_i = b^2 + \frac{\sigma^2}{\sum_{i=1}^{n} x_i^2}
\end{aligned}$$

Per tant, el valor de $\mathrm{E}\left(\overline{S}^2\right)$ serà:

$$
\begin{aligned}
\mathrm{E}\left(\overline{S}^2\right) &= C\left(n\sigma^2 + b^2\sum_{i=1}^n x_i^2 - \sum_{i=1}^n x_i^2\left(\frac{\sigma^2}{\sum\limits_{i=1}^n x_i^2} + b^2\right)\right)\\
&= C(n\sigma^2 - \sigma^2) = C(n-1)\sigma^2.
\end{aligned}
$$

Així doncs, perquè l'estimador $\overline{S}^2$ sigui sense biaix, el valor de $C$ ha de ser: $C = \frac{1}{n-1}$. L'estimador $\overline{S}^2$ quedarà, doncs:

$$
\overline{S}^2 = \frac{1}{n-1}\left(\sum_{i=1}^n Y_i^2 - B^2\sum_{i=1}^n x_i^2\right).
$$

**8.2.-** Provau que l'estimador dels mínims quadrats de $b$ obtengut en el problema 8.1 és el millor estimador lineal sense biaix de $b$, en el context de les suposicions del problema 8.1.

**Resolució.** Considerem l'estimador $B$ escrit de la forma següent:

$$
B = \sum_{i=1}^n c_i Y_i,
$$

on $c_i = \frac{x_i}{\sum\limits_{i=1}^n x_i^2}$. Fixau-vos que, escrit d'aquesta manera, queda ben clar que $B$ és un estimador lineal del paràmetre $b$.

Considerem ara un altre estimador $B'$ lineal i sense biaix de $b$. Podem posar $B'$ com:

$$
B' = \sum_{i=1}^n d_i Y_i = \sum_{i=1}^n (c_i - f_i) Y_i,
$$

on $f_i = c_i - d_i$.

Vegem quina condició han de verificar les constants $f_i$ perquè $B'$ sigui un estimador sense biaix de $b$:

$$
\begin{aligned}
\mathrm{E}(B') &= \sum_{i=1}^n (c_i - f_i)\mathrm{E}(Y_i) = \sum_{i=1}^n (c_i - f_i) b x_i = b\left(\sum_{i=1}^n c_i x_i - \sum_{i=1}^n f_i x_i\right)\\
&= b\left(1 - \sum_{i=1}^n f_i x_i\right),
\end{aligned}
$$

tenint en compte que es compleix que $\sum_{i=1}^{n} c_i x_i = 1$.

Per tant, perquè $B'$ sigui sense biaix, s'ha de complir que $\sum_{i=1}^{n} f_i x_i = 0$.

Per veure que $B$ és el millor estimador lineal de $b$, hem de veure que té la variància més petita. Calculem, doncs, Var $B$ i Var $B'$:

$$\begin{aligned} \text{Var } B &= \sigma^2 \sum_{i=1}^{n} c_i^2. \\ \text{Var } B' &= \sigma^2 \sum_{i=1}^{n} (c_i - f_i)^2. \end{aligned}$$

Hem de veure que Var $B \leq$ Var $B'$. Això és el mateix que veure que:

$$\sum_{i=1}^{n} c_i^2 \leq \sum_{i=1}^{n} (c_i - f_i)^2 = \sum_{i=1}^{n} c_i^2 + \sum_{i=1}^{n} f_i^2 - 2\sum_{i=1}^{n} c_i f_i,$$

o, escrit d'una altra manera:

$$0 \leq \sum_{i=1}^{n} f_i^2 - 2\sum_{i=1}^{n} c_i f_i.$$

Tenint en compte que $\sum_{i=1}^{n} c_i f_i = 0$ ja que $B'$ no té biaix, la condició anterior es verifica trivialment i podem concloure que $B$ és el millor estimador lineal sense biaix del paràmetre $b$.

**8.3.-** Suposem que $\mathrm{E}[Y|x] = a + bx$, Var $[Y|x] = \sigma^2$ per tota $x$ i que es té llibertat per escollir els valors $x$ en la mostra. Es decideix prendre mostres de grandària $n_1$ valors de $Y$ amb $x = x_1$, $n_2$ valors de $Y$ amb $x = x_2$ i $n_3$ valors de $Y$ amb $x = x_3$.
Direm $Y_{ij}$ a la $j$-èssima observació de $Y$ amb $x = x_i$ per $i = 1, 2, 3$. Definim

$$\overline{Y}_i = \frac{\sum\limits_{j=1}^{n_i} Y_{ij}}{n_i}, \quad \overline{Y} = \frac{\sum\limits_i \sum\limits_j Y_{ij}}{n},$$

on $n = \sum n_i$. Provau que l'estimador dels mínims quadrats per a $b$ és

$$B = \frac{\sum\limits_{i=1}^{3} n_i(x_i - \overline{x})(\overline{Y}_i - \overline{Y})}{\sum n_i(x_i - \overline{x})^2}.$$

**Resolució.** Podem escriure la mostra de la variable $Y$ de la manera següent:

$$(Y_{1,1}, x_1), \ldots, (Y_{1,n_1}, x_1), (Y_{2,1}, x_2), \ldots, (Y_{2,n_2}, x_2), (Y_{3,1}, x_3), \ldots, (Y_{3,n_3}, x_3)$$

Sense tenir en compte les repeticions de la variable $x$, l'estimador de mínims quadrats del paràmetre $b$ és:

$$B = \sum_{i=1}^{3} \sum_{j=1}^{n_i} \frac{(x_i - \overline{x})(Y_{ij} - \overline{Y})}{\sum\limits_{i=1}^{3} \sum\limits_{j=1}^{n_i} (x_i - \overline{x})^2}.$$

Fent càlculs, podem escriure les sumes següents, que surten en l'expressió anterior, com:

$$\begin{aligned} \sum_{j=1}^{n_i} (x_i - \overline{x})(Y_{ij} - \overline{Y}) &= (x_i - \overline{x}) \sum_{j=1}^{n_i} (Y_{ij} - \overline{Y}) = (x_i - \overline{x}) n_i (\overline{Y}_i - \overline{Y}), \\ \sum_{j=1}^{n_i} (x_i - \overline{x})^2 &= n_i (x_i - \overline{x})^2. \end{aligned}$$

Tenint en compte els càlculs anteriors, l'expressió de l'estimador $B$ es converteix en:

$$B = \frac{\sum\limits_{i=1}^{3} n_i(x_i - \overline{x})(\overline{Y}_i - \overline{Y})}{\sum\limits_{i=1}^{3} n_i(x_i - \overline{x})^2}.$$

## 8.3 Problemes proposats

**8.1.-** Es varen plantar 8 pins de 0.3 metres d'alçada en medis semblants controlats i se'ls va sotmetre a distintes intensitats d'irrigació per simular l'efecte de les diferents precipitacions pluvials. En acabar l'any es varen mesurar les alçades obtengudes. En la taula següent es mostren les alçades mitjanes (amb metres) ($y_i$) en acabar l'any i la quantitat de pluja (en metres) simulada per cada valor $x_i$. Suposem que $Y$, l'alçada de l'arbre en acabar l'any, és una variable aleatòria amb mitjana $a + bx$, on $x$ és la precipitació, i amb variància constant $\sigma^2$ per tota $x$. Trobau les millors estimades lineals sense biaix de $a$ i $b$ i trobau una estimada sense biaix de $\sigma^2$ i de Var $A$ i Var $B$ on $A$ i $B$ són les estimades de $a$ i $b$ respectivament.

| $y_i$ | $x_i$ |
|---|---|
| 0.4826 | 0.2540 |
| 0.5588 | 0.3556 |
| 0.6350 | 0.4572 |
| 0.7874 | 0.5588 |
| 0.8382 | 0.6604 |
| 0.9906 | 0.7620 |
| 1.1176 | 0.8636 |
| 1.1430 | 0.9652 |

**8.2.-** Provau que:

$$\sum x_i y_i - \overline{x} \sum y_i = \sum x_i y_i - \overline{y} \sum x_i = \sum (x_i - \overline{x})(y_i - \overline{y}).$$

**8.3.-** Suposem que $\mathrm{E}[Y|x] = bx$ i que $(Y_1, x_1), \ldots, (Y_n, x_n)$ és una mostra aleatòria de $Y$ amb els valors associats de $X$. Suposem que Var $Y_i = \sigma_i^2$, o sigui, les variàncies dels valors de $Y$ depenen dels valors de $x$. Provau que:

$$B = \frac{\sum \frac{x_i Y_i}{\sigma_i^2}}{\sum \frac{x_i^2}{\sigma_i^2}},$$

és el millor estimador lineal sense biaix de $b$.

Indicació: definiu $z_i = \frac{Y_i}{\sigma_i}$, $w_i = \frac{x_i}{\sigma_i}$ i aplicau el resultat de problema 8.2.

**8.4.-** Suposem la mateixa situació que en el problema 8.3, amb $x_i > 0$ i $\sigma_i = \sigma^2 x_i$. Trobau el millor estimador lineal sense biaix de $b$.

**8.5.-** Provau que la recta dels mínims quadrats $Y = A + BX$ sempre passa pel punt $(\overline{X}, \overline{Y})$.

**8.6.-** Suposem que $\mathrm{E}[Y|x] = a + \frac{b}{x}$, per $x > 0$. Trobau les estimades de $a$ i $b$ pel mètode dels mínims quadrats.

**8.7.-** Suposem la mateixa situació que en el problema 8.3 i que $n_1 = n_2 = n_3$. Provau que la recta dels mínims quadrats per al conjunt complet de dades és idèntica a la recta dels mínims quadrats determinada per $(\overline{Y}_1, x_1), (\overline{Y}_2, x_2), (\overline{Y}_3, x_3)$. Segueix essent certa l'afirmació anterior si els $n_i$ no són iguals?

**8.8.-** Suposem una altra vegada la situació descrita en el problema 8.3 i suposeu que es vol estimar la mitjana de la població $Y$ per $x = x_2$. Si les tres $n_i$ no són iguals tenim tres possibles estimadors: $\overline{Y}_2$, $Y_1' = A_1 + B_1 x_2$, $Y_2' = A_2 + B_2 x_2$, on $Y_1'$ és la recta dels mínims quadrats descrita en el problema 8.3 i $Y_2'$ és la recta dels mínims quadrats determinada pels punts $(\overline{Y}_1, x_1), \overline{Y}_2, x_2), (\overline{Y}_3, x_3)$ descrita en el problema 8.7.

a) Provau que els tres estimadors anteriors no tenen biaix.

b) Quin dels tres estimadors és més eficient?

**8.9.-** $n$ persones distintes varen comptar el trànsit en el mateix carrer, a la mateixa hora del dia, en distintes ocasions independents. Se sap que no totes les persones varen observar el mateix temps. La persona $i$ ho va observar durant $x_i$ minuts, amb $i = 1, \ldots, n$. Suposem que en aquest punt d'observació, el trànsit passa com a successos de Poisson a raó de $\lambda$ cotxes per minut. Així, si $Y_i$ representa el nombre de cotxes que passaren pel punt d'observació quan la persona $i$ era allà, aleshores $Y_i$ és una variable aleatòria de Poisson amb paràmetre $\lambda x_i$ amb $\mathrm{E}(Y_i) = \mathrm{Var}\ (Y_i) = \lambda x_{i,}, \ i = 1, \ldots, n$. Quin és el millor estimador lineal sense biaix per $\lambda$?

Indicació: Mirau el problema 8.3.

**8.10.-** Sigui $(Y_1, x_1), \ldots, (Y_n, x_n)$ una mostra aleatòria simple d'una v.a. $Y$ que depèn d'una variable independent $x$. Suposem $\mathrm{E}(Y|x) = a + bx$ i Var $Y = \sigma^2$ per a tot $x$. Suposem que $x_i = i$, $i = 1, \ldots, n$. Trobau la fórmula per a la variància de l'estimador $B$ del paràmetre $b$ pel mètode dels mínims quadrats.

(Nota: $\sum\limits_{i=1}^{n} i^2 = \frac{n(n+1)(2n+1)}{6}$))

Final. Juny 95.

**8.11.-** Considerem la taula de valors següent:

| | | | | | | | | | |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| $X$ | 1 | 1 | 2 | 2 | 2 | 3 | 3 | 3 | 3 |
| $Y$ | 5 | 4 | 6 | 5 | 7 | 8 | 9 | 7 | 7 |

Feu la prova de la linealitat de regressió suposant les hipòtesis de regressió lineal i normalitat.

Final. Setembre 96.

# Apèndix A

# Taules de contrasts d'hipòtesi més usuals

En aquest apèndix donarem unes quantes taules especificant tots els contrasts d'hipòtesi paramètrics més usuals.

Donarem les condicions per a cada contrast, l'estadístic a usar en cada cas, la regió crítica i l'interval de confiança corresponent a cada paràmetre que surt en el contrast.

En l'estadístic hem usat la notació següent:

- $X_\alpha$: Donada una variable aleatòria $X$, direm $X_\alpha$ al valor on la funció de distribució de $X$ val $\alpha$, o sigui,

$$p\{X \leq X_\alpha\} = \alpha.$$

- $Z$: Distribució normal $N(0,1)$.

- $t_n$: Distribució $t$ de Student amb $n$ graus de llibertat.

- $\chi_n^2$: Distribució khi-quadrat amb $n$ graus de llibertat.

- $F_{n_1,n_2}$: Distribució $F$ de Fisher-Snedecor amb $n_1$ i $n_2$ graus de llibertat.

## A.1 Taula de contrasts d'hipòtesi per al paràmetre $\mu$ d'una variable aleatòria normal

### A.1.1 Tipus de contrasts i condicions

| Tipus | Condicions | Mostra | Hipòtesi alternativa | Cas |
|---|---|---|---|---|
| Una sola mitjana. $H_0 : \mu = \mu_0$ | $\sigma$ coneguda. Població normal o $n$ gran. | $n$ observacions independents. | $H_1 : \mu \neq \mu_0$ | **I** |
| | | | $H_1 : \mu < \mu_0$ | **II** |
| | | | $H_1 : \mu > \mu_0$ | **III** |
| | $\sigma$ desconeguda. Població Normal o $n$ gran. | $n$ observacions independents. | $H_1 : \mu \neq \mu_0$ | **IV** |
| | | | $H_1 : \mu < \mu_0$ | **V** |
| | | | $H_1 : \mu > \mu_0$ | **VI** |
| Dues mitjanes. $H_0 : \mu_1 = \mu_2$ | $\sigma_1$ i $\sigma_2$ conegudes. Poblacions Normals o $n_1$ i $n_2$ grans | $n_1$ i $n_2$ observacions totes independents. | $H_1 : \mu_1 \neq \mu_2$ | **VII** |
| | | | $H_1 : \mu_1 < \mu_2$ | **VIII** |
| | | | $H_1 : \mu_1 > \mu_2$ | **IX** |
| | $\sigma_1$ i $\sigma_2$ desconegudes. $\sigma_1 = \sigma_2$. Poblacions Normals. | $n_1$ i $n_2$ observacions totes independents. | $H_1 : \mu_1 \neq \mu_2$ | **X** |
| | | | $H_1 : \mu_1 < \mu_2$ | **XI** |
| | | | $H_1 : \mu_1 > \mu_2$ | **XII** |
| | $\sigma_1$ i $\sigma_2$ desconegudes. $\sigma_1 \neq \sigma_2$. Poblacions Normals. | $n_1$ i $n_2$ observacions totes independents. | $H_1 : \mu \neq \mu_2$ | **XIII** |
| | | | $H_1 : \mu_1 < \mu_2$ | **XIV** |
| | | | $H_1 : \mu_1 > \mu_2$ | **XV** |

Continua en la pàgina següent

| Tipus | Condicions | Mostra | Hipòtesi alternativa | Cas |
|---|---|---|---|---|
| Diferència de mitjanes dependents. $H_0 : \mu_d = 0$, on $\mu_d = \mu_1 - \mu_2$. | Dues poblacions normals dependents. $\sigma_d$[a] coneguda. | $n$ diferències independents. | $H_1 : \mu_d \neq 0$ | **XVI** |
| | | | $H_1 : \mu_d < 0$ | **XVII** |
| | | | $H_1 : \mu_d > 0$ | **XVIII** |
| | Dues poblacions dependents. $\sigma_d$ desconeguda. | $n$ diferències independents. | $H_1 : \mu_d \neq 0$ | **XIX** |
| | | | $H_1 : \mu_d < 0$ | **XX** |
| | | | $H_1 : \mu_d > 0$ | **XXI** |

[a] $\sigma_d$ és la variància de la variable $D = X_1 - X_2$.

### A.1.2 Estadístic de contrast, regions crítiques i intervals de confiança

| Cas | Estadístic | Regió crítica | Interval confiança |
|---|---|---|---|
| **I** | $Z=\frac{\overline{X}-\mu_0}{\frac{\sigma}{\sqrt{n}}}$ | $\{Z\le z_{\frac{\alpha}{2}}\}\cup\{Z\ge z_{1-\frac{\alpha}{2}}\}$ | $\left(\overline{X}+z_{\frac{\alpha}{2}}\frac{\sigma}{\sqrt{n}},\overline{X}+z_{1-\frac{\alpha}{2}}\frac{\sigma}{\sqrt{n}}\right)$ |
| **II** | Normal | $\{Z\le z_{\alpha}\}$ | $\left(-\infty,\overline{X}+z_{1-\alpha}\frac{\sigma}{\sqrt{n}}\right)$ |
| **III** | $N(0,1)$ | $\{Z\ge z_{1-\alpha}\}$ | $\left(\overline{X}+z_{\alpha}\frac{\sigma}{\sqrt{n}},+\infty\right)$ |
| **IV** | $T=\frac{\overline{X}-\mu_0}{\frac{\tilde{S}}{\sqrt{n}}}$ | $\{T\le t_{n-1,\frac{\alpha}{2}}\}\cup\{T\ge t_{n-1,1-\frac{\alpha}{2}}\}$ | $\left(\overline{X}+t_{n-1,\frac{\alpha}{2}}\frac{\tilde{S}}{\sqrt{n}},\overline{X}+t_{n-1,1-\frac{\alpha}{2}}\frac{\tilde{S}}{\sqrt{n}}\right)$ |
| **V** | $t_{n-1}$[a] | $\{T\le t_{n-1,\alpha}\}$ | $\left(-\infty,\overline{X}+t_{n-1,1-\alpha}\frac{\tilde{S}}{\sqrt{n}}\right)$ |
| **VI** | | $\{T\ge t_{n-1,1-\alpha}\}$ | $\left(\overline{X}+t_{n-1,\alpha}\frac{\tilde{S}}{\sqrt{n}},+\infty\right)$ |
| **VII** | $Z=\frac{\overline{X}_1-\overline{X}_2}{\tilde{S}}$[b] | $\{Z\le z_{\frac{\alpha}{2}}\}\cup\{Z\ge z_{1-\frac{\alpha}{2}}\}$ | $\left(\overline{X}_1-\overline{X}_2+z_{\frac{\alpha}{2}}\tilde{S},\overline{X}_1-\overline{X}_2+z_{1-\frac{\alpha}{2}}\tilde{S}\right)$ |
| **VIII** | Normal | $\{Z\le z_{\alpha}\}$ | $\left(-\infty,\overline{X}_1-\overline{X}_2+z_{1-\alpha}\tilde{S}\right)$ |
| **IX** | $N(0,1)$ | $\{Z\ge z_{1-\alpha}\}$ | $\left(\overline{X}_1-\overline{X}_2+z_{\alpha}\tilde{S},+\infty\right)$ |
| **X** | $T=\frac{\overline{X}_1-\overline{X}_2}{\tilde{S}_{1,2}}$[c] | $\{T\le t_{m^{e},\frac{\alpha}{2}}\}\cup\{T\ge t_{m,1-\frac{\alpha}{2}}\}$ | $(\overline{X}_1-\overline{X}_2+t_{m,\frac{\alpha}{2}}\tilde{S}_{1,2},\overline{X}_1-\overline{X}_2+t_{m,1-\frac{\alpha}{2}}\tilde{S}_{1,2})$ |
| **XI** | $t_{n_1+n_2-2}$[d] | $\{T\le t_{m,\alpha}\}$ | $(-\infty,\overline{X}_1-\overline{X}_2+t_{m,1-\alpha}\tilde{S}_{1,2})$ |
| **XII** | | $\{T\ge t_{m,1-\alpha}\}$ | $(\overline{X}_1-\overline{X}_2+t_{m,\alpha}\tilde{S}_{1,2},+\infty)$ |
| **XIII** | $Z=\frac{\overline{X}_1-\overline{X}_2}{\tilde{S}_{1,2}}$[f] | $\{Z\le z_{\frac{\alpha}{2}}\}\cup\{Z\ge z_{1-\frac{\alpha}{2}}\}$ | $(\overline{X}_1-\overline{X}_2+z_{\frac{\alpha}{2}}\tilde{S}_{1,2},\overline{X}_1-\overline{X}_2+z_{1-\frac{\alpha}{2}}\tilde{S}_{1,2})$ |
| **XIV** | Normal | $\{Z\le z_{\alpha}\}$ | $(-\infty,\overline{X}_1-\overline{X}_2+z_{1-\alpha}\tilde{S}_{1,2})$ |
| **XV** | $N(0,1)$ | $\{Z\ge z_{1-\alpha}\}$ | $(\overline{X}_1-\overline{X}_2+z_{\alpha}\tilde{S}_{1,2},+\infty)$ |
| **XVI** | $Z=\frac{\overline{D}^{g}}{\frac{\sigma_D}{\sqrt{n}}}$ | $\{Z\le z_{\frac{\alpha}{2}}\}\cup\{Z\ge z_{1-\frac{\alpha}{2}}\}$ | $(\overline{D}+z_{\frac{\alpha}{2}}\frac{\sigma_D}{\sqrt{n}},\overline{D}+z_{1-\frac{\alpha}{2}}\frac{\sigma_D}{\sqrt{n}})$ |
| **XVII** | Normal | $\{Z\le z_{\alpha}\}$ | $(-\infty,\overline{D}+z_{1-\alpha}\frac{\sigma_D}{\sqrt{n}})$ |
| **XVIII** | $N(0,1)$ | $\{Z\ge z_{1-\alpha}\}$ | $(\overline{D}+z_{\alpha}\frac{\sigma_D}{\sqrt{n}},+\infty)$ |

Continua en la pàgina següent

[a] $t_{n-1}$ és la distribució $t$ de Student amb $n-1$ graus de llibertat.

[b] $\tilde{S}=\sqrt{\frac{\sigma_1^2}{n_1}+\frac{\sigma_2^2}{n_2}}$

[c] $\tilde{S}_{1,2}=\sqrt{\frac{(n_1-1)\tilde{S_1}^2+(n_2-1)\tilde{S}_2^2}{n_1+n_2-2}\cdot\left(\frac{1}{n_1}+\frac{1}{n_2}\right)}$

[d] Distribució $t$ de Student amb $n_1+n_2-2$ graus de llibertat.

[e] $m=n_1+n_2-2$

[f] $\tilde{S}_{1,2}=\sqrt{\frac{\tilde{S}_1^2}{n_1}+\frac{\tilde{S}_2^2}{n_2}}$

[g] $D$ és la variable aleatòria: $D=X_1-X_2$.

| Cas | Estadístic | Regió Crítica | Interval Confiança |
|---|---|---|---|
| **XIX** | $T = \frac{\overline{D}^a}{\frac{\tilde{S}_D}{\sqrt{n}}}$ $t_{n-1}{}^b$ | $\{T \leq t_{n-1,\frac{\alpha}{2}}\} \cup \{T \geq t_{n-1,1-\frac{\alpha}{2}}\}$ | $(\overline{D}+z_{\frac{\alpha}{2}}\frac{\tilde{S}_D}{\sqrt{n}}, \overline{D}+z_{1-\frac{\alpha}{2}}\frac{\tilde{S}_D}{\sqrt{n}})$ |
| **XX** | | $\{T \leq t_{n-1,\alpha}\}$ | $(-\infty, \overline{D}+z_{1-\alpha}\frac{\tilde{S}_D}{\sqrt{n}})$ |
| **XXI** | | $\{T \geq t_{n-1,1-\alpha}\}$ | $(\overline{D}+z_{\alpha}\frac{\sigma_D}{\sqrt{n}}, +\infty)$ |

[a] $D$ és la variable aleatòria: $D = X_1 - X_2$.

[b] $t_{n-1}$ és la variable $t$ de Student amb $n-1$ graus de llibertat.

## A.2 Contrats d'hipòtesi per al paràmetre $\sigma$ d'una normal

### A.2.1 Tipus de contrasts i condicions

| Tipus | Condicions | Mostra | Hipòtesi alternativa | Cas |
|---|---|---|---|---|
| Una sola variància $H_0 : \sigma^2 = \sigma_0^2$ | Població Normal. $\mu$ desconeguda. | $n$ observacions independents. | $H_1 : \sigma^2 \neq \sigma_0^2$ | **I** |
| | | | $H_1 : \sigma^2 < \sigma_0^2$ | **II** |
| | | | $H_1 : \sigma^2 > \sigma_0^2$ | **III** |
| Dues variàncies. Observacions independents. $H_0 : \sigma_1^2 = \sigma_2^2$ | Poblacions normals. | Dues mostres de grandàries $n_1$ i $n_2$ totes independents. | $H_1 : \sigma_1^2 \neq \sigma_2^2$ | **IV** |
| | | | $H_1 : \sigma_1^2 < \sigma_2^2$ | **V** |
| | | | $H_1 : \sigma_1^2 > \sigma_2^2$ | **VI** |
| Dues variàncies. Observacions dependents. $H_0 : \sigma_1^2 = \sigma_2^2$ | Poblacions normals. | Dues mostres independents de grandària $n$ correlacionades entre si. | $H_1 : \sigma_1^2 \neq \sigma_2^2$ | **VII** |
| | | | $H_1 : \sigma_1^2 < \sigma_2^2$ | **VIII** |
| | | | $H_1 : \sigma_1^2 > \sigma_2^2$ | **IX** |
| Una proporció. $H_0 : p = p_0$ | Població Bernoulli. | $n$ observacions independents. | $H_1 : p \neq p_0$ | **X** |
| | | | $H_1 : p < p_0$ | **XI** |
| | | | $H_1 : p > p_0$ | **XII** |
| Dues proporcions. Observacions independents. $H_0 : p_1 = p_2$ | Poblacions Bernoulli. | Dues mostres de grandàries $n_1$ i $n_2$ totes independents. | $H_1 : p_1 \neq p_2$ | **XIII** |
| | | | $H_1 : p_1 < p_2$ | **XIV** |
| | | | $H_1 : p_1 > p_2$ | **XV** |
| Dues proporcions. Observacions dependents. $H_0 : p_a = p_d$ | Poblacions Bernoulli. | Dues mostres de grandària $n$ correlacionades entre si. | $H_1 : p_a \neq p_b$ | **XVI** |
| | | | $H_1 : p_a < p_b$ | **XVII** |
| | | | $H_1 : p_a > p_b$ | **XVIII** |

### A.2.2 Estadístic de contrast, regions crítiques i intervals de confiança

| Cas | Estadístic | Regió Crítica | Interval Confiança |
|---|---|---|---|
| **I**[a] | $\chi^{2\,b} = \frac{(n-1)\tilde{S}^2}{\sigma_0^2}$ | $\{\chi^2 \le \chi^2_{n-1,\frac{\alpha}{2}}\} \cup \{\chi^2 \ge \chi^2_{n-1,1-\frac{\alpha}{2}}\}$ | $\left(\frac{(n-1)\tilde{S}^2}{\chi^2_{n-1,1-\frac{\alpha}{2}}}, \frac{(n-1)\tilde{S}^2}{\chi^2_{n-1,\frac{\alpha}{2}}}\right)$ |
| **II** | | $\{\chi^2 \le \chi^2_{n-1,\alpha}\}$ | $\left(0, \frac{(n-1)\tilde{S}^2}{\chi^2_{n-1,\alpha}}\right)$ |
| **III** | | $\{\chi^2 \ge \chi^2_{n-1,1-\alpha}\}$ | $\left(\frac{(n-1)\tilde{S}^2}{\chi^2_{n-1,1-\alpha}}, +\infty\right)$ |
| **IV** | $F^c = \frac{\tilde{S}_1^2}{\tilde{S}_2^2}$ | $\{F \le F_{n_1-1,n_2-1,\frac{\alpha}{2}}\} \cup$ $\{F \ge F_{n_1-1,n_2-1,1-\frac{\alpha}{2}}\}$ | $(\frac{\tilde{S}_1^2}{\tilde{S}_2^2} F_{n_1-1,n_2-1,\frac{\alpha}{2}},$ $\frac{\tilde{S}_1^2}{\tilde{S}_2^2} F_{n_1-1,n_2-1,1-\frac{\alpha}{2}})$ |
| **V** | | $\{F \le F_{n_1-1,n_2-1,\alpha}\}$ | $\left(0, \frac{\tilde{S}_1^2}{\tilde{S}_2^2} F_{n_1-1,n_2-1,1-\alpha}\right)$ |
| **VI** | | $\{F \ge F_{n_1-1,n_2-1,1-\alpha}\}$ | $\left(\frac{\tilde{S}_1^2}{\tilde{S}_2^2} F_{n_1-1,n_2-1,\alpha}, +\infty\right)$ |
| **VII** | $T = \frac{\sqrt{n-2}(S_1{}^d - S_2{}^e)}{2\sqrt{S_1 S_2 - S_3^2}^{\,f}}$ | $\{T \le t_{n-2,\frac{\alpha}{2}}\} \cup \{T \ge t_{n-2,1-\frac{\alpha}{2}}\}$ | |
| **VIII** | | $\{T \le t_{n-2,\alpha}\}$ | |
| **IX** | Distribució $t_{n-2}{}^g$ | $\{T \ge t_{n-2,1-\alpha}\}$ | |
| **X** | $n\overline{p}^h$ | $\{n\overline{p} \le \max_{k\in\mathbb{N}}\{p\left\{B(n,p_0)^i \le k\right\} \le \frac{\alpha}{2}\}\} \cup$ $\{n\overline{p} \ge \min_{k\in\mathbb{N}}\{p\{B(n,p_0) \ge k\} \le \frac{\alpha}{2}\}\}$ | |
| **XI** | | $\{n\overline{p} \le \max_{k\in\mathbb{N}}\{p\{B(n,p_0) \le k\} \le \alpha\}\}$ | |
| **XII** | | $\{n\overline{p} \ge \min_{k\in\mathbb{N}}\{p\{B(n,p_0) \ge k\} \ge \alpha\}\}$ | |

[a] Si $\mu$ fos coneguda, l'estadístic és $\chi^2 = \frac{\sum_{i=1}^{n} (X_i-\mu)^2}{\sigma_0^2}$ i la seva distribució és $\chi^2_n$ (distribució khi quadrat amb $n$ graus de llibertat.

[b] Distribució khi quadrat amb $n-1$ graus de llibertat.

[c] Distribució $F$ de Fisher-Snedecor amb $n_1 - 1$ i $n_2 - 1$ graus de llibertat.

[d] $S_1 = \sum_{i=1}^{n} x_{1,i}^2$, on $x_{1,i} = X_{1,i} - \overline{X}_1$.

[e] $S_2 = \sum_{i=1}^{n} x_{2,i}^2$, on $x_{2,i} = X_{2,i} - \overline{X}_2$.

[f] $S_3 = \sum_{i=1}^{n} x_{1,i} x_{2,i}$.

[g] Distribució $t$ de Student amb $n-2$ graus de llibertat.

[h] $\overline{p}$ és la proporció mostral

[i] $B(n, p_0)$ és la distribució binomial de paràmetres $n$ i $p_0$

| Cas | Estadístic | Regió Crítica | Interval Confiança |
|---|---|---|---|
| **X** | $Z=\frac{\overline{p}-p_0}{\sqrt{\frac{p_0(1-p_0)}{n}}}$ [a] Normal $N(0,1)$. | $\{Z\leq z_{\frac{\alpha}{2}}\}\cup\{Z\geq z_{1-\frac{\alpha}{2}}\}$ | $(\overline{p}+z_{\frac{\alpha}{2}}\sqrt{\frac{\overline{p}(1-\overline{p})}{n}},\ \overline{p}+z_{1-\frac{\alpha}{2}}\sqrt{\frac{\overline{p}(1-\overline{p})}{n}})$ |
| **XI** | | $\{Z\leq z_{\alpha}\}$ | $\left(-\infty,\overline{p}+z_{1-\alpha}\sqrt{\frac{\overline{p}(1-\overline{p})}{n}}\right)$ |
| **XII** | | $\{Z\geq z_{1-\alpha}\}$ | $\left(\overline{p}+z_{\alpha}\sqrt{\frac{\overline{p}(1-\overline{p})}{n}},+\infty\right)$ |
| **XIII** | $Z=\frac{\overline{p}_1-\overline{p}_2}{\sqrt{\overline{p}^b\overline{q}^c\left(\frac{1}{n_1}+\frac{1}{n_2}\right)}}$ Normal $N(0,1)$ | $\{Z\leq z_{\frac{\alpha}{2}}\}\cup\{Z\geq z_{1-\frac{\alpha}{2}}\}$ | $(\overline{p}_1-\overline{p_2}+z_{\frac{\alpha}{2}}\sqrt{\overline{pq}\left(\frac{1}{n_1}+\frac{1}{n_2}\right)},\ \overline{p}_1-\overline{p_2}-z_{\frac{\alpha}{2}}\sqrt{\overline{pq}\left(\frac{1}{n_1}+\frac{1}{n_2}\right)})$ |
| **XIV** | | $\{Z\leq z_{\alpha}\}$ | $\left(-\infty,\overline{p}_1-\overline{p_2}+z_{1-\alpha}\sqrt{\overline{pq}\left(\frac{1}{n_1}+\frac{1}{n_2}\right)}\right)$ |
| **XV** | | $\{Z\geq z_{1-\alpha}\}$ | $\left(\overline{p}_1-\overline{p_2}+z_{\alpha}\sqrt{\overline{pq}\left(\frac{1}{n_1}+\frac{1}{n_2}\right)},+\infty\right)$ |
| **XVI** | $Z=\frac{\overline{p}_{1\bullet}-\overline{p}_{\bullet 1}}{\sqrt{\frac{b+d}{n^2}}}$ [d] Normal $N(0,1)$ | $\{Z\leq z_{\frac{\alpha}{2}}\}\cup\{Z\geq z_{1-\frac{\alpha}{2}}\}$ | $(\overline{p}_{1\bullet}-\overline{p}_{\bullet 1}+z_{\frac{\alpha}{2}}\sqrt{\frac{b+d}{n^2}},\ \overline{p}_{1\bullet}-\overline{p}_{\bullet 1}-z_{\frac{\alpha}{2}}\sqrt{\frac{b+d}{n^2}})$ |
| **XVII** | | $\{Z\leq z_{\alpha}\}$ | $\left(-\infty,\overline{p}_{1\bullet}-\overline{p}_{\bullet 1}+z_{1-\alpha}\sqrt{\frac{b+d}{n^2}}\right)$ |
| **XVIII** | | $\{Z\geq z_{1-\alpha}\}$ | $\left(\overline{p}_{1\bullet}-\overline{p}_{\bullet 1}+z_{\alpha}\sqrt{\frac{b+d}{n^2}},+\infty\right)$ |

[a] Aquest estadístic és vàlid si $np(1-p)\geq 3$ i $\overline{p}$ és la proporció mostral.

[b] $\overline{p}=\frac{n_1\overline{p}_1+n_2\overline{p}_2}{n_1+n_2}$

[c] $\overline{q}=1-\overline{p}$

[d] En aquest cas, hem de construir la taula següent:

| | | Mostra després | | | |
|---|---|---|---|---|---|
| | | Èxit | Fracàs | Freqüència | Proporció |
| Mostra abans | Èxit | $a$ | $b$ | $a+b$ | $\overline{p}_{1\bullet}=\frac{a+b}{n}$ |
| | Fracàs | $d$ | $c$ | $c+d$ | $\overline{p}_{2\bullet}=\frac{c+d}{n}$ |
| | Freqüència | $a+d$ | $b+c$ | $n$ | |
| | Proporció | $\overline{p}_{\bullet 1}=\frac{a+d}{n}$ | $\overline{p}_{\bullet 2}=\frac{b+c}{n}$ | | 1 |

Per tant $a$ representa el nombre d'individus en les dues mostres (abans i després) que han obtengut èxit, $b$ el nombre d'individus que han obtengut èxit en la mostra d'abans i fracàs en la mostra de després, $c$ el nombre d'individus que han obtengut fracàs en les dues mostres i $d$ el nombre d'individus que han obtengut èxit en la mostra de després i fracàs en la mostra d'abans. Les proporcions $\overline{p}_{1\bullet}$ i $\overline{p}_{\bullet 1}$ les donen les fórmules en la taula anterior.

# Apèndix B

# Pràctiques d'estadística proposades

En aquest capítol s'exposaran una sèrie de pràctiques que l'alumne pot realitzar al llarg del curs.

Podem dir que una pràctica és un problema en què necessita l'ajut d'un ordinador per resoldre'l.

La pràctica ha de constar dels fitxers següents:

1. Programa font. Fitxer en format ASCII on hi ha el programa font de la pràctica.
2. Dades. Fitxer en format ASCII on l'usuari ha de posar les dades del problema.
3. Executable. Fitxer binari on hi ha l'executable, o sigui, el programa font una vegada compilat i enllaçat.
4. Ajut. Fitxer en format ASCII on hi haurà tota la informació de com s'ha realitzat la pràctica. Bàsicament s'hi ha de trobar:
   a) Software que s'ha fet servir en la realització de la pràctica.
   b) Format del fitxer de dades per poder executar la pràctica. O sigui, com s'han d'entrar les dades perquè el fitxer executable les entengui.
   c) Resultats obtenguts amb algun exemple.

   Aquest darrer fitxer s'ha d'entregar imprès.

La pràctica s'avaluarà executant el fitxer executable i vegent els resultats, tenint en compte els punts següents:

- Presentació.

- Capacitat d'emmagatzematge de dades.
- Resultats.

# B.1 Estadística descriptiva

## B.1.1 Introducció

Sigui $X_1, \ldots, X_N$ un conjunt de dades.

- Feu la distribució de freqüències amb intervals de classe amb límits reals i límits aparents d'amplada fixada $a$.

  Recordau que per trobar l'extrem de l'esquerra del primer interval, heu de trobar primer el mínim de la distribució.
- Feu l'histograma de les freqüències relatives i les freqüències relatives acumulades.
- Siguin $X_{1,r}, \ldots, X_{I,r}$ les marques de classe de la variable agrupada amb límits reals i $X_{1,a}, \ldots, X_{I,a}$ les marques de classe de la variable agrupada amb límits aparents. Calculau:

$$\begin{aligned} \overline{X}_r &= \frac{\sum_{i=1}^{I} n_i X_{i,r}}{N}, & \overline{X}_a &= \frac{\sum_{i=1}^{I} n_i X_{i,a}}{N}, \\ S_r^2 &= \frac{\sum_{i=1}^{I} n_i X_{i,r}^2}{N} - \overline{X}_r^2, & S_a^2 &= \frac{\sum_{i=1}^{I} n_i X_{i,a}^2}{N} - \overline{X}_a^2. \end{aligned}$$

## B.1.2 Definició de les variable aleatòries discretes

### Variable aleatòria discreta per a límits reals

Considerem la variable aleatòria discreta $X_r^{(d)}$ tal que el seu rang és:

$$X_r^{(d)}(\Omega) = \{L_1, \ldots, L_I\},$$

on els valors $L_j$ són els extrems dels intervals a considerar.

La funció de distribució de $X_r^{(d)}$ s'obté a partir de les freqüències relatives acumulades de la variable agrupada en la secció anterior.

Suposem que la distribució de freqüències de la variable agrupada es troba en la taula B.1.

| Intervals | $X_{i,r}$ | $f_i$ | $F_i$ |
|---|---|---|---|
| $[L_1, L_2)$ | $X_{1,r}$ | $f_1$ | $F_1$ |
| $[L_2, L_3)$ | $X_{2,r}$ | $f_2$ | $F_2$ |
| $\vdots$ | $\vdots$ | $\vdots$ | $\vdots$ |
| $[L_I, L_{I+1})$ | $X_{I,r}$ | $f_I$ | $F_I$ |

Taula B.1: Taula de les freqüències relatives de la variable agrupada amb límits reals.

La funció de distribució de la variable aleatòria $X_r^{(d)}$ serà:

$$F_{X_r^{(d)}}(x) = \begin{cases} 0, & \text{si } x < L_1, \\ F_1, & \text{si } L_1 \leq x < L_2, \\ F_2, & \text{si } L_2 \leq x < L_3, \\ \vdots & \vdots \\ 1, & \text{si } x \geq L_{I+1}. \end{cases}$$

Trobeu $\mathrm{E}(X_r^{(d)})$ i Var $(X_r^{(d)})$.

### Variable aleatòria discreta per a límits aparents

Feu el mateix que hem fet en la subsecció anterior però ara prenent límits aparents.

O sigui, definim la variable aleatòria $X_a^{(d)}$ amb rang:

$$X_a^{(d)}(\Omega) = \{L_1, \dots, L_I\}.$$

La funció de distribució de $X_a^{(d)}$ es defineix de la mateixa manera que la funció de distribució de $X_r^{(d)}$ però tenint en compte les freqüències relatives acumulades de la variable agrupada amb límits aparents.

### Qüestions

a) Quins dels valors $\mathrm{E}(X_r^{(d)})$ o $\mathrm{E}(X_a^{(d)})$ s'aproximen més a $\overline{X} = \frac{\sum_{i=1}^{N} X_i}{N}$?

b) Quins dels valors Var $(X_r^{(d)})$ o Var $(X_a^{(d)})$ s'aproximen més a $S^2 = \frac{\sum_{i=1}^{N} X_i^2}{N} - \overline{X}^2$?

c) Feu els gràfics de les funcions de distribució de les variables aleatòries $X_r^{(d)}$ i $X_a^{(d)}$.

### B.1.3 Definició de les variables aleatòries contínues

#### Variable aleatòria contínua per a límits reals

Ara definirem la variable aleatòria contínua $X_r^{(c)}$.

Tenint en compte que la taula de les freqüències relatives i acumulades es troba en la taula B.1, la funció de distribució de $X_r^{(c)}$ està definida de la manera següent:

Si $x \leq L_1$, $F_{X_r^{(c)}}(x) = 0$.

Si $L_1 < x \leq L_2$, $F_{X_r^{(c)}}(x)$ val la imatge que li correspon en la recta que uneix els punts $(L_1, 0)$ i $(L_2, F_1)$.

Si $L_2 < x \leq L_3$, $F_{X_r^{(c)}}(x)$ val la imatge que li correspon en la recta que uneix els punts $(L_2, F_1)$ i $(L_3, F_2)$.

$\vdots$

Si $x \geq L_{I+1}$, $F_{X_r^{(c)}}(x)$ val 1.

O sigui, la funció de distribució està construïda com a interpolació lineal de les freqüències relatives acumulades com imatges dels intervals de classe. Vegeu el gràfic B.1 per entendre millor la construcció.

#### Variable aleatòria contínua per a límits aparents

Feu el mateix que hem fet en la subsecció anterior però ara prenent límits aparents.

O sigui, definim la variable aleatòria $X_a^{(c)}$ on la funció de distribució de $X_a^{(c)}$ es defineix de la mateixa manera que la funció de distribució de $X_r^{(c)}$ però tenint en compte les freqüències relatives acumulades de la variable agrupada amb límits aparents.

#### Qüestions

a) Quins dels valors $\mathrm{E}(X_r^{(c)})$ o $\mathrm{E}(X_a^{(c)})$ s'aproximen més a $\overline{X} = \frac{\sum_{i=1}^{N} X_i}{N}$?

b) Quins dels valors $\mathrm{Var}\,(X_r^{(c)})$ o $\mathrm{Var}\,(X_a^{(c)})$ s'aproximen més a $S^2 = \frac{\sum_{i=1}^{N} X_i^2}{N} - \overline{X}^2$?

c) Feu els gràfics de les funcions de distribució de les variables aleatòries $X_r^{(c)}$ i $X_a^{(c)}$.

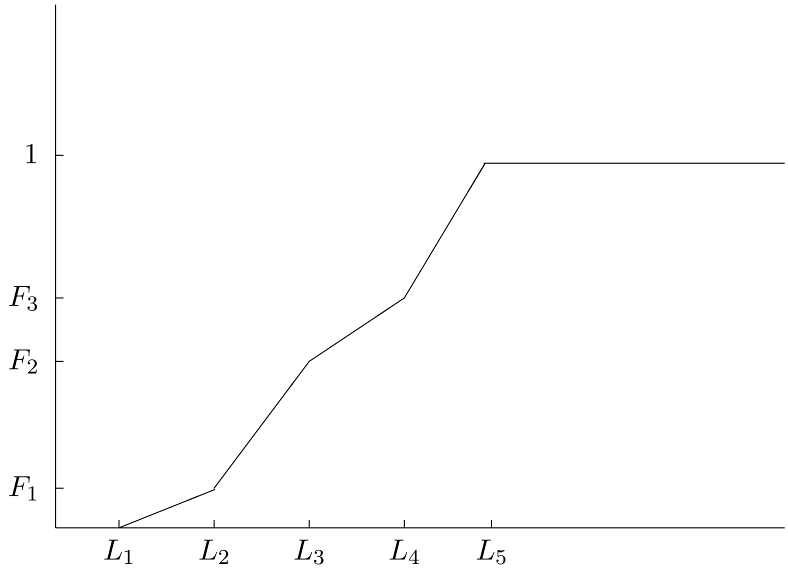


Figura B.1: Gràfic de la funció de distribució per a la variable aleatòria $X_r^{(c)}$

## B.2 Teorema del límit central

### B.2.1 Generació de la mostra aleatòria simple

Sigui $X$ una variable aleatòria amb funció de distribució coneguda. Per exemple $X$ pot ser:

$Poiss(\lambda)$ Variable aleatòria de Poisson amb paràmetre $\lambda$.

$B(n, p)$ Variable aleatòria binomial amb paràmetres $n$ i $p$.

**Exp** $(\lambda)$ Variable aleatòria exponencial amb paràmetre $\lambda$.

$N(\mu, \sigma^2)$ Variable aleatòria normal amb paràmetres $\mu$ i $\sigma^2$.

$\chi^2_n$ Variable aleatòria khi quadrat amb $n$ graus de llibertat.

Generau una mostra aleatòria simple de grandària $N$ per a una variable aleatòria $X$ amb qualsevol de les funcions de distribució descrites anteriorment. Vegeu el problema 5.6 com a ajuda de com generar l'esmentada mostra.

### B.2.2 Comprovació que la mostra anterior correspon a la variable aleatòria $X$

Vegeu mitjançant el test $\chi^2$ i mitjançant el test de Kolmogorov-Smirnov que la mostra anterior correspon a la variable aleatòria $X$.

O sigui, trobeu l'error tipus I màxim $\alpha_{\text{màx}}$ per poder acceptar que la mostra anterior correspon a la variable aleatòria $X$ fent servir els dos tests esmentats anteriorment.

### B.2.3 Definició de la funció de distribució empírica

Sigui $X_1, \ldots, X_N$ la mostra aleatòria simple generada en l'apartat anterior.

Definim una nova mostra aleatòria simple $Y_1, \ldots, Y_N$ a partir de la mostra anterior:

$$Y_i = \frac{\overline{X}_i - \mu}{\frac{\sigma}{\sqrt{i}}},$$

on

$$\overline{X}_i = \frac{\sum\limits_{j=1}^{i} X_j}{i}, \quad \mu = \mathrm{E}(X), \quad \sigma = \sqrt{\mathrm{Var}\ (X)}.$$

Considerem la funció de distribució empírica a partir de la mostra anterior definida com:

$$F_Y^{(N)}(t) = \frac{\#\{i \mid Y_i \leq t\}}{N}, \text{ on el símbol } \# \text{ indica cardinal d'un conjunt.}$$

Fixat $t$, trobeu:

$$\lim_{N \to \infty} F_Y^{(N)}(t) := L_t.$$

Qüestió:

És cert que:

$$L_t = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{t} e^{-\frac{t^2}{2}}\, dt = 0.5 + \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_0^t e^{-\frac{t^2}{2}}\, dt?$$

## B.3 Estudi de la fiabilitat d'un examen tipus test

### B.3.1 Introducció

Considerem un examen tipus test amb $N$ preguntes, realitzat per $M$ alumnes.

Suposem que cada pregunta té en total 5 respostes i que cada pregunta té la mateixa puntuació per a la nota final.

Si l'alumne contesta bé la pregunta, li donam 1 punt damunt $N$ en la nota final; si la contesta malament, li restam 0.25 punts damunt $N$ i si contesta en blanc, no li donam cap punt.

Considerem la matriu $A$ on tenim el resultat de l'examen:

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & \cdots & a_{1N} \\ a_{21} & \cdots & a_{2N} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{M1} & \cdots & a_{MN} \end{pmatrix},$$

on $a_{ij}$ representa el que ha contestat l'alumne $i$ a la pregunta $j$.

Amb vista a fixar idees, suposeu que la resposta verdadera és sempre la primera. O sigui, si l'examen d'un determinat alumne és:

$$1, 1, 1, 1 \ldots, 1,$$

té un $N$ damunt $N$ de nota final o un 10 damunt 10.

### B.3.2 Estudi de la independència de la variable *Resposta* i de la variable *Nota*

Per a cada pregunta $P_i$ $(i = 1, \ldots, N)$ considerem la taula següent:

| Nota\Resposta | 1 | 2 | 3 | 4 | 5 | 0 |
|---|---|---|---|---|---|---|
| $[0, 1)$ | $b_{01}$ | $b_{02}$ | $b_{03}$ | $b_{04}$ | $b_{05}$ | $b_{06}$ |
| $[1, 2)$ | $b_{11}$ | $b_{12}$ | $b_{13}$ | $b_{14}$ | $b_{15}$ | $b_{16}$ |
| $[2, 3)$ | $b_{21}$ | $b_{22}$ | $b_{23}$ | $b_{24}$ | $b_{25}$ | $b_{26}$ |
| $[3, 4)$ | $b_{31}$ | $b_{32}$ | $b_{33}$ | $b_{34}$ | $b_{35}$ | $b_{36}$ |
| $[4, 5)$ | $b_{41}$ | $b_{42}$ | $b_{43}$ | $b_{44}$ | $b_{45}$ | $b_{46}$ |
| $[5, 6)$ | $b_{51}$ | $b_{52}$ | $b_{53}$ | $b_{54}$ | $b_{55}$ | $b_{56}$ |
| $[6, 7)$ | $b_{61}$ | $b_{62}$ | $b_{63}$ | $b_{64}$ | $b_{65}$ | $b_{66}$ |
| $[7, 8)$ | $b_{71}$ | $b_{72}$ | $b_{73}$ | $b_{74}$ | $b_{75}$ | $b_{76}$ |
| $[8, 9)$ | $b_{81}$ | $b_{82}$ | $b_{83}$ | $b_{84}$ | $b_{85}$ | $b_{86}$ |
| $[9, 10)$ | $b_{91}$ | $b_{92}$ | $b_{93}$ | $b_{94}$ | $b_{95}$ | $b_{96}$ |

on $b_{ij}$ és la quantitat d'alumnes que han contestat la resposta $j$ i han tret una nota entre $i$ i $i + 1$.

La partició que hem fet de la variable *Nota* en la taula anterior és d'intervals d'amplada 1. Per fer la pràctica, s'han de considerar altres particions per a amplades qualsevols.

Vegeu a partir del test $\chi^2$ si la variable *Resposta* és independent de la variable *Nota*. O sigui, trobau l'error tipus I màxim ($\alpha_{\text{màx}}$) a partir del qual acceptam independència.

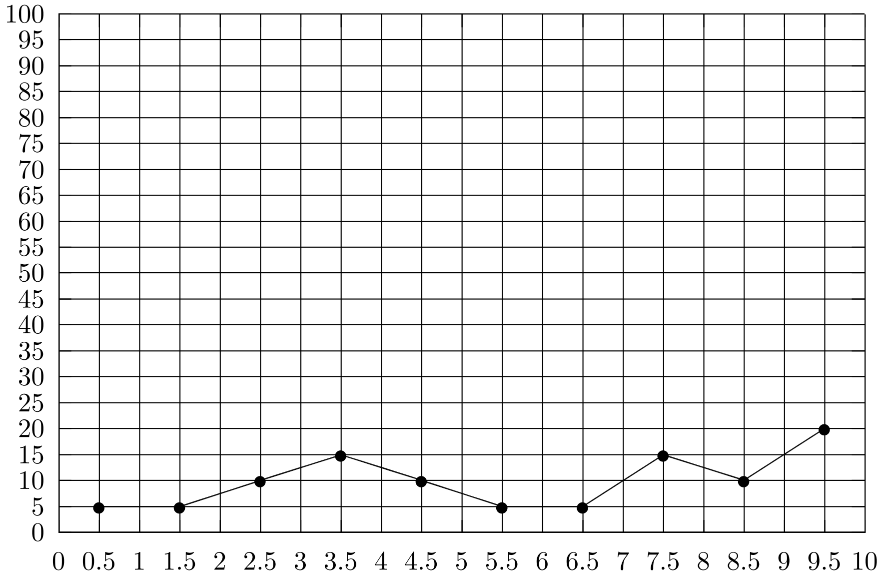


Figura B.2: Gràfic de la variable $p_j^{(i)}\%$ com a funció de la variable *Nota*

### B.3.3 Estudi de la dificultat i coherència de cada pregunta

Per a cada pregunta $P_i$ $(i = 1, \ldots, N)$, construïu la taula següent:

| Nota | $[0,1)$ | $[1,2)$ | $[2,3)$ | $[3,4)$ | $[4,5)$ | $[5,6)$ | $[6,7)$ | $[7,8)$ | $[8,9)$ | $[9,10)$ |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| | $p_0^{(i)}\%$ | $p_1^{(i)}\%$ | $p_2^{(i)}\%$ | $p_3^{(i)}\%$ | $p_4^{(i)}\%$ | $p_5^{(i)}\%$ | $p_6^{(i)}\%$ | $p_7^{(i)}\%$ | $p_8^{(i)}\%$ | $p_9^{(i)}\%$ |

on $p_j^{(i)}\%$ és el tant per cent de gent que ha contestat bé la pregunta $P_i$ i ha tengut una nota entre $j$ i $j+1$. O sigui, $p_j^{(i)}/100$ és el quocient entre la quantitat d'alumnes que han contestat bé la pregunta $P_i$ i han tengut una nota entre $j$ i $j+1$ i la quantitat d'alumnes que han contestat bé la pregunta $P_i$. S'ha de complir, doncs, que $\sum_{j=0}^{9} p_j^{(i)} = 100$.

Feu el gràfic de la variable $p_j^{(i)}\%$ com a funció de la variable *Nota* per a cada pregunta $P_i$ i uniu de forma lineal els punts que surten. Vegeu gràfic B.2 per entendre com ha de ser el gràfic demanat. Agafeu les marques de classe dels intervals agrupats de la variable *Nota* per representar el gràfic.

Dibuxau en el mateix dibuix tots els gràfics corresponents a totes les preguntes $P_i$.

Interpretau els resultats.

Qüestions:

- Com es veu reflectida la dificultat d'una pregunta en el gràfic anterior?
- Digau a partir del vostre gràfic quina seria segons el vostre criteri la pregunta més difícil i la més fàcil.
- Com es veu reflectida la coherència d'una pregunta en el gràfic anterior? Per coherència vull dir si la pregunta està ben contestada pels alumnes bons i mal contestada pels dolents.
- Digau, a partir del vostre gràfic, quina seria segons el vostre criteri la pregunta més coherent i la menys coherent.

### B.3.4 Estudi de la coherència dels distractors

Fixam una pregunta $P_i$. Per a cada resposta errònia $R_k$ ($k \neq 1$), construïu la taula:

| Nota | $[0,1)$ | $[1,2)$ | $[2,3)$ | $[3,4)$ | $[4,5)$ | $[5,6)$ | $[6,7)$ | $[7,8)$ | $[8,9)$ | $[9,10)$ |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| | $p_0^{(i,k)}\%$ | $p_1^{(i,k)}\%$ | $p_2^{(i,k)}\%$ | $p_3^{(i,k)}\%$ | $p_4^{(i,k)}\%$ | $p_5^{(i,k)}\%$ | $p_6^{(i,k)}\%$ | $p_7^{(i,k)}\%$ | $p_8^{(i,k)}\%$ | $p_9^{(i,k)}\%$ |

on $p_j^{(i,k)}\%$ és el tant per cent de gent que ha contestat la resposta $k$ i ha tret una nota entre $j$ i $j+1$. O sigui, $p_j^{(i,k)}/100$ és el quocient entre la quantitat d'alumnes que han contestat la resposta $k$ en la pregunta $i$ i han obtengut una nota entre $j$ i $j+1$ i la quantitat d'alumnes que han contestat la resposta $k$ en la pregunta $i$. S'ha de complir, doncs, que $\sum_{j=0}^{9} p_j^{(i,k)} = 100$.

Feu el gràfic de la variable $p_j^{(i,k)}$ com a funció de la variable *Nota*. Vegeu gràfic B.2 per entendre millor com ha de ser el gràfic demanat.

Intepretació dels resultats.

Qüestió:

- Com es veu reflectida la coherència del distractor $R_k$ en els gràfics anteriors?

Un distractor $R_k$ és coherent si hi ha hagut pocs alumnes bons que l'han contestat i molts de dolents.

## B.4 Contrasts d'hipòtesi corresponents als paràmetres $\mu$ i $\sigma$

### B.4.1 Introducció i generació de les mostres

En aquesta pràctica veurem si els estimadors $\overline{X}$, $S^2$ i $\tilde{S}^2$ són bons estimadors dels paràmetres $\mu$ i $\sigma^2$ respectivament, fent servir la teoria del contrast d'hipòtesi.

Generau dues mostres aleatòries simples: una d'una variable aleatòria $N(\mu, \sigma^2)$ on $\mu$ i $\sigma^2$ són paràmetres i l'altra d'una variable aleatòria $t_n$ ($t$ de Student amb $n$ graus de llibertat) on $n$ també és un altre paràmetre. Els paràmetres s'han de fixar d'entrada. Vegeu problema 5.6 per entendre com podem generar les esmentades mostres.

Comprovau a partir del test $\chi^2$ i el test de Kolmogorov-Smirnov que les mostres anteriors corresponen a la variable aleatòria normal i $t_n$ de Student, respectivament.

### B.4.2 Contrast d'hipòtesi per a la mitjana

Sigui $X_1, \ldots, X_n$ la mostra generada en la secció anterior.

Sigui $\mu_0$ un valor qualsevol fixat d'entrada.

Considerem el contrast d'hipòtesi següent:

$$\left.\begin{array}{ll} H_0: & \mu = \mu_0, \\ H_1: & \mu \neq \mu_0. \end{array}\right\}$$

Trobau $\alpha_{\text{màx}}(\mu_0)$: error tipus I màxim a partir del qual rebutjam la hipòtesi nul·la $H_0$.

Representau gràficament la funció: $\alpha_{\text{màx}} = \alpha_{\text{màx}}(\mu_0)$.

Qüestions:

- És cert que el gràfic anterior té el màxim en $\overline{X} = \frac{\sum_{i=1}^{n} X_i}{n}$?
- Interpretau el gràfic anterior.

### B.4.3 Contrast d'hipòtesi per a la variància

Sigui $\sigma_0^2$ un valor qualsevol fixat d'entrada.

Considerem ara el contrast següent:

$$\left.\begin{array}{ll} H_0: & \sigma^2 = \sigma_0^2, \\ H_1: & \sigma^2 \neq \sigma_0^2. \end{array}\right\}$$

Trobau $\alpha_{\text{màx}}(\sigma_0^2)$: error tipus I màxim a partir del qual rebutjam la hipòtesi nul·la $H_0$.

Representau gràficament la funció: $\alpha_{\text{màx}} = \alpha_{\text{màx}}(\sigma_0^2)$.

- On té el màxim el gràfic anterior?
- De quin dels dos estimadors, $S^2$ o $\tilde{S}^2$ està més a prop el màxim anterior?

  Recordem que les fórmules dels estimadors $S^2$ i $\tilde{S}^2$ són:

$$\begin{aligned} S^2 &= \frac{\sum_{i=1}^{n} X_i^2}{n} - \overline{X}^2, \\ \tilde{S}^2 &= \frac{1}{n-1}\sum_{i=1}^{n}(X_i - \overline{X})^2 = \frac{n}{n-1}S^2. \end{aligned}$$

- Interpretau el gràfic anterior.

## B.5 Lleis dels grans nombres i test $\chi^2$

### B.5.1 Introducció

Considerem $(X_1, \ldots, X_k)$ una variable aleatòria multinomial amb paràmetres $p_1, \ldots, p_k, n$ on recordem que

$$\sum_{i=1}^{k} p_i = 1, \quad \sum_{i=1}^{k} X_i = n.$$

Trobau una mostra aleatòria simple de la variable aleatòria anterior de grandària $N$. Sigui

$$\begin{array}{ccc} (X_1^{(1)}, & \ldots, & X_k^{(1)}) \\ (X_1^{(2)}, & \ldots, & X_k^{(2)}) \\ & \vdots & \\ (X_1^{(N)}, & \ldots, & X_k^{(N)}), \end{array}$$

l'esmentada mostra.

Per exemple, en el cas del llançament d'un dau, $k = 6$ i $p_i = \frac{1}{6}$, $i = 1, 2, 3, 4, 5, 6$.

### B.5.2 Lleis dels grans nombres

Trobau el límit següent:

$$\lim_{N\to\infty} \frac{\sum\limits_{i=1}^{N} X_j^{(i)}}{nN} := L_j.$$

Comprovau la llei dels grans nombres, o sigui, vegeu que $L_j = p_j$, per a tot $j = 1, \ldots, k$.

### B.5.3 Test $\chi^2$

#### Estudi del test a partir del propi test $\chi^2$

A partir de cada element de la mostra aleatòria simple generada en la secció B.5.1, definim una altra mostra de la forma següent:

$$Y^{(i)} = \sum_{j=1}^{k} \frac{\left(X_j^{(i)} - np_j\right)^2}{np_j}, \ i = 1, \ldots, N.$$

Vegeu mitjançant el test de la $\chi^2$ si la mostra aleatòria simple

$$Y^{(1)}, \ldots, Y^{(N)},$$

correspon a una variable aleatòria $\chi^2_{k-1}$ (variable khi quadrat amb $k-1$ graus de llibertat).

#### Estudi del test a partir de la funció de distribució empírica

Considerem la funció de distribució

empírica de la mostra aleatòria simple

$$Y^{(1)}, \ldots, Y^{(N)} :$$

$$F^{(N)}(t) = \frac{\#\{i \mid Y^{(i)} \leq t\}}{N},$$

on el símbol # vol dir cardinal d'un conjunt.

Fixam $t$. Trobau el límit:

$$\lim_{N\to\infty} F^{(N)}(t) := L_t.$$

Qüestió:

És cert que el límit anterior $L_t$ val $F_{\chi^2_{k-1}}(t)$ (funció de distribució de la variable $\chi^2_{k-1}$ en el punt $t$)?

## B.6 Test ANOVA d'un factor

### B.6.1 Generació de les mostres

Siguin $X_1, \ldots, X_k$, $k$ variables aleatòries normals $X_i = N(\mu_i, \sigma^2)$ i independents.

Generau $k$ mostres aleatòries simples corresponents a les variables aleatòries anteriors de grandàries respectives $n_1, \ldots, n_k$:

$$\begin{array}{ccc} Y_{1,1}, & \ldots, & Y_{1,n_1}, \\ Y_{2,1}, & \ldots, & Y_{2,n_2}, \\ & \vdots & \\ Y_{k,1}, & \ldots, & Y_{k,n_k}. \end{array}$$

Vegeu el problema 5.6 per entendre millor com generar les mostres anteriors.

### B.6.2 Comprovació de la normalitat i la independència

Vegeu mitjançant el test de la $\chi^2$ que les mostres anteriors són normals.

Fent servir el mateix test, comprovau que són independents de dues en dues, o sigui, vegeu que la mostra corresponent a la variable $Y_i$ és independent de la mostra corresponent a la variable $Y_j$, per $i \neq j$.

### B.6.3 Comprovació de la igualtat de variàncies

Vegeu mitjançant el test de Bartlett si totes les mostres anteriors corresponen a $k$ variables aleatòries amb la mateixa variància.

### B.6.4 Contrast ANOVA

Realitzau el contrast:

$$\left. \begin{array}{ll} H_0: & \mu_1 = \ldots = \mu_k \\ H_1: & \exists i, j \mid \mu_i \neq \mu_j \end{array} \right\}$$

O sigui, trobau $\alpha_{\text{màx}}$ (error tipus I màxim) per poder acceptar $H_0$.

En el cas de rebuig de la hipòtesi nul·la $H_0$, vegeu quines mitjanes són diferents a partir del test de Scheffé.

## B.7 Càlcul d'una integral definida per mètodes estadístics

### B.7.1 Introducció

Sigui $f : [a,b] \longrightarrow \mathbb{R}$ una funció real de variable real, integrable de Riemann en l'interval $[a,b]$.

L'objectiu d'aquesta pràctica és calcular Int:= $\int_a^b f(x)\,dx$.

Suposem que la funció $f$ compleix dues condicions:

- $f(x) \geq 0$, per a tot $x \in [a,b]$.
- $|f(x)| \leq M$ o $f(x) \in [0,M]$, per a tot $x \in [a,b]$, on $M = \max\limits_{x\in[a,b]} f(x) := f(x_M)$.

Trobarem la integral de dues maneres diferents.

### B.7.2 Càlcul de la integral a partir d'una variable aleatòria bidimensional

#### Definicions de les variables aleatòries

Considerem les variables aleatòries $X$ uniforme en l'interval $[a,b]$ i $Y$ uniforme en l'interval $[0,M]$.

Suposem que les variables aleatòries $X$ i $Y$ són independents.

La funció de densitat conjunta de la variable aleatòria bidimensional $(X,Y)$ serà:

$$f(x,y) = \begin{cases} \frac{1}{M(b-a)}, & \text{si } (x,y) \in [a,b]\times[0,M], \\ 0, & \text{en cas contrari.} \end{cases}$$

Considerem la prova de Bernoulli següent:

Sigui $(X_1,Y_1)$ una mostra aleatòria simple de grandària 1 de la variable aleatòria anterior $(X,Y)$.

Direm que ha sortit èxit en la prova de Bernoulli si $Y_1 \leq f(X_1)$ i que ha sortit fracàs si $Y_1 > f(X_1)$.

La probabilitat $p$ d'èxit valdrà, doncs:

$$\begin{aligned} p &= p\{Y \leq f(X)\} = \int\int_{\{(x,y)\ \mid\ y\leq f(x)\}} \frac{1}{M(b-a)}\,dx\,dy \\ &= \int_a^b \int_0^{f(x)} \frac{1}{M(b-a)}\,dx\,dy = \frac{1}{M(b-a)}\text{Int}. \end{aligned}$$

Sigui $Z$ la variable aleatòria de Bernoulli corresponent a la prova de Bernoulli definida anteriorment.

### Càlcul de la integral de forma aproximada

Sigui $Z_1, \ldots, Z_n$ una mostra aleatòria simple de la variable aleatòria $Z$. Cada variable $Z_i$ té assignada una variable bidimensional $(X_i, Y_i)$ amb la mateixa distribució que la variable $(X, Y)$.

Fent servir que l'estimador $\overline{Z}$ del paràmetre $p$ és consistent, podem afirmar:

$$\lim_{n\to\infty} p\left\{|\overline{Z} - p| < \epsilon\right\} = 1, \quad \forall \epsilon > 0,$$

on $\overline{Z} = \frac{\sum_{i=1}^{n} Z_i}{n}$.

Podem afirmar que $\overline{Z}$ és una bona aproximació del paràmetre $p$.

Podem aproximar la integral Int de la forma següent:

$$\text{Int} = M(b-a)p \approx M(b-a)\overline{Z}.$$

### Control de l'error comès

Donats $\epsilon > 0$, $\delta > 0$ fixats, trobeu $n$ tal que

$$p\left\{|\overline{Z} - p| > \epsilon\right\} \leq \delta,$$

El que es demana, de fet, és fer una taula de valors per a diferents $\epsilon$, $\delta$ i $n$.

Indicació: feu servir l'aproximació binomial a la normal per poder trobar la probabilitat anterior.

## B.7.3 Càlcul de la integral a partir d'una variable aleatòria unidimensional

### Definició de les variables aleatòries

Suposem que la funció $f(x)$, a més de complir les dues condiciones esmentades anteriorment, és estrictament monòtona en l'interval $[a, b]$.

Sigui $X$ una variable aleatòria $U[a, b]$. Definim una altra variable $Y$ de la forma següent:

Donat un element $\omega$ de l'espai mostral $\Omega$, definim $Y(\omega)$ com:

$$Y(\omega) = \begin{cases} f\left(X(\omega)\right), & \text{si } X(\omega) \in [a, b], \\ 0, & \text{en cas contrari.} \end{cases}$$

Vegeu que $\mathrm{E}_Y(Y) = \mathrm{E}_X(f(X))$, o sigui, comprovau la igualtat de les fórmules següents:

$$\mathrm{E}_Y(Y) \int_{\mathbb{R}} y f_Y(y)\, dy = \int_a^b \frac{1}{b-a} f(x)\, dx. \tag{B.1}$$

## Càlcul de la integral de forma aproximada

Sigui $X_1, \ldots, X_n$ una mostra aleatòria simple de la v.a. $X$. Aleshores, podem afirmar que $Y_1 := f(X_1), \ldots, Y_n := f(X_n)$ serà una mostra aleatòria simple de la v.a. $Y$.

Fent servir l'expresió B.1, podem afirmar: $\mathrm{E}_Y(Y) = \frac{1}{b-a}\mathrm{Int}$.

Tenint en compte que $\overline{Y} = \overline{f(X)} = \frac{\sum_{i=1}^{n} f(X_i)}{n}$ és un bon estimador del paràmetre $\mathrm{E}_Y(Y)$, podem escriure:

$$\lim_{n\to\infty} \left\{ \left| \overline{Y} - \frac{1}{b-a}\mathrm{Int} \right| > \epsilon \right\} = 0, \quad \forall \epsilon > 0. \tag{B.2}$$

Així prenem com a aproximació de Int:

$$\mathrm{Int} = (b-a)E_Y(Y) \approx (b-a)\overline{Y}.$$

Podem dir que la fórmula B.2 continua essent certa per a funcions $f$ no monòtones? I per a funcions $f$ qualssevol integrables de Riemann?

# Apèndix C

# Taules estadístiques

En aquest capítol mostrarem les taules de les distribucions $N(0,1)$, $t_n$ de Student amb $n$ graus de llibertat, $\chi_n^2$ khi quadrat amb $n$ graus de llibertat i distribució $F_{n_1,n_2}$ $F$ de Fisher-Snedecor amb $n_1$ i $n_2$ graus de llibertat.

Vegeu l'Apèndix A per entendre la notació que feim servir.

A continuació, enunciarem unes propietats de les distribucions anteriors per poder simplificar les taules.

- $N(0,1)$, tenim que $\forall \alpha \in [0,1]$,

$$z_\alpha = -z_{1-\alpha}, \text{ o sigui, } \forall x \in \mathbb{R}, \quad p\{Z \leq x\} = 1 - p\{Z \leq -x\}.$$

- $t_n$ En la distribució $t_n$ de Student, tenim una propietat semblant:

$$t_{n,\alpha} = -t_{n,1-\alpha}, \text{ o sigui, } \forall x \in \mathbb{R}, \quad p\{t_n \leq x\} = 1 - p\{t_n \leq -x\}.$$

  Per tant, en aquests dos casos, basta donar la funció de distribució per valors de $x$ positius ($x \geq 0$) o per a valors de $\alpha$ entre 0.5 i 1.

- $F_{n_1,n_2}$ En la distribució $F_{n_1,n_2}$ de Fisher Snedecor, tenim que $\forall \alpha \in [0,1]$,

$$F_{n_1,n_2,\alpha} = \frac{1}{F_{n_2,n_1,1-\alpha}}, \text{ o sigui, } \forall x \in \mathbb{R}, \quad p\{F_{n_1,n_2} \leq x\} = 1 - p\left\{F_{n_2,n_1} \leq \frac{1}{x}\right\}.$$

  Per tant, en aquest cas, basta donar la distribució de la variable aleatòria $F_{n_1,n_2}$ per a valors de $\alpha$ entre 0.5 i 1.

## C.1 Taules de la distribució $N(0,1)$ $(z_\alpha)$

| $x$ | 0 | 1 | 2 | 3 | 4 | 5 | 6 | 7 | 8 | 9 |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| 0.0 | 0.5 | 0.504 | 0.508 | 0.512 | 0.516 | 0.5199 | 0.5239 | 0.5279 | 0.5319 | 0.5359 |
| 0.1 | 0.5398 | 0.5438 | 0.5478 | 0.5517 | 0.5557 | 0.5596 | 0.5636 | 0.5675 | 0.5714 | 0.5753 |
| 0.2 | 0.5793 | 0.5832 | 0.5871 | 0.591 | 0.5948 | 0.5987 | 0.6026 | 0.6064 | 0.6103 | 0.6141 |
| 0.3 | 0.6179 | 0.6217 | 0.6255 | 0.6293 | 0.6331 | 0.6368 | 0.6406 | 0.6443 | 0.648 | 0.6517 |
| 0.4 | 0.6554 | 0.6591 | 0.6628 | 0.6664 | 0.67 | 0.6736 | 0.6772 | 0.6808 | 0.6844 | 0.6879 |
| 0.5 | 0.6915 | 0.695 | 0.6985 | 0.7019 | 0.7054 | 0.7088 | 0.7123 | 0.7157 | 0.719 | 0.7224 |
| 0.6 | 0.7257 | 0.7291 | 0.7324 | 0.7357 | 0.7389 | 0.7422 | 0.7454 | 0.7486 | 0.7517 | 0.7549 |
| 0.7 | 0.758 | 0.7611 | 0.7642 | 0.7673 | 0.7704 | 0.7734 | 0.7764 | 0.7794 | 0.7823 | 0.7852 |
| 0.8 | 0.7881 | 0.791 | 0.7939 | 0.7967 | 0.7995 | 0.8023 | 0.8051 | 0.8078 | 0.8106 | 0.8133 |
| 0.9 | 0.8159 | 0.8186 | 0.8212 | 0.8238 | 0.8264 | 0.8289 | 0.8315 | 0.834 | 0.8365 | 0.8389 |
| 1.0 | 0.8413 | 0.8438 | 0.8461 | 0.8485 | 0.8508 | 0.8531 | 0.8554 | 0.8577 | 0.8599 | 0.8621 |
| 1.1 | 0.8643 | 0.8665 | 0.8686 | 0.8708 | 0.8729 | 0.8749 | 0.877 | 0.879 | 0.881 | 0.883 |
| 1.2 | 0.8849 | 0.8869 | 0.8888 | 0.8907 | 0.8925 | 0.8944 | 0.8962 | 0.898 | 0.8997 | 0.9015 |
| 1.3 | 0.9032 | 0.9049 | 0.9066 | 0.9082 | 0.9099 | 0.9115 | 0.9131 | 0.9147 | 0.9162 | 0.9177 |
| 1.4 | 0.9192 | 0.9207 | 0.9222 | 0.9236 | 0.9251 | 0.9265 | 0.9279 | 0.9292 | 0.9306 | 0.9319 |
| 1.5 | 0.9332 | 0.9345 | 0.9357 | 0.937 | 0.9382 | 0.9394 | 0.9406 | 0.9418 | 0.9429 | 0.9441 |
| 1.6 | 0.9452 | 0.9463 | 0.9474 | 0.9484 | 0.9495 | 0.9505 | 0.9515 | 0.9525 | 0.9535 | 0.9545 |
| 1.7 | 0.9554 | 0.9564 | 0.9573 | 0.9582 | 0.9591 | 0.9599 | 0.9608 | 0.9616 | 0.9625 | 0.9633 |
| 1.8 | 0.9641 | 0.9649 | 0.9656 | 0.9664 | 0.9671 | 0.9678 | 0.9686 | 0.9693 | 0.9699 | 0.9706 |
| 1.9 | 0.9713 | 0.9719 | 0.9726 | 0.9732 | 0.9738 | 0.9744 | 0.975 | 0.9756 | 0.9761 | 0.9767 |
| 2.0 | 0.9772 | 0.9778 | 0.9783 | 0.9788 | 0.9793 | 0.9798 | 0.9803 | 0.9808 | 0.9812 | 0.9817 |
| 2.1 | 0.9821 | 0.9826 | 0.983 | 0.9834 | 0.9838 | 0.9842 | 0.9846 | 0.985 | 0.9854 | 0.9857 |
| 2.2 | 0.9861 | 0.9864 | 0.9868 | 0.9871 | 0.9875 | 0.9878 | 0.9881 | 0.9884 | 0.9887 | 0.989 |
| 2.3 | 0.9893 | 0.9896 | 0.9898 | 0.9901 | 0.9904 | 0.9906 | 0.9909 | 0.9911 | 0.9913 | 0.9916 |
| 2.4 | 0.9918 | 0.992 | 0.9922 | 0.9925 | 0.9927 | 0.9929 | 0.9931 | 0.9932 | 0.9934 | 0.9936 |
| 2.5 | 0.9938 | 0.994 | 0.9941 | 0.9943 | 0.9945 | 0.9946 | 0.9948 | 0.9949 | 0.9951 | 0.9952 |
| 2.6 | 0.9953 | 0.9955 | 0.9956 | 0.9957 | 0.9959 | 0.996 | 0.9961 | 0.9962 | 0.9963 | 0.9964 |
| 2.7 | 0.9965 | 0.9966 | 0.9967 | 0.9968 | 0.9969 | 0.997 | 0.9971 | 0.9972 | 0.9973 | 0.9974 |
| 2.8 | 0.9974 | 0.9975 | 0.9976 | 0.9977 | 0.9977 | 0.9978 | 0.9979 | 0.9979 | 0.998 | 0.9981 |
| 2.9 | 0.9981 | 0.9982 | 0.9982 | 0.9983 | 0.9984 | 0.9984 | 0.9985 | 0.9985 | 0.9986 | 0.9986 |
| 3.0 | 0.9987 | 0.9987 | 0.9987 | 0.9988 | 0.9988 | 0.9989 | 0.9989 | 0.9989 | 0.999 | 0.999 |
| 3.1 | 0.999 | 0.9991 | 0.9991 | 0.9991 | 0.9992 | 0.9992 | 0.9992 | 0.9992 | 0.9993 | 0.9993 |
| 3.2 | 0.9993 | 0.9993 | 0.9994 | 0.9994 | 0.9994 | 0.9994 | 0.9994 | 0.9995 | 0.9995 | 0.9995 |
| 3.3 | 0.9995 | 0.9995 | 0.9995 | 0.9996 | 0.9996 | 0.9996 | 0.9996 | 0.9996 | 0.9996 | 0.9997 |
| 3.4 | 0.9997 | 0.9997 | 0.9997 | 0.9997 | 0.9997 | 0.9997 | 0.9997 | 0.9997 | 0.9997 | 0.9998 |
| 3.5 | 0.9998 | 0.9998 | 0.9998 | 0.9998 | 0.9998 | 0.9998 | 0.9998 | 0.9998 | 0.9998 | 0.9998 |
| 3.6 | 0.9998 | 0.9998 | 0.9999 | 0.9999 | 0.9999 | 0.9999 | 0.9999 | 0.9999 | 0.9999 | 0.9999 |
| 3.7 | 0.9999 | 0.9999 | 0.9999 | 0.9999 | 0.9999 | 0.9999 | 0.9999 | 0.9999 | 0.9999 | 0.9999 |
| 3.8 | 0.9999 | 0.9999 | 0.9999 | 0.9999 | 0.9999 | 0.9999 | 0.9999 | 0.9999 | 0.9999 | 0.9999 |
| 3.9 | 1. | 1. | 1. | 1. | 1. | 1. | 1. | 1. | 1. | 1. |

# C.2 Distribució $t$ de Student amb $n$ graus de llibertat $t_n$ $(t_{n,\alpha})$

| $n\backslash\alpha$ | 0.995 | 0.99 | 0.975 | 0.95 | 0.9 | 0.85 | 0.8 | 0.75 | 0.7 | 0.65 | 0.6 | 0.55 |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| 1 | 63.66 | 31.82 | 12.71 | 6.31 | 3.08 | 1.96 | 1.38 | 1.00 | 0.73 | 0.51 | 0.32 | 0.16 |
| 2 | 9.92 | 6.96 | 4.30 | 2.92 | 1.90 | 1.40 | 1.06 | 0.82 | 0.62 | 0.44 | 0.30 | 0.14 |
| 3 | 5.84 | 4.54 | 3.18 | 2.35 | 1.64 | 1.25 | 0.98 | 0.76 | 0.58 | 0.42 | 0.28 | 0.14 |
| 4 | 4.60 | 3.75 | 2.78 | 2.13 | 1.53 | 1.20 | 0.94 | 0.74 | 0.57 | 0.41 | 0.27 | 0.13 |
| 5 | 4.03 | 3.36 | 2.57 | 2.02 | 1.48 | 1.16 | 0.92 | 0.73 | 0.56 | 0.41 | 0.27 | 0.13 |
| 6 | 3.71 | 3.14 | 2.45 | 1.94 | 1.44 | 1.13 | 0.91 | 0.72 | 0.55 | 0.40 | 0.26 | 0.13 |
| 7 | 3.50 | 3.00 | 2.36 | 1.89 | 1.41 | 1.12 | 0.90 | 0.71 | 0.55 | 0.40 | 0.26 | 0.13 |
| 8 | 3.36 | 2.90 | 2.31 | 1.86 | 1.40 | 1.11 | 0.90 | 0.71 | 0.55 | 0.40 | 0.26 | 0.13 |
| 9 | 3.25 | 2.82 | 2.26 | 1.83 | 1.38 | 1.10 | 0.88 | 0.70 | 0.54 | 0.40 | 0.26 | 0.13 |
| 10 | 3.17 | 2.76 | 2.23 | 1.81 | 1.37 | 1.09 | 0.88 | 0.70 | 0.54 | 0.40 | 0.26 | 0.13 |
| 11 | 3.11 | 2.72 | 2.20 | 1.80 | 1.36 | 1.10 | 0.88 | 0.70 | 0.54 | 0.40 | 0.26 | 0.13 |
| 12 | 3.05 | 2.68 | 2.18 | 1.78 | 1.36 | 1.08 | 0.87 | 0.70 | 0.54 | 0.39 | 0.26 | 0.13 |
| 13 | 3.01 | 2.65 | 2.16 | 1.77 | 1.35 | 1.08 | 0.87 | 0.69 | 0.54 | 0.39 | 0.26 | 0.13 |
| 14 | 2.98 | 2.62 | 2.14 | 1.76 | 1.35 | 1.08 | 0.87 | 0.69 | 0.54 | 0.39 | 0.26 | 0.13 |
| 15 | 2.95 | 2.60 | 2.13 | 1.75 | 1.34 | 1.07 | 0.87 | 0.69 | 0.54 | 0.39 | 0.26 | 0.13 |
| 16 | 2.92 | 2.58 | 2.12 | 1.75 | 1.34 | 1.07 | 0.86 | 0.69 | 0.54 | 0.39 | 0.26 | 0.13 |
| 17 | 2.90 | 2.57 | 2.11 | 1.74 | 1.33 | 1.07 | 0.86 | 0.70 | 0.53 | 0.39 | 0.26 | 0.13 |
| 18 | 2.88 | 2.55 | 2.10 | 1.73 | 1.33 | 1.07 | 0.86 | 0.70 | 0.53 | 0.39 | 0.26 | 0.13 |
| 19 | 2.86 | 2.54 | 2.09 | 1.73 | 1.33 | 1.07 | 0.86 | 0.70 | 0.53 | 0.39 | 0.26 | 0.13 |
| 20 | 2.85 | 2.53 | 2.10 | 1.72 | 1.33 | 1.06 | 0.86 | 0.70 | 0.53 | 0.39 | 0.26 | 0.13 |
| 21 | 2.83 | 2.52 | 2.08 | 1.72 | 1.32 | 1.06 | 0.86 | 0.70 | 0.53 | 0.39 | 0.26 | 0.13 |
| 22 | 2.82 | 2.51 | 2.07 | 1.72 | 1.32 | 1.06 | 0.86 | 0.70 | 0.53 | 0.39 | 0.26 | 0.13 |
| 23 | 2.81 | 2.50 | 2.07 | 1.71 | 1.32 | 1.06 | 0.86 | 0.70 | 0.53 | 0.39 | 0.26 | 0.13 |
| 24 | 2.80 | 2.49 | 2.06 | 1.71 | 1.32 | 1.06 | 0.86 | 0.68 | 0.53 | 0.40 | 0.26 | 0.13 |
| 25 | 2.80 | 2.50 | 2.06 | 1.71 | 1.32 | 1.06 | 0.86 | 0.68 | 0.53 | 0.40 | 0.26 | 0.13 |
| 26 | 2.78 | 2.48 | 2.06 | 1.71 | 1.31 | 1.06 | 0.86 | 0.68 | 0.53 | 0.40 | 0.26 | 0.13 |
| 27 | 2.77 | 2.47 | 2.05 | 1.70 | 1.31 | 1.06 | 0.86 | 0.68 | 0.53 | 0.40 | 0.26 | 0.13 |
| 28 | 2.76 | 2.47 | 2.05 | 1.70 | 1.31 | 1.06 | 0.85 | 0.68 | 0.53 | 0.40 | 0.26 | 0.13 |
| 29 | 2.76 | 2.46 | 2.05 | 1.70 | 1.31 | 1.06 | 0.85 | 0.68 | 0.53 | 0.40 | 0.26 | 0.13 |
| 30 | 2.75 | 2.46 | 2.04 | 1.70 | 1.31 | 1.05 | 0.85 | 0.68 | 0.53 | 0.40 | 0.26 | 0.13 |
| 31 | 2.74 | 2.45 | 2.04 | 1.70 | 1.31 | 1.05 | 0.85 | 0.68 | 0.53 | 0.40 | 0.26 | 0.13 |
| 32 | 2.74 | 2.45 | 2.04 | 1.69 | 1.31 | 1.05 | 0.85 | 0.68 | 0.53 | 0.40 | 0.26 | 0.13 |
| 33 | 2.73 | 2.44 | 2.03 | 1.69 | 1.31 | 1.05 | 0.85 | 0.68 | 0.53 | 0.40 | 0.26 | 0.13 |
| 34 | 2.73 | 2.44 | 2.03 | 1.69 | 1.31 | 1.05 | 0.85 | 0.68 | 0.53 | 0.40 | 0.26 | 0.13 |
| 35 | 2.72 | 2.44 | 2.03 | 1.70 | 1.31 | 1.05 | 0.85 | 0.68 | 0.53 | 0.40 | 0.26 | 0.13 |
| 36 | 2.72 | 2.43 | 2.03 | 1.70 | 1.31 | 1.05 | 0.85 | 0.68 | 0.53 | 0.40 | 0.26 | 0.13 |
| 37 | 2.72 | 2.43 | 2.03 | 1.70 | 1.30 | 1.05 | 0.85 | 0.68 | 0.53 | 0.40 | 0.26 | 0.13 |
| 38 | 2.71 | 2.43 | 2.02 | 1.70 | 1.30 | 1.05 | 0.85 | 0.68 | 0.53 | 0.40 | 0.26 | 0.13 |
| 39 | 2.71 | 2.43 | 2.02 | 1.68 | 1.30 | 1.05 | 0.85 | 0.68 | 0.53 | 0.40 | 0.26 | 0.13 |
| 40 | 2.70 | 2.42 | 2.02 | 1.68 | 1.30 | 1.05 | 0.85 | 0.68 | 0.53 | 0.40 | 0.26 | 0.13 |

## C.3 Distribució khi quadrat amb $n$ graus de llibertat $\chi_n^2$ ( $\chi_{n,\alpha}$)

| $n\backslash\alpha$ | 0.995 | 0.99 | 0.975 | 0.95 | 0.9 | 0.85 | 0.8 | 0.75 | 0.7 | 0.65 | 0.6 | 0.55 |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| 1 | 7.88 | 6.63 | 5.02 | 3.84 | 2.71 | 2.07 | 1.64 | 1.32 | 1.07 | 0.87 | 0.71 | 0.57 |
| 2 | 10.60 | 9.21 | 7.38 | 5.99 | 4.61 | 3.79 | 3.22 | 2.77 | 2.41 | 2.10 | 1.83 | 1.60 |
| 3 | 12.84 | 11.34 | 9.35 | 7.81 | 6.25 | 5.32 | 4.64 | 4.11 | 3.66 | 3.28 | 2.95 | 2.64 |
| 4 | 14.86 | 13.28 | 11.14 | 9.50 | 7.78 | 6.74 | 6.00 | 5.40 | 4.88 | 4.44 | 4.04 | 3.70 |
| 5 | 16.75 | 15.10 | 12.83 | 11.07 | 9.24 | 8.12 | 7.30 | 6.63 | 6.06 | 5.57 | 5.13 | 4.73 |
| 6 | 18.55 | 16.81 | 14.45 | 12.59 | 10.64 | 9.45 | 8.56 | 7.84 | 7.23 | 6.69 | 6.21 | 5.77 |
| 7 | 20.28 | 18.48 | 16.01 | 14.07 | 12.02 | 10.75 | 9.80 | 9.04 | 8.38 | 7.81 | 7.28 | 6.80 |
| 8 | 21.95 | 20.09 | 17.53 | 15.51 | 13.36 | 12.03 | 11.03 | 10.22 | 9.52 | 8.91 | 8.35 | 7.83 |
| 9 | 23.60 | 21.67 | 19.02 | 16.92 | 14.68 | 13.30 | 12.24 | 11.40 | 10.66 | 10.01 | 9.41 | 8.86 |
| 10 | 25.20 | 23.21 | 20.48 | 18.31 | 16.00 | 14.53 | 13.44 | 12.55 | 11.78 | 11.10 | 10.47 | 9.89 |
| 11 | 26.76 | 24.72 | 21.92 | 19.68 | 17.28 | 15.77 | 14.63 | 13.70 | 12.90 | 12.18 | 11.53 | 10.92 |
| 12 | 28.30 | 26.22 | 23.34 | 21.03 | 18.55 | 17.00 | 15.81 | 14.85 | 14.01 | 13.27 | 12.58 | 11.95 |
| 13 | 29.82 | 27.70 | 24.74 | 22.36 | 19.81 | 18.20 | 16.98 | 15.98 | 15.12 | 14.35 | 13.64 | 12.97 |
| 14 | 31.32 | 29.14 | 26.12 | 23.68 | 21.06 | 19.41 | 18.15 | 17.12 | 16.22 | 15.42 | 14.70 | 14.00 |
| 15 | 32.80 | 30.58 | 27.50 | 25.00 | 22.31 | 20.60 | 19.31 | 18.25 | 17.32 | 16.49 | 15.73 | 15.02 |
| 16 | 34.27 | 32.00 | 28.85 | 26.30 | 23.54 | 21.79 | 20.47 | 19.37 | 18.42 | 17.56 | 16.78 | 16.04 |
| 17 | 35.72 | 33.41 | 30.19 | 27.60 | 24.77 | 22.98 | 21.61 | 20.50 | 19.51 | 18.63 | 17.82 | 17.06 |
| 18 | 37.16 | 34.81 | 31.53 | 28.87 | 26.00 | 24.16 | 22.76 | 21.60 | 20.60 | 19.70 | 18.87 | 18.10 |
| 19 | 38.58 | 36.19 | 32.85 | 30.14 | 27.20 | 25.33 | 23.90 | 22.72 | 21.70 | 20.76 | 19.91 | 19.11 |
| 20 | 40.00 | 37.57 | 34.17 | 31.41 | 28.41 | 26.50 | 25.04 | 23.83 | 22.77 | 21.83 | 20.95 | 20.13 |
| 21 | 41.40 | 38.93 | 35.48 | 32.67 | 29.62 | 27.66 | 26.17 | 24.93 | 23.86 | 22.90 | 21.99 | 21.15 |
| 22 | 42.80 | 40.30 | 36.78 | 33.92 | 30.81 | 28.82 | 27.30 | 26.04 | 24.94 | 23.95 | 23.03 | 22.17 |
| 23 | 44.18 | 41.64 | 38.08 | 35.17 | 32.01 | 29.98 | 28.43 | 27.14 | 26.02 | 25.01 | 24.07 | 23.20 |
| 24 | 45.56 | 42.98 | 39.36 | 36.42 | 33.20 | 31.13 | 29.55 | 28.24 | 27.10 | 26.06 | 25.11 | 24.20 |
| 25 | 46.93 | 44.31 | 40.65 | 37.65 | 34.38 | 32.28 | 30.68 | 29.34 | 28.17 | 27.12 | 26.14 | 25.22 |
| 26 | 48.30 | 45.64 | 41.92 | 38.90 | 35.56 | 33.43 | 31.79 | 30.43 | 29.25 | 28.17 | 27.18 | 26.24 |
| 27 | 49.64 | 46.96 | 43.19 | 40.11 | 36.74 | 34.57 | 32.91 | 31.53 | 30.32 | 29.23 | 28.21 | 27.26 |
| 28 | 50.99 | 48.28 | 44.46 | 41.34 | 37.92 | 35.71 | 34.03 | 32.62 | 31.39 | 30.28 | 29.25 | 28.27 |
| 29 | 52.34 | 49.60 | 45.72 | 42.56 | 39.10 | 36.85 | 35.14 | 33.71 | 32.46 | 31.33 | 30.28 | 29.29 |
| 30 | 53.67 | 50.89 | 46.98 | 43.77 | 40.26 | 37.99 | 36.25 | 34.80 | 33.53 | 32.38 | 31.32 | 30.31 |
| 31 | 55.00 | 52.19 | 48.23 | 45.00 | 41.42 | 39.12 | 37.36 | 35.90 | 34.60 | 33.43 | 32.35 | 31.32 |
| 32 | 56.33 | 53.50 | 49.48 | 46.19 | 42.58 | 40.26 | 38.47 | 36.97 | 35.66 | 34.48 | 33.38 | 32.34 |
| 33 | 57.65 | 54.78 | 50.73 | 47.40 | 43.75 | 41.40 | 39.57 | 38.06 | 36.73 | 35.53 | 34.41 | 33.36 |
| 34 | 58.96 | 56.06 | 51.97 | 48.60 | 44.90 | 42.51 | 40.68 | 39.14 | 37.80 | 36.58 | 35.44 | 34.37 |
| 35 | 60.27 | 57.34 | 53.20 | 49.80 | 46.06 | 43.64 | 41.78 | 40.22 | 38.86 | 37.62 | 36.47 | 35.40 |
| 36 | 61.58 | 58.62 | 54.44 | 51.00 | 47.21 | 44.76 | 42.88 | 41.30 | 39.92 | 38.67 | 37.50 | 36.40 |
| 37 | 62.88 | 59.89 | 55.67 | 52.19 | 48.36 | 45.90 | 43.98 | 42.38 | 40.98 | 39.71 | 38.53 | 37.42 |
| 38 | 64.18 | 61.16 | 56.90 | 53.38 | 49.51 | 47.01 | 45.08 | 43.46 | 42.05 | 40.76 | 39.56 | 38.43 |
| 39 | 65.48 | 62.43 | 58.12 | 54.57 | 50.66 | 48.13 | 46.17 | 44.54 | 43.11 | 41.80 | 40.59 | 39.44 |
| 40 | 66.77 | 63.69 | 59.34 | 55.76 | 51.81 | 49.24 | 47.27 | 45.62 | 44.16 | 42.85 | 41.62 | 40.46 |

| $n \backslash \alpha$ | 0.5 | 0.45 | 0.4 | 0.35 | 0.3 | 0.25 | 0.2 | 0.15 | 0.1 | 0.05 | 0.01 | 0.005 |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| 1 | 0.45 | 0.36 | 0.27 | 0.21 | 0.15 | 0.10 | 0.06 | 0.04 | 0.02 | 0.00 | 0.00 | 0.00 |
| 2 | 1.40 | 1.20 | 1.02 | 0.86 | 0.71 | 0.58 | 0.45 | 0.33 | 0.21 | 0.10 | 0.02 | 0.01 |
| 3 | 2.37 | 2.11 | 1.87 | 1.64 | 1.42 | 1.21 | 1.01 | 0.80 | 0.58 | 0.35 | 0.11 | 0.07 |
| 4 | 3.36 | 3.05 | 2.75 | 2.47 | 2.19 | 1.92 | 1.65 | 1.37 | 1.06 | 0.71 | 0.30 | 0.21 |
| 5 | 4.35 | 4.00 | 3.66 | 3.33 | 3.00 | 2.67 | 2.34 | 1.99 | 1.61 | 1.15 | 0.55 | 0.41 |
| 6 | 5.35 | 4.95 | 4.57 | 4.20 | 3.83 | 3.45 | 3.07 | 2.66 | 2.20 | 1.64 | 0.87 | 0.68 |
| 7 | 6.35 | 5.91 | 5.49 | 5.08 | 4.67 | 4.25 | 3.82 | 3.36 | 2.83 | 2.17 | 1.24 | 1.00 |
| 8 | 7.34 | 6.88 | 6.42 | 5.98 | 5.53 | 5.07 | 4.59 | 4.08 | 3.50 | 2.73 | 1.65 | 1.34 |
| 9 | 8.34 | 7.84 | 7.36 | 6.88 | 6.39 | 5.90 | 5.38 | 4.82 | 4.17 | 3.33 | 2.10 | 1.73 |
| 10 | 9.34 | 8.81 | 8.30 | 7.78 | 7.27 | 6.74 | 6.18 | 5.57 | 4.87 | 3.94 | 2.56 | 2.16 |
| 11 | 10.34 | 9.78 | 9.24 | 8.70 | 8.15 | 7.58 | 7.00 | 6.34 | 5.58 | 4.57 | 3.05 | 2.60 |
| 12 | 11.34 | 10.76 | 10.18 | 9.61 | 9.03 | 8.44 | 7.81 | 7.11 | 6.30 | 5.23 | 3.57 | 3.07 |
| 13 | 12.34 | 11.73 | 11.13 | 10.53 | 9.93 | 9.30 | 8.63 | 7.90 | 7.04 | 5.89 | 4.11 | 3.57 |
| 14 | 13.34 | 12.70 | 12.08 | 11.45 | 10.82 | 10.17 | 9.47 | 8.70 | 7.80 | 6.57 | 4.66 | 4.07 |
| 15 | 14.34 | 13.68 | 13.03 | 12.38 | 11.72 | 11.04 | 10.31 | 9.50 | 8.55 | 7.26 | 5.23 | 4.60 |
| 16 | 15.34 | 14.66 | 13.98 | 13.31 | 12.62 | 11.91 | 11.15 | 10.31 | 9.31 | 7.96 | 5.81 | 5.14 |
| 17 | 16.34 | 15.63 | 14.94 | 14.24 | 13.53 | 12.79 | 12.00 | 11.12 | 10.10 | 8.67 | 6.41 | 5.70 |
| 18 | 17.34 | 16.61 | 15.89 | 15.17 | 14.44 | 13.68 | 12.86 | 11.95 | 10.86 | 9.39 | 7.01 | 6.26 |
| 19 | 18.34 | 17.60 | 16.85 | 16.11 | 15.35 | 14.56 | 13.72 | 12.77 | 11.65 | 10.12 | 7.63 | 6.84 |
| 20 | 19.34 | 18.57 | 17.81 | 17.05 | 16.27 | 15.45 | 14.58 | 13.60 | 12.44 | 10.85 | 8.26 | 7.43 |
| 21 | 20.34 | 19.55 | 18.77 | 17.98 | 17.18 | 16.34 | 15.44 | 14.44 | 13.24 | 11.59 | 8.90 | 8.03 |
| 22 | 21.34 | 20.53 | 19.73 | 18.92 | 18.10 | 17.24 | 16.31 | 15.28 | 14.04 | 12.34 | 9.54 | 8.64 |
| 23 | 22.34 | 21.51 | 20.69 | 19.87 | 19.02 | 18.14 | 17.20 | 16.12 | 14.85 | 13.09 | 10.20 | 9.26 |
| 24 | 23.34 | 22.49 | 21.65 | 20.81 | 19.94 | 19.04 | 18.06 | 16.97 | 15.66 | 13.85 | 10.86 | 9.90 |
| 25 | 24.34 | 23.47 | 22.62 | 21.75 | 20.87 | 19.94 | 18.94 | 17.82 | 16.47 | 14.61 | 11.52 | 10.52 |
| 26 | 25.34 | 24.45 | 23.58 | 22.70 | 21.79 | 20.84 | 19.82 | 18.67 | 17.29 | 15.38 | 12.20 | 11.16 |
| 27 | 26.34 | 25.44 | 24.54 | 23.64 | 22.72 | 21.75 | 20.70 | 19.53 | 18.11 | 16.15 | 12.88 | 11.81 |
| 28 | 27.34 | 26.42 | 25.51 | 24.59 | 23.65 | 22.66 | 21.60 | 20.40 | 18.94 | 16.93 | 13.56 | 12.46 |
| 29 | 28.34 | 27.40 | 26.48 | 25.54 | 24.58 | 23.57 | 22.48 | 21.25 | 19.77 | 17.71 | 14.26 | 13.12 |
| 30 | 29.34 | 28.40 | 27.44 | 26.50 | 25.51 | 24.48 | 23.36 | 22.11 | 20.60 | 18.49 | 14.95 | 13.80 |
| 31 | 30.34 | 29.37 | 28.41 | 27.44 | 26.44 | 25.39 | 24.26 | 22.98 | 21.43 | 19.28 | 15.66 | 14.46 |
| 32 | 31.34 | 30.35 | 29.38 | 28.40 | 27.37 | 26.30 | 25.15 | 23.84 | 22.27 | 20.07 | 16.36 | 15.13 |
| 33 | 32.34 | 31.34 | 30.34 | 29.34 | 28.31 | 27.22 | 26.04 | 24.71 | 23.11 | 20.87 | 17.07 | 15.82 |
| 34 | 33.34 | 32.32 | 31.31 | 30.29 | 29.24 | 28.14 | 26.94 | 25.60 | 23.95 | 21.66 | 17.80 | 16.50 |
| 35 | 34.34 | 33.31 | 32.28 | 31.25 | 30.18 | 29.05 | 27.84 | 26.46 | 24.80 | 22.47 | 18.51 | 17.19 |
| 36 | 35.34 | 34.29 | 33.25 | 32.20 | 31.12 | 29.97 | 28.73 | 27.34 | 25.64 | 23.27 | 19.23 | 17.90 |
| 37 | 36.34 | 35.28 | 34.22 | 33.15 | 32.05 | 30.89 | 29.64 | 28.21 | 26.49 | 24.07 | 19.96 | 18.60 |
| 38 | 37.34 | 36.26 | 35.19 | 34.11 | 32.99 | 31.81 | 30.54 | 29.09 | 27.34 | 24.88 | 20.69 | 19.30 |
| 39 | 38.34 | 37.25 | 36.16 | 35.06 | 33.93 | 32.74 | 31.44 | 29.97 | 28.20 | 25.70 | 21.43 | 20.00 |
| 40 | 39.34 | 38.23 | 37.13 | 36.02 | 34.87 | 33.66 | 32.34 | 30.86 | 29.05 | 26.51 | 22.16 | 20.71 |

| $n\backslash\alpha$ | 0.995 | 0.99 | 0.975 | 0.95 | 0.9 | 0.85 | 0.8 | 0.75 | 0.7 | 0.65 | 0.6 | 0.55 |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| 41 | 68.05 | 64.95 | 60.56 | 56.94 | 52.95 | 50.36 | 48.36 | 46.69 | 45.22 | 43.89 | 42.65 | 41.47 |
| 42 | 69.34 | 66.21 | 61.78 | 58.12 | 54.09 | 51.47 | 49.46 | 47.77 | 46.28 | 44.93 | 43.68 | 42.50 |
| 43 | 70.62 | 67.46 | 62.99 | 59.30 | 55.23 | 52.60 | 50.55 | 48.84 | 47.34 | 45.98 | 44.71 | 43.50 |
| 44 | 71.89 | 68.71 | 64.20 | 60.48 | 56.37 | 53.70 | 51.64 | 49.91 | 48.40 | 47.02 | 45.73 | 44.51 |
| 45 | 73.17 | 69.96 | 65.41 | 61.66 | 57.51 | 54.81 | 52.73 | 50.98 | 49.45 | 48.06 | 46.76 | 45.53 |
| 46 | 74.44 | 71.20 | 66.62 | 62.83 | 58.64 | 55.92 | 53.82 | 52.06 | 50.51 | 49.10 | 47.80 | 46.54 |
| 47 | 75.70 | 72.44 | 67.82 | 64.00 | 59.77 | 57.03 | 54.91 | 53.13 | 51.56 | 50.14 | 48.81 | 47.55 |
| 48 | 76.97 | 73.68 | 69.02 | 65.17 | 60.91 | 58.14 | 55.99 | 54.20 | 52.62 | 51.18 | 49.84 | 48.57 |
| 49 | 78.23 | 74.92 | 70.22 | 66.34 | 62.04 | 59.24 | 57.08 | 55.27 | 53.67 | 52.22 | 50.87 | 49.58 |
| 50 | 79.50 | 76.15 | 71.42 | 67.50 | 63.17 | 60.35 | 58.16 | 56.33 | 54.72 | 53.26 | 51.89 | 50.59 |
| 51 | 80.75 | 77.40 | 72.62 | 68.67 | 64.30 | 61.45 | 59.25 | 57.40 | 55.78 | 54.30 | 52.92 | 51.60 |
| 52 | 82.00 | 78.62 | 73.81 | 69.83 | 65.42 | 62.55 | 60.33 | 58.47 | 56.83 | 55.33 | 53.94 | 52.62 |
| 53 | 83.25 | 79.84 | 75.00 | 70.99 | 66.55 | 63.65 | 61.41 | 59.53 | 57.88 | 56.37 | 54.97 | 53.63 |
| 54 | 84.50 | 81.07 | 76.19 | 72.15 | 67.67 | 64.76 | 62.50 | 60.60 | 58.93 | 57.41 | 55.99 | 54.64 |
| 55 | 85.75 | 82.29 | 77.38 | 73.31 | 68.80 | 65.86 | 63.58 | 61.66 | 59.98 | 58.45 | 57.02 | 55.65 |
| 56 | 86.99 | 83.51 | 78.57 | 74.47 | 69.92 | 66.95 | 64.66 | 62.73 | 61.03 | 59.48 | 58.04 | 56.67 |
| 57 | 88.24 | 84.73 | 79.75 | 75.62 | 71.04 | 68.05 | 65.74 | 63.79 | 62.08 | 60.52 | 59.06 | 57.68 |
| 58 | 89.48 | 85.95 | 80.94 | 76.78 | 72.16 | 69.15 | 66.82 | 64.86 | 63.13 | 61.56 | 60.10 | 58.70 |
| 59 | 90.72 | 87.17 | 82.12 | 77.93 | 73.28 | 70.25 | 67.89 | 65.92 | 64.18 | 62.59 | 61.11 | 59.70 |
| 60 | 91.95 | 88.38 | 83.30 | 79.08 | 74.40 | 71.34 | 68.97 | 66.98 | 65.23 | 63.63 | 62.13 | 60.71 |
| 61 | 93.20 | 89.59 | 84.48 | 80.23 | 75.51 | 72.44 | 70.05 | 68.04 | 66.27 | 64.66 | 63.16 | 61.72 |
| 62 | 94.42 | 90.80 | 85.65 | 81.38 | 76.63 | 73.53 | 71.13 | 69.10 | 67.32 | 65.70 | 64.18 | 62.74 |
| 63 | 95.65 | 92.01 | 86.83 | 82.53 | 77.75 | 74.62 | 72.20 | 70.16 | 68.37 | 66.73 | 65.20 | 63.75 |
| 64 | 96.88 | 93.22 | 88.00 | 83.68 | 78.86 | 75.72 | 73.28 | 71.23 | 69.42 | 67.77 | 66.23 | 64.76 |
| 65 | 98.11 | 94.42 | 89.18 | 84.82 | 79.97 | 76.81 | 74.35 | 72.28 | 70.46 | 68.80 | 67.25 | 65.77 |
| 66 | 99.33 | 95.63 | 90.35 | 85.96 | 81.10 | 77.90 | 75.42 | 73.34 | 71.51 | 69.83 | 68.27 | 66.78 |
| 67 | 100.55 | 96.83 | 91.52 | 87.11 | 82.20 | 79.00 | 76.50 | 74.40 | 72.55 | 70.87 | 69.29 | 67.79 |
| 68 | 101.78 | 98.03 | 92.70 | 88.25 | 83.31 | 80.08 | 77.57 | 75.46 | 73.60 | 71.90 | 70.32 | 68.80 |
| 69 | 103.00 | 99.23 | 93.86 | 89.39 | 84.42 | 81.17 | 78.64 | 76.52 | 74.64 | 72.93 | 71.34 | 69.81 |
| 70 | 104.21 | 100.43 | 95.02 | 90.53 | 85.53 | 82.26 | 79.71 | 77.58 | 75.70 | 73.97 | 72.36 | 70.82 |
| 71 | 105.43 | 101.62 | 96.20 | 91.67 | 86.64 | 83.34 | 80.80 | 78.63 | 76.73 | 75.00 | 73.38 | 71.83 |
| 72 | 106.65 | 102.82 | 97.35 | 92.81 | 87.74 | 84.43 | 81.86 | 79.69 | 77.78 | 76.03 | 74.40 | 72.84 |
| 73 | 107.86 | 104.01 | 98.52 | 93.95 | 88.85 | 85.52 | 82.93 | 80.75 | 78.82 | 77.06 | 75.42 | 73.86 |
| 74 | 109.07 | 105.20 | 99.68 | 95.08 | 89.96 | 86.60 | 84.00 | 81.80 | 79.86 | 78.10 | 76.44 | 74.87 |
| 75 | 110.30 | 106.39 | 100.84 | 96.22 | 91.06 | 87.70 | 85.07 | 82.86 | 80.91 | 79.13 | 77.46 | 75.88 |
| 76 | 111.50 | 107.58 | 102.00 | 97.35 | 92.17 | 88.77 | 86.13 | 83.91 | 81.95 | 80.16 | 78.48 | 76.90 |
| 77 | 112.70 | 108.77 | 103.16 | 98.48 | 93.27 | 89.86 | 87.20 | 84.97 | 82.99 | 81.19 | 79.51 | 77.90 |
| 78 | 113.91 | 109.96 | 104.32 | 99.62 | 94.37 | 90.94 | 88.27 | 86.02 | 84.04 | 82.22 | 80.53 | 78.91 |
| 79 | 115.12 | 111.14 | 105.47 | 100.75 | 95.48 | 92.02 | 89.34 | 87.08 | 85.08 | 83.25 | 81.55 | 79.92 |
| 80 | 116.32 | 112.33 | 106.63 | 101.88 | 96.58 | 93.11 | 90.41 | 88.13 | 86.12 | 84.28 | 82.57 | 80.93 |

| $n \backslash \alpha$ | 0.5 | 0.45 | 0.4 | 0.35 | 0.3 | 0.25 | 0.2 | 0.15 | 0.1 | 0.05 | 0.01 | 0.005 |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| 41 | 40.34 | 39.22 | 38.11 | 36.98 | 35.81 | 34.58 | 33.25 | 31.74 | 29.91 | 27.33 | 22.91 | 21.42 |
| 42 | 41.34 | 40.20 | 39.08 | 37.93 | 36.75 | 35.51 | 34.16 | 32.63 | 30.77 | 28.14 | 23.65 | 22.14 |
| 43 | 42.34 | 41.19 | 40.05 | 38.89 | 37.70 | 36.44 | 35.07 | 33.51 | 31.63 | 28.96 | 24.40 | 22.86 |
| 44 | 43.34 | 42.18 | 41.02 | 39.85 | 38.64 | 37.36 | 35.97 | 34.40 | 32.50 | 29.80 | 25.15 | 23.58 |
| 45 | 44.34 | 43.16 | 42.00 | 40.81 | 39.58 | 38.29 | 36.88 | 35.30 | 33.35 | 30.61 | 25.90 | 24.31 |
| 46 | 45.34 | 44.15 | 42.97 | 41.77 | 40.53 | 39.22 | 37.80 | 36.18 | 34.22 | 31.44 | 26.66 | 25.04 |
| 47 | 46.34 | 45.14 | 43.94 | 42.73 | 41.47 | 40.15 | 38.71 | 37.07 | 35.08 | 32.27 | 27.42 | 25.77 |
| 48 | 47.34 | 46.12 | 44.92 | 43.70 | 42.42 | 41.08 | 39.62 | 37.96 | 35.95 | 33.10 | 28.18 | 26.51 |
| 49 | 48.33 | 47.11 | 45.90 | 44.65 | 43.37 | 42.01 | 40.53 | 38.86 | 36.82 | 33.93 | 28.94 | 27.25 |
| 50 | 49.33 | 48.10 | 46.86 | 45.61 | 44.31 | 42.94 | 41.45 | 39.75 | 37.70 | 34.76 | 29.71 | 27.99 |
| 51 | 50.33 | 49.10 | 47.84 | 46.57 | 45.26 | 43.87 | 42.36 | 40.65 | 38.56 | 35.60 | 30.48 | 28.73 |
| 52 | 51.33 | 50.07 | 48.81 | 47.53 | 46.21 | 44.81 | 43.28 | 41.55 | 39.43 | 36.44 | 31.25 | 29.48 |
| 53 | 52.33 | 51.06 | 49.80 | 48.50 | 47.16 | 45.74 | 44.20 | 42.45 | 40.31 | 37.28 | 32.02 | 30.23 |
| 54 | 53.33 | 52.05 | 50.76 | 49.46 | 48.11 | 46.68 | 45.12 | 43.34 | 41.18 | 38.12 | 32.79 | 30.98 |
| 55 | 54.33 | 53.04 | 51.74 | 50.42 | 49.06 | 47.61 | 46.04 | 44.24 | 42.06 | 38.96 | 33.57 | 31.73 |
| 56 | 55.33 | 54.02 | 52.71 | 51.38 | 50.01 | 48.55 | 46.96 | 45.15 | 42.94 | 39.80 | 34.35 | 32.49 |
| 57 | 56.33 | 55.01 | 53.69 | 52.35 | 50.96 | 49.48 | 47.88 | 46.05 | 43.82 | 40.65 | 35.13 | 33.25 |
| 58 | 57.33 | 56.00 | 54.67 | 53.31 | 51.91 | 50.42 | 48.80 | 46.95 | 44.70 | 41.49 | 35.91 | 34.01 |
| 59 | 58.33 | 57.00 | 55.64 | 54.27 | 52.86 | 51.36 | 49.72 | 47.85 | 45.58 | 42.34 | 36.70 | 34.77 |
| 60 | 59.33 | 57.98 | 56.62 | 55.24 | 53.81 | 52.29 | 50.64 | 48.76 | 46.46 | 43.20 | 37.48 | 35.53 |
| 61 | 60.33 | 58.97 | 57.60 | 56.20 | 54.76 | 53.23 | 51.56 | 49.66 | 47.34 | 44.04 | 38.27 | 36.30 |
| 62 | 61.33 | 59.95 | 58.57 | 57.17 | 55.71 | 54.17 | 52.50 | 50.57 | 48.23 | 44.90 | 39.06 | 37.07 |
| 63 | 62.33 | 60.94 | 59.55 | 58.13 | 56.67 | 55.11 | 53.41 | 51.48 | 49.11 | 45.74 | 39.86 | 37.84 |
| 64 | 63.33 | 61.93 | 60.53 | 59.10 | 57.62 | 56.05 | 54.34 | 52.38 | 50.00 | 46.59 | 40.65 | 38.61 |
| 65 | 64.33 | 62.92 | 61.51 | 60.07 | 58.57 | 56.99 | 55.26 | 53.29 | 50.88 | 47.45 | 41.44 | 39.38 |
| 66 | 65.33 | 63.91 | 62.48 | 61.03 | 59.53 | 57.93 | 56.20 | 54.20 | 51.77 | 48.31 | 42.24 | 40.16 |
| 67 | 66.33 | 64.90 | 63.46 | 62.00 | 60.48 | 58.87 | 57.11 | 55.11 | 52.66 | 49.16 | 43.04 | 40.94 |
| 68 | 67.33 | 65.90 | 64.44 | 62.97 | 61.44 | 59.81 | 58.04 | 56.02 | 53.55 | 50.02 | 43.84 | 41.71 |
| 69 | 68.33 | 66.88 | 65.42 | 63.93 | 62.39 | 60.76 | 58.97 | 56.93 | 54.44 | 50.88 | 44.64 | 42.49 |
| 70 | 69.33 | 67.87 | 66.40 | 64.90 | 63.35 | 61.70 | 59.90 | 57.84 | 55.33 | 51.74 | 45.44 | 43.28 |
| 71 | 70.33 | 68.86 | 67.37 | 65.87 | 64.30 | 62.64 | 60.83 | 58.76 | 56.22 | 52.60 | 46.25 | 44.06 |
| 72 | 71.33 | 69.85 | 68.35 | 66.83 | 65.26 | 63.58 | 61.76 | 59.67 | 57.11 | 53.46 | 47.05 | 44.84 |
| 73 | 72.33 | 70.83 | 69.33 | 67.80 | 66.21 | 64.53 | 62.70 | 60.58 | 58.01 | 54.33 | 47.86 | 45.63 |
| 74 | 73.33 | 71.82 | 70.31 | 68.77 | 67.17 | 65.47 | 63.62 | 61.50 | 58.90 | 55.20 | 48.67 | 46.42 |
| 75 | 74.33 | 72.81 | 71.29 | 69.74 | 68.13 | 66.42 | 64.55 | 62.41 | 59.79 | 56.05 | 49.48 | 47.21 |
| 76 | 75.33 | 73.80 | 72.27 | 70.71 | 69.08 | 67.36 | 65.48 | 63.33 | 60.70 | 56.92 | 50.30 | 48.00 |
| 77 | 76.33 | 74.79 | 73.25 | 71.68 | 70.04 | 68.31 | 66.41 | 64.24 | 61.60 | 57.80 | 51.10 | 48.80 |
| 78 | 77.33 | 75.78 | 74.23 | 72.64 | 71.00 | 69.25 | 67.34 | 65.16 | 62.48 | 58.65 | 51.91 | 49.58 |
| 79 | 78.33 | 76.77 | 75.21 | 73.61 | 71.96 | 70.20 | 68.27 | 66.08 | 63.38 | 59.52 | 52.72 | 50.38 |
| 80 | 79.33 | 77.76 | 76.20 | 74.58 | 72.92 | 71.14 | 69.21 | 66.99 | 64.28 | 60.39 | 53.54 | 51.17 |

| $n\backslash\alpha$ | 0.995 | 0.99 | 0.975 | 0.95 | 0.9 | 0.85 | 0.8 | 0.75 | 0.7 | 0.65 | 0.6 | 0.55 |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| 81 | 117.52 | 113.51 | 107.78 | 103.01 | 97.68 | 94.20 | 91.47 | 89.18 | 87.16 | 85.31 | 83.60 | 81.94 |
| 82 | 118.73 | 114.69 | 108.94 | 104.14 | 98.78 | 95.27 | 92.54 | 90.24 | 88.20 | 86.34 | 84.61 | 82.95 |
| 83 | 119.93 | 115.88 | 110.09 | 105.27 | 99.88 | 96.35 | 93.60 | 91.30 | 89.24 | 87.37 | 85.63 | 83.96 |
| 84 | 121.13 | 117.06 | 111.24 | 106.39 | 100.98 | 97.43 | 94.67 | 92.34 | 90.28 | 88.40 | 86.65 | 84.97 |
| 85 | 122.32 | 118.24 | 112.39 | 107.52 | 102.08 | 98.51 | 95.73 | 93.39 | 91.32 | 89.43 | 87.67 | 85.98 |
| 86 | 123.52 | 119.41 | 113.54 | 108.65 | 103.18 | 99.59 | 96.80 | 94.45 | 92.36 | 90.46 | 88.68 | 87.00 |
| 87 | 124.72 | 120.59 | 114.69 | 109.77 | 104.28 | 100.67 | 97.86 | 95.50 | 93.41 | 91.49 | 89.70 | 87.99 |
| 88 | 125.91 | 121.77 | 115.84 | 110.90 | 105.37 | 101.75 | 98.93 | 96.55 | 94.44 | 92.52 | 90.72 | 89.00 |
| 89 | 127.11 | 122.94 | 117.00 | 112.02 | 106.47 | 102.83 | 99.99 | 97.60 | 95.48 | 93.55 | 91.74 | 90.01 |
| 90 | 128.30 | 124.12 | 118.14 | 113.15 | 107.57 | 103.90 | 101.05 | 98.65 | 96.52 | 94.58 | 92.76 | 91.02 |
| 91 | 129.49 | 125.30 | 119.28 | 114.27 | 108.66 | 104.98 | 102.12 | 99.70 | 97.56 | 95.61 | 93.78 | 92.03 |
| 92 | 130.68 | 126.46 | 120.43 | 115.40 | 109.76 | 106.06 | 103.18 | 100.75 | 98.60 | 96.64 | 94.80 | 93.04 |
| 93 | 131.87 | 127.63 | 121.57 | 116.51 | 110.85 | 107.13 | 104.24 | 101.80 | 99.64 | 97.67 | 95.82 | 94.05 |
| 94 | 133.06 | 128.80 | 122.72 | 117.63 | 111.94 | 108.21 | 105.30 | 102.85 | 100.68 | 98.69 | 96.84 | 95.06 |
| 95 | 134.25 | 129.97 | 123.86 | 118.75 | 113.04 | 109.30 | 106.36 | 103.90 | 101.72 | 99.72 | 97.85 | 96.07 |
| 96 | 135.43 | 131.14 | 125.00 | 119.87 | 114.13 | 110.36 | 107.43 | 104.95 | 102.76 | 100.75 | 98.87 | 97.08 |
| 97 | 136.62 | 132.31 | 126.14 | 121.00 | 115.22 | 111.44 | 108.50 | 106.00 | 103.79 | 101.78 | 99.89 | 98.10 |
| 98 | 137.80 | 133.48 | 127.28 | 122.11 | 116.32 | 112.51 | 109.55 | 107.05 | 104.83 | 102.81 | 100.91 | 99.10 |
| 99 | 139.00 | 134.64 | 128.42 | 123.23 | 117.41 | 113.60 | 110.61 | 108.09 | 105.87 | 103.83 | 101.93 | 100.11 |
| 100 | 140.17 | 135.81 | 129.56 | 124.34 | 118.50 | 114.66 | 111.67 | 109.14 | 106.91 | 104.86 | 102.95 | 101.11 |
| 101 | 141.35 | 136.97 | 130.70 | 125.46 | 119.60 | 115.73 | 112.73 | 110.20 | 107.94 | 105.90 | 103.96 | 102.12 |
| 102 | 142.53 | 138.13 | 131.84 | 126.57 | 120.68 | 116.81 | 113.80 | 111.24 | 108.98 | 106.92 | 104.98 | 103.13 |
| 103 | 143.71 | 139.30 | 132.97 | 127.70 | 121.77 | 117.88 | 114.84 | 112.28 | 110.02 | 107.94 | 106.00 | 104.14 |
| 104 | 144.89 | 140.46 | 134.11 | 128.80 | 122.86 | 118.95 | 115.90 | 113.33 | 111.05 | 108.97 | 107.02 | 105.15 |
| 105 | 146.07 | 141.62 | 135.25 | 129.92 | 123.95 | 120.02 | 116.96 | 114.38 | 112.10 | 110.00 | 108.03 | 106.16 |
| 106 | 147.25 | 142.78 | 136.38 | 131.03 | 125.04 | 121.09 | 118.02 | 115.42 | 113.13 | 111.02 | 109.05 | 107.17 |
| 107 | 148.42 | 143.94 | 137.52 | 132.14 | 126.12 | 122.16 | 119.08 | 116.47 | 114.16 | 112.05 | 110.07 | 108.18 |
| 108 | 149.60 | 145.10 | 138.65 | 133.26 | 127.21 | 123.24 | 120.14 | 117.52 | 115.20 | 113.08 | 111.10 | 109.18 |
| 109 | 150.77 | 146.26 | 139.78 | 134.37 | 128.30 | 124.31 | 121.19 | 118.56 | 116.23 | 114.10 | 112.10 | 110.19 |
| 110 | 151.95 | 147.41 | 140.92 | 135.48 | 129.40 | 125.38 | 122.25 | 119.61 | 117.27 | 115.13 | 113.12 | 111.20 |
| 111 | 153.12 | 148.57 | 142.05 | 136.59 | 130.47 | 126.45 | 123.31 | 120.65 | 118.30 | 116.15 | 114.14 | 112.21 |
| 112 | 154.29 | 149.73 | 143.18 | 137.70 | 131.56 | 127.52 | 124.36 | 121.70 | 119.34 | 117.18 | 115.16 | 113.22 |
| 113 | 155.47 | 150.88 | 144.31 | 138.81 | 132.64 | 128.60 | 125.42 | 122.74 | 120.37 | 118.21 | 116.17 | 114.23 |
| 114 | 156.64 | 152.04 | 145.44 | 139.92 | 133.73 | 129.65 | 126.48 | 123.80 | 121.41 | 119.23 | 117.20 | 115.24 |
| 115 | 157.81 | 153.19 | 146.57 | 141.03 | 134.81 | 130.72 | 127.53 | 124.83 | 122.44 | 120.26 | 118.21 | 116.24 |
| 116 | 158.98 | 154.34 | 147.70 | 142.14 | 135.90 | 131.79 | 128.60 | 125.88 | 123.48 | 121.28 | 119.22 | 117.25 |
| 117 | 160.15 | 155.50 | 148.83 | 143.25 | 136.98 | 132.86 | 129.64 | 126.92 | 124.51 | 122.31 | 120.24 | 118.26 |
| 118 | 161.31 | 156.65 | 149.96 | 144.35 | 138.07 | 133.93 | 130.70 | 127.97 | 125.55 | 123.33 | 121.26 | 119.27 |
| 119 | 162.48 | 157.80 | 151.08 | 145.46 | 139.15 | 134.99 | 131.75 | 129.01 | 126.58 | 124.36 | 122.27 | 120.28 |
| 120 | 163.65 | 158.95 | 152.21 | 146.57 | 140.23 | 136.06 | 132.81 | 130.05 | 127.62 | 125.38 | 123.30 | 121.28 |

| $n\backslash\alpha$ | 0.5 | 0.45 | 0.4 | 0.35 | 0.3 | 0.25 | 0.2 | 0.15 | 0.1 | 0.05 | 0.01 | 0.005 |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| 81 | 80.33 | 78.75 | 77.17 | 75.55 | 73.87 | 72.09 | 70.14 | 67.91 | 65.18 | 61.26 | 54.36 | 51.97 |
| 82 | 81.33 | 79.74 | 78.15 | 76.52 | 74.83 | 73.04 | 71.07 | 68.83 | 66.08 | 62.13 | 55.17 | 52.77 |
| 83 | 82.33 | 80.73 | 79.13 | 77.49 | 75.79 | 74.00 | 72.01 | 69.75 | 66.98 | 63.00 | 55.99 | 53.57 |
| 84 | 83.33 | 81.72 | 80.11 | 78.46 | 76.75 | 74.93 | 72.94 | 70.67 | 67.88 | 63.88 | 56.81 | 54.37 |
| 85 | 84.33 | 82.71 | 81.10 | 79.43 | 77.71 | 75.88 | 73.88 | 71.60 | 68.78 | 64.75 | 57.63 | 55.17 |
| 86 | 85.33 | 83.70 | 82.07 | 80.40 | 78.67 | 76.83 | 74.81 | 72.51 | 69.68 | 65.62 | 58.46 | 55.97 |
| 87 | 86.33 | 84.69 | 83.05 | 81.37 | 79.63 | 77.78 | 75.75 | 73.43 | 70.58 | 66.50 | 59.28 | 56.78 |
| 88 | 87.33 | 85.70 | 84.03 | 82.34 | 80.59 | 78.73 | 76.70 | 74.35 | 71.48 | 67.37 | 60.10 | 57.58 |
| 89 | 88.33 | 86.68 | 85.01 | 83.31 | 81.55 | 79.68 | 77.62 | 75.27 | 72.40 | 68.25 | 60.93 | 58.40 |
| 90 | 89.33 | 87.67 | 85.99 | 84.30 | 82.51 | 80.62 | 78.56 | 76.20 | 73.29 | 69.13 | 61.75 | 59.20 |
| 91 | 90.33 | 88.66 | 86.97 | 85.26 | 83.47 | 81.57 | 79.50 | 77.12 | 74.20 | 70.00 | 62.58 | 60.00 |
| 92 | 91.33 | 89.65 | 87.95 | 86.23 | 84.43 | 82.52 | 80.43 | 78.04 | 75.10 | 70.88 | 63.41 | 60.81 |
| 93 | 92.33 | 90.64 | 88.94 | 87.20 | 85.39 | 83.47 | 81.37 | 78.96 | 76.01 | 71.76 | 64.24 | 61.63 |
| 94 | 93.33 | 91.63 | 89.92 | 88.17 | 86.36 | 84.42 | 82.31 | 79.90 | 76.91 | 72.64 | 65.07 | 62.44 |
| 95 | 94.33 | 92.62 | 90.90 | 89.14 | 87.32 | 85.38 | 83.25 | 80.81 | 77.82 | 73.52 | 65.90 | 63.25 |
| 96 | 95.33 | 93.61 | 91.88 | 90.12 | 88.28 | 86.33 | 84.20 | 81.74 | 78.73 | 74.40 | 66.73 | 64.06 |
| 97 | 96.33 | 94.60 | 92.86 | 91.10 | 89.24 | 87.28 | 85.13 | 82.66 | 79.63 | 75.28 | 67.56 | 64.88 |
| 98 | 97.33 | 95.59 | 93.84 | 92.06 | 90.20 | 88.23 | 86.07 | 83.60 | 80.54 | 76.16 | 68.40 | 65.69 |
| 99 | 98.33 | 96.58 | 94.83 | 93.03 | 91.17 | 89.18 | 87.01 | 84.51 | 81.45 | 77.05 | 69.23 | 66.51 |
| 100 | 99.33 | 97.57 | 95.81 | 94.00 | 92.13 | 90.13 | 87.95 | 85.44 | 82.36 | 77.93 | 70.06 | 67.33 |
| 101 | 100.33 | 98.57 | 96.80 | 94.98 | 93.09 | 91.10 | 88.90 | 86.37 | 83.27 | 78.81 | 70.90 | 68.15 |
| 102 | 101.33 | 99.56 | 97.77 | 95.95 | 94.05 | 92.04 | 89.83 | 87.29 | 84.18 | 79.70 | 71.74 | 68.97 |
| 103 | 102.33 | 100.55 | 98.75 | 96.92 | 95.02 | 92.99 | 90.77 | 88.22 | 85.10 | 80.58 | 72.57 | 69.80 |
| 104 | 103.33 | 101.54 | 99.74 | 97.90 | 95.98 | 93.94 | 91.71 | 89.15 | 86.00 | 81.47 | 73.41 | 70.61 |
| 105 | 104.33 | 102.53 | 100.72 | 98.87 | 96.95 | 94.90 | 92.65 | 90.08 | 86.91 | 82.35 | 74.25 | 71.43 |
| 106 | 105.33 | 103.52 | 101.70 | 99.84 | 97.91 | 95.85 | 93.59 | 91.01 | 87.82 | 83.24 | 75.09 | 72.25 |
| 107 | 106.33 | 104.51 | 102.68 | 100.82 | 98.87 | 96.80 | 94.53 | 91.93 | 88.73 | 84.13 | 75.93 | 73.07 |
| 108 | 107.33 | 105.50 | 103.67 | 101.80 | 99.84 | 97.76 | 95.48 | 92.86 | 89.65 | 85.01 | 76.77 | 73.90 |
| 109 | 108.33 | 106.50 | 104.65 | 102.76 | 100.80 | 98.71 | 96.42 | 93.79 | 90.56 | 85.90 | 77.62 | 74.72 |
| 110 | 109.33 | 107.50 | 105.63 | 103.74 | 101.77 | 99.67 | 97.36 | 94.72 | 91.47 | 86.79 | 78.46 | 75.55 |
| 111 | 110.33 | 108.48 | 106.62 | 104.71 | 102.73 | 100.62 | 98.31 | 95.65 | 92.38 | 87.68 | 79.30 | 76.38 |
| 112 | 111.33 | 109.47 | 107.60 | 105.70 | 103.69 | 101.58 | 99.25 | 96.58 | 93.30 | 88.57 | 80.15 | 77.20 |
| 113 | 112.33 | 110.46 | 108.58 | 106.66 | 104.66 | 102.53 | 100.19 | 97.51 | 94.21 | 89.46 | 80.99 | 78.03 |
| 114 | 113.33 | 111.45 | 109.56 | 107.63 | 105.62 | 103.50 | 101.14 | 98.45 | 95.13 | 90.35 | 81.84 | 78.86 |
| 115 | 114.33 | 112.45 | 110.55 | 108.61 | 106.59 | 104.44 | 102.08 | 99.38 | 96.04 | 91.24 | 82.68 | 79.69 |
| 116 | 115.33 | 113.44 | 111.53 | 109.58 | 107.56 | 105.40 | 103.03 | 100.31 | 96.96 | 92.13 | 83.53 | 80.52 |
| 117 | 116.33 | 114.43 | 112.51 | 110.56 | 108.52 | 106.35 | 103.97 | 101.24 | 97.87 | 93.03 | 84.38 | 81.35 |
| 118 | 117.33 | 115.42 | 113.50 | 111.53 | 109.50 | 107.31 | 104.92 | 102.17 | 98.79 | 93.92 | 85.23 | 82.20 |
| 119 | 118.33 | 116.41 | 114.48 | 112.51 | 110.45 | 108.26 | 105.86 | 103.10 | 99.71 | 94.81 | 86.07 | 83.02 |
| 120 | 119.33 | 117.40 | 115.46 | 113.48 | 111.42 | 109.22 | 106.81 | 104.04 | 100.62 | 95.70 | 86.92 | 83.85 |

# C.4 Distribució $F_{n_1,n_2}$ de Fisher-Snedecor amb $n_1$ i $n_2$ graus de llibertat

## C.4.1 $F_{n_1,n_2,0.995}$

| $n_1 \backslash n_2$ | 1 | 2 | 3 | 4 | 5 | 6 | 7 | 8 | 9 | 10 |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| 1 | 16210.51 | 198.50 | 55.55 | 31.33 | 22.78 | 18.63 | 16.23 | 14.68 | 13.61 | 12.82 |
| 2 | 19999.65 | 199.00 | 49.79 | 26.28 | 18.31 | 14.54 | 12.40 | 11.04 | 10.10 | 9.42 |
| 3 | 21615.01 | 199.16 | 47.46 | 24.25 | 16.52 | 12.91 | 10.88 | 9.59 | 8.71 | 8.08 |
| 4 | 22499.91 | 199.25 | 46.19 | 23.15 | 15.55 | 12.02 | 10.05 | 8.80 | 7.95 | 7.34 |
| 5 | 23056.17 | 199.30 | 45.39 | 22.45 | 14.93 | 11.46 | 9.52 | 8.30 | 7.47 | 6.87 |
| 6 | 23437.51 | 199.33 | 44.83 | 21.97 | 14.51 | 11.07 | 9.15 | 7.95 | 7.13 | 6.54 |
| 7 | 23714.98 | 199.35 | 44.43 | 21.61 | 14.20 | 10.78 | 8.88 | 7.69 | 6.88 | 6.30 |
| 8 | 23925.83 | 199.37 | 44.12 | 21.34 | 13.96 | 10.56 | 8.67 | 7.49 | 6.69 | 6.11 |
| 9 | 24091.44 | 199.38 | 43.88 | 21.13 | 13.77 | 10.39 | 8.51 | 7.33 | 6.54 | 5.96 |
| 10 | 24224.93 | 199.40 | 43.68 | 20.96 | 13.61 | 10.25 | 8.38 | 7.21 | 6.41 | 5.84 |
| 11 | 24334.81 | 199.40 | 43.52 | 20.82 | 13.49 | 10.13 | 8.26 | 7.10 | 6.31 | 5.74 |
| 12 | 24426.82 | 200.57 | 43.38 | 20.70 | 13.38 | 10.03 | 8.17 | 7.01 | 6.22 | 5.66 |
| 13 | 24505.00 | 200.58 | 43.27 | 20.59 | 13.29 | 9.95 | 8.09 | 6.93 | 6.15 | 5.58 |
| 14 | 24572.23 | 200.59 | 43.17 | 20.51 | 13.21 | 9.87 | 8.02 | 6.87 | 6.08 | 5.52 |
| 15 | 24630.67 | 200.60 | 43.08 | 20.43 | 13.14 | 9.81 | 7.96 | 6.81 | 6.03 | 5.47 |
| 16 | 24681.94 | 200.61 | 43.00 | 20.36 | 13.08 | 9.75 | 7.91 | 6.76 | 5.98 | 5.42 |
| 17 | 24727.27 | 200.62 | 42.94 | 20.30 | 13.03 | 9.70 | 7.86 | 6.71 | 5.93 | 5.37 |
| 18 | 24767.65 | 200.63 | 42.88 | 20.25 | 12.98 | 9.66 | 7.82 | 6.67 | 5.89 | 5.34 |
| 19 | 24803.84 | 200.64 | 42.82 | 20.20 | 12.94 | 9.62 | 7.78 | 6.64 | 5.86 | 5.30 |
| 20 | 24836.45 | 200.64 | 42.77 | 20.16 | 12.90 | 9.58 | 7.75 | 6.60 | 5.83 | 5.27 |
| 21 | 24866.01 | 200.65 | 42.73 | 20.12 | 12.86 | 9.55 | 7.72 | 6.57 | 5.80 | 5.24 |
| 22 | 24892.91 | 200.65 | 42.69 | 20.08 | 12.83 | 9.52 | 7.69 | 6.55 | 5.77 | 5.21 |
| 23 | 24917.49 | 200.65 | 42.65 | 20.05 | 12.80 | 9.49 | 7.66 | 6.52 | 5.75 | 5.19 |
| 24 | 24940.05 | 200.66 | 42.62 | 20.02 | 12.78 | 9.47 | 7.64 | 6.50 | 5.72 | 5.17 |
| 25 | 24960.83 | 200.66 | 42.59 | 19.99 | 12.75 | 9.45 | 7.62 | 6.48 | 5.70 | 5.15 |
| 26 | 24980.03 | 200.67 | 42.56 | 19.97 | 12.72 | 9.42 | 7.60 | 6.46 | 5.68 | 5.13 |
| 27 | 24997.81 | 200.67 | 42.53 | 19.95 | 12.70 | 9.40 | 7.58 | 6.44 | 5.67 | 5.11 |
| 28 | 25014.34 | 200.67 | 42.51 | 19.92 | 12.68 | 9.39 | 7.56 | 6.42 | 5.65 | 5.10 |
| 29 | 25029.74 | 200.67 | 42.48 | 19.90 | 12.66 | 9.37 | 7.54 | 6.41 | 5.63 | 5.08 |
| 30 | 25044.12 | 200.68 | 42.46 | 19.88 | 12.65 | 9.35 | 7.53 | 6.39 | 5.62 | 5.07 |
| 31 | 25057.58 | 200.68 | 42.44 | 19.87 | 12.63 | 9.34 | 7.52 | 6.38 | 5.61 | 5.05 |
| 32 | 25070.21 | 200.68 | 42.42 | 19.85 | 12.62 | 9.32 | 7.50 | 6.36 | 5.59 | 5.04 |
| 33 | 25082.08 | 200.68 | 42.40 | 19.83 | 12.60 | 9.31 | 7.49 | 6.35 | 5.58 | 5.03 |
| 34 | 25093.26 | 200.68 | 42.39 | 19.82 | 12.59 | 9.30 | 7.48 | 6.34 | 5.57 | 5.02 |
| 35 | 25103.80 | 200.69 | 42.37 | 19.80 | 12.57 | 9.29 | 7.47 | 6.33 | 5.56 | 5.01 |
| 36 | 25113.76 | 200.69 | 42.36 | 19.79 | 12.56 | 9.28 | 7.45 | 6.32 | 5.55 | 5.00 |
| 37 | 25123.19 | 200.69 | 42.34 | 19.78 | 12.55 | 9.26 | 7.44 | 6.31 | 5.54 | 4.99 |
| 38 | 25132.12 | 200.69 | 42.33 | 19.77 | 12.54 | 9.25 | 7.44 | 6.30 | 5.53 | 4.98 |
| 39 | 25140.60 | 200.69 | 42.32 | 19.76 | 12.53 | 9.24 | 7.43 | 6.29 | 5.52 | 4.97 |
| 40 | 25148.66 | 200.69 | 42.30 | 19.74 | 12.52 | 9.24 | 7.42 | 6.28 | 5.51 | 4.96 |

| $n_1 \backslash n_2$ | 11 | 12 | 13 | 14 | 15 | 16 | 17 | 18 | 19 | 20 |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| 1 | 12.22 | 11.75 | 11.37 | 11.06 | 10.79 | 10.57 | 10.38 | 10.21 | 10.07 | 9.94 |
| 2 | 8.91 | 8.50 | 8.18 | 7.92 | 7.70 | 7.51 | 7.35 | 7.21 | 7.09 | 6.98 |
| 3 | 7.60 | 7.22 | 6.92 | 6.68 | 6.47 | 6.30 | 6.15 | 6.02 | 5.91 | 5.81 |
| 4 | 6.88 | 6.52 | 6.23 | 5.99 | 5.80 | 5.63 | 5.49 | 5.37 | 5.26 | 5.17 |
| 5 | 6.42 | 6.07 | 5.79 | 5.56 | 5.37 | 5.21 | 5.07 | 4.95 | 4.85 | 4.76 |
| 6 | 6.10 | 5.75 | 5.48 | 5.25 | 5.07 | 4.91 | 4.77 | 4.66 | 4.56 | 4.47 |
| 7 | 5.86 | 5.52 | 5.25 | 5.03 | 4.84 | 4.69 | 4.55 | 4.44 | 4.34 | 4.25 |
| 8 | 5.68 | 5.34 | 5.07 | 4.85 | 4.67 | 4.52 | 4.38 | 4.27 | 4.17 | 4.08 |
| 9 | 5.53 | 5.20 | 4.93 | 4.71 | 4.53 | 4.38 | 4.25 | 4.14 | 4.04 | 3.95 |
| 10 | 5.41 | 5.08 | 4.81 | 4.60 | 4.42 | 4.27 | 4.14 | 4.03 | 3.93 | 3.84 |
| 11 | 5.31 | 4.98 | 4.72 | 4.50 | 4.32 | 4.17 | 4.04 | 3.93 | 3.84 | 3.75 |
| 12 | 5.23 | 4.90 | 4.64 | 4.42 | 4.24 | 4.09 | 3.97 | 3.85 | 3.76 | 3.67 |
| 13 | 5.16 | 4.83 | 4.57 | 4.35 | 4.18 | 4.03 | 3.90 | 3.79 | 3.69 | 3.61 |
| 14 | 5.10 | 4.77 | 4.51 | 4.29 | 4.12 | 3.97 | 3.84 | 3.73 | 3.63 | 3.55 |
| 15 | 5.04 | 4.72 | 4.45 | 4.24 | 4.06 | 3.92 | 3.79 | 3.68 | 3.58 | 3.50 |
| 16 | 5.00 | 4.67 | 4.41 | 4.20 | 4.02 | 3.87 | 3.74 | 3.63 | 3.54 | 3.45 |
| 17 | 4.95 | 4.63 | 4.37 | 4.15 | 3.98 | 3.83 | 3.70 | 3.59 | 3.50 | 3.41 |
| 18 | 4.92 | 4.59 | 4.33 | 4.12 | 3.94 | 3.79 | 3.67 | 3.56 | 3.46 | 3.38 |
| 19 | 4.88 | 4.56 | 4.30 | 4.08 | 3.91 | 3.76 | 3.63 | 3.52 | 3.43 | 3.34 |
| 20 | 4.85 | 4.52 | 4.27 | 4.05 | 3.88 | 3.73 | 3.60 | 3.49 | 3.40 | 3.31 |
| 21 | 4.82 | 4.50 | 4.24 | 4.03 | 3.85 | 3.70 | 3.58 | 3.47 | 3.37 | 3.29 |
| 22 | 4.80 | 4.47 | 4.21 | 4.00 | 3.83 | 3.68 | 3.55 | 3.44 | 3.35 | 3.26 |
| 23 | 4.77 | 4.45 | 4.19 | 3.98 | 3.80 | 3.65 | 3.53 | 3.42 | 3.32 | 3.24 |
| 24 | 4.75 | 4.43 | 4.17 | 3.96 | 3.78 | 3.63 | 3.51 | 3.40 | 3.30 | 3.22 |
| 25 | 4.73 | 4.41 | 4.15 | 3.94 | 3.76 | 3.61 | 3.49 | 3.38 | 3.28 | 3.20 |
| 26 | 4.71 | 4.39 | 4.13 | 3.92 | 3.74 | 3.60 | 3.47 | 3.36 | 3.26 | 3.18 |
| 27 | 4.69 | 4.37 | 4.11 | 3.90 | 3.73 | 3.58 | 3.45 | 3.34 | 3.25 | 3.16 |
| 28 | 4.68 | 4.35 | 4.10 | 3.89 | 3.71 | 3.56 | 3.44 | 3.33 | 3.23 | 3.15 |
| 29 | 4.66 | 4.34 | 4.08 | 3.87 | 3.70 | 3.55 | 3.42 | 3.31 | 3.22 | 3.13 |
| 30 | 4.65 | 4.33 | 4.07 | 3.86 | 3.68 | 3.53 | 3.41 | 3.30 | 3.20 | 3.12 |
| 31 | 4.64 | 4.31 | 4.05 | 3.84 | 3.67 | 3.52 | 3.39 | 3.29 | 3.19 | 3.11 |
| 32 | 4.62 | 4.30 | 4.04 | 3.83 | 3.66 | 3.51 | 3.38 | 3.27 | 3.18 | 3.09 |
| 33 | 4.61 | 4.29 | 4.03 | 3.82 | 3.65 | 3.50 | 3.37 | 3.26 | 3.17 | 3.08 |
| 34 | 4.60 | 4.28 | 4.02 | 3.81 | 3.63 | 3.49 | 3.36 | 3.25 | 3.16 | 3.07 |
| 35 | 4.59 | 4.27 | 4.01 | 3.80 | 3.62 | 3.48 | 3.35 | 3.24 | 3.14 | 3.06 |
| 36 | 4.58 | 4.26 | 4.00 | 3.79 | 3.61 | 3.47 | 3.34 | 3.23 | 3.14 | 3.05 |
| 37 | 4.57 | 4.25 | 3.99 | 3.78 | 3.60 | 3.46 | 3.33 | 3.22 | 3.13 | 3.04 |
| 38 | 4.56 | 4.24 | 3.98 | 3.77 | 3.60 | 3.45 | 3.32 | 3.21 | 3.12 | 3.03 |
| 39 | 4.55 | 4.23 | 3.97 | 3.76 | 3.59 | 3.44 | 3.31 | 3.20 | 3.11 | 3.02 |
| 40 | 4.55 | 4.22 | 3.97 | 3.75 | 3.58 | 3.43 | 3.31 | 3.20 | 3.10 | 3.02 |

| $n_1 \backslash n_2$ | 21 | 22 | 23 | 24 | 25 | 26 | 27 | 28 | 29 | 30 |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| 1 | 9.82 | 9.72 | 9.63 | 9.55 | 9.47 | 9.40 | 9.34 | 9.28 | 9.22 | 9.17 |
| 2 | 6.89 | 6.80 | 6.73 | 6.66 | 6.59 | 6.54 | 6.48 | 6.44 | 6.39 | 6.35 |
| 3 | 5.73 | 5.65 | 5.58 | 5.51 | 5.46 | 5.40 | 5.36 | 5.31 | 5.27 | 5.23 |
| 4 | 5.09 | 5.01 | 4.95 | 4.88 | 4.83 | 4.78 | 4.73 | 4.69 | 4.65 | 4.62 |
| 5 | 4.68 | 4.60 | 4.54 | 4.48 | 4.43 | 4.38 | 4.34 | 4.29 | 4.26 | 4.22 |
| 6 | 4.39 | 4.32 | 4.25 | 4.20 | 4.14 | 4.10 | 4.05 | 4.01 | 3.98 | 3.94 |
| 7 | 4.17 | 4.10 | 4.04 | 3.99 | 3.93 | 3.89 | 3.85 | 3.81 | 3.77 | 3.74 |
| 8 | 4.01 | 3.94 | 3.88 | 3.82 | 3.77 | 3.72 | 3.68 | 3.64 | 3.61 | 3.58 |
| 9 | 3.87 | 3.81 | 3.75 | 3.69 | 3.64 | 3.59 | 3.55 | 3.51 | 3.48 | 3.45 |
| 10 | 3.77 | 3.70 | 3.64 | 3.58 | 3.53 | 3.49 | 3.44 | 3.41 | 3.37 | 3.34 |
| 11 | 3.67 | 3.61 | 3.55 | 3.49 | 3.44 | 3.40 | 3.36 | 3.32 | 3.28 | 3.25 |
| 12 | 3.60 | 3.53 | 3.47 | 3.41 | 3.37 | 3.32 | 3.28 | 3.24 | 3.21 | 3.17 |
| 13 | 3.53 | 3.46 | 3.40 | 3.35 | 3.30 | 3.25 | 3.21 | 3.18 | 3.14 | 3.11 |
| 14 | 3.47 | 3.41 | 3.35 | 3.29 | 3.24 | 3.20 | 3.16 | 3.12 | 3.08 | 3.05 |
| 15 | 3.42 | 3.35 | 3.29 | 3.24 | 3.19 | 3.15 | 3.11 | 3.07 | 3.03 | 3.00 |
| 16 | 3.38 | 3.31 | 3.25 | 3.20 | 3.15 | 3.10 | 3.06 | 3.02 | 2.99 | 2.96 |
| 17 | 3.34 | 3.27 | 3.21 | 3.16 | 3.11 | 3.06 | 3.02 | 2.98 | 2.95 | 2.92 |
| 18 | 3.30 | 3.23 | 3.17 | 3.12 | 3.07 | 3.03 | 2.98 | 2.95 | 2.91 | 2.88 |
| 19 | 3.27 | 3.20 | 3.14 | 3.09 | 3.04 | 2.99 | 2.95 | 2.91 | 2.88 | 2.85 |
| 20 | 3.24 | 3.17 | 3.11 | 3.06 | 3.01 | 2.96 | 2.92 | 2.88 | 2.85 | 2.82 |
| 21 | 3.21 | 3.14 | 3.08 | 3.03 | 2.98 | 2.94 | 2.90 | 2.86 | 2.82 | 2.79 |
| 22 | 3.19 | 3.12 | 3.06 | 3.01 | 2.96 | 2.91 | 2.87 | 2.83 | 2.80 | 2.77 |
| 23 | 3.16 | 3.10 | 3.04 | 2.98 | 2.93 | 2.89 | 2.85 | 2.81 | 2.78 | 2.74 |
| 24 | 3.14 | 3.08 | 3.02 | 2.96 | 2.91 | 2.87 | 2.83 | 2.79 | 2.75 | 2.72 |
| 25 | 3.12 | 3.06 | 3.00 | 2.94 | 2.89 | 2.85 | 2.81 | 2.77 | 2.73 | 2.70 |
| 26 | 3.10 | 3.04 | 2.98 | 2.92 | 2.87 | 2.83 | 2.79 | 2.75 | 2.72 | 2.68 |
| 27 | 3.09 | 3.02 | 2.96 | 2.91 | 2.86 | 2.81 | 2.77 | 2.73 | 2.70 | 2.67 |
| 28 | 3.07 | 3.01 | 2.95 | 2.89 | 2.84 | 2.80 | 2.76 | 2.72 | 2.68 | 2.65 |
| 29 | 3.06 | 2.99 | 2.93 | 2.88 | 2.83 | 2.78 | 2.74 | 2.70 | 2.67 | 2.64 |
| 30 | 3.04 | 2.98 | 2.92 | 2.86 | 2.81 | 2.77 | 2.73 | 2.69 | 2.66 | 2.62 |
| 31 | 3.03 | 2.96 | 2.90 | 2.85 | 2.80 | 2.76 | 2.71 | 2.68 | 2.64 | 2.61 |
| 32 | 3.02 | 2.95 | 2.89 | 2.84 | 2.79 | 2.74 | 2.70 | 2.66 | 2.63 | 2.60 |
| 33 | 3.01 | 2.94 | 2.88 | 2.83 | 2.78 | 2.73 | 2.69 | 2.65 | 2.62 | 2.59 |
| 34 | 3.00 | 2.93 | 2.87 | 2.82 | 2.77 | 2.72 | 2.68 | 2.64 | 2.61 | 2.57 |
| 35 | 2.99 | 2.92 | 2.86 | 2.80 | 2.76 | 2.71 | 2.67 | 2.63 | 2.60 | 2.56 |
| 36 | 2.98 | 2.91 | 2.85 | 2.79 | 2.75 | 2.70 | 2.66 | 2.62 | 2.59 | 2.55 |
| 37 | 2.97 | 2.90 | 2.84 | 2.79 | 2.74 | 2.69 | 2.65 | 2.61 | 2.58 | 2.54 |
| 38 | 2.96 | 2.89 | 2.83 | 2.78 | 2.73 | 2.68 | 2.64 | 2.60 | 2.57 | 2.54 |
| 39 | 2.95 | 2.88 | 2.82 | 2.77 | 2.72 | 2.67 | 2.63 | 2.59 | 2.56 | 2.53 |
| 40 | 2.94 | 2.87 | 2.81 | 2.76 | 2.71 | 2.67 | 2.62 | 2.59 | 2.55 | 2.52 |

| $n_1 \backslash n_2$ | 31 | 32 | 33 | 34 | 35 | 36 | 37 | 38 | 39 | 40 |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| 1 | 9.13 | 9.08 | 9.04 | 9.01 | 8.97 | 8.94 | 8.91 | 8.88 | 8.85 | 8.82 |
| 2 | 6.31 | 6.28 | 6.24 | 6.21 | 6.18 | 6.16 | 6.13 | 6.11 | 6.08 | 6.06 |
| 3 | 5.20 | 5.17 | 5.14 | 5.11 | 5.08 | 5.06 | 5.03 | 5.01 | 4.99 | 4.97 |
| 4 | 4.59 | 4.55 | 4.53 | 4.50 | 4.47 | 4.45 | 4.43 | 4.41 | 4.39 | 4.37 |
| 5 | 4.19 | 4.16 | 4.13 | 4.11 | 4.08 | 4.06 | 4.04 | 4.02 | 4.00 | 3.98 |
| 6 | 3.91 | 3.88 | 3.86 | 3.83 | 3.81 | 3.78 | 3.76 | 3.74 | 3.73 | 3.71 |
| 7 | 3.71 | 3.68 | 3.65 | 3.63 | 3.60 | 3.58 | 3.56 | 3.54 | 3.52 | 3.50 |
| 8 | 3.54 | 3.52 | 3.49 | 3.46 | 3.44 | 3.42 | 3.40 | 3.38 | 3.36 | 3.34 |
| 9 | 3.42 | 3.39 | 3.36 | 3.34 | 3.31 | 3.29 | 3.27 | 3.25 | 3.23 | 3.22 |
| 10 | 3.31 | 3.28 | 3.25 | 3.23 | 3.21 | 3.19 | 3.17 | 3.15 | 3.13 | 3.11 |
| 11 | 3.22 | 3.19 | 3.17 | 3.14 | 3.12 | 3.10 | 3.08 | 3.06 | 3.04 | 3.02 |
| 12 | 3.14 | 3.12 | 3.09 | 3.07 | 3.04 | 3.02 | 3.00 | 2.98 | 2.96 | 2.95 |
| 13 | 3.08 | 3.05 | 3.02 | 3.00 | 2.98 | 2.96 | 2.94 | 2.92 | 2.90 | 2.88 |
| 14 | 3.02 | 2.99 | 2.97 | 2.94 | 2.92 | 2.90 | 2.88 | 2.86 | 2.84 | 2.83 |
| 15 | 2.97 | 2.94 | 2.92 | 2.89 | 2.87 | 2.85 | 2.83 | 2.81 | 2.79 | 2.78 |
| 16 | 2.93 | 2.90 | 2.87 | 2.85 | 2.83 | 2.80 | 2.78 | 2.77 | 2.75 | 2.73 |
| 17 | 2.89 | 2.86 | 2.83 | 2.81 | 2.79 | 2.76 | 2.74 | 2.73 | 2.71 | 2.69 |
| 18 | 2.85 | 2.82 | 2.80 | 2.77 | 2.75 | 2.73 | 2.71 | 2.69 | 2.67 | 2.66 |
| 19 | 2.82 | 2.79 | 2.76 | 2.74 | 2.72 | 2.70 | 2.68 | 2.66 | 2.64 | 2.62 |
| 20 | 2.79 | 2.76 | 2.73 | 2.71 | 2.69 | 2.67 | 2.65 | 2.63 | 2.61 | 2.59 |
| 21 | 2.76 | 2.73 | 2.71 | 2.68 | 2.66 | 2.64 | 2.62 | 2.60 | 2.58 | 2.57 |
| 22 | 2.74 | 2.71 | 2.68 | 2.66 | 2.64 | 2.61 | 2.59 | 2.58 | 2.56 | 2.54 |
| 23 | 2.71 | 2.69 | 2.66 | 2.64 | 2.61 | 2.59 | 2.57 | 2.55 | 2.54 | 2.52 |
| 24 | 2.69 | 2.66 | 2.64 | 2.61 | 2.59 | 2.57 | 2.55 | 2.53 | 2.51 | 2.50 |
| 25 | 2.67 | 2.65 | 2.62 | 2.59 | 2.57 | 2.55 | 2.53 | 2.51 | 2.49 | 2.48 |
| 26 | 2.65 | 2.63 | 2.60 | 2.58 | 2.55 | 2.53 | 2.51 | 2.49 | 2.48 | 2.46 |
| 27 | 2.64 | 2.61 | 2.58 | 2.56 | 2.54 | 2.52 | 2.50 | 2.48 | 2.46 | 2.44 |
| 28 | 2.62 | 2.59 | 2.57 | 2.54 | 2.52 | 2.50 | 2.48 | 2.46 | 2.44 | 2.43 |
| 29 | 2.61 | 2.58 | 2.55 | 2.53 | 2.51 | 2.48 | 2.46 | 2.45 | 2.43 | 2.41 |
| 30 | 2.59 | 2.56 | 2.54 | 2.51 | 2.49 | 2.47 | 2.45 | 2.43 | 2.41 | 2.40 |
| 31 | 2.58 | 2.55 | 2.53 | 2.50 | 2.48 | 2.46 | 2.44 | 2.42 | 2.40 | 2.38 |
| 32 | 2.57 | 2.54 | 2.51 | 2.49 | 2.47 | 2.44 | 2.42 | 2.41 | 2.39 | 2.37 |
| 33 | 2.56 | 2.53 | 2.50 | 2.48 | 2.45 | 2.43 | 2.41 | 2.39 | 2.38 | 2.36 |
| 34 | 2.54 | 2.52 | 2.49 | 2.47 | 2.44 | 2.42 | 2.40 | 2.38 | 2.36 | 2.35 |
| 35 | 2.53 | 2.51 | 2.48 | 2.46 | 2.43 | 2.41 | 2.39 | 2.37 | 2.35 | 2.34 |
| 36 | 2.52 | 2.50 | 2.47 | 2.45 | 2.42 | 2.40 | 2.38 | 2.36 | 2.34 | 2.33 |
| 37 | 2.51 | 2.49 | 2.46 | 2.44 | 2.41 | 2.39 | 2.37 | 2.35 | 2.33 | 2.32 |
| 38 | 2.51 | 2.48 | 2.45 | 2.43 | 2.40 | 2.38 | 2.36 | 2.34 | 2.32 | 2.31 |
| 39 | 2.50 | 2.47 | 2.44 | 2.42 | 2.40 | 2.37 | 2.35 | 2.33 | 2.32 | 2.30 |
| 40 | 2.49 | 2.46 | 2.43 | 2.41 | 2.39 | 2.37 | 2.35 | 2.33 | 2.31 | 2.29 |

### C.4.2 $F_{n_1,n_2,0.99}$

| $n_1\backslash n_2$ | 1 | 2 | 3 | 4 | 5 | 6 | 7 | 8 | 9 | 10 |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| 1 | 4051.86 | 98.50 | 34.11 | 21.19 | 16.25 | 13.74 | 12.24 | 11.25 | 10.56 | 10.04 |
| 2 | 4999.52 | 99.00 | 30.81 | 18.00 | 13.27 | 10.92 | 9.54 | 8.64 | 8.02 | 7.55 |
| 3 | 5403.48 | 99.16 | 29.45 | 16.69 | 12.05 | 9.77 | 8.45 | 7.59 | 6.99 | 6.55 |
| 4 | 5624.77 | 99.24 | 28.70 | 15.97 | 11.39 | 9.14 | 7.84 | 7.00 | 6.42 | 5.99 |
| 5 | 5763.87 | 99.29 | 28.23 | 15.52 | 10.96 | 8.74 | 7.46 | 6.63 | 6.05 | 5.63 |
| 6 | 5859.23 | 99.33 | 27.91 | 15.20 | 10.67 | 8.46 | 7.19 | 6.37 | 5.80 | 5.38 |
| 7 | 5928.62 | 99.35 | 27.67 | 14.97 | 10.45 | 8.26 | 6.99 | 6.17 | 5.61 | 5.20 |
| 8 | 5981.34 | 99.37 | 27.48 | 14.79 | 10.28 | 8.10 | 6.84 | 6.02 | 5.46 | 5.05 |
| 9 | 6022.76 | 99.38 | 27.34 | 14.65 | 10.15 | 7.97 | 6.71 | 5.91 | 5.35 | 4.94 |
| 10 | 6056.14 | 99.39 | 27.22 | 14.54 | 10.05 | 7.87 | 6.62 | 5.81 | 5.25 | 4.84 |
| 11 | 6083.61 | 99.40 | 27.13 | 14.45 | 9.96 | 7.78 | 6.53 | 5.73 | 5.17 | 4.77 |
| 12 | 6106.62 | 99.41 | 27.05 | 14.37 | 9.88 | 7.71 | 6.46 | 5.66 | 5.11 | 4.70 |
| 13 | 6126.17 | 99.42 | 26.98 | 14.30 | 9.82 | 7.65 | 6.40 | 5.60 | 5.05 | 4.64 |
| 14 | 6142.98 | 99.76 | 26.92 | 14.24 | 9.76 | 7.60 | 6.35 | 5.55 | 5.00 | 4.60 |
| 15 | 6157.60 | 99.76 | 26.87 | 14.19 | 9.72 | 7.55 | 6.31 | 5.51 | 4.96 | 4.55 |
| 16 | 6170.42 | 99.77 | 26.82 | 14.15 | 9.67 | 7.51 | 6.27 | 5.47 | 4.92 | 4.52 |
| 17 | 6181.75 | 99.77 | 26.78 | 14.11 | 9.64 | 7.48 | 6.23 | 5.44 | 4.89 | 4.48 |
| 18 | 6191.85 | 99.77 | 26.75 | 14.07 | 9.60 | 7.45 | 6.20 | 5.41 | 4.85 | 4.45 |
| 19 | 6200.90 | 99.78 | 26.71 | 14.04 | 9.57 | 7.42 | 6.18 | 5.38 | 4.83 | 4.42 |
| 20 | 6209.05 | 99.78 | 26.68 | 14.01 | 9.55 | 7.39 | 6.15 | 5.35 | 4.80 | 4.40 |
| 21 | 6216.44 | 99.78 | 26.66 | 13.99 | 9.52 | 7.37 | 6.13 | 5.33 | 4.78 | 4.38 |
| 22 | 6223.17 | 99.79 | 26.63 | 13.97 | 9.50 | 7.35 | 6.11 | 5.31 | 4.76 | 4.36 |
| 23 | 6229.32 | 99.79 | 26.61 | 13.94 | 9.48 | 7.33 | 6.09 | 5.29 | 4.74 | 4.34 |
| 24 | 6234.96 | 99.79 | 26.59 | 13.92 | 9.46 | 7.31 | 6.07 | 5.27 | 4.72 | 4.32 |
| 25 | 6240.16 | 99.79 | 26.57 | 13.91 | 9.44 | 7.29 | 6.05 | 5.26 | 4.71 | 4.31 |
| 26 | 6244.96 | 99.79 | 26.53 | 13.89 | 9.43 | 7.28 | 6.04 | 5.24 | 4.69 | 4.29 |
| 27 | 6249.40 | 99.80 | 26.51 | 13.87 | 9.41 | 7.26 | 6.02 | 5.23 | 4.68 | 4.28 |
| 28 | 6253.54 | 99.80 | 26.50 | 13.86 | 9.40 | 7.25 | 6.01 | 5.22 | 4.67 | 4.26 |
| 29 | 6257.39 | 99.80 | 26.48 | 13.85 | 9.39 | 7.23 | 6.00 | 5.20 | 4.65 | 4.25 |
| 30 | 6260.98 | 99.80 | 26.47 | 13.83 | 9.37 | 7.22 | 5.99 | 5.19 | 4.64 | 4.24 |
| 31 | 6264.35 | 99.80 | 26.46 | 13.82 | 9.36 | 7.21 | 5.98 | 5.18 | 4.63 | 4.23 |
| 32 | 6267.51 | 99.80 | 26.45 | 13.81 | 9.35 | 7.20 | 5.97 | 5.17 | 4.62 | 4.22 |
| 33 | 6270.48 | 99.80 | 26.44 | 13.80 | 9.34 | 7.19 | 5.96 | 5.16 | 4.61 | 4.21 |
| 34 | 6273.27 | 99.80 | 26.43 | 13.79 | 9.33 | 7.18 | 5.95 | 5.15 | 4.60 | 4.20 |
| 35 | 6275.91 | 99.80 | 26.42 | 13.78 | 9.32 | 7.17 | 5.94 | 5.15 | 4.60 | 4.20 |
| 36 | 6278.40 | 99.81 | 26.41 | 13.77 | 9.32 | 7.17 | 5.93 | 5.14 | 4.59 | 4.19 |
| 37 | 6280.75 | 99.81 | 26.40 | 13.76 | 9.31 | 7.16 | 5.92 | 5.13 | 4.58 | 4.18 |
| 38 | 6282.99 | 99.81 | 26.39 | 13.75 | 9.30 | 7.15 | 5.92 | 5.12 | 4.57 | 4.17 |
| 39 | 6285.11 | 99.81 | 26.38 | 13.75 | 9.29 | 7.14 | 5.91 | 5.12 | 4.57 | 4.17 |
| 40 | 6287.12 | 99.81 | 26.38 | 13.74 | 9.29 | 7.14 | 5.90 | 5.11 | 4.56 | 4.16 |

| $n_1 \backslash n_2$ | 11 | 12 | 13 | 14 | 15 | 16 | 17 | 18 | 19 | 20 |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| 1 | 9.64 | 9.33 | 9.07 | 8.86 | 8.68 | 8.53 | 8.39 | 8.28 | 8.18 | 8.09 |
| 2 | 7.20 | 6.92 | 6.70 | 6.51 | 6.35 | 6.22 | 6.11 | 6.01 | 5.92 | 5.84 |
| 3 | 6.21 | 5.95 | 5.73 | 5.56 | 5.41 | 5.29 | 5.18 | 5.09 | 5.01 | 4.93 |
| 4 | 5.66 | 5.41 | 5.20 | 5.03 | 4.89 | 4.77 | 4.66 | 4.57 | 4.50 | 4.43 |
| 5 | 5.31 | 5.06 | 4.86 | 4.69 | 4.55 | 4.43 | 4.33 | 4.24 | 4.17 | 4.10 |
| 6 | 5.06 | 4.82 | 4.62 | 4.45 | 4.31 | 4.20 | 4.10 | 4.01 | 3.93 | 3.87 |
| 7 | 4.88 | 4.63 | 4.44 | 4.27 | 4.14 | 4.02 | 3.92 | 3.84 | 3.76 | 3.69 |
| 8 | 4.74 | 4.49 | 4.30 | 4.13 | 4.00 | 3.88 | 3.79 | 3.70 | 3.63 | 3.56 |
| 9 | 4.63 | 4.38 | 4.19 | 4.02 | 3.89 | 3.78 | 3.68 | 3.59 | 3.52 | 3.45 |
| 10 | 4.53 | 4.29 | 4.10 | 3.93 | 3.80 | 3.69 | 3.59 | 3.50 | 3.43 | 3.36 |
| 11 | 4.46 | 4.21 | 4.02 | 3.86 | 3.72 | 3.61 | 3.51 | 3.43 | 3.35 | 3.29 |
| 12 | 4.39 | 4.15 | 3.96 | 3.80 | 3.66 | 3.55 | 3.45 | 3.37 | 3.29 | 3.23 |
| 13 | 4.34 | 4.09 | 3.90 | 3.74 | 3.61 | 3.49 | 3.40 | 3.31 | 3.24 | 3.17 |
| 14 | 4.29 | 4.05 | 3.85 | 3.69 | 3.56 | 3.45 | 3.35 | 3.26 | 3.19 | 3.12 |
| 15 | 4.25 | 4.00 | 3.81 | 3.65 | 3.52 | 3.40 | 3.31 | 3.22 | 3.15 | 3.08 |
| 16 | 4.21 | 3.97 | 3.77 | 3.61 | 3.48 | 3.37 | 3.27 | 3.19 | 3.11 | 3.05 |
| 17 | 4.18 | 3.93 | 3.74 | 3.58 | 3.45 | 3.33 | 3.24 | 3.15 | 3.08 | 3.01 |
| 18 | 4.15 | 3.90 | 3.71 | 3.55 | 3.42 | 3.30 | 3.21 | 3.12 | 3.05 | 2.98 |
| 19 | 4.12 | 3.88 | 3.68 | 3.52 | 3.39 | 3.28 | 3.18 | 3.10 | 3.02 | 2.96 |
| 20 | 4.09 | 3.85 | 3.66 | 3.50 | 3.37 | 3.25 | 3.16 | 3.07 | 3.00 | 2.93 |
| 21 | 4.07 | 3.83 | 3.64 | 3.48 | 3.34 | 3.23 | 3.13 | 3.05 | 2.98 | 2.91 |
| 22 | 4.05 | 3.81 | 3.62 | 3.46 | 3.32 | 3.21 | 3.11 | 3.03 | 2.96 | 2.89 |
| 23 | 4.03 | 3.79 | 3.60 | 3.44 | 3.31 | 3.19 | 3.10 | 3.01 | 2.94 | 2.87 |
| 24 | 4.02 | 3.78 | 3.58 | 3.42 | 3.29 | 3.18 | 3.08 | 2.99 | 2.92 | 2.85 |
| 25 | 4.00 | 3.76 | 3.57 | 3.41 | 3.27 | 3.16 | 3.06 | 2.98 | 2.90 | 2.84 |
| 26 | 3.99 | 3.75 | 3.55 | 3.39 | 3.26 | 3.15 | 3.05 | 2.96 | 2.89 | 2.82 |
| 27 | 3.97 | 3.73 | 3.54 | 3.38 | 3.24 | 3.13 | 3.03 | 2.95 | 2.88 | 2.81 |
| 28 | 3.96 | 3.72 | 3.53 | 3.37 | 3.23 | 3.12 | 3.02 | 2.94 | 2.86 | 2.80 |
| 29 | 3.95 | 3.71 | 3.51 | 3.35 | 3.22 | 3.11 | 3.01 | 2.92 | 2.85 | 2.78 |
| 30 | 3.94 | 3.70 | 3.50 | 3.34 | 3.21 | 3.10 | 3.00 | 2.91 | 2.84 | 2.77 |
| 31 | 3.93 | 3.69 | 3.49 | 3.33 | 3.20 | 3.09 | 2.99 | 2.90 | 2.83 | 2.76 |
| 32 | 3.92 | 3.68 | 3.48 | 3.32 | 3.19 | 3.08 | 2.98 | 2.89 | 2.82 | 2.75 |
| 33 | 3.91 | 3.67 | 3.47 | 3.31 | 3.18 | 3.07 | 2.97 | 2.88 | 2.81 | 2.74 |
| 34 | 3.90 | 3.66 | 3.46 | 3.30 | 3.17 | 3.06 | 2.96 | 2.87 | 2.80 | 2.73 |
| 35 | 3.89 | 3.65 | 3.46 | 3.30 | 3.16 | 3.05 | 2.95 | 2.87 | 2.79 | 2.73 |
| 36 | 3.88 | 3.64 | 3.45 | 3.29 | 3.15 | 3.04 | 2.94 | 2.86 | 2.78 | 2.72 |
| 37 | 3.87 | 3.63 | 3.44 | 3.28 | 3.15 | 3.03 | 2.94 | 2.85 | 2.78 | 2.71 |
| 38 | 3.87 | 3.63 | 3.43 | 3.27 | 3.14 | 3.03 | 2.93 | 2.84 | 2.77 | 2.70 |
| 39 | 3.86 | 3.62 | 3.43 | 3.27 | 3.13 | 3.02 | 2.92 | 2.84 | 2.76 | 2.70 |
| 40 | 3.85 | 3.61 | 3.42 | 3.26 | 3.13 | 3.01 | 2.92 | 2.83 | 2.76 | 2.69 |

| $n_1 \backslash n_2$ | 21 | 22 | 23 | 24 | 25 | 26 | 27 | 28 | 29 | 30 |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| 1 | 8.01 | 7.94 | 7.88 | 7.82 | 7.76 | 7.72 | 7.67 | 7.63 | 7.59 | 7.56 |
| 2 | 5.78 | 5.71 | 5.66 | 5.61 | 5.56 | 5.52 | 5.48 | 5.45 | 5.42 | 5.39 |
| 3 | 4.87 | 4.81 | 4.76 | 4.71 | 4.67 | 4.63 | 4.60 | 4.56 | 4.53 | 4.50 |
| 4 | 4.36 | 4.31 | 4.26 | 4.21 | 4.17 | 4.13 | 4.10 | 4.07 | 4.04 | 4.01 |
| 5 | 4.04 | 3.98 | 3.93 | 3.89 | 3.85 | 3.81 | 3.78 | 3.75 | 3.72 | 3.69 |
| 6 | 3.81 | 3.75 | 3.71 | 3.66 | 3.62 | 3.59 | 3.55 | 3.52 | 3.49 | 3.47 |
| 7 | 3.63 | 3.58 | 3.53 | 3.49 | 3.45 | 3.42 | 3.38 | 3.35 | 3.33 | 3.30 |
| 8 | 3.50 | 3.45 | 3.40 | 3.36 | 3.32 | 3.28 | 3.25 | 3.22 | 3.19 | 3.17 |
| 9 | 3.39 | 3.34 | 3.29 | 3.25 | 3.21 | 3.18 | 3.14 | 3.11 | 3.09 | 3.06 |
| 10 | 3.30 | 3.25 | 3.21 | 3.16 | 3.12 | 3.09 | 3.06 | 3.03 | 3.00 | 2.97 |
| 11 | 3.23 | 3.18 | 3.13 | 3.09 | 3.05 | 3.02 | 2.98 | 2.95 | 2.93 | 2.90 |
| 12 | 3.17 | 3.12 | 3.07 | 3.03 | 2.99 | 2.95 | 2.92 | 2.89 | 2.86 | 2.84 |
| 13 | 3.11 | 3.06 | 3.01 | 2.97 | 2.93 | 2.90 | 2.87 | 2.84 | 2.81 | 2.78 |
| 14 | 3.07 | 3.01 | 2.97 | 2.93 | 2.89 | 2.85 | 2.82 | 2.79 | 2.76 | 2.74 |
| 15 | 3.02 | 2.97 | 2.93 | 2.88 | 2.85 | 2.81 | 2.78 | 2.75 | 2.72 | 2.70 |
| 16 | 2.99 | 2.94 | 2.89 | 2.85 | 2.81 | 2.77 | 2.74 | 2.71 | 2.68 | 2.66 |
| 17 | 2.96 | 2.90 | 2.86 | 2.81 | 2.78 | 2.74 | 2.71 | 2.68 | 2.65 | 2.63 |
| 18 | 2.93 | 2.87 | 2.83 | 2.78 | 2.75 | 2.71 | 2.68 | 2.65 | 2.62 | 2.60 |
| 19 | 2.90 | 2.85 | 2.80 | 2.76 | 2.72 | 2.68 | 2.65 | 2.62 | 2.59 | 2.57 |
| 20 | 2.87 | 2.82 | 2.78 | 2.73 | 2.69 | 2.66 | 2.63 | 2.60 | 2.57 | 2.54 |
| 21 | 2.85 | 2.80 | 2.75 | 2.71 | 2.67 | 2.64 | 2.60 | 2.57 | 2.55 | 2.52 |
| 22 | 2.83 | 2.78 | 2.73 | 2.69 | 2.65 | 2.62 | 2.58 | 2.55 | 2.53 | 2.50 |
| 23 | 2.81 | 2.76 | 2.71 | 2.67 | 2.63 | 2.60 | 2.56 | 2.53 | 2.51 | 2.48 |
| 24 | 2.80 | 2.74 | 2.70 | 2.65 | 2.62 | 2.58 | 2.55 | 2.52 | 2.49 | 2.46 |
| 25 | 2.78 | 2.73 | 2.68 | 2.64 | 2.60 | 2.56 | 2.53 | 2.50 | 2.47 | 2.45 |
| 26 | 2.77 | 2.71 | 2.67 | 2.62 | 2.58 | 2.55 | 2.52 | 2.49 | 2.46 | 2.43 |
| 27 | 2.75 | 2.70 | 2.65 | 2.61 | 2.57 | 2.53 | 2.50 | 2.47 | 2.44 | 2.42 |
| 28 | 2.74 | 2.69 | 2.64 | 2.60 | 2.56 | 2.52 | 2.49 | 2.46 | 2.43 | 2.41 |
| 29 | 2.73 | 2.67 | 2.63 | 2.58 | 2.54 | 2.51 | 2.48 | 2.45 | 2.42 | 2.39 |
| 30 | 2.71 | 2.66 | 2.62 | 2.57 | 2.53 | 2.50 | 2.46 | 2.43 | 2.41 | 2.38 |
| 31 | 2.70 | 2.65 | 2.60 | 2.56 | 2.52 | 2.49 | 2.45 | 2.42 | 2.40 | 2.37 |
| 32 | 2.69 | 2.64 | 2.59 | 2.55 | 2.51 | 2.48 | 2.44 | 2.41 | 2.39 | 2.36 |
| 33 | 2.68 | 2.63 | 2.58 | 2.54 | 2.50 | 2.47 | 2.43 | 2.40 | 2.38 | 2.35 |
| 34 | 2.68 | 2.62 | 2.58 | 2.53 | 2.49 | 2.46 | 2.42 | 2.39 | 2.37 | 2.34 |
| 35 | 2.67 | 2.61 | 2.57 | 2.52 | 2.49 | 2.45 | 2.42 | 2.39 | 2.36 | 2.33 |
| 36 | 2.66 | 2.61 | 2.56 | 2.52 | 2.48 | 2.44 | 2.41 | 2.38 | 2.35 | 2.32 |
| 37 | 2.65 | 2.60 | 2.55 | 2.51 | 2.47 | 2.43 | 2.40 | 2.37 | 2.34 | 2.32 |
| 38 | 2.64 | 2.59 | 2.54 | 2.50 | 2.46 | 2.43 | 2.39 | 2.36 | 2.33 | 2.31 |
| 39 | 2.64 | 2.58 | 2.54 | 2.49 | 2.45 | 2.42 | 2.39 | 2.36 | 2.33 | 2.30 |
| 40 | 2.63 | 2.58 | 2.53 | 2.49 | 2.45 | 2.41 | 2.38 | 2.35 | 2.32 | 2.29 |

| $n_1 \backslash n_2$ | 31 | 32 | 33 | 34 | 35 | 36 | 37 | 38 | 39 | 40 |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| 1 | 7.52 | 7.49 | 7.47 | 7.44 | 7.41 | 7.39 | 7.37 | 7.35 | 7.33 | 7.31 |
| 2 | 5.36 | 5.33 | 5.31 | 5.28 | 5.26 | 5.24 | 5.22 | 5.21 | 5.19 | 5.17 |
| 3 | 4.48 | 4.45 | 4.43 | 4.41 | 4.39 | 4.37 | 4.35 | 4.34 | 4.32 | 4.31 |
| 4 | 3.99 | 3.96 | 3.94 | 3.92 | 3.90 | 3.89 | 3.87 | 3.85 | 3.84 | 3.82 |
| 5 | 3.67 | 3.65 | 3.63 | 3.61 | 3.59 | 3.57 | 3.55 | 3.54 | 3.52 | 3.51 |
| 6 | 3.44 | 3.42 | 3.40 | 3.38 | 3.36 | 3.35 | 3.33 | 3.31 | 3.30 | 3.29 |
| 7 | 3.28 | 3.25 | 3.23 | 3.21 | 3.19 | 3.18 | 3.16 | 3.15 | 3.13 | 3.12 |
| 8 | 3.14 | 3.12 | 3.10 | 3.08 | 3.06 | 3.05 | 3.03 | 3.02 | 3.00 | 2.99 |
| 9 | 3.04 | 3.02 | 3.00 | 2.98 | 2.96 | 2.94 | 2.93 | 2.91 | 2.90 | 2.88 |
| 10 | 2.95 | 2.93 | 2.91 | 2.89 | 2.87 | 2.85 | 2.84 | 2.82 | 2.81 | 2.80 |
| 11 | 2.88 | 2.86 | 2.83 | 2.82 | 2.80 | 2.78 | 2.76 | 2.75 | 2.74 | 2.72 |
| 12 | 2.81 | 2.79 | 2.77 | 2.75 | 2.74 | 2.72 | 2.70 | 2.69 | 2.67 | 2.66 |
| 13 | 2.76 | 2.74 | 2.72 | 2.70 | 2.68 | 2.66 | 2.65 | 2.63 | 2.62 | 2.61 |
| 14 | 2.71 | 2.69 | 2.67 | 2.65 | 2.63 | 2.62 | 2.60 | 2.59 | 2.57 | 2.56 |
| 15 | 2.67 | 2.65 | 2.63 | 2.61 | 2.59 | 2.58 | 2.56 | 2.54 | 2.53 | 2.52 |
| 16 | 2.63 | 2.61 | 2.59 | 2.57 | 2.55 | 2.54 | 2.52 | 2.51 | 2.49 | 2.48 |
| 17 | 2.60 | 2.58 | 2.56 | 2.54 | 2.52 | 2.50 | 2.49 | 2.47 | 2.46 | 2.45 |
| 18 | 2.57 | 2.55 | 2.53 | 2.51 | 2.49 | 2.47 | 2.46 | 2.44 | 2.43 | 2.42 |
| 19 | 2.54 | 2.52 | 2.50 | 2.48 | 2.46 | 2.45 | 2.43 | 2.42 | 2.40 | 2.39 |
| 20 | 2.52 | 2.50 | 2.48 | 2.46 | 2.44 | 2.42 | 2.41 | 2.39 | 2.38 | 2.36 |
| 21 | 2.50 | 2.48 | 2.45 | 2.44 | 2.42 | 2.40 | 2.38 | 2.37 | 2.35 | 2.34 |
| 22 | 2.48 | 2.45 | 2.43 | 2.41 | 2.40 | 2.38 | 2.36 | 2.35 | 2.33 | 2.32 |
| 23 | 2.46 | 2.44 | 2.41 | 2.40 | 2.38 | 2.36 | 2.34 | 2.33 | 2.31 | 2.30 |
| 24 | 2.44 | 2.42 | 2.40 | 2.38 | 2.36 | 2.34 | 2.33 | 2.31 | 2.30 | 2.28 |
| 25 | 2.42 | 2.40 | 2.38 | 2.36 | 2.34 | 2.33 | 2.31 | 2.29 | 2.28 | 2.27 |
| 26 | 2.41 | 2.39 | 2.37 | 2.35 | 2.33 | 2.31 | 2.29 | 2.28 | 2.26 | 2.25 |
| 27 | 2.39 | 2.37 | 2.35 | 2.33 | 2.31 | 2.30 | 2.28 | 2.26 | 2.25 | 2.24 |
| 28 | 2.38 | 2.36 | 2.34 | 2.32 | 2.30 | 2.28 | 2.27 | 2.25 | 2.24 | 2.22 |
| 29 | 2.37 | 2.35 | 2.33 | 2.31 | 2.29 | 2.27 | 2.25 | 2.24 | 2.22 | 2.21 |
| 30 | 2.36 | 2.33 | 2.31 | 2.29 | 2.28 | 2.26 | 2.24 | 2.23 | 2.21 | 2.20 |
| 31 | 2.35 | 2.32 | 2.30 | 2.28 | 2.26 | 2.25 | 2.23 | 2.22 | 2.20 | 2.19 |
| 32 | 2.34 | 2.31 | 2.29 | 2.27 | 2.25 | 2.24 | 2.22 | 2.20 | 2.19 | 2.18 |
| 33 | 2.33 | 2.30 | 2.28 | 2.26 | 2.24 | 2.23 | 2.21 | 2.19 | 2.18 | 2.17 |
| 34 | 2.32 | 2.29 | 2.27 | 2.25 | 2.23 | 2.22 | 2.20 | 2.19 | 2.17 | 2.16 |
| 35 | 2.31 | 2.29 | 2.26 | 2.24 | 2.23 | 2.21 | 2.19 | 2.18 | 2.16 | 2.15 |
| 36 | 2.30 | 2.28 | 2.26 | 2.24 | 2.22 | 2.20 | 2.18 | 2.17 | 2.15 | 2.14 |
| 37 | 2.29 | 2.27 | 2.25 | 2.23 | 2.21 | 2.19 | 2.18 | 2.16 | 2.15 | 2.13 |
| 38 | 2.28 | 2.26 | 2.24 | 2.22 | 2.20 | 2.18 | 2.17 | 2.15 | 2.14 | 2.12 |
| 39 | 2.28 | 2.25 | 2.23 | 2.21 | 2.19 | 2.18 | 2.16 | 2.14 | 2.13 | 2.12 |
| 40 | 2.27 | 2.25 | 2.23 | 2.21 | 2.19 | 2.17 | 2.15 | 2.14 | 2.12 | 2.11 |

### C.4.3 $F_{n_1,n_2,0.975}$

| $n_1 \backslash n_2$ | 1 | 2 | 3 | 4 | 5 | 6 | 7 | 8 | 9 | 10 | 11 | 12 | 13 | 14 | 15 | 16 | 17 | 18 | 19 | 20 |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| 1 | 647.79 | 38.51 | 17.44 | 12.22 | 10.01 | 8.81 | 8.07 | 7.57 | 7.21 | 6.94 | 6.72 | 6.55 | 6.41 | 6.29 | 6.19 | 6.12 | 6.04 | 5.98 | 5.92 | 5.87 |
| 2 | 799.50 | 38.00 | 16.04 | 10.65 | 8.43 | 7.26 | 6.54 | 6.06 | 5.71 | 5.46 | 5.26 | 5.09 | 4.97 | 4.86 | 4.77 | 4.69 | 4.62 | 4.56 | 4.51 | 4.46 |
| 3 | 864.16 | 39.17 | 15.44 | 9.98 | 7.76 | 6.59 | 5.89 | 5.42 | 5.08 | 4.83 | 4.63 | 4.47 | 4.35 | 4.24 | 4.15 | 4.08 | 4.01 | 3.95 | 3.90 | 3.86 |
| 4 | 899.58 | 39.25 | 15.10 | 9.60 | 7.39 | 6.23 | 5.52 | 5.05 | 4.72 | 4.47 | 4.28 | 4.12 | 3.99 | 3.89 | 3.80 | 3.73 | 3.66 | 3.61 | 3.56 | 3.51 |
| 5 | 921.85 | 39.29 | 14.88 | 9.36 | 7.15 | 5.99 | 5.29 | 4.82 | 4.48 | 4.24 | 4.04 | 3.89 | 3.77 | 3.66 | 3.58 | 3.50 | 3.44 | 3.38 | 3.33 | 3.29 |
| 6 | 937.11 | 39.33 | 14.73 | 9.19 | 6.98 | 5.82 | 5.12 | 4.65 | 4.32 | 4.07 | 3.88 | 3.73 | 3.60 | 3.50 | 3.41 | 3.34 | 3.28 | 3.22 | 3.17 | 3.13 |
| 7 | 948.22 | 39.36 | 14.62 | 9.07 | 6.85 | 5.69 | 4.99 | 4.53 | 4.19 | 3.95 | 3.76 | 3.61 | 3.48 | 3.38 | 3.29 | 3.22 | 3.16 | 3.09 | 3.05 | 3.01 |
| 8 | 956.66 | 39.37 | 14.54 | 8.98 | 6.76 | 5.59 | 4.89 | 4.43 | 4.10 | 3.85 | 3.66 | 3.51 | 3.39 | 3.29 | 3.19 | 3.12 | 3.06 | 3.01 | 2.96 | 2.91 |
| 9 | 963.28 | 39.39 | 14.47 | 8.90 | 6.68 | 5.52 | 4.82 | 4.36 | 4.03 | 3.78 | 3.59 | 3.44 | 3.31 | 3.21 | 3.12 | 3.05 | 2.98 | 2.93 | 2.88 | 2.84 |
| 10 | 968.63 | 39.39 | 14.42 | 8.84 | 6.62 | 5.46 | 4.76 | 4.29 | 3.96 | 3.72 | 3.53 | 3.37 | 3.25 | 3.15 | 3.06 | 2.99 | 2.92 | 2.87 | 2.82 | 2.77 |
| 11 | 973.03 | 39.41 | 14.37 | 8.79 | 6.57 | 5.41 | 4.71 | 4.24 | 3.91 | 3.66 | 3.47 | 3.32 | 3.19 | 3.09 | 3.01 | 2.93 | 2.87 | 2.81 | 2.76 | 2.72 |
| 12 | 976.71 | 39.41 | 14.34 | 8.75 | 6.52 | 5.37 | 4.67 | 4.19 | 3.87 | 3.62 | 3.43 | 3.28 | 3.15 | 3.05 | 2.96 | 2.89 | 2.82 | 2.77 | 2.72 | 2.68 |
| 13 | 979.84 | 39.42 | 14.30 | 8.71 | 6.49 | 5.33 | 4.63 | 4.16 | 3.83 | 3.58 | 3.39 | 3.24 | 3.12 | 3.01 | 2.92 | 2.85 | 2.79 | 2.73 | 2.68 | 2.64 |
| 14 | 982.53 | 39.43 | 14.28 | 8.68 | 6.46 | 5.29 | 4.59 | 4.13 | 3.79 | 3.55 | 3.36 | 3.21 | 3.08 | 2.98 | 2.89 | 2.82 | 2.75 | 2.69 | 2.65 | 2.60 |
| 15 | 984.87 | 39.43 | 14.25 | 8.66 | 6.43 | 5.27 | 4.57 | 4.10 | 3.77 | 3.52 | 3.33 | 3.18 | 3.05 | 2.95 | 2.86 | 2.79 | 2.72 | 2.67 | 2.62 | 2.57 |
| 16 | 986.92 | 39.44 | 14.23 | 8.63 | 6.40 | 5.24 | 4.54 | 4.08 | 3.74 | 3.49 | 3.30 | 3.15 | 3.03 | 2.92 | 2.84 | 2.76 | 2.69 | 2.64 | 2.59 | 2.55 |
| 17 | 988.73 | 39.44 | 14.21 | 8.61 | 6.38 | 5.22 | 4.52 | 4.05 | 3.72 | 3.47 | 3.28 | 3.13 | 3.00 | 2.90 | 2.81 | 2.74 | 2.67 | 2.62 | 2.57 | 2.52 |
| 18 | 990.35 | 39.44 | 14.19 | 8.59 | 6.36 | 5.20 | 4.50 | 4.03 | 3.70 | 3.45 | 3.26 | 3.11 | 2.98 | 2.88 | 2.79 | 2.72 | 2.65 | 2.59 | 2.55 | 2.50 |
| 19 | 991.79 | 39.45 | 14.18 | 8.58 | 6.34 | 5.18 | 4.48 | 4.02 | 3.68 | 3.44 | 3.24 | 3.09 | 2.96 | 2.86 | 2.77 | 2.69 | 2.63 | 2.58 | 2.53 | 2.48 |
| 20 | 993.10 | 39.45 | 14.17 | 8.56 | 6.33 | 5.17 | 4.47 | 3.99 | 3.67 | 3.42 | 3.23 | 3.07 | 2.95 | 2.84 | 2.76 | 2.68 | 2.62 | 2.56 | 2.51 | 2.46 |
| 21 | 994.29 | 39.45 | 14.16 | 8.55 | 6.31 | 5.15 | 4.45 | 3.98 | 3.65 | 3.40 | 3.21 | 3.06 | 2.93 | 2.83 | 2.74 | 2.67 | 2.59 | 2.54 | 2.49 | 2.45 |
| 22 | 995.36 | 39.45 | 14.14 | 8.53 | 6.30 | 5.14 | 4.44 | 3.97 | 3.64 | 3.39 | 3.19 | 3.04 | 2.92 | 2.81 | 2.73 | 2.65 | 2.59 | 2.53 | 2.48 | 2.43 |
| 23 | 996.35 | 39.45 | 14.13 | 8.52 | 6.29 | 5.13 | 4.43 | 3.96 | 3.63 | 3.38 | 3.18 | 3.03 | 2.91 | 2.80 | 2.71 | 2.64 | 2.57 | 2.52 | 2.46 | 2.42 |
| 24 | 997.25 | 39.46 | 14.12 | 8.51 | 6.28 | 5.12 | 4.41 | 3.95 | 3.61 | 3.37 | 3.17 | 3.02 | 2.89 | 2.79 | 2.70 | 2.63 | 2.56 | 2.50 | 2.45 | 2.41 |
| 25 | 998.08 | 39.46 | 14.12 | 8.50 | 6.27 | 5.11 | 4.40 | 3.94 | 3.60 | 3.35 | 3.16 | 3.01 | 2.88 | 2.78 | 2.69 | 2.61 | 2.55 | 2.49 | 2.44 | 2.39 |
| 26 | 998.85 | 39.46 | 14.11 | 8.49 | 6.26 | 5.09 | 4.39 | 3.93 | 3.59 | 3.34 | 3.15 | 2.99 | 2.87 | 2.77 | 2.68 | 2.60 | 2.54 | 2.48 | 2.43 | 2.39 |
| 27 | 999.56 | 39.46 | 14.09 | 8.48 | 6.25 | 5.09 | 4.39 | 3.92 | 3.58 | 3.34 | 3.14 | 2.99 | 2.86 | 2.76 | 2.67 | 2.59 | 2.53 | 2.47 | 2.42 | 2.38 |
| 28 | 1000.22 | 39.46 | 14.09 | 8.48 | 6.24 | 5.08 | 4.38 | 3.91 | 3.58 | 3.33 | 3.13 | 2.98 | 2.85 | 2.75 | 2.66 | 2.58 | 2.52 | 2.46 | 2.41 | 2.37 |
| 29 | 1000.84 | 39.46 | 14.09 | 8.47 | 6.23 | 5.07 | 4.37 | 3.90 | 3.57 | 3.32 | 3.13 | 2.97 | 2.85 | 2.74 | 2.65 | 2.58 | 2.51 | 2.45 | 2.40 | 2.36 |
| 30 | 1001.41 | 39.46 | 14.08 | 8.46 | 6.23 | 5.07 | 4.36 | 3.89 | 3.56 | 3.31 | 3.12 | 2.96 | 2.84 | 2.73 | 2.64 | 2.57 | 2.50 | 2.44 | 2.39 | 2.35 |
| 31 | 1001.95 | 39.47 | 14.07 | 8.45 | 6.22 | 5.06 | 4.36 | 3.89 | 3.55 | 3.30 | 3.11 | 2.96 | 2.83 | 2.72 | 2.64 | 2.56 | 2.49 | 2.44 | 2.39 | 2.34 |
| 32 | 1002.46 | 39.47 | 14.07 | 8.45 | 6.21 | 5.05 | 4.35 | 3.88 | 3.55 | 3.29 | 3.10 | 2.95 | 2.82 | 2.72 | 2.63 | 2.55 | 2.49 | 2.43 | 2.38 | 2.33 |
| 33 | 1002.93 | 39.47 | 14.06 | 8.44 | 6.21 | 5.05 | 4.34 | 3.87 | 3.54 | 3.29 | 3.09 | 2.94 | 2.82 | 2.71 | 2.62 | 2.55 | 2.48 | 2.42 | 2.37 | 2.33 |
| 34 | 1003.38 | 39.47 | 14.06 | 8.44 | 6.20 | 5.04 | 4.34 | 3.87 | 3.53 | 3.29 | 3.09 | 2.94 | 2.81 | 2.71 | 2.62 | 2.54 | 2.47 | 2.42 | 2.37 | 2.32 |
| 35 | 1003.80 | 39.47 | 14.06 | 8.43 | 6.19 | 5.04 | 4.33 | 3.86 | 3.53 | 3.28 | 3.09 | 2.93 | 2.80 | 2.69 | 2.61 | 2.53 | 2.47 | 2.41 | 2.36 | 2.31 |
| 36 | 1004.20 | 39.47 | 14.05 | 8.43 | 6.19 | 5.03 | 4.33 | 3.86 | 3.52 | 3.27 | 3.08 | 2.93 | 2.79 | 2.69 | 2.60 | 2.53 | 2.46 | 2.40 | 2.35 | 2.31 |
| 37 | 1004.58 | 39.47 | 14.05 | 8.42 | 6.19 | 5.03 | 4.32 | 3.85 | 3.52 | 3.27 | 3.08 | 2.92 | 2.79 | 2.69 | 2.59 | 2.52 | 2.46 | 2.39 | 2.35 | 2.30 |
| 38 | 1004.94 | 39.47 | 14.04 | 8.42 | 6.18 | 5.02 | 4.32 | 3.85 | 3.51 | 3.26 | 3.07 | 2.92 | 2.79 | 2.68 | 2.59 | 2.52 | 2.45 | 2.39 | 2.34 | 2.29 |
| 39 | 1005.28 | 39.47 | 14.04 | 8.42 | 6.18 | 5.02 | 4.31 | 3.84 | 3.51 | 3.26 | 3.07 | 2.91 | 2.78 | 2.68 | 2.59 | 2.51 | 2.45 | 2.39 | 2.34 | 2.29 |
| 40 | 1005.59 | 39.47 | 14.04 | 8.41 | 6.18 | 5.01 | 4.31 | 3.84 | 3.51 | 3.26 | 3.06 | 2.91 | 2.78 | 2.67 | 2.59 | 2.51 | 2.44 | 2.38 | 2.33 | 2.29 |

| $n_1 \backslash n_2$ | 1 | 2 | 3 | 4 | 5 | 6 | 7 | 8 | 9 | 10 |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| 1 | 647.79 | 38.51 | 17.44 | 12.22 | 10.01 | 8.81 | 8.07 | 7.57 | 7.21 | 6.94 |
| 2 | 799.50 | 38.00 | 16.04 | 10.65 | 8.43 | 7.26 | 6.54 | 6.06 | 5.71 | 5.46 |
| 3 | 864.16 | 39.17 | 15.44 | 9.98 | 7.76 | 6.59 | 5.89 | 5.42 | 5.08 | 4.83 |
| 4 | 899.58 | 39.25 | 15.10 | 9.60 | 7.39 | 6.23 | 5.52 | 5.05 | 4.72 | 4.47 |
| 5 | 921.85 | 39.29 | 14.88 | 9.36 | 7.15 | 5.99 | 5.29 | 4.82 | 4.48 | 4.24 |
| 6 | 937.11 | 39.33 | 14.73 | 9.19 | 6.98 | 5.82 | 5.12 | 4.65 | 4.32 | 4.07 |
| 7 | 948.22 | 39.36 | 14.62 | 9.07 | 6.85 | 5.69 | 4.99 | 4.53 | 4.19 | 3.95 |
| 8 | 956.66 | 39.37 | 14.54 | 8.98 | 6.76 | 5.59 | 4.89 | 4.43 | 4.10 | 3.85 |
| 9 | 963.28 | 39.39 | 14.47 | 8.90 | 6.68 | 5.52 | 4.82 | 4.36 | 4.03 | 3.78 |
| 10 | 968.63 | 39.39 | 14.42 | 8.84 | 6.62 | 5.46 | 4.76 | 4.29 | 3.96 | 3.72 |
| 11 | 973.03 | 39.41 | 14.37 | 8.79 | 6.57 | 5.41 | 4.71 | 4.24 | 3.91 | 3.66 |
| 12 | 976.71 | 39.41 | 14.34 | 8.75 | 6.52 | 5.37 | 4.67 | 4.19 | 3.87 | 3.62 |
| 13 | 979.84 | 39.42 | 14.30 | 8.71 | 6.49 | 5.33 | 4.63 | 4.16 | 3.83 | 3.58 |
| 14 | 982.53 | 39.43 | 14.28 | 8.68 | 6.46 | 5.29 | 4.59 | 4.13 | 3.79 | 3.55 |
| 15 | 984.87 | 39.43 | 14.25 | 8.66 | 6.43 | 5.27 | 4.57 | 4.10 | 3.77 | 3.52 |
| 16 | 986.92 | 39.44 | 14.23 | 8.63 | 6.40 | 5.24 | 4.54 | 4.08 | 3.74 | 3.49 |
| 17 | 988.73 | 39.44 | 14.21 | 8.61 | 6.38 | 5.22 | 4.52 | 4.05 | 3.72 | 3.47 |
| 18 | 990.35 | 39.44 | 14.19 | 8.59 | 6.36 | 5.20 | 4.50 | 4.03 | 3.70 | 3.45 |
| 19 | 991.79 | 39.45 | 14.18 | 8.58 | 6.34 | 5.18 | 4.48 | 4.02 | 3.68 | 3.44 |
| 20 | 993.10 | 39.45 | 14.17 | 8.56 | 6.33 | 5.17 | 4.47 | 3.99 | 3.67 | 3.42 |
| 21 | 994.29 | 39.45 | 14.16 | 8.55 | 6.31 | 5.15 | 4.45 | 3.98 | 3.65 | 3.40 |
| 22 | 995.36 | 39.45 | 14.14 | 8.53 | 6.30 | 5.14 | 4.44 | 3.97 | 3.64 | 3.39 |
| 23 | 996.35 | 39.45 | 14.13 | 8.52 | 6.29 | 5.13 | 4.43 | 3.96 | 3.63 | 3.38 |
| 24 | 997.25 | 39.46 | 14.12 | 8.51 | 6.28 | 5.12 | 4.41 | 3.95 | 3.61 | 3.37 |
| 25 | 998.08 | 39.46 | 14.12 | 8.50 | 6.27 | 5.11 | 4.40 | 3.94 | 3.60 | 3.35 |
| 26 | 998.85 | 39.46 | 14.11 | 8.49 | 6.26 | 5.09 | 4.39 | 3.93 | 3.59 | 3.34 |
| 27 | 999.56 | 39.46 | 14.09 | 8.48 | 6.25 | 5.09 | 4.39 | 3.92 | 3.58 | 3.34 |
| 28 | 1000.22 | 39.46 | 14.09 | 8.48 | 6.24 | 5.08 | 4.38 | 3.91 | 3.58 | 3.33 |
| 29 | 1000.84 | 39.46 | 14.09 | 8.47 | 6.23 | 5.07 | 4.37 | 3.90 | 3.57 | 3.32 |
| 30 | 1001.41 | 39.46 | 14.08 | 8.46 | 6.23 | 5.07 | 4.36 | 3.89 | 3.56 | 3.31 |
| 31 | 1001.95 | 39.47 | 14.07 | 8.45 | 6.22 | 5.06 | 4.36 | 3.89 | 3.55 | 3.30 |
| 32 | 1002.46 | 39.47 | 14.07 | 8.45 | 6.21 | 5.05 | 4.35 | 3.88 | 3.55 | 3.29 |
| 33 | 1002.93 | 39.47 | 14.06 | 8.44 | 6.21 | 5.05 | 4.34 | 3.87 | 3.54 | 3.29 |
| 34 | 1003.38 | 39.47 | 14.06 | 8.44 | 6.20 | 5.04 | 4.34 | 3.87 | 3.53 | 3.29 |
| 35 | 1003.80 | 39.47 | 14.06 | 8.43 | 6.19 | 5.04 | 4.33 | 3.86 | 3.53 | 3.28 |
| 36 | 1004.20 | 39.47 | 14.05 | 8.43 | 6.19 | 5.03 | 4.33 | 3.86 | 3.52 | 3.27 |
| 37 | 1004.58 | 39.47 | 14.05 | 8.42 | 6.19 | 5.03 | 4.32 | 3.85 | 3.52 | 3.27 |
| 38 | 1004.94 | 39.47 | 14.04 | 8.42 | 6.18 | 5.02 | 4.32 | 3.85 | 3.51 | 3.26 |
| 39 | 1005.28 | 39.47 | 14.04 | 8.42 | 6.18 | 5.02 | 4.31 | 3.84 | 3.51 | 3.26 |
| 40 | 1005.59 | 39.47 | 14.04 | 8.41 | 6.18 | 5.01 | 4.31 | 3.84 | 3.51 | 3.26 |

| $n_1 \backslash n_2$ | 11 | 12 | 13 | 14 | 15 | 16 | 17 | 18 | 19 | 20 |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| 1 | 6.72 | 6.55 | 6.41 | 6.29 | 6.19 | 6.12 | 6.04 | 5.98 | 5.92 | 5.87 |
| 2 | 5.26 | 5.09 | 4.97 | 4.86 | 4.77 | 4.69 | 4.62 | 4.56 | 4.51 | 4.46 |
| 3 | 4.63 | 4.47 | 4.35 | 4.24 | 4.15 | 4.08 | 4.01 | 3.95 | 3.90 | 3.86 |
| 4 | 4.28 | 4.12 | 3.99 | 3.89 | 3.80 | 3.73 | 3.66 | 3.61 | 3.56 | 3.51 |
| 5 | 4.04 | 3.89 | 3.77 | 3.66 | 3.58 | 3.50 | 3.44 | 3.38 | 3.33 | 3.29 |
| 6 | 3.88 | 3.73 | 3.60 | 3.50 | 3.41 | 3.34 | 3.28 | 3.22 | 3.17 | 3.13 |
| 7 | 3.76 | 3.61 | 3.48 | 3.38 | 3.29 | 3.22 | 3.16 | 3.09 | 3.05 | 3.01 |
| 8 | 3.66 | 3.51 | 3.39 | 3.29 | 3.19 | 3.12 | 3.06 | 3.01 | 2.96 | 2.91 |
| 9 | 3.59 | 3.44 | 3.31 | 3.21 | 3.12 | 3.05 | 2.98 | 2.93 | 2.88 | 2.84 |
| 10 | 3.53 | 3.37 | 3.25 | 3.15 | 3.06 | 2.99 | 2.92 | 2.87 | 2.82 | 2.77 |
| 11 | 3.47 | 3.32 | 3.19 | 3.09 | 3.01 | 2.93 | 2.87 | 2.81 | 2.76 | 2.72 |
| 12 | 3.43 | 3.28 | 3.15 | 3.05 | 2.96 | 2.89 | 2.82 | 2.77 | 2.72 | 2.68 |
| 13 | 3.39 | 3.24 | 3.12 | 3.01 | 2.92 | 2.85 | 2.79 | 2.73 | 2.68 | 2.64 |
| 14 | 3.36 | 3.21 | 3.08 | 2.98 | 2.89 | 2.82 | 2.75 | 2.69 | 2.65 | 2.60 |
| 15 | 3.33 | 3.18 | 3.05 | 2.95 | 2.86 | 2.79 | 2.72 | 2.67 | 2.62 | 2.57 |
| 16 | 3.30 | 3.15 | 3.03 | 2.92 | 2.84 | 2.76 | 2.69 | 2.64 | 2.59 | 2.55 |
| 17 | 3.28 | 3.13 | 3.00 | 2.90 | 2.81 | 2.74 | 2.67 | 2.62 | 2.57 | 2.52 |
| 18 | 3.26 | 3.11 | 2.98 | 2.88 | 2.79 | 2.72 | 2.65 | 2.59 | 2.55 | 2.50 |
| 19 | 3.24 | 3.09 | 2.96 | 2.86 | 2.77 | 2.69 | 2.63 | 2.58 | 2.53 | 2.48 |
| 20 | 3.23 | 3.07 | 2.95 | 2.84 | 2.76 | 2.68 | 2.62 | 2.56 | 2.51 | 2.46 |
| 21 | 3.21 | 3.06 | 2.93 | 2.83 | 2.74 | 2.67 | 2.59 | 2.54 | 2.49 | 2.45 |
| 22 | 3.19 | 3.04 | 2.92 | 2.81 | 2.73 | 2.65 | 2.59 | 2.53 | 2.48 | 2.43 |
| 23 | 3.18 | 3.03 | 2.91 | 2.80 | 2.71 | 2.64 | 2.57 | 2.52 | 2.46 | 2.42 |
| 24 | 3.17 | 3.02 | 2.89 | 2.79 | 2.70 | 2.63 | 2.56 | 2.50 | 2.45 | 2.41 |
| 25 | 3.16 | 3.01 | 2.88 | 2.78 | 2.69 | 2.61 | 2.55 | 2.49 | 2.44 | 2.39 |
| 26 | 3.15 | 2.99 | 2.87 | 2.77 | 2.68 | 2.60 | 2.54 | 2.48 | 2.43 | 2.39 |
| 27 | 3.14 | 2.99 | 2.86 | 2.76 | 2.67 | 2.59 | 2.53 | 2.47 | 2.42 | 2.38 |
| 28 | 3.13 | 2.98 | 2.85 | 2.75 | 2.66 | 2.58 | 2.52 | 2.46 | 2.41 | 2.37 |
| 29 | 3.13 | 2.97 | 2.85 | 2.74 | 2.65 | 2.58 | 2.51 | 2.45 | 2.40 | 2.36 |
| 30 | 3.12 | 2.96 | 2.84 | 2.73 | 2.64 | 2.57 | 2.50 | 2.44 | 2.39 | 2.35 |
| 31 | 3.11 | 2.96 | 2.83 | 2.72 | 2.64 | 2.56 | 2.49 | 2.44 | 2.39 | 2.34 |
| 32 | 3.10 | 2.95 | 2.82 | 2.72 | 2.63 | 2.55 | 2.49 | 2.43 | 2.38 | 2.33 |
| 33 | 3.09 | 2.94 | 2.82 | 2.71 | 2.62 | 2.55 | 2.48 | 2.42 | 2.37 | 2.33 |
| 34 | 3.09 | 2.94 | 2.81 | 2.71 | 2.62 | 2.54 | 2.47 | 2.42 | 2.37 | 2.32 |
| 35 | 3.09 | 2.93 | 2.80 | 2.69 | 2.61 | 2.53 | 2.47 | 2.41 | 2.36 | 2.31 |
| 36 | 3.08 | 2.93 | 2.79 | 2.69 | 2.60 | 2.53 | 2.46 | 2.40 | 2.35 | 2.31 |
| 37 | 3.08 | 2.92 | 2.79 | 2.69 | 2.59 | 2.52 | 2.46 | 2.39 | 2.35 | 2.30 |
| 38 | 3.07 | 2.92 | 2.79 | 2.68 | 2.59 | 2.52 | 2.45 | 2.39 | 2.34 | 2.29 |
| 39 | 3.07 | 2.91 | 2.78 | 2.68 | 2.59 | 2.51 | 2.45 | 2.39 | 2.34 | 2.29 |
| 40 | 3.06 | 2.91 | 2.78 | 2.67 | 2.59 | 2.51 | 2.44 | 2.38 | 2.33 | 2.29 |

| $n_1 \backslash n_2$ | 21 | 22 | 23 | 24 | 25 | 26 | 27 | 28 | 29 | 30 |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| 1 | 5.83 | 5.79 | 5.75 | 5.72 | 5.69 | 5.66 | 5.63 | 5.61 | 5.59 | 5.57 |
| 2 | 4.42 | 4.38 | 4.35 | 4.32 | 4.29 | 4.27 | 4.24 | 4.22 | 4.20 | 4.18 |
| 3 | 3.82 | 3.78 | 3.75 | 3.72 | 3.69 | 3.67 | 3.65 | 3.63 | 3.61 | 3.59 |
| 4 | 3.48 | 3.44 | 3.41 | 3.38 | 3.35 | 3.33 | 3.31 | 3.29 | 3.27 | 3.25 |
| 5 | 3.25 | 3.22 | 3.18 | 3.15 | 3.13 | 3.10 | 3.08 | 3.06 | 3.04 | 3.03 |
| 6 | 3.09 | 3.05 | 3.02 | 2.99 | 2.97 | 2.94 | 2.92 | 2.90 | 2.88 | 2.87 |
| 7 | 2.97 | 2.93 | 2.90 | 2.87 | 2.85 | 2.82 | 2.80 | 2.78 | 2.76 | 2.75 |
| 8 | 2.87 | 2.84 | 2.81 | 2.78 | 2.75 | 2.73 | 2.71 | 2.69 | 2.67 | 2.65 |
| 9 | 2.79 | 2.76 | 2.73 | 2.70 | 2.68 | 2.65 | 2.63 | 2.61 | 2.59 | 2.57 |
| 10 | 2.73 | 2.69 | 2.67 | 2.64 | 2.61 | 2.59 | 2.57 | 2.55 | 2.53 | 2.51 |
| 11 | 2.68 | 2.65 | 2.62 | 2.59 | 2.56 | 2.54 | 2.51 | 2.49 | 2.48 | 2.46 |
| 12 | 2.64 | 2.60 | 2.57 | 2.54 | 2.51 | 2.49 | 2.47 | 2.45 | 2.43 | 2.41 |
| 13 | 2.59 | 2.56 | 2.53 | 2.50 | 2.48 | 2.45 | 2.43 | 2.41 | 2.39 | 2.37 |
| 14 | 2.56 | 2.53 | 2.49 | 2.47 | 2.44 | 2.42 | 2.39 | 2.37 | 2.36 | 2.34 |
| 15 | 2.53 | 2.49 | 2.47 | 2.44 | 2.41 | 2.39 | 2.36 | 2.34 | 2.32 | 2.31 |
| 16 | 2.51 | 2.47 | 2.44 | 2.41 | 2.38 | 2.36 | 2.34 | 2.32 | 2.29 | 2.28 |
| 17 | 2.48 | 2.45 | 2.42 | 2.39 | 2.36 | 2.34 | 2.31 | 2.29 | 2.27 | 2.26 |
| 18 | 2.46 | 2.43 | 2.39 | 2.36 | 2.34 | 2.31 | 2.29 | 2.27 | 2.25 | 2.23 |
| 19 | 2.44 | 2.41 | 2.37 | 2.35 | 2.32 | 2.29 | 2.27 | 2.25 | 2.23 | 2.21 |
| 20 | 2.42 | 2.39 | 2.36 | 2.33 | 2.30 | 2.28 | 2.25 | 2.23 | 2.21 | 2.19 |
| 21 | 2.41 | 2.37 | 2.34 | 2.31 | 2.28 | 2.26 | 2.24 | 2.22 | 2.19 | 2.18 |
| 22 | 2.39 | 2.36 | 2.33 | 2.29 | 2.27 | 2.24 | 2.22 | 2.20 | 2.18 | 2.16 |
| 23 | 2.38 | 2.34 | 2.31 | 2.28 | 2.26 | 2.23 | 2.21 | 2.19 | 2.17 | 2.15 |
| 24 | 2.37 | 2.33 | 2.29 | 2.27 | 2.24 | 2.22 | 2.19 | 2.17 | 2.15 | 2.14 |
| 25 | 2.36 | 2.32 | 2.29 | 2.26 | 2.23 | 2.21 | 2.18 | 2.16 | 2.14 | 2.12 |
| 26 | 2.34 | 2.31 | 2.28 | 2.25 | 2.22 | 2.19 | 2.17 | 2.15 | 2.13 | 2.11 |
| 27 | 2.33 | 2.29 | 2.27 | 2.24 | 2.21 | 2.18 | 2.16 | 2.14 | 2.12 | 2.10 |
| 28 | 2.33 | 2.29 | 2.26 | 2.23 | 2.19 | 2.17 | 2.15 | 2.13 | 2.11 | 2.09 |
| 29 | 2.32 | 2.28 | 2.25 | 2.22 | 2.19 | 2.17 | 2.14 | 2.12 | 2.10 | 2.08 |
| 30 | 2.31 | 2.27 | 2.24 | 2.21 | 2.18 | 2.16 | 2.13 | 2.11 | 2.09 | 2.07 |
| 31 | 2.30 | 2.26 | 2.23 | 2.20 | 2.17 | 2.15 | 2.13 | 2.10 | 2.08 | 2.07 |
| 32 | 2.29 | 2.26 | 2.22 | 2.19 | 2.17 | 2.14 | 2.12 | 2.09 | 2.08 | 2.06 |
| 33 | 2.29 | 2.25 | 2.22 | 2.19 | 2.16 | 2.13 | 2.11 | 2.09 | 2.07 | 2.05 |
| 34 | 2.28 | 2.24 | 2.21 | 2.18 | 2.15 | 2.13 | 2.10 | 2.08 | 2.06 | 2.04 |
| 35 | 2.27 | 2.24 | 2.20 | 2.17 | 2.15 | 2.12 | 2.09 | 2.08 | 2.06 | 2.04 |
| 36 | 2.27 | 2.23 | 2.19 | 2.17 | 2.14 | 2.11 | 2.09 | 2.07 | 2.05 | 2.03 |
| 37 | 2.26 | 2.23 | 2.19 | 2.16 | 2.13 | 2.11 | 2.09 | 2.06 | 2.04 | 2.03 |
| 38 | 2.26 | 2.22 | 2.19 | 2.16 | 2.13 | 2.10 | 2.08 | 2.06 | 2.04 | 2.02 |
| 39 | 2.25 | 2.21 | 2.18 | 2.15 | 2.12 | 2.09 | 2.07 | 2.05 | 2.03 | 2.01 |
| 40 | 2.25 | 2.21 | 2.18 | 2.15 | 2.12 | 2.09 | 2.07 | 2.05 | 2.03 | 2.01 |

| $n_1 \backslash n_2$ | 31 | 32 | 33 | 34 | 35 | 36 | 37 | 38 | 39 | 40 |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| 1 | 5.55 | 5.53 | 5.51 | 5.49 | 5.48 | 5.47 | 5.46 | 5.45 | 5.43 | 5.42 |
| 2 | 4.16 | 4.15 | 4.13 | 4.12 | 4.11 | 4.09 | 4.08 | 4.07 | 4.06 | 4.05 |
| 3 | 3.57 | 3.56 | 3.54 | 3.53 | 3.52 | 3.50 | 3.49 | 3.48 | 3.47 | 3.46 |
| 4 | 3.23 | 3.22 | 3.20 | 3.19 | 3.18 | 3.17 | 3.16 | 3.15 | 3.14 | 3.13 |
| 5 | 3.01 | 2.99 | 2.98 | 2.97 | 2.96 | 2.94 | 2.93 | 2.92 | 2.91 | 2.90 |
| 6 | 2.85 | 2.84 | 2.82 | 2.81 | 2.79 | 2.78 | 2.77 | 2.76 | 2.75 | 2.74 |
| 7 | 2.73 | 2.71 | 2.70 | 2.69 | 2.68 | 2.66 | 2.65 | 2.64 | 2.63 | 2.62 |
| 8 | 2.64 | 2.62 | 2.61 | 2.59 | 2.58 | 2.57 | 2.56 | 2.55 | 2.54 | 2.53 |
| 9 | 2.56 | 2.54 | 2.53 | 2.52 | 2.50 | 2.49 | 2.48 | 2.47 | 2.46 | 2.45 |
| 10 | 2.49 | 2.48 | 2.47 | 2.45 | 2.44 | 2.43 | 2.42 | 2.41 | 2.39 | 2.39 |
| 11 | 2.44 | 2.43 | 2.41 | 2.39 | 2.39 | 2.37 | 2.36 | 2.35 | 2.34 | 2.33 |
| 12 | 2.39 | 2.38 | 2.37 | 2.35 | 2.34 | 2.33 | 2.32 | 2.31 | 2.29 | 2.29 |
| 13 | 2.36 | 2.34 | 2.33 | 2.31 | 2.30 | 2.29 | 2.28 | 2.27 | 2.26 | 2.25 |
| 14 | 2.32 | 2.31 | 2.29 | 2.28 | 2.27 | 2.25 | 2.24 | 2.23 | 2.22 | 2.21 |
| 15 | 2.29 | 2.28 | 2.26 | 2.25 | 2.23 | 2.22 | 2.21 | 2.20 | 2.19 | 2.18 |
| 16 | 2.26 | 2.25 | 2.23 | 2.22 | 2.21 | 2.19 | 2.18 | 2.17 | 2.16 | 2.15 |
| 17 | 2.24 | 2.22 | 2.21 | 2.19 | 2.18 | 2.17 | 2.16 | 2.15 | 2.14 | 2.13 |
| 18 | 2.22 | 2.20 | 2.19 | 2.17 | 2.16 | 2.15 | 2.14 | 2.13 | 2.12 | 2.11 |
| 19 | 2.19 | 2.18 | 2.17 | 2.15 | 2.14 | 2.13 | 2.12 | 2.11 | 2.09 | 2.09 |
| 20 | 2.18 | 2.16 | 2.15 | 2.13 | 2.12 | 2.11 | 2.09 | 2.09 | 2.08 | 2.07 |
| 21 | 2.16 | 2.15 | 2.13 | 2.12 | 2.10 | 2.09 | 2.08 | 2.07 | 2.06 | 2.05 |
| 22 | 2.15 | 2.13 | 2.12 | 2.10 | 2.09 | 2.08 | 2.07 | 2.05 | 2.04 | 2.03 |
| 23 | 2.13 | 2.12 | 2.10 | 2.09 | 2.07 | 2.06 | 2.05 | 2.04 | 2.03 | 2.02 |
| 24 | 2.12 | 2.10 | 2.09 | 2.07 | 2.06 | 2.05 | 2.04 | 2.03 | 2.02 | 2.01 |
| 25 | 2.11 | 2.09 | 2.08 | 2.06 | 2.05 | 2.04 | 2.03 | 2.01 | 2.00 | 1.99 |
| 26 | 2.09 | 2.08 | 2.06 | 2.05 | 2.04 | 2.03 | 2.01 | 2.00 | 1.99 | 1.98 |
| 27 | 2.08 | 2.07 | 2.05 | 2.04 | 2.03 | 2.01 | 2.00 | 1.99 | 1.98 | 1.97 |
| 28 | 2.07 | 2.06 | 2.04 | 2.03 | 2.02 | 2.00 | 1.99 | 1.98 | 1.97 | 1.96 |
| 29 | 2.07 | 2.05 | 2.03 | 2.02 | 2.01 | 1.99 | 1.98 | 1.97 | 1.96 | 1.95 |
| 30 | 2.06 | 2.04 | 2.03 | 2.01 | 1.99 | 1.99 | 1.97 | 1.96 | 1.95 | 1.94 |
| 31 | 2.05 | 2.03 | 2.02 | 2.00 | 1.99 | 1.98 | 1.97 | 1.95 | 1.94 | 1.93 |
| 32 | 2.04 | 2.02 | 2.01 | 1.99 | 1.98 | 1.97 | 1.96 | 1.95 | 1.94 | 1.93 |
| 33 | 2.03 | 2.02 | 2.00 | 1.99 | 1.97 | 1.96 | 1.95 | 1.94 | 1.93 | 1.92 |
| 34 | 2.03 | 2.01 | 1.99 | 1.98 | 1.97 | 1.96 | 1.94 | 1.93 | 1.92 | 1.91 |
| 35 | 2.02 | 2.00 | 1.99 | 1.97 | 1.96 | 1.95 | 1.94 | 1.93 | 1.91 | 1.90 |
| 36 | 2.01 | 1.99 | 1.98 | 1.97 | 1.95 | 1.94 | 1.93 | 1.92 | 1.91 | 1.89 |
| 37 | 2.01 | 1.99 | 1.98 | 1.96 | 1.95 | 1.94 | 1.92 | 1.91 | 1.90 | 1.89 |
| 38 | 2.00 | 1.99 | 1.97 | 1.96 | 1.94 | 1.93 | 1.92 | 1.91 | 1.89 | 1.89 |
| 39 | 1.99 | 1.98 | 1.97 | 1.95 | 1.94 | 1.92 | 1.91 | 1.90 | 1.89 | 1.88 |
| 40 | 1.99 | 1.98 | 1.96 | 1.95 | 1.93 | 1.92 | 1.91 | 1.89 | 1.89 | 1.88 |

## C.4.4 $F_{n_1,n_2,0.95}$

| $n_1 \backslash n_2$ | 1 | 2 | 3 | 4 | 5 | 6 | 7 | 8 | 9 | 10 |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| 1 | 161.54 | 18.51 | 10.12 | 7.70 | 6.60 | 5.98 | 5.59 | 5.31 | 5.11 | 4.96 |
| 2 | 199.70 | 18.99 | 9.55 | 6.94 | 5.78 | 5.14 | 4.73 | 4.45 | 4.25 | 4.10 |
| 3 | 215.94 | 19.16 | 9.27 | 6.59 | 5.40 | 4.75 | 4.34 | 4.06 | 3.86 | 3.70 |
| 4 | 224.83 | 19.24 | 9.11 | 6.38 | 5.19 | 4.53 | 4.12 | 3.83 | 3.63 | 3.47 |
| 5 | 230.42 | 19.29 | 9.01 | 6.25 | 5.05 | 4.38 | 3.97 | 3.68 | 3.48 | 3.32 |
| 6 | 234.25 | 19.32 | 8.94 | 6.16 | 4.95 | 4.28 | 3.86 | 3.58 | 3.37 | 3.21 |
| 7 | 237.04 | 19.35 | 8.88 | 6.09 | 4.87 | 4.20 | 3.78 | 3.50 | 3.29 | 3.13 |
| 8 | 239.15 | 19.37 | 8.84 | 6.04 | 4.81 | 4.14 | 3.72 | 3.43 | 3.22 | 3.07 |
| 9 | 240.82 | 19.38 | 8.81 | 5.99 | 4.77 | 4.09 | 3.67 | 3.38 | 3.17 | 3.02 |
| 10 | 242.16 | 19.39 | 8.78 | 5.96 | 4.73 | 4.05 | 3.63 | 3.34 | 3.13 | 2.97 |
| 11 | 243.26 | 19.40 | 8.76 | 5.93 | 4.70 | 4.02 | 3.60 | 3.31 | 3.10 | 2.94 |
| 12 | 244.18 | 19.41 | 8.74 | 5.91 | 4.67 | 3.99 | 3.57 | 3.28 | 3.07 | 2.91 |
| 13 | 244.97 | 19.41 | 8.72 | 5.89 | 4.65 | 3.97 | 3.55 | 3.25 | 3.04 | 2.88 |
| 14 | 245.64 | 19.42 | 8.71 | 5.87 | 4.63 | 3.95 | 3.52 | 3.23 | 3.02 | 2.86 |
| 15 | 246.23 | 19.42 | 8.70 | 5.85 | 4.61 | 3.93 | 3.51 | 3.21 | 3.00 | 2.84 |
| 16 | 246.74 | 19.43 | 8.69 | 5.84 | 4.60 | 3.92 | 3.49 | 3.20 | 2.98 | 2.82 |
| 17 | 247.20 | 19.43 | 8.68 | 5.83 | 4.59 | 3.90 | 3.47 | 3.18 | 2.97 | 2.81 |
| 18 | 247.61 | 19.44 | 8.67 | 5.82 | 4.57 | 3.89 | 3.46 | 3.17 | 2.96 | 2.79 |
| 19 | 247.97 | 19.44 | 8.66 | 5.81 | 4.56 | 3.88 | 3.45 | 3.16 | 2.94 | 2.78 |
| 20 | 248.30 | 19.44 | 8.66 | 5.80 | 4.55 | 3.87 | 3.44 | 3.15 | 2.93 | 2.77 |
| 21 | 248.59 | 19.44 | 8.65 | 5.79 | 4.54 | 3.86 | 3.43 | 3.14 | 2.92 | 2.76 |
| 22 | 248.86 | 19.45 | 8.64 | 5.78 | 4.54 | 3.85 | 3.42 | 3.13 | 2.91 | 2.75 |
| 23 | 249.11 | 19.45 | 8.64 | 5.78 | 4.53 | 3.84 | 3.41 | 3.12 | 2.90 | 2.74 |
| 24 | 249.34 | 19.45 | 8.63 | 5.77 | 4.52 | 3.84 | 3.41 | 3.11 | 2.90 | 2.73 |
| 25 | 249.54 | 19.45 | 8.63 | 5.76 | 4.52 | 3.83 | 3.40 | 3.10 | 2.89 | 2.72 |
| 26 | 249.74 | 19.48 | 8.63 | 5.76 | 4.51 | 3.82 | 3.39 | 3.10 | 2.88 | 2.72 |
| 27 | 249.92 | 19.48 | 8.62 | 5.75 | 4.50 | 3.82 | 3.39 | 3.09 | 2.88 | 2.71 |
| 28 | 250.08 | 19.48 | 8.62 | 5.75 | 4.50 | 3.81 | 3.38 | 3.08 | 2.87 | 2.71 |
| 29 | 250.24 | 19.48 | 8.61 | 5.74 | 4.49 | 3.81 | 3.38 | 3.08 | 2.86 | 2.70 |
| 30 | 250.38 | 19.48 | 8.61 | 5.74 | 4.49 | 3.80 | 3.37 | 3.07 | 2.86 | 2.69 |
| 31 | 250.52 | 19.48 | 8.61 | 5.74 | 4.49 | 3.80 | 3.37 | 3.07 | 2.85 | 2.69 |
| 32 | 250.64 | 19.48 | 8.61 | 5.73 | 4.48 | 3.79 | 3.36 | 3.07 | 2.85 | 2.68 |
| 33 | 250.76 | 19.48 | 8.60 | 5.73 | 4.48 | 3.79 | 3.36 | 3.06 | 2.84 | 2.68 |
| 34 | 250.87 | 19.49 | 8.60 | 5.73 | 4.48 | 3.79 | 3.35 | 3.06 | 2.84 | 2.68 |
| 35 | 250.98 | 19.49 | 8.60 | 5.72 | 4.47 | 3.78 | 3.35 | 3.05 | 2.84 | 2.67 |
| 36 | 251.08 | 19.49 | 8.60 | 5.72 | 4.47 | 3.78 | 3.35 | 3.05 | 2.83 | 2.67 |
| 37 | 251.17 | 19.49 | 8.59 | 5.72 | 4.47 | 3.78 | 3.34 | 3.05 | 2.83 | 2.67 |
| 38 | 251.26 | 19.49 | 8.59 | 5.72 | 4.46 | 3.77 | 3.34 | 3.04 | 2.83 | 2.66 |
| 39 | 251.35 | 19.49 | 8.59 | 5.71 | 4.46 | 3.77 | 3.34 | 3.04 | 2.82 | 2.66 |
| 40 | 251.43 | 19.49 | 8.59 | 5.71 | 4.46 | 3.77 | 3.34 | 3.04 | 2.82 | 2.66 |

| $n_1 \backslash n_2$ | 11 | 12 | 13 | 14 | 15 | 16 | 17 | 18 | 19 | 20 |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| 1 | 4.84 | 4.74 | 4.66 | 4.60 | 4.54 | 4.49 | 4.45 | 4.41 | 4.38 | 4.35 |
| 2 | 3.98 | 3.88 | 3.80 | 3.73 | 3.68 | 3.63 | 3.59 | 3.55 | 3.52 | 3.49 |
| 3 | 3.58 | 3.49 | 3.41 | 3.34 | 3.28 | 3.23 | 3.19 | 3.15 | 3.12 | 3.09 |
| 4 | 3.35 | 3.25 | 3.17 | 3.11 | 3.05 | 3.00 | 2.96 | 2.92 | 2.89 | 2.86 |
| 5 | 3.20 | 3.10 | 3.02 | 2.95 | 2.90 | 2.85 | 2.80 | 2.77 | 2.74 | 2.71 |
| 6 | 3.09 | 2.99 | 2.91 | 2.84 | 2.79 | 2.74 | 2.69 | 2.66 | 2.62 | 2.59 |
| 7 | 3.01 | 2.91 | 2.83 | 2.76 | 2.70 | 2.65 | 2.61 | 2.57 | 2.54 | 2.51 |
| 8 | 2.94 | 2.84 | 2.76 | 2.69 | 2.64 | 2.59 | 2.54 | 2.51 | 2.47 | 2.44 |
| 9 | 2.89 | 2.79 | 2.71 | 2.64 | 2.58 | 2.53 | 2.49 | 2.45 | 2.42 | 2.39 |
| 10 | 2.85 | 2.75 | 2.67 | 2.60 | 2.54 | 2.49 | 2.44 | 2.41 | 2.37 | 2.34 |
| 11 | 2.81 | 2.71 | 2.63 | 2.56 | 2.50 | 2.45 | 2.41 | 2.37 | 2.34 | 2.30 |
| 12 | 2.78 | 2.68 | 2.60 | 2.53 | 2.47 | 2.42 | 2.38 | 2.34 | 2.30 | 2.27 |
| 13 | 2.76 | 2.66 | 2.57 | 2.50 | 2.44 | 2.39 | 2.35 | 2.31 | 2.28 | 2.24 |
| 14 | 2.73 | 2.63 | 2.55 | 2.48 | 2.42 | 2.37 | 2.32 | 2.29 | 2.25 | 2.22 |
| 15 | 2.71 | 2.61 | 2.53 | 2.46 | 2.40 | 2.35 | 2.30 | 2.26 | 2.23 | 2.20 |
| 16 | 2.70 | 2.59 | 2.51 | 2.44 | 2.38 | 2.33 | 2.28 | 2.24 | 2.21 | 2.18 |
| 17 | 2.68 | 2.58 | 2.49 | 2.42 | 2.36 | 2.31 | 2.27 | 2.23 | 2.19 | 2.16 |
| 18 | 2.67 | 2.56 | 2.48 | 2.41 | 2.35 | 2.30 | 2.25 | 2.21 | 2.18 | 2.15 |
| 19 | 2.65 | 2.55 | 2.47 | 2.40 | 2.33 | 2.28 | 2.24 | 2.20 | 2.16 | 2.13 |
| 20 | 2.64 | 2.54 | 2.45 | 2.38 | 2.32 | 2.27 | 2.23 | 2.19 | 2.15 | 2.12 |
| 21 | 2.63 | 2.53 | 2.44 | 2.37 | 2.31 | 2.26 | 2.21 | 2.17 | 2.14 | 2.11 |
| 22 | 2.62 | 2.52 | 2.43 | 2.36 | 2.30 | 2.25 | 2.20 | 2.16 | 2.13 | 2.10 |
| 23 | 2.61 | 2.51 | 2.42 | 2.35 | 2.29 | 2.24 | 2.19 | 2.15 | 2.12 | 2.09 |
| 24 | 2.60 | 2.50 | 2.42 | 2.34 | 2.28 | 2.23 | 2.18 | 2.14 | 2.11 | 2.08 |
| 25 | 2.60 | 2.49 | 2.41 | 2.34 | 2.27 | 2.22 | 2.18 | 2.14 | 2.10 | 2.07 |
| 26 | 2.59 | 2.49 | 2.40 | 2.33 | 2.27 | 2.21 | 2.17 | 2.13 | 2.09 | 2.06 |
| 27 | 2.58 | 2.48 | 2.39 | 2.32 | 2.26 | 2.21 | 2.16 | 2.12 | 2.09 | 2.05 |
| 28 | 2.58 | 2.47 | 2.39 | 2.31 | 2.25 | 2.20 | 2.15 | 2.11 | 2.08 | 2.05 |
| 29 | 2.57 | 2.47 | 2.38 | 2.31 | 2.25 | 2.19 | 2.15 | 2.11 | 2.07 | 2.04 |
| 30 | 2.57 | 2.46 | 2.38 | 2.30 | 2.24 | 2.19 | 2.14 | 2.10 | 2.07 | 2.03 |
| 31 | 2.56 | 2.46 | 2.37 | 2.30 | 2.24 | 2.18 | 2.14 | 2.10 | 2.06 | 2.03 |
| 32 | 2.56 | 2.45 | 2.37 | 2.29 | 2.23 | 2.18 | 2.13 | 2.09 | 2.06 | 2.02 |
| 33 | 2.55 | 2.45 | 2.36 | 2.29 | 2.23 | 2.17 | 2.13 | 2.09 | 2.05 | 2.02 |
| 34 | 2.55 | 2.44 | 2.36 | 2.28 | 2.22 | 2.17 | 2.12 | 2.08 | 2.05 | 2.01 |
| 35 | 2.54 | 2.44 | 2.35 | 2.28 | 2.22 | 2.16 | 2.12 | 2.08 | 2.04 | 2.01 |
| 36 | 2.54 | 2.43 | 2.35 | 2.28 | 2.21 | 2.16 | 2.11 | 2.07 | 2.04 | 2.00 |
| 37 | 2.54 | 2.43 | 2.34 | 2.27 | 2.21 | 2.16 | 2.11 | 2.07 | 2.03 | 2.00 |
| 38 | 2.53 | 2.43 | 2.34 | 2.27 | 2.21 | 2.15 | 2.11 | 2.06 | 2.03 | 2.00 |
| 39 | 2.53 | 2.42 | 2.34 | 2.26 | 2.20 | 2.15 | 2.10 | 2.06 | 2.02 | 1.99 |
| 40 | 2.53 | 2.42 | 2.33 | 2.26 | 2.20 | 2.15 | 2.10 | 2.06 | 2.02 | 1.99 |

| $n_1 \backslash n_2$ | 21 | 22 | 23 | 24 | 25 | 26 | 27 | 28 | 29 | 30 |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| 1 | 4.32 | 4.30 | 4.27 | 4.25 | 4.24 | 4.22 | 4.21 | 4.19 | 4.18 | 4.17 |
| 2 | 3.46 | 3.44 | 3.42 | 3.40 | 3.38 | 3.36 | 3.35 | 3.34 | 3.32 | 3.31 |
| 3 | 3.07 | 3.04 | 3.02 | 3.00 | 2.99 | 2.97 | 2.96 | 2.94 | 2.93 | 2.92 |
| 4 | 2.84 | 2.81 | 2.79 | 2.77 | 2.75 | 2.74 | 2.72 | 2.71 | 2.70 | 2.68 |
| 5 | 2.68 | 2.66 | 2.63 | 2.62 | 2.60 | 2.58 | 2.57 | 2.55 | 2.54 | 2.53 |
| 6 | 2.57 | 2.54 | 2.52 | 2.50 | 2.49 | 2.47 | 2.45 | 2.44 | 2.43 | 2.42 |
| 7 | 2.48 | 2.46 | 2.44 | 2.42 | 2.40 | 2.38 | 2.37 | 2.35 | 2.34 | 2.33 |
| 8 | 2.42 | 2.39 | 2.37 | 2.35 | 2.33 | 2.32 | 2.30 | 2.29 | 2.27 | 2.26 |
| 9 | 2.36 | 2.34 | 2.32 | 2.30 | 2.28 | 2.26 | 2.25 | 2.23 | 2.22 | 2.21 |
| 10 | 2.32 | 2.29 | 2.27 | 2.25 | 2.23 | 2.21 | 2.20 | 2.19 | 2.17 | 2.16 |
| 11 | 2.28 | 2.25 | 2.23 | 2.21 | 2.19 | 2.18 | 2.16 | 2.15 | 2.13 | 2.12 |
| 12 | 2.25 | 2.22 | 2.20 | 2.18 | 2.16 | 2.14 | 2.13 | 2.11 | 2.10 | 2.09 |
| 13 | 2.22 | 2.19 | 2.17 | 2.15 | 2.13 | 2.11 | 2.10 | 2.08 | 2.07 | 2.06 |
| 14 | 2.19 | 2.17 | 2.15 | 2.12 | 2.11 | 2.09 | 2.07 | 2.06 | 2.05 | 2.03 |
| 15 | 2.17 | 2.15 | 2.12 | 2.10 | 2.08 | 2.07 | 2.05 | 2.04 | 2.02 | 2.01 |
| 16 | 2.15 | 2.13 | 2.10 | 2.08 | 2.06 | 2.05 | 2.03 | 2.02 | 2.00 | 1.99 |
| 17 | 2.13 | 2.11 | 2.09 | 2.07 | 2.05 | 2.03 | 2.01 | 2.00 | 1.98 | 1.97 |
| 18 | 2.12 | 2.09 | 2.07 | 2.05 | 2.03 | 2.01 | 2.00 | 1.98 | 1.97 | 1.96 |
| 19 | 2.10 | 2.08 | 2.06 | 2.03 | 2.02 | 2.00 | 1.98 | 1.97 | 1.95 | 1.94 |
| 20 | 2.09 | 2.07 | 2.04 | 2.02 | 2.00 | 1.98 | 1.97 | 1.95 | 1.94 | 1.93 |
| 21 | 2.08 | 2.05 | 2.03 | 2.01 | 1.99 | 1.97 | 1.96 | 1.94 | 1.93 | 1.91 |
| 22 | 2.07 | 2.04 | 2.02 | 2.00 | 1.98 | 1.96 | 1.95 | 1.93 | 1.92 | 1.90 |
| 23 | 2.06 | 2.03 | 2.01 | 1.99 | 1.97 | 1.95 | 1.93 | 1.92 | 1.91 | 1.89 |
| 24 | 2.05 | 2.02 | 2.00 | 1.98 | 1.96 | 1.94 | 1.92 | 1.91 | 1.90 | 1.88 |
| 25 | 2.04 | 2.01 | 1.99 | 1.97 | 1.95 | 1.93 | 1.92 | 1.90 | 1.89 | 1.87 |
| 26 | 2.03 | 2.01 | 1.98 | 1.96 | 1.94 | 1.92 | 1.91 | 1.89 | 1.88 | 1.86 |
| 27 | 2.02 | 2.00 | 1.98 | 1.95 | 1.93 | 1.92 | 1.90 | 1.88 | 1.87 | 1.86 |
| 28 | 2.02 | 1.99 | 1.97 | 1.95 | 1.93 | 1.91 | 1.89 | 1.88 | 1.86 | 1.85 |
| 29 | 2.01 | 1.99 | 1.96 | 1.94 | 1.92 | 1.90 | 1.89 | 1.87 | 1.86 | 1.84 |
| 30 | 2.01 | 1.98 | 1.96 | 1.93 | 1.91 | 1.90 | 1.88 | 1.86 | 1.85 | 1.84 |
| 31 | 2.00 | 1.97 | 1.95 | 1.93 | 1.91 | 1.89 | 1.87 | 1.86 | 1.84 | 1.83 |
| 32 | 1.99 | 1.97 | 1.94 | 1.92 | 1.90 | 1.88 | 1.87 | 1.85 | 1.84 | 1.82 |
| 33 | 1.99 | 1.96 | 1.94 | 1.92 | 1.90 | 1.88 | 1.86 | 1.85 | 1.83 | 1.82 |
| 34 | 1.98 | 1.96 | 1.93 | 1.91 | 1.89 | 1.87 | 1.86 | 1.84 | 1.83 | 1.81 |
| 35 | 1.98 | 1.95 | 1.93 | 1.91 | 1.89 | 1.87 | 1.85 | 1.84 | 1.82 | 1.81 |
| 36 | 1.97 | 1.95 | 1.92 | 1.90 | 1.88 | 1.86 | 1.85 | 1.83 | 1.82 | 1.80 |
| 37 | 1.97 | 1.94 | 1.92 | 1.90 | 1.88 | 1.86 | 1.84 | 1.83 | 1.81 | 1.80 |
| 38 | 1.97 | 1.94 | 1.92 | 1.89 | 1.87 | 1.86 | 1.84 | 1.82 | 1.81 | 1.79 |
| 39 | 1.96 | 1.94 | 1.91 | 1.89 | 1.87 | 1.85 | 1.83 | 1.82 | 1.80 | 1.79 |
| 40 | 1.96 | 1.93 | 1.91 | 1.89 | 1.87 | 1.85 | 1.83 | 1.82 | 1.80 | 1.79 |

| $n_1\backslash n_2$ | 31 | 32 | 33 | 34 | 35 | 36 | 37 | 38 | 39 | 40 |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| 1 | 4.15 | 4.14 | 4.13 | 4.13 | 4.12 | 4.11 | 4.10 | 4.09 | 4.09 | 4.08 |
| 2 | 3.30 | 3.29 | 3.28 | 3.27 | 3.26 | 3.25 | 3.25 | 3.24 | 3.23 | 3.23 |
| 3 | 2.91 | 2.90 | 2.89 | 2.88 | 2.87 | 2.86 | 2.85 | 2.85 | 2.84 | 2.83 |
| 4 | 2.67 | 2.66 | 2.65 | 2.64 | 2.64 | 2.63 | 2.62 | 2.61 | 2.61 | 2.60 |
| 5 | 2.52 | 2.51 | 2.50 | 2.49 | 2.48 | 2.47 | 2.46 | 2.46 | 2.45 | 2.44 |
| 6 | 2.40 | 2.39 | 2.38 | 2.38 | 2.37 | 2.36 | 2.35 | 2.34 | 2.34 | 2.33 |
| 7 | 2.32 | 2.31 | 2.30 | 2.29 | 2.28 | 2.27 | 2.26 | 2.26 | 2.25 | 2.24 |
| 8 | 2.25 | 2.24 | 2.23 | 2.22 | 2.21 | 2.20 | 2.20 | 2.19 | 2.18 | 2.18 |
| 9 | 2.19 | 2.18 | 2.17 | 2.16 | 2.16 | 2.15 | 2.14 | 2.13 | 2.13 | 2.12 |
| 10 | 2.15 | 2.14 | 2.13 | 2.12 | 2.11 | 2.10 | 2.09 | 2.09 | 2.08 | 2.07 |
| 11 | 2.11 | 2.10 | 2.09 | 2.08 | 2.07 | 2.06 | 2.05 | 2.05 | 2.04 | 2.03 |
| 12 | 2.08 | 2.06 | 2.05 | 2.05 | 2.04 | 2.03 | 2.02 | 2.01 | 2.01 | 2.00 |
| 13 | 2.05 | 2.04 | 2.03 | 2.02 | 2.01 | 2.00 | 1.99 | 1.98 | 1.98 | 1.97 |
| 14 | 2.02 | 2.01 | 2.00 | 1.99 | 1.98 | 1.97 | 1.96 | 1.96 | 1.95 | 1.94 |
| 15 | 2.00 | 1.99 | 1.98 | 1.97 | 1.96 | 1.95 | 1.94 | 1.93 | 1.93 | 1.92 |
| 16 | 1.98 | 1.97 | 1.96 | 1.95 | 1.94 | 1.93 | 1.92 | 1.91 | 1.91 | 1.90 |
| 17 | 1.96 | 1.95 | 1.94 | 1.93 | 1.92 | 1.91 | 1.90 | 1.89 | 1.89 | 1.88 |
| 18 | 1.94 | 1.93 | 1.92 | 1.91 | 1.90 | 1.89 | 1.89 | 1.88 | 1.87 | 1.86 |
| 19 | 1.93 | 1.92 | 1.91 | 1.90 | 1.89 | 1.88 | 1.87 | 1.86 | 1.85 | 1.85 |
| 20 | 1.91 | 1.90 | 1.89 | 1.88 | 1.87 | 1.86 | 1.86 | 1.85 | 1.84 | 1.83 |
| 21 | 1.90 | 1.89 | 1.88 | 1.87 | 1.86 | 1.85 | 1.84 | 1.84 | 1.83 | 1.82 |
| 22 | 1.89 | 1.88 | 1.87 | 1.86 | 1.85 | 1.84 | 1.83 | 1.82 | 1.82 | 1.81 |
| 23 | 1.88 | 1.87 | 1.86 | 1.85 | 1.84 | 1.83 | 1.82 | 1.81 | 1.81 | 1.80 |
| 24 | 1.87 | 1.86 | 1.85 | 1.84 | 1.83 | 1.82 | 1.81 | 1.80 | 1.80 | 1.79 |
| 25 | 1.86 | 1.85 | 1.84 | 1.83 | 1.82 | 1.81 | 1.80 | 1.79 | 1.79 | 1.78 |
| 26 | 1.85 | 1.84 | 1.83 | 1.82 | 1.81 | 1.80 | 1.79 | 1.78 | 1.78 | 1.77 |
| 27 | 1.84 | 1.83 | 1.82 | 1.81 | 1.80 | 1.79 | 1.78 | 1.78 | 1.77 | 1.76 |
| 28 | 1.84 | 1.83 | 1.81 | 1.80 | 1.79 | 1.79 | 1.78 | 1.77 | 1.76 | 1.75 |
| 29 | 1.83 | 1.82 | 1.81 | 1.80 | 1.79 | 1.78 | 1.77 | 1.76 | 1.75 | 1.75 |
| 30 | 1.82 | 1.81 | 1.80 | 1.79 | 1.78 | 1.77 | 1.76 | 1.75 | 1.75 | 1.74 |
| 31 | 1.82 | 1.81 | 1.79 | 1.78 | 1.77 | 1.77 | 1.76 | 1.75 | 1.74 | 1.73 |
| 32 | 1.81 | 1.80 | 1.79 | 1.78 | 1.77 | 1.76 | 1.75 | 1.74 | 1.73 | 1.73 |
| 33 | 1.81 | 1.79 | 1.78 | 1.77 | 1.76 | 1.75 | 1.74 | 1.74 | 1.73 | 1.72 |
| 34 | 1.80 | 1.79 | 1.78 | 1.77 | 1.76 | 1.75 | 1.74 | 1.73 | 1.72 | 1.72 |
| 35 | 1.80 | 1.78 | 1.77 | 1.76 | 1.75 | 1.74 | 1.73 | 1.73 | 1.72 | 1.71 |
| 36 | 1.79 | 1.78 | 1.77 | 1.76 | 1.75 | 1.74 | 1.73 | 1.72 | 1.71 | 1.71 |
| 37 | 1.79 | 1.77 | 1.76 | 1.75 | 1.74 | 1.73 | 1.72 | 1.72 | 1.71 | 1.70 |
| 38 | 1.78 | 1.77 | 1.76 | 1.75 | 1.74 | 1.73 | 1.72 | 1.71 | 1.70 | 1.70 |
| 39 | 1.78 | 1.77 | 1.75 | 1.74 | 1.73 | 1.72 | 1.72 | 1.71 | 1.70 | 1.69 |
| 40 | 1.77 | 1.76 | 1.75 | 1.74 | 1.73 | 1.72 | 1.71 | 1.70 | 1.70 | 1.69 |

## C.4.5 $F_{n_1,n_2,0.9}$

| $n_1 \backslash n_2$ | 1 | 2 | 3 | 4 | 5 | 6 | 7 | 8 | 9 | 10 |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| 1 | 39.86 | 8.52 | 5.53 | 4.54 | 4.06 | 3.77 | 3.58 | 3.45 | 3.36 | 3.28 |
| 2 | 49.52 | 8.99 | 5.46 | 4.32 | 3.77 | 3.46 | 3.25 | 3.11 | 3.00 | 2.92 |
| 3 | 53.62 | 9.16 | 5.39 | 4.19 | 3.61 | 3.28 | 3.07 | 2.92 | 2.81 | 2.72 |
| 4 | 55.86 | 9.24 | 5.34 | 4.10 | 3.52 | 3.18 | 2.96 | 2.80 | 2.69 | 2.60 |
| 5 | 57.27 | 9.29 | 5.30 | 4.05 | 3.45 | 3.10 | 2.88 | 2.72 | 2.61 | 2.52 |
| 6 | 58.24 | 9.32 | 5.28 | 4.00 | 3.40 | 3.05 | 2.82 | 2.66 | 2.55 | 2.46 |
| 7 | 58.94 | 9.34 | 5.26 | 3.97 | 3.36 | 3.01 | 2.78 | 2.62 | 2.50 | 2.41 |
| 8 | 59.47 | 9.36 | 5.25 | 3.95 | 3.33 | 2.98 | 2.75 | 2.58 | 2.46 | 2.37 |
| 9 | 59.89 | 9.38 | 5.23 | 3.93 | 3.31 | 2.95 | 2.72 | 2.56 | 2.44 | 2.34 |
| 10 | 60.23 | 9.39 | 5.23 | 3.91 | 3.29 | 2.93 | 2.70 | 2.53 | 2.41 | 2.32 |
| 11 | 60.51 | 9.40 | 5.22 | 3.90 | 3.28 | 2.91 | 2.68 | 2.51 | 2.39 | 2.30 |
| 12 | 60.74 | 9.40 | 5.21 | 3.89 | 3.26 | 2.90 | 2.66 | 2.50 | 2.37 | 2.28 |
| 13 | 60.94 | 9.41 | 5.20 | 3.88 | 3.25 | 2.89 | 2.65 | 2.48 | 2.36 | 2.26 |
| 14 | 61.11 | 9.41 | 5.20 | 3.87 | 3.24 | 2.88 | 2.64 | 2.47 | 2.35 | 2.25 |
| 15 | 61.26 | 9.42 | 5.20 | 3.87 | 3.23 | 2.87 | 2.63 | 2.46 | 2.33 | 2.24 |
| 16 | 61.39 | 9.42 | 5.19 | 3.86 | 3.23 | 2.86 | 2.62 | 2.45 | 2.32 | 2.23 |
| 17 | 61.50 | 9.43 | 5.19 | 3.85 | 3.22 | 2.85 | 2.61 | 2.44 | 2.32 | 2.22 |
| 18 | 61.60 | 9.43 | 5.18 | 3.85 | 3.21 | 2.84 | 2.60 | 2.43 | 2.31 | 2.21 |
| 19 | 61.69 | 9.43 | 5.18 | 3.84 | 3.21 | 2.84 | 2.60 | 2.43 | 2.30 | 2.20 |
| 20 | 61.78 | 9.44 | 5.18 | 3.84 | 3.20 | 2.83 | 2.59 | 2.42 | 2.29 | 2.20 |
| 21 | 61.85 | 9.44 | 5.18 | 3.84 | 3.20 | 2.83 | 2.58 | 2.41 | 2.29 | 2.19 |
| 22 | 61.92 | 9.44 | 5.18 | 3.83 | 3.19 | 2.82 | 2.58 | 2.41 | 2.28 | 2.18 |
| 23 | 61.98 | 9.44 | 5.17 | 3.83 | 3.19 | 2.82 | 2.57 | 2.40 | 2.28 | 2.18 |
| 24 | 62.04 | 9.44 | 5.17 | 3.83 | 3.19 | 2.81 | 2.57 | 2.40 | 2.27 | 2.17 |
| 25 | 62.09 | 9.45 | 5.17 | 3.82 | 3.18 | 2.81 | 2.57 | 2.39 | 2.27 | 2.17 |
| 26 | 62.14 | 9.45 | 5.17 | 3.82 | 3.18 | 2.81 | 2.56 | 2.39 | 2.26 | 2.16 |
| 27 | 62.19 | 9.45 | 5.17 | 3.82 | 3.18 | 2.80 | 2.56 | 2.39 | 2.26 | 2.16 |
| 28 | 62.23 | 9.45 | 5.17 | 3.82 | 3.17 | 2.80 | 2.56 | 2.38 | 2.26 | 2.16 |
| 29 | 62.27 | 9.45 | 5.16 | 3.81 | 3.17 | 2.80 | 2.55 | 2.38 | 2.25 | 2.15 |
| 30 | 62.30 | 9.45 | 5.16 | 3.81 | 3.17 | 2.79 | 2.55 | 2.38 | 2.25 | 2.15 |
| 31 | 62.34 | 9.45 | 5.16 | 3.81 | 3.17 | 2.79 | 2.55 | 2.38 | 2.25 | 2.15 |
| 32 | 62.37 | 9.46 | 5.16 | 3.81 | 3.16 | 2.79 | 2.55 | 2.37 | 2.24 | 2.14 |
| 33 | 62.40 | 9.46 | 5.16 | 3.81 | 3.16 | 2.79 | 2.54 | 2.37 | 2.24 | 2.14 |
| 34 | 62.43 | 9.46 | 5.16 | 3.81 | 3.16 | 2.79 | 2.54 | 2.37 | 2.24 | 2.14 |
| 35 | 62.45 | 9.46 | 5.16 | 3.80 | 3.16 | 2.78 | 2.54 | 2.37 | 2.24 | 2.14 |
| 36 | 62.48 | 9.46 | 5.16 | 3.80 | 3.16 | 2.78 | 2.54 | 2.36 | 2.23 | 2.13 |
| 37 | 62.50 | 9.46 | 5.16 | 3.80 | 3.16 | 2.78 | 2.54 | 2.36 | 2.23 | 2.13 |
| 38 | 62.52 | 9.46 | 5.16 | 3.80 | 3.15 | 2.78 | 2.53 | 2.36 | 2.23 | 2.13 |
| 39 | 62.55 | 9.46 | 5.16 | 3.80 | 3.15 | 2.78 | 2.53 | 2.36 | 2.23 | 2.13 |
| 40 | 62.57 | 9.46 | 5.15 | 3.80 | 3.15 | 2.78 | 2.53 | 2.36 | 2.23 | 2.13 |

| $n_1 \backslash n_2$ | 11 | 12 | 13 | 14 | 15 | 16 | 17 | 18 | 19 | 20 |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| 1 | 3.22 | 3.17 | 3.13 | 3.10 | 3.07 | 3.04 | 3.02 | 3.00 | 2.98 | 2.97 |
| 2 | 2.85 | 2.80 | 2.76 | 2.72 | 2.69 | 2.66 | 2.64 | 2.62 | 2.60 | 2.58 |
| 3 | 2.66 | 2.60 | 2.56 | 2.52 | 2.48 | 2.46 | 2.43 | 2.41 | 2.39 | 2.38 |
| 4 | 2.53 | 2.48 | 2.43 | 2.39 | 2.36 | 2.33 | 2.30 | 2.28 | 2.26 | 2.24 |
| 5 | 2.45 | 2.39 | 2.34 | 2.30 | 2.27 | 2.24 | 2.21 | 2.19 | 2.17 | 2.15 |
| 6 | 2.38 | 2.33 | 2.28 | 2.24 | 2.20 | 2.17 | 2.15 | 2.12 | 2.10 | 2.09 |
| 7 | 2.34 | 2.28 | 2.23 | 2.19 | 2.15 | 2.12 | 2.10 | 2.07 | 2.05 | 2.03 |
| 8 | 2.30 | 2.24 | 2.19 | 2.15 | 2.11 | 2.08 | 2.06 | 2.03 | 2.01 | 1.99 |
| 9 | 2.27 | 2.21 | 2.16 | 2.12 | 2.08 | 2.05 | 2.02 | 2.00 | 1.98 | 1.96 |
| 10 | 2.24 | 2.18 | 2.13 | 2.09 | 2.05 | 2.02 | 2.00 | 1.97 | 1.95 | 1.93 |
| 11 | 2.22 | 2.16 | 2.11 | 2.07 | 2.03 | 2.00 | 1.97 | 1.95 | 1.93 | 1.91 |
| 12 | 2.20 | 2.14 | 2.09 | 2.05 | 2.01 | 1.98 | 1.95 | 1.93 | 1.91 | 1.89 |
| 13 | 2.19 | 2.13 | 2.08 | 2.03 | 2.00 | 1.96 | 1.94 | 1.91 | 1.89 | 1.87 |
| 14 | 2.17 | 2.11 | 2.06 | 2.02 | 1.98 | 1.95 | 1.92 | 1.90 | 1.87 | 1.85 |
| 15 | 2.16 | 2.10 | 2.05 | 2.00 | 1.97 | 1.93 | 1.91 | 1.88 | 1.86 | 1.84 |
| 16 | 2.15 | 2.09 | 2.04 | 1.99 | 1.96 | 1.92 | 1.89 | 1.87 | 1.85 | 1.83 |
| 17 | 2.14 | 2.08 | 2.03 | 1.98 | 1.95 | 1.91 | 1.88 | 1.86 | 1.84 | 1.82 |
| 18 | 2.13 | 2.07 | 2.02 | 1.97 | 1.94 | 1.90 | 1.87 | 1.85 | 1.83 | 1.81 |
| 19 | 2.13 | 2.06 | 2.01 | 1.97 | 1.93 | 1.89 | 1.87 | 1.84 | 1.82 | 1.80 |
| 20 | 2.12 | 2.05 | 2.00 | 1.96 | 1.92 | 1.89 | 1.86 | 1.83 | 1.81 | 1.79 |
| 21 | 2.11 | 2.05 | 2.00 | 1.95 | 1.91 | 1.88 | 1.85 | 1.82 | 1.80 | 1.78 |
| 22 | 2.11 | 2.04 | 1.99 | 1.94 | 1.91 | 1.87 | 1.84 | 1.82 | 1.79 | 1.77 |
| 23 | 2.10 | 2.04 | 1.98 | 1.94 | 1.90 | 1.87 | 1.84 | 1.81 | 1.79 | 1.77 |
| 24 | 2.09 | 2.03 | 1.98 | 1.93 | 1.89 | 1.86 | 1.83 | 1.81 | 1.78 | 1.76 |
| 25 | 2.09 | 2.03 | 1.97 | 1.93 | 1.89 | 1.86 | 1.83 | 1.80 | 1.78 | 1.76 |
| 26 | 2.09 | 2.02 | 1.97 | 1.92 | 1.88 | 1.85 | 1.82 | 1.79 | 1.77 | 1.75 |
| 27 | 2.08 | 2.02 | 1.96 | 1.92 | 1.88 | 1.85 | 1.82 | 1.79 | 1.77 | 1.75 |
| 28 | 2.08 | 2.01 | 1.96 | 1.91 | 1.88 | 1.84 | 1.81 | 1.79 | 1.76 | 1.74 |
| 29 | 2.07 | 2.01 | 1.96 | 1.91 | 1.87 | 1.84 | 1.81 | 1.78 | 1.76 | 1.74 |
| 30 | 2.07 | 2.01 | 1.95 | 1.91 | 1.87 | 1.83 | 1.80 | 1.78 | 1.75 | 1.73 |
| 31 | 2.07 | 2.00 | 1.95 | 1.90 | 1.86 | 1.83 | 1.80 | 1.77 | 1.75 | 1.73 |
| 32 | 2.07 | 2.00 | 1.95 | 1.90 | 1.86 | 1.83 | 1.80 | 1.77 | 1.75 | 1.73 |
| 33 | 2.06 | 2.00 | 1.94 | 1.90 | 1.86 | 1.82 | 1.79 | 1.77 | 1.74 | 1.72 |
| 34 | 2.06 | 1.99 | 1.94 | 1.89 | 1.86 | 1.82 | 1.79 | 1.76 | 1.74 | 1.72 |
| 35 | 2.06 | 1.99 | 1.94 | 1.89 | 1.85 | 1.82 | 1.79 | 1.76 | 1.74 | 1.72 |
| 36 | 2.05 | 1.99 | 1.94 | 1.89 | 1.85 | 1.82 | 1.79 | 1.76 | 1.73 | 1.71 |
| 37 | 2.05 | 1.99 | 1.93 | 1.89 | 1.85 | 1.81 | 1.78 | 1.76 | 1.73 | 1.71 |
| 38 | 2.05 | 1.99 | 1.93 | 1.88 | 1.84 | 1.81 | 1.78 | 1.75 | 1.73 | 1.71 |
| 39 | 2.05 | 1.98 | 1.93 | 1.88 | 1.84 | 1.81 | 1.78 | 1.75 | 1.73 | 1.71 |
| 40 | 2.05 | 1.98 | 1.93 | 1.88 | 1.84 | 1.81 | 1.78 | 1.75 | 1.72 | 1.70 |

| $n_1 \backslash n_2$ | 21 | 22 | 23 | 24 | 25 | 26 | 27 | 28 | 29 | 30 |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| 1 | 2.96 | 2.94 | 2.93 | 2.92 | 2.91 | 2.90 | 2.90 | 2.89 | 2.88 | 2.88 |
| 2 | 2.57 | 2.56 | 2.54 | 2.53 | 2.52 | 2.51 | 2.51 | 2.50 | 2.49 | 2.48 |
| 3 | 2.36 | 2.35 | 2.33 | 2.32 | 2.31 | 2.30 | 2.29 | 2.29 | 2.28 | 2.27 |
| 4 | 2.23 | 2.21 | 2.20 | 2.19 | 2.18 | 2.17 | 2.16 | 2.15 | 2.14 | 2.14 |
| 5 | 2.14 | 2.12 | 2.11 | 2.10 | 2.09 | 2.08 | 2.07 | 2.06 | 2.05 | 2.04 |
| 6 | 2.07 | 2.06 | 2.04 | 2.03 | 2.02 | 2.01 | 2.00 | 1.99 | 1.98 | 1.98 |
| 7 | 2.02 | 2.00 | 1.99 | 1.98 | 1.97 | 1.96 | 1.95 | 1.94 | 1.93 | 1.92 |
| 8 | 1.98 | 1.96 | 1.95 | 1.94 | 1.92 | 1.91 | 1.90 | 1.90 | 1.89 | 1.88 |
| 9 | 1.94 | 1.93 | 1.91 | 1.90 | 1.89 | 1.88 | 1.87 | 1.86 | 1.85 | 1.84 |
| 10 | 1.91 | 1.90 | 1.89 | 1.87 | 1.86 | 1.85 | 1.84 | 1.83 | 1.82 | 1.81 |
| 11 | 1.89 | 1.88 | 1.86 | 1.85 | 1.84 | 1.83 | 1.82 | 1.81 | 1.80 | 1.79 |
| 12 | 1.87 | 1.85 | 1.84 | 1.83 | 1.81 | 1.80 | 1.79 | 1.78 | 1.78 | 1.77 |
| 13 | 1.85 | 1.84 | 1.82 | 1.81 | 1.80 | 1.79 | 1.78 | 1.77 | 1.76 | 1.75 |
| 14 | 1.84 | 1.82 | 1.81 | 1.79 | 1.78 | 1.77 | 1.76 | 1.75 | 1.74 | 1.73 |
| 15 | 1.82 | 1.81 | 1.79 | 1.78 | 1.77 | 1.75 | 1.74 | 1.73 | 1.73 | 1.72 |
| 16 | 1.81 | 1.79 | 1.78 | 1.77 | 1.75 | 1.74 | 1.73 | 1.72 | 1.71 | 1.70 |
| 17 | 1.80 | 1.78 | 1.77 | 1.75 | 1.74 | 1.73 | 1.72 | 1.71 | 1.70 | 1.69 |
| 18 | 1.79 | 1.77 | 1.76 | 1.74 | 1.73 | 1.72 | 1.71 | 1.70 | 1.69 | 1.68 |
| 19 | 1.78 | 1.76 | 1.75 | 1.73 | 1.72 | 1.71 | 1.70 | 1.69 | 1.68 | 1.67 |
| 20 | 1.77 | 1.75 | 1.74 | 1.73 | 1.71 | 1.70 | 1.69 | 1.68 | 1.67 | 1.66 |
| 21 | 1.76 | 1.75 | 1.73 | 1.72 | 1.70 | 1.69 | 1.68 | 1.67 | 1.66 | 1.65 |
| 22 | 1.76 | 1.74 | 1.72 | 1.71 | 1.70 | 1.69 | 1.67 | 1.66 | 1.66 | 1.65 |
| 23 | 1.75 | 1.73 | 1.72 | 1.70 | 1.69 | 1.68 | 1.67 | 1.66 | 1.65 | 1.64 |
| 24 | 1.74 | 1.73 | 1.71 | 1.70 | 1.68 | 1.67 | 1.66 | 1.65 | 1.64 | 1.63 |
| 25 | 1.74 | 1.72 | 1.71 | 1.69 | 1.68 | 1.67 | 1.66 | 1.64 | 1.64 | 1.63 |
| 26 | 1.73 | 1.72 | 1.70 | 1.69 | 1.67 | 1.66 | 1.65 | 1.64 | 1.63 | 1.62 |
| 27 | 1.73 | 1.71 | 1.69 | 1.68 | 1.67 | 1.66 | 1.64 | 1.63 | 1.62 | 1.62 |
| 28 | 1.72 | 1.71 | 1.69 | 1.68 | 1.66 | 1.65 | 1.64 | 1.63 | 1.62 | 1.61 |
| 29 | 1.72 | 1.70 | 1.69 | 1.67 | 1.66 | 1.65 | 1.63 | 1.62 | 1.61 | 1.61 |
| 30 | 1.71 | 1.70 | 1.68 | 1.67 | 1.65 | 1.64 | 1.63 | 1.62 | 1.61 | 1.60 |
| 31 | 1.71 | 1.69 | 1.68 | 1.66 | 1.65 | 1.64 | 1.63 | 1.62 | 1.61 | 1.60 |
| 32 | 1.71 | 1.69 | 1.67 | 1.66 | 1.65 | 1.63 | 1.62 | 1.61 | 1.60 | 1.59 |
| 33 | 1.70 | 1.69 | 1.67 | 1.66 | 1.64 | 1.63 | 1.62 | 1.61 | 1.60 | 1.59 |
| 34 | 1.70 | 1.68 | 1.67 | 1.65 | 1.64 | 1.63 | 1.62 | 1.61 | 1.60 | 1.59 |
| 35 | 1.70 | 1.68 | 1.66 | 1.65 | 1.64 | 1.62 | 1.61 | 1.60 | 1.59 | 1.58 |
| 36 | 1.69 | 1.68 | 1.66 | 1.65 | 1.63 | 1.62 | 1.61 | 1.60 | 1.59 | 1.58 |
| 37 | 1.69 | 1.67 | 1.66 | 1.64 | 1.63 | 1.62 | 1.61 | 1.60 | 1.59 | 1.58 |
| 38 | 1.69 | 1.67 | 1.66 | 1.64 | 1.63 | 1.61 | 1.60 | 1.59 | 1.58 | 1.57 |
| 39 | 1.69 | 1.67 | 1.65 | 1.64 | 1.62 | 1.61 | 1.60 | 1.59 | 1.58 | 1.57 |
| 40 | 1.68 | 1.67 | 1.65 | 1.64 | 1.62 | 1.61 | 1.60 | 1.59 | 1.58 | 1.57 |

| $n_1 \backslash n_2$ | 31 | 32 | 33 | 34 | 35 | 36 | 37 | 38 | 39 | 40 |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| 1 | 2.87 | 2.86 | 2.86 | 2.85 | 2.85 | 2.85 | 2.84 | 2.84 | 2.83 | 2.83 |
| 2 | 2.48 | 2.47 | 2.47 | 2.46 | 2.46 | 2.45 | 2.45 | 2.44 | 2.44 | 2.44 |
| 3 | 2.26 | 2.26 | 2.25 | 2.25 | 2.24 | 2.24 | 2.23 | 2.23 | 2.22 | 2.22 |
| 4 | 2.13 | 2.12 | 2.12 | 2.11 | 2.11 | 2.10 | 2.10 | 2.09 | 2.09 | 2.09 |
| 5 | 2.04 | 2.03 | 2.03 | 2.02 | 2.01 | 2.01 | 2.00 | 2.00 | 2.00 | 1.99 |
| 6 | 1.97 | 1.96 | 1.96 | 1.95 | 1.94 | 1.94 | 1.93 | 1.93 | 1.93 | 1.92 |
| 7 | 1.91 | 1.91 | 1.90 | 1.90 | 1.89 | 1.89 | 1.88 | 1.88 | 1.87 | 1.87 |
| 8 | 1.87 | 1.87 | 1.86 | 1.85 | 1.85 | 1.84 | 1.84 | 1.83 | 1.83 | 1.82 |
| 9 | 1.84 | 1.83 | 1.82 | 1.82 | 1.81 | 1.81 | 1.80 | 1.80 | 1.79 | 1.79 |
| 10 | 1.81 | 1.80 | 1.79 | 1.79 | 1.78 | 1.78 | 1.77 | 1.77 | 1.76 | 1.76 |
| 11 | 1.78 | 1.77 | 1.77 | 1.76 | 1.76 | 1.75 | 1.75 | 1.74 | 1.74 | 1.73 |
| 12 | 1.76 | 1.75 | 1.75 | 1.74 | 1.73 | 1.73 | 1.72 | 1.72 | 1.71 | 1.71 |
| 13 | 1.74 | 1.73 | 1.73 | 1.72 | 1.72 | 1.71 | 1.70 | 1.70 | 1.69 | 1.69 |
| 14 | 1.72 | 1.72 | 1.71 | 1.70 | 1.70 | 1.69 | 1.69 | 1.68 | 1.68 | 1.67 |
| 15 | 1.71 | 1.70 | 1.70 | 1.69 | 1.68 | 1.68 | 1.67 | 1.67 | 1.66 | 1.66 |
| 16 | 1.70 | 1.69 | 1.68 | 1.68 | 1.67 | 1.66 | 1.66 | 1.65 | 1.65 | 1.64 |
| 17 | 1.68 | 1.68 | 1.67 | 1.66 | 1.66 | 1.65 | 1.65 | 1.64 | 1.64 | 1.63 |
| 18 | 1.67 | 1.67 | 1.66 | 1.65 | 1.65 | 1.64 | 1.63 | 1.63 | 1.62 | 1.62 |
| 19 | 1.66 | 1.66 | 1.65 | 1.64 | 1.64 | 1.63 | 1.62 | 1.62 | 1.61 | 1.61 |
| 20 | 1.65 | 1.65 | 1.64 | 1.63 | 1.63 | 1.62 | 1.62 | 1.61 | 1.60 | 1.60 |
| 21 | 1.65 | 1.64 | 1.63 | 1.62 | 1.62 | 1.61 | 1.61 | 1.60 | 1.60 | 1.59 |
| 22 | 1.64 | 1.63 | 1.62 | 1.62 | 1.61 | 1.60 | 1.60 | 1.59 | 1.59 | 1.58 |
| 23 | 1.63 | 1.62 | 1.62 | 1.61 | 1.60 | 1.60 | 1.59 | 1.59 | 1.58 | 1.58 |
| 24 | 1.62 | 1.62 | 1.61 | 1.60 | 1.60 | 1.59 | 1.58 | 1.58 | 1.57 | 1.57 |
| 25 | 1.62 | 1.61 | 1.60 | 1.60 | 1.59 | 1.58 | 1.58 | 1.57 | 1.57 | 1.56 |
| 26 | 1.61 | 1.60 | 1.60 | 1.59 | 1.58 | 1.58 | 1.57 | 1.57 | 1.56 | 1.56 |
| 27 | 1.61 | 1.60 | 1.59 | 1.59 | 1.58 | 1.57 | 1.57 | 1.56 | 1.56 | 1.55 |
| 28 | 1.60 | 1.59 | 1.59 | 1.58 | 1.57 | 1.57 | 1.56 | 1.56 | 1.55 | 1.55 |
| 29 | 1.60 | 1.59 | 1.58 | 1.58 | 1.57 | 1.56 | 1.56 | 1.55 | 1.55 | 1.54 |
| 30 | 1.59 | 1.59 | 1.58 | 1.57 | 1.56 | 1.56 | 1.55 | 1.55 | 1.54 | 1.54 |
| 31 | 1.59 | 1.58 | 1.57 | 1.57 | 1.56 | 1.55 | 1.55 | 1.54 | 1.54 | 1.53 |
| 32 | 1.58 | 1.58 | 1.57 | 1.56 | 1.56 | 1.55 | 1.54 | 1.54 | 1.53 | 1.53 |
| 33 | 1.58 | 1.57 | 1.57 | 1.56 | 1.55 | 1.55 | 1.54 | 1.53 | 1.53 | 1.52 |
| 34 | 1.58 | 1.57 | 1.56 | 1.55 | 1.55 | 1.54 | 1.54 | 1.53 | 1.52 | 1.52 |
| 35 | 1.57 | 1.57 | 1.56 | 1.55 | 1.54 | 1.54 | 1.53 | 1.53 | 1.52 | 1.52 |
| 36 | 1.57 | 1.56 | 1.56 | 1.55 | 1.54 | 1.54 | 1.53 | 1.52 | 1.52 | 1.51 |
| 37 | 1.57 | 1.56 | 1.55 | 1.55 | 1.54 | 1.53 | 1.53 | 1.52 | 1.51 | 1.51 |
| 38 | 1.56 | 1.56 | 1.55 | 1.54 | 1.54 | 1.53 | 1.52 | 1.52 | 1.51 | 1.51 |
| 39 | 1.56 | 1.55 | 1.55 | 1.54 | 1.53 | 1.53 | 1.52 | 1.51 | 1.51 | 1.50 |
| 40 | 1.56 | 1.55 | 1.54 | 1.54 | 1.53 | 1.52 | 1.52 | 1.51 | 1.51 | 1.50 |

## C.4.6 $F_{n_1,n_2,0.8}$

| $n_1 \backslash n_2$ | 1 | 2 | 3 | 4 | 5 | 6 | 7 | 8 | 9 | 10 |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| 1 | 9.47 | 3.55 | 2.68 | 2.35 | 2.17 | 2.07 | 2.00 | 1.95 | 1.91 | 1.88 |
| 2 | 12.00 | 4.00 | 2.88 | 2.47 | 2.25 | 2.12 | 2.04 | 1.98 | 1.93 | 1.89 |
| 3 | 13.06 | 4.15 | 2.93 | 2.48 | 2.25 | 2.11 | 2.01 | 1.95 | 1.90 | 1.86 |
| 4 | 13.64 | 4.23 | 2.95 | 2.48 | 2.23 | 2.09 | 1.99 | 1.92 | 1.86 | 1.82 |
| 5 | 14.01 | 4.28 | 2.96 | 2.47 | 2.22 | 2.07 | 1.97 | 1.90 | 1.84 | 1.80 |
| 6 | 14.26 | 4.31 | 2.97 | 2.47 | 2.21 | 2.06 | 1.95 | 1.88 | 1.82 | 1.78 |
| 7 | 14.44 | 4.34 | 2.97 | 2.46 | 2.20 | 2.05 | 1.94 | 1.86 | 1.81 | 1.76 |
| 8 | 14.58 | 4.35 | 2.97 | 2.46 | 2.20 | 2.04 | 1.93 | 1.85 | 1.79 | 1.75 |
| 9 | 14.68 | 4.37 | 2.97 | 2.46 | 2.19 | 2.03 | 1.92 | 1.84 | 1.78 | 1.74 |
| 10 | 14.77 | 4.38 | 2.97 | 2.45 | 2.19 | 2.02 | 1.91 | 1.83 | 1.77 | 1.73 |
| 11 | 14.84 | 4.39 | 2.97 | 2.45 | 2.18 | 2.02 | 1.91 | 1.83 | 1.77 | 1.72 |
| 12 | 14.90 | 4.39 | 2.98 | 2.45 | 2.18 | 2.01 | 1.90 | 1.82 | 1.76 | 1.71 |
| 13 | 14.95 | 4.40 | 2.98 | 2.45 | 2.18 | 2.01 | 1.90 | 1.81 | 1.75 | 1.71 |
| 14 | 15.00 | 4.41 | 2.98 | 2.45 | 2.17 | 2.00 | 1.89 | 1.81 | 1.75 | 1.70 |
| 15 | 15.04 | 4.41 | 2.98 | 2.45 | 2.17 | 2.00 | 1.89 | 1.81 | 1.74 | 1.70 |
| 16 | 15.07 | 4.41 | 2.98 | 2.44 | 2.17 | 2.00 | 1.88 | 1.80 | 1.74 | 1.69 |
| 17 | 15.10 | 4.42 | 2.98 | 2.44 | 2.17 | 2.00 | 1.88 | 1.80 | 1.74 | 1.69 |
| 18 | 15.13 | 4.42 | 2.98 | 2.44 | 2.16 | 1.99 | 1.88 | 1.80 | 1.73 | 1.68 |
| 19 | 15.15 | 4.42 | 2.98 | 2.44 | 2.16 | 1.99 | 1.88 | 1.79 | 1.73 | 1.68 |
| 20 | 15.17 | 4.43 | 2.98 | 2.44 | 2.16 | 1.99 | 1.87 | 1.79 | 1.73 | 1.68 |
| 21 | 15.19 | 4.43 | 2.98 | 2.44 | 2.16 | 1.99 | 1.87 | 1.79 | 1.72 | 1.67 |
| 22 | 15.21 | 4.43 | 2.98 | 2.44 | 2.16 | 1.99 | 1.87 | 1.79 | 1.72 | 1.67 |
| 23 | 15.22 | 4.43 | 2.98 | 2.44 | 2.16 | 1.99 | 1.87 | 1.78 | 1.72 | 1.67 |
| 24 | 15.24 | 4.43 | 2.98 | 2.44 | 2.16 | 1.98 | 1.87 | 1.78 | 1.72 | 1.67 |
| 25 | 15.25 | 4.44 | 2.98 | 2.44 | 2.16 | 1.98 | 1.87 | 1.78 | 1.72 | 1.67 |
| 26 | 15.26 | 4.44 | 2.98 | 2.44 | 2.15 | 1.98 | 1.86 | 1.78 | 1.71 | 1.66 |
| 27 | 15.28 | 4.44 | 2.98 | 2.44 | 2.15 | 1.98 | 1.86 | 1.78 | 1.71 | 1.66 |
| 28 | 15.29 | 4.44 | 2.98 | 2.44 | 2.15 | 1.98 | 1.86 | 1.78 | 1.71 | 1.66 |
| 29 | 15.30 | 4.44 | 2.98 | 2.43 | 2.15 | 1.98 | 1.86 | 1.78 | 1.71 | 1.66 |
| 30 | 15.31 | 4.44 | 2.98 | 2.43 | 2.15 | 1.98 | 1.86 | 1.77 | 1.71 | 1.66 |
| 31 | 15.31 | 4.44 | 2.98 | 2.43 | 2.15 | 1.98 | 1.86 | 1.77 | 1.71 | 1.66 |
| 32 | 15.32 | 4.45 | 2.98 | 2.43 | 2.15 | 1.98 | 1.86 | 1.77 | 1.71 | 1.66 |
| 33 | 15.33 | 4.45 | 2.98 | 2.43 | 2.15 | 1.98 | 1.86 | 1.77 | 1.71 | 1.65 |
| 34 | 15.34 | 4.45 | 2.98 | 2.43 | 2.15 | 1.97 | 1.86 | 1.77 | 1.70 | 1.65 |
| 35 | 15.34 | 4.45 | 2.98 | 2.43 | 2.15 | 1.97 | 1.86 | 1.77 | 1.70 | 1.65 |
| 36 | 15.35 | 4.45 | 2.98 | 2.43 | 2.15 | 1.97 | 1.85 | 1.77 | 1.70 | 1.65 |
| 37 | 15.36 | 4.45 | 2.98 | 2.43 | 2.15 | 1.97 | 1.85 | 1.77 | 1.70 | 1.65 |
| 38 | 15.36 | 4.45 | 2.98 | 2.43 | 2.15 | 1.97 | 1.85 | 1.77 | 1.70 | 1.65 |
| 39 | 15.37 | 4.45 | 2.98 | 2.43 | 2.15 | 1.97 | 1.85 | 1.77 | 1.70 | 1.65 |
| 40 | 15.37 | 4.45 | 2.98 | 2.43 | 2.15 | 1.97 | 1.85 | 1.77 | 1.70 | 1.65 |

| $n_1 \backslash n_2$ | 11 | 12 | 13 | 14 | 15 | 16 | 17 | 18 | 19 | 20 |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| 1 | 1.85 | 1.83 | 1.82 | 1.80 | 1.79 | 1.78 | 1.77 | 1.76 | 1.76 | 1.75 |
| 2 | 1.86 | 1.84 | 1.82 | 1.80 | 1.79 | 1.78 | 1.77 | 1.76 | 1.75 | 1.74 |
| 3 | 1.82 | 1.80 | 1.78 | 1.76 | 1.74 | 1.73 | 1.72 | 1.71 | 1.70 | 1.69 |
| 4 | 1.79 | 1.76 | 1.74 | 1.72 | 1.71 | 1.69 | 1.68 | 1.67 | 1.66 | 1.65 |
| 5 | 1.76 | 1.74 | 1.71 | 1.69 | 1.68 | 1.66 | 1.65 | 1.64 | 1.63 | 1.62 |
| 6 | 1.74 | 1.71 | 1.69 | 1.67 | 1.65 | 1.64 | 1.62 | 1.61 | 1.60 | 1.59 |
| 7 | 1.72 | 1.70 | 1.67 | 1.65 | 1.63 | 1.62 | 1.60 | 1.59 | 1.58 | 1.57 |
| 8 | 1.71 | 1.68 | 1.66 | 1.63 | 1.62 | 1.60 | 1.59 | 1.57 | 1.56 | 1.55 |
| 9 | 1.70 | 1.67 | 1.64 | 1.62 | 1.60 | 1.59 | 1.57 | 1.56 | 1.55 | 1.54 |
| 10 | 1.69 | 1.66 | 1.63 | 1.61 | 1.59 | 1.57 | 1.56 | 1.55 | 1.54 | 1.53 |
| 11 | 1.68 | 1.65 | 1.62 | 1.60 | 1.58 | 1.57 | 1.55 | 1.54 | 1.53 | 1.52 |
| 12 | 1.67 | 1.64 | 1.62 | 1.59 | 1.57 | 1.56 | 1.54 | 1.53 | 1.52 | 1.51 |
| 13 | 1.67 | 1.63 | 1.61 | 1.59 | 1.57 | 1.55 | 1.53 | 1.52 | 1.51 | 1.50 |
| 14 | 1.66 | 1.63 | 1.60 | 1.58 | 1.56 | 1.54 | 1.53 | 1.51 | 1.50 | 1.49 |
| 15 | 1.66 | 1.62 | 1.60 | 1.57 | 1.55 | 1.54 | 1.52 | 1.51 | 1.50 | 1.48 |
| 16 | 1.65 | 1.62 | 1.59 | 1.57 | 1.55 | 1.53 | 1.52 | 1.50 | 1.49 | 1.48 |
| 17 | 1.65 | 1.61 | 1.59 | 1.56 | 1.54 | 1.53 | 1.51 | 1.50 | 1.48 | 1.47 |
| 18 | 1.64 | 1.61 | 1.58 | 1.56 | 1.54 | 1.52 | 1.51 | 1.49 | 1.48 | 1.47 |
| 19 | 1.64 | 1.61 | 1.58 | 1.56 | 1.54 | 1.52 | 1.50 | 1.49 | 1.48 | 1.46 |
| 20 | 1.64 | 1.60 | 1.58 | 1.55 | 1.53 | 1.51 | 1.50 | 1.48 | 1.47 | 1.46 |
| 21 | 1.63 | 1.60 | 1.57 | 1.55 | 1.53 | 1.51 | 1.49 | 1.48 | 1.47 | 1.46 |
| 22 | 1.63 | 1.60 | 1.57 | 1.55 | 1.53 | 1.51 | 1.49 | 1.48 | 1.46 | 1.45 |
| 23 | 1.63 | 1.60 | 1.57 | 1.54 | 1.52 | 1.50 | 1.49 | 1.47 | 1.46 | 1.45 |
| 24 | 1.63 | 1.59 | 1.56 | 1.54 | 1.52 | 1.50 | 1.49 | 1.47 | 1.46 | 1.45 |
| 25 | 1.62 | 1.59 | 1.56 | 1.54 | 1.52 | 1.50 | 1.48 | 1.47 | 1.46 | 1.44 |
| 26 | 1.62 | 1.59 | 1.56 | 1.54 | 1.52 | 1.50 | 1.48 | 1.47 | 1.45 | 1.44 |
| 27 | 1.62 | 1.59 | 1.56 | 1.53 | 1.51 | 1.49 | 1.48 | 1.46 | 1.45 | 1.44 |
| 28 | 1.62 | 1.59 | 1.56 | 1.53 | 1.51 | 1.49 | 1.48 | 1.46 | 1.45 | 1.44 |
| 29 | 1.62 | 1.58 | 1.56 | 1.53 | 1.51 | 1.49 | 1.47 | 1.46 | 1.45 | 1.44 |
| 30 | 1.62 | 1.58 | 1.55 | 1.53 | 1.51 | 1.49 | 1.47 | 1.46 | 1.45 | 1.43 |
| 31 | 1.62 | 1.58 | 1.55 | 1.53 | 1.51 | 1.49 | 1.47 | 1.46 | 1.44 | 1.43 |
| 32 | 1.61 | 1.58 | 1.55 | 1.53 | 1.50 | 1.49 | 1.47 | 1.45 | 1.44 | 1.43 |
| 33 | 1.61 | 1.58 | 1.55 | 1.52 | 1.50 | 1.48 | 1.47 | 1.45 | 1.44 | 1.43 |
| 34 | 1.61 | 1.58 | 1.55 | 1.52 | 1.50 | 1.48 | 1.47 | 1.45 | 1.44 | 1.43 |
| 35 | 1.61 | 1.58 | 1.55 | 1.52 | 1.50 | 1.48 | 1.46 | 1.45 | 1.44 | 1.43 |
| 36 | 1.61 | 1.57 | 1.55 | 1.52 | 1.50 | 1.48 | 1.46 | 1.45 | 1.44 | 1.42 |
| 37 | 1.61 | 1.57 | 1.54 | 1.52 | 1.50 | 1.48 | 1.46 | 1.45 | 1.43 | 1.42 |
| 38 | 1.61 | 1.57 | 1.54 | 1.52 | 1.50 | 1.48 | 1.46 | 1.45 | 1.43 | 1.42 |
| 39 | 1.61 | 1.57 | 1.54 | 1.52 | 1.50 | 1.48 | 1.46 | 1.45 | 1.43 | 1.42 |
| 40 | 1.61 | 1.57 | 1.54 | 1.52 | 1.49 | 1.48 | 1.46 | 1.44 | 1.43 | 1.42 |

| $n_1 \backslash n_2$ | 21 | 22 | 23 | 24 | 25 | 26 | 27 | 28 | 29 | 30 |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| 1 | 1.75 | 1.74 | 1.74 | 1.73 | 1.73 | 1.72 | 1.72 | 1.72 | 1.71 | 1.71 |
| 2 | 1.73 | 1.73 | 1.72 | 1.72 | 1.71 | 1.71 | 1.70 | 1.70 | 1.70 | 1.69 |
| 3 | 1.68 | 1.68 | 1.67 | 1.66 | 1.66 | 1.66 | 1.65 | 1.65 | 1.64 | 1.64 |
| 4 | 1.64 | 1.63 | 1.63 | 1.62 | 1.62 | 1.61 | 1.61 | 1.60 | 1.60 | 1.60 |
| 5 | 1.61 | 1.60 | 1.59 | 1.59 | 1.58 | 1.58 | 1.57 | 1.57 | 1.56 | 1.56 |
| 6 | 1.58 | 1.57 | 1.57 | 1.56 | 1.56 | 1.55 | 1.55 | 1.54 | 1.54 | 1.53 |
| 7 | 1.56 | 1.55 | 1.55 | 1.54 | 1.53 | 1.53 | 1.52 | 1.52 | 1.51 | 1.51 |
| 8 | 1.54 | 1.54 | 1.53 | 1.52 | 1.52 | 1.51 | 1.51 | 1.50 | 1.50 | 1.49 |
| 9 | 1.53 | 1.52 | 1.51 | 1.51 | 1.50 | 1.50 | 1.49 | 1.49 | 1.48 | 1.48 |
| 10 | 1.52 | 1.51 | 1.50 | 1.49 | 1.49 | 1.48 | 1.48 | 1.47 | 1.47 | 1.46 |
| 11 | 1.51 | 1.50 | 1.49 | 1.48 | 1.48 | 1.47 | 1.47 | 1.46 | 1.46 | 1.45 |
| 12 | 1.50 | 1.49 | 1.48 | 1.47 | 1.47 | 1.46 | 1.46 | 1.45 | 1.45 | 1.44 |
| 13 | 1.49 | 1.48 | 1.47 | 1.47 | 1.46 | 1.45 | 1.45 | 1.44 | 1.44 | 1.43 |
| 14 | 1.48 | 1.47 | 1.46 | 1.46 | 1.45 | 1.44 | 1.44 | 1.43 | 1.43 | 1.42 |
| 15 | 1.47 | 1.47 | 1.46 | 1.45 | 1.44 | 1.44 | 1.43 | 1.43 | 1.42 | 1.42 |
| 16 | 1.47 | 1.46 | 1.45 | 1.44 | 1.44 | 1.43 | 1.43 | 1.42 | 1.42 | 1.41 |
| 17 | 1.46 | 1.45 | 1.45 | 1.44 | 1.43 | 1.43 | 1.42 | 1.41 | 1.41 | 1.40 |
| 18 | 1.46 | 1.45 | 1.44 | 1.43 | 1.43 | 1.42 | 1.41 | 1.41 | 1.40 | 1.40 |
| 19 | 1.45 | 1.45 | 1.44 | 1.43 | 1.42 | 1.42 | 1.41 | 1.40 | 1.40 | 1.39 |
| 20 | 1.45 | 1.44 | 1.43 | 1.43 | 1.42 | 1.41 | 1.41 | 1.40 | 1.39 | 1.39 |
| 21 | 1.45 | 1.44 | 1.43 | 1.42 | 1.41 | 1.41 | 1.40 | 1.40 | 1.39 | 1.39 |
| 22 | 1.44 | 1.43 | 1.43 | 1.42 | 1.41 | 1.40 | 1.40 | 1.39 | 1.39 | 1.38 |
| 23 | 1.44 | 1.43 | 1.42 | 1.41 | 1.41 | 1.40 | 1.39 | 1.39 | 1.38 | 1.38 |
| 24 | 1.44 | 1.43 | 1.42 | 1.41 | 1.40 | 1.40 | 1.39 | 1.39 | 1.38 | 1.38 |
| 25 | 1.43 | 1.42 | 1.42 | 1.41 | 1.40 | 1.39 | 1.39 | 1.38 | 1.38 | 1.37 |
| 26 | 1.43 | 1.42 | 1.41 | 1.41 | 1.40 | 1.39 | 1.39 | 1.38 | 1.37 | 1.37 |
| 27 | 1.43 | 1.42 | 1.41 | 1.40 | 1.40 | 1.39 | 1.38 | 1.38 | 1.37 | 1.37 |
| 28 | 1.43 | 1.42 | 1.41 | 1.40 | 1.39 | 1.39 | 1.38 | 1.37 | 1.37 | 1.36 |
| 29 | 1.42 | 1.42 | 1.41 | 1.40 | 1.39 | 1.38 | 1.38 | 1.37 | 1.37 | 1.36 |
| 30 | 1.42 | 1.41 | 1.40 | 1.40 | 1.39 | 1.38 | 1.38 | 1.37 | 1.36 | 1.36 |
| 31 | 1.42 | 1.41 | 1.40 | 1.39 | 1.39 | 1.38 | 1.37 | 1.37 | 1.36 | 1.36 |
| 32 | 1.42 | 1.41 | 1.40 | 1.39 | 1.39 | 1.38 | 1.37 | 1.37 | 1.36 | 1.35 |
| 33 | 1.42 | 1.41 | 1.40 | 1.39 | 1.38 | 1.38 | 1.37 | 1.36 | 1.36 | 1.35 |
| 34 | 1.42 | 1.41 | 1.40 | 1.39 | 1.38 | 1.37 | 1.37 | 1.36 | 1.36 | 1.35 |
| 35 | 1.41 | 1.40 | 1.40 | 1.39 | 1.38 | 1.37 | 1.37 | 1.36 | 1.35 | 1.35 |
| 36 | 1.41 | 1.40 | 1.39 | 1.39 | 1.38 | 1.37 | 1.36 | 1.36 | 1.35 | 1.35 |
| 37 | 1.41 | 1.40 | 1.39 | 1.38 | 1.38 | 1.37 | 1.36 | 1.36 | 1.35 | 1.35 |
| 38 | 1.41 | 1.40 | 1.39 | 1.38 | 1.38 | 1.37 | 1.36 | 1.36 | 1.35 | 1.34 |
| 39 | 1.41 | 1.40 | 1.39 | 1.38 | 1.37 | 1.37 | 1.36 | 1.35 | 1.35 | 1.34 |
| 40 | 1.41 | 1.40 | 1.39 | 1.38 | 1.37 | 1.37 | 1.36 | 1.35 | 1.35 | 1.34 |

| $n_1 \backslash n_2$ | 31 | 32 | 33 | 34 | 35 | 36 | 37 | 38 | 39 | 40 |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| 1 | 1.71 | 1.71 | 1.71 | 1.70 | 1.70 | 1.70 | 1.70 | 1.70 | 1.69 | 1.69 |
| 2 | 1.69 | 1.69 | 1.69 | 1.68 | 1.68 | 1.68 | 1.68 | 1.67 | 1.67 | 1.67 |
| 3 | 1.64 | 1.63 | 1.63 | 1.63 | 1.63 | 1.62 | 1.62 | 1.62 | 1.62 | 1.61 |
| 4 | 1.59 | 1.59 | 1.59 | 1.58 | 1.58 | 1.58 | 1.58 | 1.57 | 1.57 | 1.57 |
| 5 | 1.56 | 1.55 | 1.55 | 1.55 | 1.54 | 1.54 | 1.54 | 1.54 | 1.53 | 1.53 |
| 6 | 1.53 | 1.53 | 1.52 | 1.52 | 1.52 | 1.51 | 1.51 | 1.51 | 1.51 | 1.50 |
| 7 | 1.51 | 1.50 | 1.50 | 1.50 | 1.49 | 1.49 | 1.49 | 1.49 | 1.48 | 1.48 |
| 8 | 1.49 | 1.48 | 1.48 | 1.48 | 1.47 | 1.47 | 1.47 | 1.47 | 1.46 | 1.46 |
| 9 | 1.47 | 1.47 | 1.47 | 1.46 | 1.46 | 1.46 | 1.45 | 1.45 | 1.45 | 1.45 |
| 10 | 1.46 | 1.45 | 1.45 | 1.45 | 1.44 | 1.44 | 1.44 | 1.44 | 1.43 | 1.43 |
| 11 | 1.45 | 1.44 | 1.44 | 1.44 | 1.43 | 1.43 | 1.43 | 1.42 | 1.42 | 1.42 |
| 12 | 1.44 | 1.43 | 1.43 | 1.43 | 1.42 | 1.42 | 1.42 | 1.41 | 1.41 | 1.41 |
| 13 | 1.43 | 1.42 | 1.42 | 1.42 | 1.41 | 1.41 | 1.41 | 1.40 | 1.40 | 1.40 |
| 14 | 1.42 | 1.42 | 1.41 | 1.41 | 1.41 | 1.40 | 1.40 | 1.40 | 1.39 | 1.39 |
| 15 | 1.41 | 1.41 | 1.40 | 1.40 | 1.40 | 1.39 | 1.39 | 1.39 | 1.39 | 1.38 |
| 16 | 1.41 | 1.40 | 1.40 | 1.39 | 1.39 | 1.39 | 1.38 | 1.38 | 1.38 | 1.38 |
| 17 | 1.40 | 1.40 | 1.39 | 1.39 | 1.39 | 1.38 | 1.38 | 1.38 | 1.37 | 1.37 |
| 18 | 1.39 | 1.39 | 1.39 | 1.38 | 1.38 | 1.38 | 1.37 | 1.37 | 1.37 | 1.36 |
| 19 | 1.39 | 1.39 | 1.38 | 1.38 | 1.37 | 1.37 | 1.37 | 1.36 | 1.36 | 1.36 |
| 20 | 1.39 | 1.38 | 1.38 | 1.37 | 1.37 | 1.37 | 1.36 | 1.36 | 1.36 | 1.35 |
| 21 | 1.38 | 1.38 | 1.37 | 1.37 | 1.37 | 1.36 | 1.36 | 1.36 | 1.35 | 1.35 |
| 22 | 1.38 | 1.37 | 1.37 | 1.37 | 1.36 | 1.36 | 1.35 | 1.35 | 1.35 | 1.35 |
| 23 | 1.37 | 1.37 | 1.37 | 1.36 | 1.36 | 1.35 | 1.35 | 1.35 | 1.35 | 1.34 |
| 24 | 1.37 | 1.37 | 1.36 | 1.36 | 1.35 | 1.35 | 1.35 | 1.34 | 1.34 | 1.34 |
| 25 | 1.37 | 1.36 | 1.36 | 1.35 | 1.35 | 1.35 | 1.34 | 1.34 | 1.34 | 1.34 |
| 26 | 1.36 | 1.36 | 1.36 | 1.35 | 1.35 | 1.34 | 1.34 | 1.34 | 1.34 | 1.33 |
| 27 | 1.36 | 1.36 | 1.35 | 1.35 | 1.35 | 1.34 | 1.34 | 1.34 | 1.33 | 1.33 |
| 28 | 1.36 | 1.35 | 1.35 | 1.35 | 1.34 | 1.34 | 1.34 | 1.33 | 1.33 | 1.33 |
| 29 | 1.36 | 1.35 | 1.35 | 1.34 | 1.34 | 1.34 | 1.33 | 1.33 | 1.33 | 1.32 |
| 30 | 1.35 | 1.35 | 1.35 | 1.34 | 1.34 | 1.33 | 1.33 | 1.33 | 1.32 | 1.32 |
| 31 | 1.35 | 1.35 | 1.34 | 1.34 | 1.34 | 1.33 | 1.33 | 1.33 | 1.32 | 1.32 |
| 32 | 1.35 | 1.35 | 1.34 | 1.34 | 1.33 | 1.33 | 1.33 | 1.32 | 1.32 | 1.32 |
| 33 | 1.35 | 1.34 | 1.34 | 1.34 | 1.33 | 1.33 | 1.32 | 1.32 | 1.32 | 1.31 |
| 34 | 1.35 | 1.34 | 1.34 | 1.33 | 1.33 | 1.33 | 1.32 | 1.32 | 1.32 | 1.31 |
| 35 | 1.34 | 1.34 | 1.34 | 1.33 | 1.33 | 1.32 | 1.32 | 1.32 | 1.31 | 1.31 |
| 36 | 1.34 | 1.34 | 1.33 | 1.33 | 1.33 | 1.32 | 1.32 | 1.32 | 1.31 | 1.31 |
| 37 | 1.34 | 1.34 | 1.33 | 1.33 | 1.32 | 1.32 | 1.32 | 1.31 | 1.31 | 1.31 |
| 38 | 1.34 | 1.34 | 1.33 | 1.33 | 1.32 | 1.32 | 1.32 | 1.31 | 1.31 | 1.31 |
| 39 | 1.34 | 1.33 | 1.33 | 1.32 | 1.32 | 1.32 | 1.31 | 1.31 | 1.31 | 1.30 |
| 40 | 1.34 | 1.33 | 1.33 | 1.32 | 1.32 | 1.32 | 1.31 | 1.31 | 1.31 | 1.30 |

## C.4.7 $F_{n_1,n_2,0.7}$

| $n_1 \backslash n_2$ | 1 | 2 | 3 | 4 | 5 | 6 | 7 | 8 | 9 | 10 |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| 1 | 3.85 | 1.92 | 1.56 | 1.41 | 1.33 | 1.28 | 1.25 | 1.22 | 1.20 | 1.19 |
| 2 | 5.05 | 2.33 | 1.84 | 1.65 | 1.54 | 1.48 | 1.43 | 1.40 | 1.38 | 1.36 |
| 3 | 5.55 | 2.48 | 1.93 | 1.72 | 1.60 | 1.53 | 1.48 | 1.44 | 1.41 | 1.39 |
| 4 | 5.82 | 2.56 | 1.98 | 1.75 | 1.62 | 1.55 | 1.49 | 1.46 | 1.43 | 1.40 |
| 5 | 6.00 | 2.60 | 2.01 | 1.77 | 1.64 | 1.56 | 1.50 | 1.46 | 1.43 | 1.41 |
| 6 | 6.11 | 2.64 | 2.02 | 1.78 | 1.64 | 1.56 | 1.50 | 1.46 | 1.43 | 1.41 |
| 7 | 6.20 | 2.66 | 2.03 | 1.78 | 1.65 | 1.56 | 1.51 | 1.46 | 1.43 | 1.41 |
| 8 | 6.26 | 2.68 | 2.04 | 1.79 | 1.65 | 1.56 | 1.51 | 1.46 | 1.43 | 1.40 |
| 9 | 6.31 | 2.69 | 2.05 | 1.79 | 1.65 | 1.57 | 1.51 | 1.46 | 1.43 | 1.40 |
| 10 | 6.35 | 2.70 | 2.06 | 1.80 | 1.65 | 1.57 | 1.51 | 1.46 | 1.43 | 1.40 |
| 11 | 6.39 | 2.71 | 2.06 | 1.80 | 1.66 | 1.57 | 1.51 | 1.46 | 1.43 | 1.40 |
| 12 | 6.41 | 2.72 | 2.06 | 1.80 | 1.66 | 1.57 | 1.51 | 1.46 | 1.43 | 1.40 |
| 13 | 6.44 | 2.72 | 2.07 | 1.80 | 1.66 | 1.57 | 1.50 | 1.46 | 1.42 | 1.40 |
| 14 | 6.46 | 2.73 | 2.07 | 1.80 | 1.66 | 1.57 | 1.50 | 1.46 | 1.42 | 1.40 |
| 15 | 6.48 | 2.73 | 2.07 | 1.80 | 1.66 | 1.57 | 1.50 | 1.46 | 1.42 | 1.39 |
| 16 | 6.50 | 2.74 | 2.07 | 1.80 | 1.66 | 1.57 | 1.50 | 1.46 | 1.42 | 1.39 |
| 17 | 6.51 | 2.74 | 2.08 | 1.81 | 1.66 | 1.57 | 1.50 | 1.46 | 1.42 | 1.39 |
| 18 | 6.52 | 2.74 | 2.08 | 1.81 | 1.66 | 1.57 | 1.50 | 1.46 | 1.42 | 1.39 |
| 19 | 6.53 | 2.75 | 2.08 | 1.81 | 1.66 | 1.57 | 1.50 | 1.46 | 1.42 | 1.39 |
| 20 | 6.54 | 2.75 | 2.08 | 1.81 | 1.66 | 1.57 | 1.50 | 1.46 | 1.42 | 1.39 |
| 21 | 6.55 | 2.75 | 2.08 | 1.81 | 1.66 | 1.57 | 1.50 | 1.45 | 1.42 | 1.39 |
| 22 | 6.56 | 2.75 | 2.08 | 1.81 | 1.66 | 1.57 | 1.50 | 1.45 | 1.42 | 1.39 |
| 23 | 6.57 | 2.76 | 2.08 | 1.81 | 1.66 | 1.57 | 1.50 | 1.45 | 1.42 | 1.39 |
| 24 | 6.57 | 2.76 | 2.08 | 1.81 | 1.66 | 1.57 | 1.50 | 1.45 | 1.42 | 1.39 |
| 25 | 6.58 | 2.76 | 2.08 | 1.81 | 1.66 | 1.57 | 1.50 | 1.45 | 1.42 | 1.39 |
| 26 | 6.59 | 2.76 | 2.08 | 1.81 | 1.66 | 1.57 | 1.50 | 1.45 | 1.42 | 1.39 |
| 27 | 6.59 | 2.76 | 2.09 | 1.81 | 1.66 | 1.57 | 1.50 | 1.45 | 1.42 | 1.39 |
| 28 | 6.60 | 2.76 | 2.09 | 1.81 | 1.66 | 1.57 | 1.50 | 1.45 | 1.42 | 1.39 |
| 29 | 6.60 | 2.76 | 2.09 | 1.81 | 1.66 | 1.57 | 1.50 | 1.45 | 1.41 | 1.39 |
| 30 | 6.61 | 2.77 | 2.09 | 1.81 | 1.66 | 1.57 | 1.50 | 1.45 | 1.41 | 1.39 |
| 31 | 6.61 | 2.77 | 2.09 | 1.81 | 1.66 | 1.57 | 1.50 | 1.45 | 1.41 | 1.38 |
| 32 | 6.61 | 2.77 | 2.09 | 1.81 | 1.66 | 1.57 | 1.50 | 1.45 | 1.41 | 1.38 |
| 33 | 6.62 | 2.77 | 2.09 | 1.81 | 1.66 | 1.57 | 1.50 | 1.45 | 1.41 | 1.38 |
| 34 | 6.62 | 2.77 | 2.09 | 1.81 | 1.66 | 1.57 | 1.50 | 1.45 | 1.41 | 1.38 |
| 35 | 6.62 | 2.77 | 2.09 | 1.81 | 1.66 | 1.57 | 1.50 | 1.45 | 1.41 | 1.38 |
| 36 | 6.63 | 2.77 | 2.09 | 1.81 | 1.66 | 1.57 | 1.50 | 1.45 | 1.41 | 1.38 |
| 37 | 6.63 | 2.77 | 2.09 | 1.81 | 1.66 | 1.57 | 1.50 | 1.45 | 1.41 | 1.38 |
| 38 | 6.63 | 2.77 | 2.09 | 1.81 | 1.66 | 1.57 | 1.50 | 1.45 | 1.41 | 1.38 |
| 39 | 6.63 | 2.77 | 2.09 | 1.81 | 1.66 | 1.57 | 1.50 | 1.45 | 1.41 | 1.38 |
| 40 | 6.64 | 2.77 | 2.09 | 1.81 | 1.66 | 1.57 | 1.50 | 1.45 | 1.41 | 1.38 |

| $n_1 \backslash n_2$ | 11 | 12 | 13 | 14 | 15 | 16 | 17 | 18 | 19 | 20 |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| 1 | 1.18 | 1.17 | 1.16 | 1.15 | 1.15 | 1.14 | 1.14 | 1.13 | 1.13 | 1.13 |
| 2 | 1.34 | 1.33 | 1.32 | 1.31 | 1.30 | 1.29 | 1.29 | 1.28 | 1.28 | 1.27 |
| 3 | 1.38 | 1.36 | 1.35 | 1.34 | 1.33 | 1.32 | 1.32 | 1.31 | 1.31 | 1.30 |
| 4 | 1.39 | 1.37 | 1.36 | 1.35 | 1.34 | 1.33 | 1.32 | 1.32 | 1.31 | 1.31 |
| 5 | 1.39 | 1.37 | 1.36 | 1.35 | 1.34 | 1.33 | 1.32 | 1.31 | 1.31 | 1.30 |
| 6 | 1.39 | 1.37 | 1.36 | 1.34 | 1.33 | 1.33 | 1.32 | 1.31 | 1.31 | 1.30 |
| 7 | 1.39 | 1.37 | 1.35 | 1.34 | 1.33 | 1.32 | 1.32 | 1.31 | 1.30 | 1.30 |
| 8 | 1.38 | 1.37 | 1.35 | 1.34 | 1.33 | 1.32 | 1.31 | 1.30 | 1.30 | 1.29 |
| 9 | 1.38 | 1.36 | 1.35 | 1.34 | 1.33 | 1.32 | 1.31 | 1.30 | 1.29 | 1.29 |
| 10 | 1.38 | 1.36 | 1.35 | 1.33 | 1.32 | 1.31 | 1.31 | 1.30 | 1.29 | 1.29 |
| 11 | 1.38 | 1.36 | 1.34 | 1.33 | 1.32 | 1.31 | 1.30 | 1.29 | 1.29 | 1.28 |
| 12 | 1.38 | 1.36 | 1.34 | 1.33 | 1.32 | 1.31 | 1.30 | 1.29 | 1.29 | 1.28 |
| 13 | 1.37 | 1.36 | 1.34 | 1.33 | 1.32 | 1.31 | 1.30 | 1.29 | 1.28 | 1.28 |
| 14 | 1.37 | 1.35 | 1.34 | 1.33 | 1.31 | 1.30 | 1.30 | 1.29 | 1.28 | 1.27 |
| 15 | 1.37 | 1.35 | 1.34 | 1.32 | 1.31 | 1.30 | 1.29 | 1.29 | 1.28 | 1.27 |
| 16 | 1.37 | 1.35 | 1.34 | 1.32 | 1.31 | 1.30 | 1.29 | 1.28 | 1.28 | 1.27 |
| 17 | 1.37 | 1.35 | 1.33 | 1.32 | 1.31 | 1.30 | 1.29 | 1.28 | 1.27 | 1.27 |
| 18 | 1.37 | 1.35 | 1.33 | 1.32 | 1.31 | 1.30 | 1.29 | 1.28 | 1.27 | 1.27 |
| 19 | 1.37 | 1.35 | 1.33 | 1.32 | 1.31 | 1.30 | 1.29 | 1.28 | 1.27 | 1.26 |
| 20 | 1.37 | 1.35 | 1.33 | 1.32 | 1.31 | 1.30 | 1.29 | 1.28 | 1.27 | 1.26 |
| 21 | 1.37 | 1.35 | 1.33 | 1.32 | 1.30 | 1.29 | 1.28 | 1.28 | 1.27 | 1.26 |
| 22 | 1.37 | 1.35 | 1.33 | 1.32 | 1.30 | 1.29 | 1.28 | 1.27 | 1.27 | 1.26 |
| 23 | 1.36 | 1.35 | 1.33 | 1.31 | 1.30 | 1.29 | 1.28 | 1.27 | 1.27 | 1.26 |
| 24 | 1.36 | 1.34 | 1.33 | 1.31 | 1.30 | 1.29 | 1.28 | 1.27 | 1.27 | 1.26 |
| 25 | 1.36 | 1.34 | 1.33 | 1.31 | 1.30 | 1.29 | 1.28 | 1.27 | 1.26 | 1.26 |
| 26 | 1.36 | 1.34 | 1.33 | 1.31 | 1.30 | 1.29 | 1.28 | 1.27 | 1.26 | 1.26 |
| 27 | 1.36 | 1.34 | 1.33 | 1.31 | 1.30 | 1.29 | 1.28 | 1.27 | 1.26 | 1.26 |
| 28 | 1.36 | 1.34 | 1.33 | 1.31 | 1.30 | 1.29 | 1.28 | 1.27 | 1.26 | 1.25 |
| 29 | 1.36 | 1.34 | 1.32 | 1.31 | 1.30 | 1.29 | 1.28 | 1.27 | 1.26 | 1.25 |
| 30 | 1.36 | 1.34 | 1.32 | 1.31 | 1.30 | 1.29 | 1.28 | 1.27 | 1.26 | 1.25 |
| 31 | 1.36 | 1.34 | 1.32 | 1.31 | 1.30 | 1.29 | 1.28 | 1.27 | 1.26 | 1.25 |
| 32 | 1.36 | 1.34 | 1.32 | 1.31 | 1.30 | 1.28 | 1.28 | 1.27 | 1.26 | 1.25 |
| 33 | 1.36 | 1.34 | 1.32 | 1.31 | 1.30 | 1.28 | 1.27 | 1.27 | 1.26 | 1.25 |
| 34 | 1.36 | 1.34 | 1.32 | 1.31 | 1.29 | 1.28 | 1.27 | 1.27 | 1.26 | 1.25 |
| 35 | 1.36 | 1.34 | 1.32 | 1.31 | 1.29 | 1.28 | 1.27 | 1.26 | 1.26 | 1.25 |
| 36 | 1.36 | 1.34 | 1.32 | 1.31 | 1.29 | 1.28 | 1.27 | 1.26 | 1.26 | 1.25 |
| 37 | 1.36 | 1.34 | 1.32 | 1.31 | 1.29 | 1.28 | 1.27 | 1.26 | 1.26 | 1.25 |
| 38 | 1.36 | 1.34 | 1.32 | 1.31 | 1.29 | 1.28 | 1.27 | 1.26 | 1.26 | 1.25 |
| 39 | 1.36 | 1.34 | 1.32 | 1.31 | 1.29 | 1.28 | 1.27 | 1.26 | 1.25 | 1.25 |
| 40 | 1.36 | 1.34 | 1.32 | 1.31 | 1.29 | 1.28 | 1.27 | 1.26 | 1.25 | 1.25 |

| $n_1 \backslash n_2$ | 21 | 22 | 23 | 24 | 25 | 26 | 27 | 28 | 29 | 30 |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| 1 | 1.12 | 1.12 | 1.12 | 1.12 | 1.12 | 1.11 | 1.11 | 1.11 | 1.11 | 1.11 |
| 2 | 1.27 | 1.27 | 1.26 | 1.26 | 1.26 | 1.26 | 1.25 | 1.25 | 1.25 | 1.25 |
| 3 | 1.30 | 1.29 | 1.29 | 1.29 | 1.28 | 1.28 | 1.28 | 1.28 | 1.27 | 1.27 |
| 4 | 1.30 | 1.30 | 1.29 | 1.29 | 1.29 | 1.28 | 1.28 | 1.28 | 1.28 | 1.27 |
| 5 | 1.30 | 1.29 | 1.29 | 1.29 | 1.28 | 1.28 | 1.28 | 1.28 | 1.27 | 1.27 |
| 6 | 1.30 | 1.29 | 1.29 | 1.28 | 1.28 | 1.28 | 1.27 | 1.27 | 1.27 | 1.27 |
| 7 | 1.29 | 1.29 | 1.28 | 1.28 | 1.28 | 1.27 | 1.27 | 1.27 | 1.26 | 1.26 |
| 8 | 1.29 | 1.28 | 1.28 | 1.27 | 1.27 | 1.27 | 1.26 | 1.26 | 1.26 | 1.26 |
| 9 | 1.28 | 1.28 | 1.27 | 1.27 | 1.27 | 1.26 | 1.26 | 1.26 | 1.25 | 1.25 |
| 10 | 1.28 | 1.27 | 1.27 | 1.27 | 1.26 | 1.26 | 1.26 | 1.25 | 1.25 | 1.25 |
| 11 | 1.28 | 1.27 | 1.27 | 1.26 | 1.26 | 1.26 | 1.25 | 1.25 | 1.25 | 1.24 |
| 12 | 1.27 | 1.27 | 1.26 | 1.26 | 1.26 | 1.25 | 1.25 | 1.25 | 1.24 | 1.24 |
| 13 | 1.27 | 1.27 | 1.26 | 1.26 | 1.25 | 1.25 | 1.25 | 1.24 | 1.24 | 1.24 |
| 14 | 1.27 | 1.26 | 1.26 | 1.25 | 1.25 | 1.25 | 1.24 | 1.24 | 1.24 | 1.23 |
| 15 | 1.27 | 1.26 | 1.26 | 1.25 | 1.25 | 1.24 | 1.24 | 1.24 | 1.23 | 1.23 |
| 16 | 1.26 | 1.26 | 1.25 | 1.25 | 1.25 | 1.24 | 1.24 | 1.23 | 1.23 | 1.23 |
| 17 | 1.26 | 1.26 | 1.25 | 1.25 | 1.24 | 1.24 | 1.24 | 1.23 | 1.23 | 1.23 |
| 18 | 1.26 | 1.26 | 1.25 | 1.25 | 1.24 | 1.24 | 1.23 | 1.23 | 1.23 | 1.22 |
| 19 | 1.26 | 1.25 | 1.25 | 1.24 | 1.24 | 1.24 | 1.23 | 1.23 | 1.23 | 1.22 |
| 20 | 1.26 | 1.25 | 1.25 | 1.24 | 1.24 | 1.23 | 1.23 | 1.23 | 1.22 | 1.22 |
| 21 | 1.26 | 1.25 | 1.25 | 1.24 | 1.24 | 1.23 | 1.23 | 1.23 | 1.22 | 1.22 |
| 22 | 1.25 | 1.25 | 1.24 | 1.24 | 1.24 | 1.23 | 1.23 | 1.22 | 1.22 | 1.22 |
| 23 | 1.25 | 1.25 | 1.24 | 1.24 | 1.23 | 1.23 | 1.23 | 1.22 | 1.22 | 1.22 |
| 24 | 1.25 | 1.25 | 1.24 | 1.24 | 1.23 | 1.23 | 1.22 | 1.22 | 1.22 | 1.21 |
| 25 | 1.25 | 1.25 | 1.24 | 1.24 | 1.23 | 1.23 | 1.22 | 1.22 | 1.22 | 1.21 |
| 26 | 1.25 | 1.24 | 1.24 | 1.23 | 1.23 | 1.23 | 1.22 | 1.22 | 1.22 | 1.21 |
| 27 | 1.25 | 1.24 | 1.24 | 1.23 | 1.23 | 1.22 | 1.22 | 1.22 | 1.21 | 1.21 |
| 28 | 1.25 | 1.24 | 1.24 | 1.23 | 1.23 | 1.22 | 1.22 | 1.22 | 1.21 | 1.21 |
| 29 | 1.25 | 1.24 | 1.24 | 1.23 | 1.23 | 1.22 | 1.22 | 1.22 | 1.21 | 1.21 |
| 30 | 1.25 | 1.24 | 1.24 | 1.23 | 1.23 | 1.22 | 1.22 | 1.21 | 1.21 | 1.21 |
| 31 | 1.25 | 1.24 | 1.23 | 1.23 | 1.23 | 1.22 | 1.22 | 1.21 | 1.21 | 1.21 |
| 32 | 1.25 | 1.24 | 1.23 | 1.23 | 1.22 | 1.22 | 1.22 | 1.21 | 1.21 | 1.21 |
| 33 | 1.24 | 1.24 | 1.23 | 1.23 | 1.22 | 1.22 | 1.22 | 1.21 | 1.21 | 1.21 |
| 34 | 1.24 | 1.24 | 1.23 | 1.23 | 1.22 | 1.22 | 1.21 | 1.21 | 1.21 | 1.20 |
| 35 | 1.24 | 1.24 | 1.23 | 1.23 | 1.22 | 1.22 | 1.21 | 1.21 | 1.21 | 1.20 |
| 36 | 1.24 | 1.24 | 1.23 | 1.23 | 1.22 | 1.22 | 1.21 | 1.21 | 1.21 | 1.20 |
| 37 | 1.24 | 1.24 | 1.23 | 1.23 | 1.22 | 1.22 | 1.21 | 1.21 | 1.21 | 1.20 |
| 38 | 1.24 | 1.24 | 1.23 | 1.23 | 1.22 | 1.22 | 1.21 | 1.21 | 1.21 | 1.20 |
| 39 | 1.24 | 1.23 | 1.23 | 1.22 | 1.22 | 1.22 | 1.21 | 1.21 | 1.20 | 1.20 |
| 40 | 1.24 | 1.23 | 1.23 | 1.22 | 1.22 | 1.22 | 1.21 | 1.21 | 1.20 | 1.20 |

| $n_1 \backslash n_2$ | 31 | 32 | 33 | 34 | 35 | 36 | 37 | 38 | 39 | 40 |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| 1 | 1.11 | 1.10 | 1.10 | 1.10 | 1.10 | 1.10 | 1.10 | 1.10 | 1.10 | 1.10 |
| 2 | 1.25 | 1.25 | 1.24 | 1.24 | 1.24 | 1.24 | 1.24 | 1.24 | 1.24 | 1.24 |
| 3 | 1.27 | 1.27 | 1.27 | 1.27 | 1.26 | 1.26 | 1.26 | 1.26 | 1.26 | 1.26 |
| 4 | 1.27 | 1.27 | 1.27 | 1.27 | 1.27 | 1.26 | 1.26 | 1.26 | 1.26 | 1.26 |
| 5 | 1.27 | 1.27 | 1.27 | 1.26 | 1.26 | 1.26 | 1.26 | 1.26 | 1.26 | 1.26 |
| 6 | 1.26 | 1.26 | 1.26 | 1.26 | 1.26 | 1.26 | 1.25 | 1.25 | 1.25 | 1.25 |
| 7 | 1.26 | 1.26 | 1.25 | 1.25 | 1.25 | 1.25 | 1.25 | 1.25 | 1.25 | 1.24 |
| 8 | 1.25 | 1.25 | 1.25 | 1.25 | 1.25 | 1.24 | 1.24 | 1.24 | 1.24 | 1.24 |
| 9 | 1.25 | 1.25 | 1.25 | 1.24 | 1.24 | 1.24 | 1.24 | 1.24 | 1.23 | 1.23 |
| 10 | 1.25 | 1.24 | 1.24 | 1.24 | 1.24 | 1.24 | 1.23 | 1.23 | 1.23 | 1.23 |
| 11 | 1.24 | 1.24 | 1.24 | 1.23 | 1.23 | 1.23 | 1.23 | 1.23 | 1.23 | 1.22 |
| 12 | 1.24 | 1.24 | 1.23 | 1.23 | 1.23 | 1.23 | 1.23 | 1.22 | 1.22 | 1.22 |
| 13 | 1.23 | 1.23 | 1.23 | 1.23 | 1.23 | 1.22 | 1.22 | 1.22 | 1.22 | 1.22 |
| 14 | 1.23 | 1.23 | 1.23 | 1.22 | 1.22 | 1.22 | 1.22 | 1.22 | 1.22 | 1.21 |
| 15 | 1.23 | 1.23 | 1.22 | 1.22 | 1.22 | 1.22 | 1.22 | 1.21 | 1.21 | 1.21 |
| 16 | 1.23 | 1.22 | 1.22 | 1.22 | 1.22 | 1.22 | 1.21 | 1.21 | 1.21 | 1.21 |
| 17 | 1.22 | 1.22 | 1.22 | 1.22 | 1.21 | 1.21 | 1.21 | 1.21 | 1.21 | 1.21 |
| 18 | 1.22 | 1.22 | 1.22 | 1.21 | 1.21 | 1.21 | 1.21 | 1.21 | 1.21 | 1.20 |
| 19 | 1.22 | 1.22 | 1.22 | 1.21 | 1.21 | 1.21 | 1.21 | 1.20 | 1.20 | 1.20 |
| 20 | 1.22 | 1.22 | 1.21 | 1.21 | 1.21 | 1.21 | 1.20 | 1.20 | 1.20 | 1.20 |
| 21 | 1.22 | 1.21 | 1.21 | 1.21 | 1.21 | 1.20 | 1.20 | 1.20 | 1.20 | 1.20 |
| 22 | 1.21 | 1.21 | 1.21 | 1.21 | 1.21 | 1.20 | 1.20 | 1.20 | 1.20 | 1.20 |
| 23 | 1.21 | 1.21 | 1.21 | 1.21 | 1.20 | 1.20 | 1.20 | 1.20 | 1.20 | 1.19 |
| 24 | 1.21 | 1.21 | 1.21 | 1.20 | 1.20 | 1.20 | 1.20 | 1.20 | 1.19 | 1.19 |
| 25 | 1.21 | 1.21 | 1.21 | 1.20 | 1.20 | 1.20 | 1.20 | 1.19 | 1.19 | 1.19 |
| 26 | 1.21 | 1.21 | 1.20 | 1.20 | 1.20 | 1.20 | 1.20 | 1.19 | 1.19 | 1.19 |
| 27 | 1.21 | 1.21 | 1.20 | 1.20 | 1.20 | 1.20 | 1.19 | 1.19 | 1.19 | 1.19 |
| 28 | 1.21 | 1.20 | 1.20 | 1.20 | 1.20 | 1.20 | 1.19 | 1.19 | 1.19 | 1.19 |
| 29 | 1.21 | 1.20 | 1.20 | 1.20 | 1.20 | 1.19 | 1.19 | 1.19 | 1.19 | 1.19 |
| 30 | 1.21 | 1.20 | 1.20 | 1.20 | 1.20 | 1.19 | 1.19 | 1.19 | 1.19 | 1.19 |
| 31 | 1.20 | 1.20 | 1.20 | 1.20 | 1.19 | 1.19 | 1.19 | 1.19 | 1.19 | 1.18 |
| 32 | 1.20 | 1.20 | 1.20 | 1.20 | 1.19 | 1.19 | 1.19 | 1.19 | 1.19 | 1.18 |
| 33 | 1.20 | 1.20 | 1.20 | 1.19 | 1.19 | 1.19 | 1.19 | 1.19 | 1.18 | 1.18 |
| 34 | 1.20 | 1.20 | 1.20 | 1.19 | 1.19 | 1.19 | 1.19 | 1.19 | 1.18 | 1.18 |
| 35 | 1.20 | 1.20 | 1.20 | 1.19 | 1.19 | 1.19 | 1.19 | 1.18 | 1.18 | 1.18 |
| 36 | 1.20 | 1.20 | 1.19 | 1.19 | 1.19 | 1.19 | 1.19 | 1.18 | 1.18 | 1.18 |
| 37 | 1.20 | 1.20 | 1.19 | 1.19 | 1.19 | 1.19 | 1.18 | 1.18 | 1.18 | 1.18 |
| 38 | 1.20 | 1.20 | 1.19 | 1.19 | 1.19 | 1.19 | 1.18 | 1.18 | 1.18 | 1.18 |
| 39 | 1.20 | 1.20 | 1.19 | 1.19 | 1.19 | 1.19 | 1.18 | 1.18 | 1.18 | 1.18 |
| 40 | 1.20 | 1.19 | 1.19 | 1.19 | 1.19 | 1.18 | 1.18 | 1.18 | 1.18 | 1.18 |

## C.4.8 $F_{n_1,n_2,0.6}$

| $n_1 \backslash n_2$ | 1 | 2 | 3 | 4 | 5 | 6 | 7 | 8 | 9 | 10 |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| 1 | 1.89 | 1.12 | 0.95 | 0.88 | 0.84 | 0.82 | 0.80 | 0.79 | 0.78 | 0.77 |
| 2 | 2.62 | 1.50 | 1.26 | 1.16 | 1.10 | 1.07 | 1.04 | 1.02 | 1.01 | 1.00 |
| 3 | 2.92 | 1.64 | 1.37 | 1.26 | 1.19 | 1.15 | 1.13 | 1.11 | 1.09 | 1.08 |
| 4 | 3.09 | 1.71 | 1.43 | 1.30 | 1.24 | 1.20 | 1.17 | 1.14 | 1.13 | 1.12 |
| 5 | 3.19 | 1.76 | 1.46 | 1.33 | 1.26 | 1.22 | 1.19 | 1.17 | 1.15 | 1.14 |
| 6 | 3.26 | 1.79 | 1.48 | 1.35 | 1.28 | 1.24 | 1.20 | 1.18 | 1.16 | 1.15 |
| 7 | 3.31 | 1.81 | 1.50 | 1.37 | 1.29 | 1.25 | 1.21 | 1.19 | 1.17 | 1.16 |
| 8 | 3.35 | 1.83 | 1.51 | 1.38 | 1.30 | 1.26 | 1.22 | 1.20 | 1.18 | 1.16 |
| 9 | 3.38 | 1.84 | 1.52 | 1.39 | 1.31 | 1.26 | 1.23 | 1.20 | 1.18 | 1.17 |
| 10 | 3.41 | 1.85 | 1.53 | 1.39 | 1.32 | 1.27 | 1.23 | 1.21 | 1.19 | 1.17 |
| 11 | 3.43 | 1.86 | 1.54 | 1.40 | 1.32 | 1.27 | 1.24 | 1.21 | 1.19 | 1.18 |
| 12 | 3.44 | 1.87 | 1.54 | 1.40 | 1.32 | 1.27 | 1.24 | 1.21 | 1.19 | 1.18 |
| 13 | 3.46 | 1.88 | 1.55 | 1.41 | 1.33 | 1.28 | 1.24 | 1.22 | 1.20 | 1.18 |
| 14 | 3.47 | 1.88 | 1.55 | 1.41 | 1.33 | 1.28 | 1.24 | 1.22 | 1.20 | 1.18 |
| 15 | 3.48 | 1.89 | 1.55 | 1.41 | 1.33 | 1.28 | 1.25 | 1.22 | 1.20 | 1.18 |
| 16 | 3.49 | 1.89 | 1.56 | 1.41 | 1.33 | 1.28 | 1.25 | 1.22 | 1.20 | 1.19 |
| 17 | 3.50 | 1.89 | 1.56 | 1.42 | 1.34 | 1.28 | 1.25 | 1.22 | 1.20 | 1.19 |
| 18 | 3.50 | 1.90 | 1.56 | 1.42 | 1.34 | 1.29 | 1.25 | 1.22 | 1.20 | 1.19 |
| 19 | 3.51 | 1.90 | 1.56 | 1.42 | 1.34 | 1.29 | 1.25 | 1.22 | 1.20 | 1.19 |
| 20 | 3.52 | 1.90 | 1.57 | 1.42 | 1.34 | 1.29 | 1.25 | 1.23 | 1.21 | 1.19 |
| 21 | 3.52 | 1.91 | 1.57 | 1.42 | 1.34 | 1.29 | 1.25 | 1.23 | 1.21 | 1.19 |
| 22 | 3.53 | 1.91 | 1.57 | 1.42 | 1.34 | 1.29 | 1.25 | 1.23 | 1.21 | 1.19 |
| 23 | 3.53 | 1.91 | 1.57 | 1.42 | 1.34 | 1.29 | 1.25 | 1.23 | 1.21 | 1.19 |
| 24 | 3.54 | 1.91 | 1.57 | 1.43 | 1.34 | 1.29 | 1.26 | 1.23 | 1.21 | 1.19 |
| 25 | 3.54 | 1.91 | 1.57 | 1.43 | 1.34 | 1.29 | 1.26 | 1.23 | 1.21 | 1.19 |
| 26 | 3.54 | 1.91 | 1.57 | 1.43 | 1.35 | 1.29 | 1.26 | 1.23 | 1.21 | 1.19 |
| 27 | 3.55 | 1.92 | 1.57 | 1.43 | 1.35 | 1.29 | 1.26 | 1.23 | 1.21 | 1.19 |
| 28 | 3.55 | 1.92 | 1.58 | 1.43 | 1.35 | 1.29 | 1.26 | 1.23 | 1.21 | 1.19 |
| 29 | 3.55 | 1.92 | 1.58 | 1.43 | 1.35 | 1.29 | 1.26 | 1.23 | 1.21 | 1.19 |
| 30 | 3.55 | 1.92 | 1.58 | 1.43 | 1.35 | 1.29 | 1.26 | 1.23 | 1.21 | 1.19 |
| 31 | 3.56 | 1.92 | 1.58 | 1.43 | 1.35 | 1.30 | 1.26 | 1.23 | 1.21 | 1.19 |
| 32 | 3.56 | 1.92 | 1.58 | 1.43 | 1.35 | 1.30 | 1.26 | 1.23 | 1.21 | 1.19 |
| 33 | 3.56 | 1.92 | 1.58 | 1.43 | 1.35 | 1.30 | 1.26 | 1.23 | 1.21 | 1.19 |
| 34 | 3.56 | 1.92 | 1.58 | 1.43 | 1.35 | 1.30 | 1.26 | 1.23 | 1.21 | 1.19 |
| 35 | 3.57 | 1.92 | 1.58 | 1.43 | 1.35 | 1.30 | 1.26 | 1.23 | 1.21 | 1.19 |
| 36 | 3.57 | 1.92 | 1.58 | 1.43 | 1.35 | 1.30 | 1.26 | 1.23 | 1.21 | 1.19 |
| 37 | 3.57 | 1.93 | 1.58 | 1.43 | 1.35 | 1.30 | 1.26 | 1.23 | 1.21 | 1.19 |
| 38 | 3.57 | 1.93 | 1.58 | 1.43 | 1.35 | 1.30 | 1.26 | 1.23 | 1.21 | 1.20 |
| 39 | 3.57 | 1.93 | 1.58 | 1.43 | 1.35 | 1.30 | 1.26 | 1.23 | 1.21 | 1.20 |
| 40 | 3.58 | 1.93 | 1.58 | 1.43 | 1.35 | 1.30 | 1.26 | 1.23 | 1.21 | 1.20 |

| $n_1 \backslash n_2$ | 11 | 12 | 13 | 14 | 15 | 16 | 17 | 18 | 19 | 20 |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| 1 | 0.76 | 0.76 | 0.75 | 0.75 | 0.75 | 0.74 | 0.74 | 0.74 | 0.74 | 0.73 |
| 2 | 0.99 | 0.98 | 0.98 | 0.97 | 0.97 | 0.97 | 0.96 | 0.96 | 0.96 | 0.95 |
| 3 | 1.07 | 1.06 | 1.05 | 1.05 | 1.04 | 1.04 | 1.04 | 1.03 | 1.03 | 1.03 |
| 4 | 1.10 | 1.10 | 1.09 | 1.08 | 1.08 | 1.07 | 1.07 | 1.07 | 1.06 | 1.06 |
| 5 | 1.13 | 1.12 | 1.11 | 1.10 | 1.10 | 1.09 | 1.09 | 1.08 | 1.08 | 1.08 |
| 6 | 1.14 | 1.13 | 1.12 | 1.11 | 1.11 | 1.10 | 1.10 | 1.10 | 1.09 | 1.09 |
| 7 | 1.15 | 1.14 | 1.13 | 1.12 | 1.12 | 1.11 | 1.11 | 1.10 | 1.10 | 1.10 |
| 8 | 1.15 | 1.14 | 1.14 | 1.13 | 1.12 | 1.12 | 1.11 | 1.11 | 1.10 | 1.10 |
| 9 | 1.16 | 1.15 | 1.14 | 1.13 | 1.13 | 1.12 | 1.12 | 1.11 | 1.11 | 1.10 |
| 10 | 1.16 | 1.15 | 1.14 | 1.14 | 1.13 | 1.12 | 1.12 | 1.11 | 1.11 | 1.11 |
| 11 | 1.16 | 1.15 | 1.15 | 1.14 | 1.13 | 1.13 | 1.12 | 1.12 | 1.11 | 1.11 |
| 12 | 1.17 | 1.16 | 1.15 | 1.14 | 1.13 | 1.13 | 1.12 | 1.12 | 1.11 | 1.11 |
| 13 | 1.17 | 1.16 | 1.15 | 1.14 | 1.14 | 1.13 | 1.12 | 1.12 | 1.12 | 1.11 |
| 14 | 1.17 | 1.16 | 1.15 | 1.14 | 1.14 | 1.13 | 1.13 | 1.12 | 1.12 | 1.11 |
| 15 | 1.17 | 1.16 | 1.15 | 1.14 | 1.14 | 1.13 | 1.13 | 1.12 | 1.12 | 1.11 |
| 16 | 1.17 | 1.16 | 1.15 | 1.14 | 1.14 | 1.13 | 1.13 | 1.12 | 1.12 | 1.11 |
| 17 | 1.17 | 1.16 | 1.15 | 1.15 | 1.14 | 1.13 | 1.13 | 1.12 | 1.12 | 1.12 |
| 18 | 1.17 | 1.16 | 1.15 | 1.15 | 1.14 | 1.13 | 1.13 | 1.12 | 1.12 | 1.12 |
| 19 | 1.18 | 1.16 | 1.15 | 1.15 | 1.14 | 1.13 | 1.13 | 1.12 | 1.12 | 1.12 |
| 20 | 1.18 | 1.16 | 1.16 | 1.15 | 1.14 | 1.13 | 1.13 | 1.12 | 1.12 | 1.12 |
| 21 | 1.18 | 1.17 | 1.16 | 1.15 | 1.14 | 1.14 | 1.13 | 1.12 | 1.12 | 1.12 |
| 22 | 1.18 | 1.17 | 1.16 | 1.15 | 1.14 | 1.14 | 1.13 | 1.13 | 1.12 | 1.12 |
| 23 | 1.18 | 1.17 | 1.16 | 1.15 | 1.14 | 1.14 | 1.13 | 1.13 | 1.12 | 1.12 |
| 24 | 1.18 | 1.17 | 1.16 | 1.15 | 1.14 | 1.14 | 1.13 | 1.13 | 1.12 | 1.12 |
| 25 | 1.18 | 1.17 | 1.16 | 1.15 | 1.14 | 1.14 | 1.13 | 1.13 | 1.12 | 1.12 |
| 26 | 1.18 | 1.17 | 1.16 | 1.15 | 1.14 | 1.14 | 1.13 | 1.13 | 1.12 | 1.12 |
| 27 | 1.18 | 1.17 | 1.16 | 1.15 | 1.14 | 1.14 | 1.13 | 1.13 | 1.12 | 1.12 |
| 28 | 1.18 | 1.17 | 1.16 | 1.15 | 1.14 | 1.14 | 1.13 | 1.13 | 1.12 | 1.12 |
| 29 | 1.18 | 1.17 | 1.16 | 1.15 | 1.14 | 1.14 | 1.13 | 1.13 | 1.12 | 1.12 |
| 30 | 1.18 | 1.17 | 1.16 | 1.15 | 1.14 | 1.14 | 1.13 | 1.13 | 1.12 | 1.12 |
| 31 | 1.18 | 1.17 | 1.16 | 1.15 | 1.14 | 1.14 | 1.13 | 1.13 | 1.12 | 1.12 |
| 32 | 1.18 | 1.17 | 1.16 | 1.15 | 1.14 | 1.14 | 1.13 | 1.13 | 1.12 | 1.12 |
| 33 | 1.18 | 1.17 | 1.16 | 1.15 | 1.14 | 1.14 | 1.13 | 1.13 | 1.12 | 1.12 |
| 34 | 1.18 | 1.17 | 1.16 | 1.15 | 1.14 | 1.14 | 1.13 | 1.13 | 1.12 | 1.12 |
| 35 | 1.18 | 1.17 | 1.16 | 1.15 | 1.14 | 1.14 | 1.13 | 1.13 | 1.12 | 1.12 |
| 36 | 1.18 | 1.17 | 1.16 | 1.15 | 1.14 | 1.14 | 1.13 | 1.13 | 1.12 | 1.12 |
| 37 | 1.18 | 1.17 | 1.16 | 1.15 | 1.14 | 1.14 | 1.13 | 1.13 | 1.12 | 1.12 |
| 38 | 1.18 | 1.17 | 1.16 | 1.15 | 1.14 | 1.14 | 1.13 | 1.13 | 1.12 | 1.12 |
| 39 | 1.18 | 1.17 | 1.16 | 1.15 | 1.14 | 1.14 | 1.13 | 1.13 | 1.12 | 1.12 |
| 40 | 1.18 | 1.17 | 1.16 | 1.15 | 1.14 | 1.14 | 1.13 | 1.13 | 1.12 | 1.12 |

| $n_1 \backslash n_2$ | 21 | 22 | 23 | 24 | 25 | 26 | 27 | 28 | 29 | 30 |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| 1 | 0.73 | 0.73 | 0.73 | 0.73 | 0.73 | 0.73 | 0.73 | 0.73 | 0.72 | 0.72 |
| 2 | 0.95 | 0.95 | 0.95 | 0.95 | 0.95 | 0.94 | 0.94 | 0.94 | 0.94 | 0.94 |
| 3 | 1.02 | 1.02 | 1.02 | 1.02 | 1.02 | 1.01 | 1.01 | 1.01 | 1.01 | 1.01 |
| 4 | 1.06 | 1.05 | 1.05 | 1.05 | 1.05 | 1.05 | 1.05 | 1.04 | 1.04 | 1.04 |
| 5 | 1.07 | 1.07 | 1.07 | 1.07 | 1.07 | 1.06 | 1.06 | 1.06 | 1.06 | 1.06 |
| 6 | 1.09 | 1.08 | 1.08 | 1.08 | 1.08 | 1.07 | 1.07 | 1.07 | 1.07 | 1.07 |
| 7 | 1.09 | 1.09 | 1.09 | 1.09 | 1.08 | 1.08 | 1.08 | 1.08 | 1.08 | 1.08 |
| 8 | 1.10 | 1.10 | 1.09 | 1.09 | 1.09 | 1.09 | 1.08 | 1.08 | 1.08 | 1.08 |
| 9 | 1.10 | 1.10 | 1.10 | 1.09 | 1.09 | 1.09 | 1.09 | 1.09 | 1.08 | 1.08 |
| 10 | 1.10 | 1.10 | 1.10 | 1.10 | 1.09 | 1.09 | 1.09 | 1.09 | 1.09 | 1.09 |
| 11 | 1.11 | 1.10 | 1.10 | 1.10 | 1.10 | 1.09 | 1.09 | 1.09 | 1.09 | 1.09 |
| 12 | 1.11 | 1.10 | 1.10 | 1.10 | 1.10 | 1.10 | 1.09 | 1.09 | 1.09 | 1.09 |
| 13 | 1.11 | 1.11 | 1.10 | 1.10 | 1.10 | 1.10 | 1.09 | 1.09 | 1.09 | 1.09 |
| 14 | 1.11 | 1.11 | 1.10 | 1.10 | 1.10 | 1.10 | 1.10 | 1.09 | 1.09 | 1.09 |
| 15 | 1.11 | 1.11 | 1.11 | 1.10 | 1.10 | 1.10 | 1.10 | 1.09 | 1.09 | 1.09 |
| 16 | 1.11 | 1.11 | 1.11 | 1.10 | 1.10 | 1.10 | 1.10 | 1.09 | 1.09 | 1.09 |
| 17 | 1.11 | 1.11 | 1.11 | 1.10 | 1.10 | 1.10 | 1.10 | 1.10 | 1.09 | 1.09 |
| 18 | 1.11 | 1.11 | 1.11 | 1.10 | 1.10 | 1.10 | 1.10 | 1.10 | 1.09 | 1.09 |
| 19 | 1.11 | 1.11 | 1.11 | 1.10 | 1.10 | 1.10 | 1.10 | 1.10 | 1.09 | 1.09 |
| 20 | 1.11 | 1.11 | 1.11 | 1.10 | 1.10 | 1.10 | 1.10 | 1.10 | 1.09 | 1.09 |
| 21 | 1.11 | 1.11 | 1.11 | 1.10 | 1.10 | 1.10 | 1.10 | 1.10 | 1.09 | 1.09 |
| 22 | 1.11 | 1.11 | 1.11 | 1.10 | 1.10 | 1.10 | 1.10 | 1.10 | 1.09 | 1.09 |
| 23 | 1.11 | 1.11 | 1.11 | 1.11 | 1.10 | 1.10 | 1.10 | 1.10 | 1.09 | 1.09 |
| 24 | 1.11 | 1.11 | 1.11 | 1.11 | 1.10 | 1.10 | 1.10 | 1.10 | 1.09 | 1.09 |
| 25 | 1.11 | 1.11 | 1.11 | 1.11 | 1.10 | 1.10 | 1.10 | 1.10 | 1.09 | 1.09 |
| 26 | 1.11 | 1.11 | 1.11 | 1.11 | 1.10 | 1.10 | 1.10 | 1.10 | 1.09 | 1.09 |
| 27 | 1.11 | 1.11 | 1.11 | 1.11 | 1.10 | 1.10 | 1.10 | 1.10 | 1.09 | 1.09 |
| 28 | 1.11 | 1.11 | 1.11 | 1.11 | 1.10 | 1.10 | 1.10 | 1.10 | 1.09 | 1.09 |
| 29 | 1.11 | 1.11 | 1.11 | 1.11 | 1.10 | 1.10 | 1.10 | 1.10 | 1.09 | 1.09 |
| 30 | 1.11 | 1.11 | 1.11 | 1.11 | 1.10 | 1.10 | 1.10 | 1.10 | 1.09 | 1.09 |
| 31 | 1.11 | 1.11 | 1.11 | 1.11 | 1.10 | 1.10 | 1.10 | 1.10 | 1.09 | 1.09 |
| 32 | 1.11 | 1.11 | 1.11 | 1.11 | 1.10 | 1.10 | 1.10 | 1.10 | 1.09 | 1.09 |
| 33 | 1.11 | 1.11 | 1.11 | 1.11 | 1.10 | 1.10 | 1.10 | 1.10 | 1.09 | 1.09 |
| 34 | 1.11 | 1.11 | 1.11 | 1.11 | 1.10 | 1.10 | 1.10 | 1.10 | 1.09 | 1.09 |
| 35 | 1.11 | 1.11 | 1.11 | 1.11 | 1.10 | 1.10 | 1.10 | 1.10 | 1.09 | 1.09 |
| 36 | 1.11 | 1.11 | 1.11 | 1.11 | 1.10 | 1.10 | 1.10 | 1.10 | 1.09 | 1.09 |
| 37 | 1.11 | 1.11 | 1.11 | 1.11 | 1.10 | 1.10 | 1.10 | 1.10 | 1.09 | 1.09 |
| 38 | 1.11 | 1.11 | 1.11 | 1.11 | 1.10 | 1.10 | 1.10 | 1.10 | 1.09 | 1.09 |
| 39 | 1.12 | 1.11 | 1.11 | 1.11 | 1.10 | 1.10 | 1.10 | 1.10 | 1.09 | 1.09 |
| 40 | 1.12 | 1.11 | 1.11 | 1.11 | 1.10 | 1.10 | 1.10 | 1.10 | 1.09 | 1.09 |

| $n_1 \backslash n_2$ | 31 | 32 | 33 | 34 | 35 | 36 | 37 | 38 | 39 | 40 |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| 1 | 0.72 | 0.72 | 0.72 | 0.72 | 0.72 | 0.72 | 0.72 | 0.72 | 0.72 | 0.72 |
| 2 | 0.94 | 0.94 | 0.94 | 0.94 | 0.94 | 0.94 | 0.93 | 0.93 | 0.93 | 0.93 |
| 3 | 1.01 | 1.01 | 1.01 | 1.01 | 1.00 | 1.00 | 1.00 | 1.00 | 1.00 | 1.00 |
| 4 | 1.04 | 1.04 | 1.04 | 1.04 | 1.04 | 1.04 | 1.03 | 1.03 | 1.03 | 1.03 |
| 5 | 1.06 | 1.06 | 1.05 | 1.05 | 1.05 | 1.05 | 1.05 | 1.05 | 1.05 | 1.05 |
| 6 | 1.07 | 1.07 | 1.07 | 1.06 | 1.06 | 1.06 | 1.06 | 1.06 | 1.06 | 1.06 |
| 7 | 1.07 | 1.07 | 1.07 | 1.07 | 1.07 | 1.07 | 1.07 | 1.07 | 1.07 | 1.07 |
| 8 | 1.08 | 1.08 | 1.08 | 1.08 | 1.07 | 1.07 | 1.07 | 1.07 | 1.07 | 1.07 |
| 9 | 1.08 | 1.08 | 1.08 | 1.08 | 1.08 | 1.08 | 1.08 | 1.07 | 1.07 | 1.07 |
| 10 | 1.08 | 1.08 | 1.08 | 1.08 | 1.08 | 1.08 | 1.08 | 1.08 | 1.08 | 1.07 |
| 11 | 1.09 | 1.08 | 1.08 | 1.08 | 1.08 | 1.08 | 1.08 | 1.08 | 1.08 | 1.08 |
| 12 | 1.09 | 1.09 | 1.08 | 1.08 | 1.08 | 1.08 | 1.08 | 1.08 | 1.08 | 1.08 |
| 13 | 1.09 | 1.09 | 1.09 | 1.08 | 1.08 | 1.08 | 1.08 | 1.08 | 1.08 | 1.08 |
| 14 | 1.09 | 1.09 | 1.09 | 1.08 | 1.08 | 1.08 | 1.08 | 1.08 | 1.08 | 1.08 |
| 15 | 1.09 | 1.09 | 1.09 | 1.09 | 1.08 | 1.08 | 1.08 | 1.08 | 1.08 | 1.08 |
| 16 | 1.09 | 1.09 | 1.09 | 1.09 | 1.08 | 1.08 | 1.08 | 1.08 | 1.08 | 1.08 |
| 17 | 1.09 | 1.09 | 1.09 | 1.09 | 1.08 | 1.08 | 1.08 | 1.08 | 1.08 | 1.08 |
| 18 | 1.09 | 1.09 | 1.09 | 1.09 | 1.09 | 1.08 | 1.08 | 1.08 | 1.08 | 1.08 |
| 19 | 1.09 | 1.09 | 1.09 | 1.09 | 1.09 | 1.08 | 1.08 | 1.08 | 1.08 | 1.08 |
| 20 | 1.09 | 1.09 | 1.09 | 1.09 | 1.09 | 1.08 | 1.08 | 1.08 | 1.08 | 1.08 |
| 21 | 1.09 | 1.09 | 1.09 | 1.09 | 1.09 | 1.08 | 1.08 | 1.08 | 1.08 | 1.08 |
| 22 | 1.09 | 1.09 | 1.09 | 1.09 | 1.09 | 1.08 | 1.08 | 1.08 | 1.08 | 1.08 |
| 23 | 1.09 | 1.09 | 1.09 | 1.09 | 1.09 | 1.08 | 1.08 | 1.08 | 1.08 | 1.08 |
| 24 | 1.09 | 1.09 | 1.09 | 1.09 | 1.09 | 1.08 | 1.08 | 1.08 | 1.08 | 1.08 |
| 25 | 1.09 | 1.09 | 1.09 | 1.09 | 1.09 | 1.08 | 1.08 | 1.08 | 1.08 | 1.08 |
| 26 | 1.09 | 1.09 | 1.09 | 1.09 | 1.09 | 1.08 | 1.08 | 1.08 | 1.08 | 1.08 |
| 27 | 1.09 | 1.09 | 1.09 | 1.09 | 1.09 | 1.08 | 1.08 | 1.08 | 1.08 | 1.08 |
| 28 | 1.09 | 1.09 | 1.09 | 1.09 | 1.09 | 1.08 | 1.08 | 1.08 | 1.08 | 1.08 |
| 29 | 1.09 | 1.09 | 1.09 | 1.09 | 1.09 | 1.08 | 1.08 | 1.08 | 1.08 | 1.08 |
| 30 | 1.09 | 1.09 | 1.09 | 1.09 | 1.09 | 1.08 | 1.08 | 1.08 | 1.08 | 1.08 |
| 31 | 1.09 | 1.09 | 1.09 | 1.09 | 1.09 | 1.08 | 1.08 | 1.08 | 1.08 | 1.08 |
| 32 | 1.09 | 1.09 | 1.09 | 1.09 | 1.09 | 1.08 | 1.08 | 1.08 | 1.08 | 1.08 |
| 33 | 1.09 | 1.09 | 1.09 | 1.09 | 1.09 | 1.08 | 1.08 | 1.08 | 1.08 | 1.08 |
| 34 | 1.09 | 1.09 | 1.09 | 1.09 | 1.09 | 1.08 | 1.08 | 1.08 | 1.08 | 1.08 |
| 35 | 1.09 | 1.09 | 1.09 | 1.09 | 1.09 | 1.08 | 1.08 | 1.08 | 1.08 | 1.08 |
| 36 | 1.09 | 1.09 | 1.09 | 1.09 | 1.09 | 1.08 | 1.08 | 1.08 | 1.08 | 1.08 |
| 37 | 1.09 | 1.09 | 1.09 | 1.09 | 1.08 | 1.08 | 1.08 | 1.08 | 1.08 | 1.08 |
| 38 | 1.09 | 1.09 | 1.09 | 1.09 | 1.08 | 1.08 | 1.08 | 1.08 | 1.08 | 1.08 |
| 39 | 1.09 | 1.09 | 1.09 | 1.09 | 1.08 | 1.08 | 1.08 | 1.08 | 1.08 | 1.08 |
| 40 | 1.09 | 1.09 | 1.09 | 1.09 | 1.08 | 1.08 | 1.08 | 1.08 | 1.08 | 1.08 |

## C.4.9 $F_{n_1,n_2,0.5}$

| $n_1 \backslash n_2$ | 1 | 2 | 3 | 4 | 5 | 6 | 7 | 8 | 9 | 10 |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| 1 | 1.00 | 0.66 | 0.58 | 0.54 | 0.52 | 0.51 | 0.50 | 0.49 | 0.49 | 0.48 |
| 2 | 1.50 | 0.99 | 0.88 | 0.82 | 0.79 | 0.77 | 0.76 | 0.75 | 0.74 | 0.74 |
| 3 | 1.70 | 1.13 | 0.99 | 0.94 | 0.90 | 0.88 | 0.87 | 0.86 | 0.85 | 0.84 |
| 4 | 1.82 | 1.20 | 1.06 | 0.99 | 0.96 | 0.94 | 0.92 | 0.91 | 0.90 | 0.89 |
| 5 | 1.89 | 1.25 | 1.10 | 1.03 | 0.99 | 0.97 | 0.96 | 0.94 | 0.93 | 0.93 |
| 6 | 1.94 | 1.28 | 1.12 | 1.06 | 1.02 | 0.99 | 0.98 | 0.97 | 0.96 | 0.95 |
| 7 | 1.97 | 1.30 | 1.14 | 1.07 | 1.04 | 1.01 | 0.99 | 0.98 | 0.97 | 0.97 |
| 8 | 2.00 | 1.32 | 1.16 | 1.09 | 1.05 | 1.02 | 1.01 | 0.99 | 0.99 | 0.98 |
| 9 | 2.02 | 1.33 | 1.17 | 1.10 | 1.06 | 1.03 | 1.02 | 1.00 | 0.99 | 0.99 |
| 10 | 2.04 | 1.34 | 1.18 | 1.11 | 1.07 | 1.04 | 1.03 | 1.01 | 1.00 | 0.99 |
| 11 | 2.05 | 1.35 | 1.19 | 1.11 | 1.07 | 1.05 | 1.03 | 1.02 | 1.01 | 1.00 |
| 12 | 2.06 | 1.36 | 1.19 | 1.12 | 1.08 | 1.05 | 1.04 | 1.02 | 1.01 | 1.01 |
| 13 | 2.07 | 1.36 | 1.20 | 1.13 | 1.09 | 1.06 | 1.04 | 1.03 | 1.02 | 1.01 |
| 14 | 2.08 | 1.37 | 1.20 | 1.13 | 1.09 | 1.06 | 1.05 | 1.03 | 1.02 | 1.01 |
| 15 | 2.09 | 1.37 | 1.21 | 1.13 | 1.09 | 1.07 | 1.05 | 1.04 | 1.03 | 1.02 |
| 16 | 2.09 | 1.38 | 1.21 | 1.14 | 1.10 | 1.07 | 1.05 | 1.04 | 1.03 | 1.02 |
| 17 | 2.10 | 1.38 | 1.21 | 1.14 | 1.10 | 1.07 | 1.05 | 1.04 | 1.03 | 1.02 |
| 18 | 2.11 | 1.38 | 1.22 | 1.14 | 1.10 | 1.08 | 1.06 | 1.04 | 1.03 | 1.03 |
| 19 | 2.11 | 1.39 | 1.22 | 1.14 | 1.10 | 1.08 | 1.06 | 1.05 | 1.04 | 1.03 |
| 20 | 2.11 | 1.39 | 1.22 | 1.15 | 1.11 | 1.08 | 1.06 | 1.05 | 1.04 | 1.03 |
| 21 | 2.12 | 1.39 | 1.22 | 1.15 | 1.11 | 1.08 | 1.06 | 1.05 | 1.04 | 1.03 |
| 22 | 2.12 | 1.39 | 1.22 | 1.15 | 1.11 | 1.08 | 1.06 | 1.05 | 1.04 | 1.03 |
| 23 | 2.12 | 1.39 | 1.23 | 1.15 | 1.11 | 1.08 | 1.07 | 1.05 | 1.04 | 1.03 |
| 24 | 2.13 | 1.40 | 1.23 | 1.15 | 1.11 | 1.09 | 1.07 | 1.05 | 1.04 | 1.04 |
| 25 | 2.13 | 1.40 | 1.23 | 1.15 | 1.11 | 1.09 | 1.07 | 1.06 | 1.05 | 1.04 |
| 26 | 2.13 | 1.40 | 1.23 | 1.16 | 1.11 | 1.09 | 1.07 | 1.06 | 1.05 | 1.04 |
| 27 | 2.13 | 1.40 | 1.23 | 1.16 | 1.12 | 1.09 | 1.07 | 1.06 | 1.05 | 1.04 |
| 28 | 2.14 | 1.40 | 1.23 | 1.16 | 1.12 | 1.09 | 1.07 | 1.06 | 1.05 | 1.04 |
| 29 | 2.14 | 1.40 | 1.23 | 1.16 | 1.12 | 1.09 | 1.07 | 1.06 | 1.05 | 1.04 |
| 30 | 2.14 | 1.40 | 1.23 | 1.16 | 1.12 | 1.09 | 1.07 | 1.06 | 1.05 | 1.04 |
| 31 | 2.14 | 1.41 | 1.24 | 1.16 | 1.12 | 1.09 | 1.07 | 1.06 | 1.05 | 1.04 |
| 32 | 2.14 | 1.41 | 1.24 | 1.16 | 1.12 | 1.09 | 1.08 | 1.06 | 1.05 | 1.04 |
| 33 | 2.14 | 1.41 | 1.24 | 1.16 | 1.12 | 1.09 | 1.08 | 1.06 | 1.05 | 1.04 |
| 34 | 2.15 | 1.41 | 1.24 | 1.16 | 1.12 | 1.09 | 1.08 | 1.06 | 1.05 | 1.04 |
| 35 | 2.15 | 1.41 | 1.24 | 1.16 | 1.12 | 1.10 | 1.08 | 1.06 | 1.05 | 1.05 |
| 36 | 2.15 | 1.41 | 1.24 | 1.16 | 1.12 | 1.10 | 1.08 | 1.06 | 1.05 | 1.05 |
| 37 | 2.15 | 1.41 | 1.24 | 1.16 | 1.12 | 1.10 | 1.08 | 1.06 | 1.05 | 1.05 |
| 38 | 2.15 | 1.41 | 1.24 | 1.17 | 1.12 | 1.10 | 1.08 | 1.07 | 1.05 | 1.05 |
| 39 | 2.15 | 1.41 | 1.24 | 1.17 | 1.12 | 1.10 | 1.08 | 1.07 | 1.06 | 1.05 |
| 40 | 2.15 | 1.41 | 1.24 | 1.17 | 1.12 | 1.10 | 1.08 | 1.07 | 1.06 | 1.05 |

| $n_1 \backslash n_2$ | 11 | 12 | 13 | 14 | 15 | 16 | 17 | 18 | 19 | 20 |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| 1 | 0.48 | 0.48 | 0.48 | 0.47 | 0.47 | 0.47 | 0.47 | 0.47 | 0.47 | 0.47 |
| 2 | 0.73 | 0.73 | 0.73 | 0.72 | 0.72 | 0.72 | 0.72 | 0.72 | 0.71 | 0.71 |
| 3 | 0.83 | 0.83 | 0.83 | 0.82 | 0.82 | 0.82 | 0.82 | 0.81 | 0.81 | 0.81 |
| 4 | 0.89 | 0.88 | 0.88 | 0.88 | 0.87 | 0.87 | 0.87 | 0.87 | 0.86 | 0.86 |
| 5 | 0.92 | 0.92 | 0.91 | 0.91 | 0.91 | 0.90 | 0.90 | 0.90 | 0.90 | 0.90 |
| 6 | 0.94 | 0.94 | 0.93 | 0.93 | 0.93 | 0.93 | 0.92 | 0.92 | 0.92 | 0.92 |
| 7 | 0.96 | 0.95 | 0.95 | 0.95 | 0.94 | 0.94 | 0.94 | 0.94 | 0.93 | 0.93 |
| 8 | 0.97 | 0.97 | 0.96 | 0.96 | 0.96 | 0.95 | 0.95 | 0.95 | 0.95 | 0.94 |
| 9 | 0.98 | 0.98 | 0.97 | 0.97 | 0.96 | 0.96 | 0.96 | 0.96 | 0.96 | 0.95 |
| 10 | 0.99 | 0.98 | 0.98 | 0.98 | 0.97 | 0.97 | 0.97 | 0.96 | 0.96 | 0.96 |
| 11 | 0.99 | 0.99 | 0.99 | 0.98 | 0.98 | 0.98 | 0.97 | 0.97 | 0.97 | 0.97 |
| 12 | 1.00 | 0.99 | 0.99 | 0.99 | 0.98 | 0.98 | 0.98 | 0.98 | 0.97 | 0.97 |
| 13 | 1.00 | 1.00 | 0.99 | 0.99 | 0.99 | 0.99 | 0.98 | 0.98 | 0.98 | 0.98 |
| 14 | 1.01 | 1.00 | 1.00 | 0.99 | 0.99 | 0.99 | 0.99 | 0.98 | 0.98 | 0.98 |
| 15 | 1.01 | 1.01 | 1.00 | 1.00 | 0.99 | 0.99 | 0.99 | 0.99 | 0.99 | 0.98 |
| 16 | 1.01 | 1.01 | 1.00 | 1.00 | 1.00 | 0.99 | 0.99 | 0.99 | 0.99 | 0.99 |
| 17 | 1.02 | 1.01 | 1.01 | 1.00 | 1.00 | 1.00 | 0.99 | 0.99 | 0.99 | 0.99 |
| 18 | 1.02 | 1.01 | 1.01 | 1.01 | 1.00 | 1.00 | 1.00 | 0.99 | 0.99 | 0.99 |
| 19 | 1.02 | 1.02 | 1.01 | 1.01 | 1.00 | 1.00 | 1.00 | 1.00 | 0.99 | 0.99 |
| 20 | 1.02 | 1.02 | 1.01 | 1.01 | 1.01 | 1.00 | 1.00 | 1.00 | 1.00 | 0.99 |
| 21 | 1.03 | 1.02 | 1.02 | 1.01 | 1.01 | 1.01 | 1.00 | 1.00 | 1.00 | 1.00 |
| 22 | 1.03 | 1.02 | 1.02 | 1.01 | 1.01 | 1.01 | 1.00 | 1.00 | 1.00 | 1.00 |
| 23 | 1.03 | 1.02 | 1.02 | 1.01 | 1.01 | 1.01 | 1.01 | 1.00 | 1.00 | 1.00 |
| 24 | 1.03 | 1.02 | 1.02 | 1.02 | 1.01 | 1.01 | 1.01 | 1.00 | 1.00 | 1.00 |
| 25 | 1.03 | 1.03 | 1.02 | 1.02 | 1.01 | 1.01 | 1.01 | 1.01 | 1.00 | 1.00 |
| 26 | 1.03 | 1.03 | 1.02 | 1.02 | 1.01 | 1.01 | 1.01 | 1.01 | 1.00 | 1.00 |
| 27 | 1.03 | 1.03 | 1.02 | 1.02 | 1.02 | 1.01 | 1.01 | 1.01 | 1.01 | 1.00 |
| 28 | 1.03 | 1.03 | 1.02 | 1.02 | 1.02 | 1.01 | 1.01 | 1.01 | 1.01 | 1.00 |
| 29 | 1.03 | 1.03 | 1.02 | 1.02 | 1.02 | 1.01 | 1.01 | 1.01 | 1.01 | 1.01 |
| 30 | 1.04 | 1.03 | 1.03 | 1.02 | 1.02 | 1.02 | 1.01 | 1.01 | 1.01 | 1.01 |
| 31 | 1.04 | 1.03 | 1.03 | 1.02 | 1.02 | 1.02 | 1.01 | 1.01 | 1.01 | 1.01 |
| 32 | 1.04 | 1.03 | 1.03 | 1.02 | 1.02 | 1.02 | 1.01 | 1.01 | 1.01 | 1.01 |
| 33 | 1.04 | 1.03 | 1.03 | 1.02 | 1.02 | 1.02 | 1.01 | 1.01 | 1.01 | 1.01 |
| 34 | 1.04 | 1.03 | 1.03 | 1.02 | 1.02 | 1.02 | 1.02 | 1.01 | 1.01 | 1.01 |
| 35 | 1.04 | 1.03 | 1.03 | 1.02 | 1.02 | 1.02 | 1.02 | 1.01 | 1.01 | 1.01 |
| 36 | 1.04 | 1.03 | 1.03 | 1.03 | 1.02 | 1.02 | 1.02 | 1.01 | 1.01 | 1.01 |
| 37 | 1.04 | 1.03 | 1.03 | 1.03 | 1.02 | 1.02 | 1.02 | 1.01 | 1.01 | 1.01 |
| 38 | 1.04 | 1.03 | 1.03 | 1.03 | 1.02 | 1.02 | 1.02 | 1.02 | 1.01 | 1.01 |
| 39 | 1.04 | 1.04 | 1.03 | 1.03 | 1.02 | 1.02 | 1.02 | 1.02 | 1.01 | 1.01 |
| 40 | 1.04 | 1.04 | 1.03 | 1.03 | 1.02 | 1.02 | 1.02 | 1.02 | 1.01 | 1.01 |

| $n_1 \backslash n_2$ | 21 | 22 | 23 | 24 | 25 | 26 | 27 | 28 | 29 | 30 |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| 1 | 0.47 | 0.47 | 0.46 | 0.46 | 0.46 | 0.46 | 0.46 | 0.46 | 0.46 | 0.46 |
| 2 | 0.71 | 0.71 | 0.71 | 0.71 | 0.71 | 0.71 | 0.71 | 0.71 | 0.70 | 0.70 |
| 3 | 0.81 | 0.81 | 0.81 | 0.81 | 0.81 | 0.80 | 0.80 | 0.80 | 0.80 | 0.80 |
| 4 | 0.86 | 0.86 | 0.86 | 0.86 | 0.86 | 0.86 | 0.86 | 0.85 | 0.85 | 0.85 |
| 5 | 0.89 | 0.89 | 0.89 | 0.89 | 0.89 | 0.89 | 0.89 | 0.89 | 0.89 | 0.89 |
| 6 | 0.92 | 0.91 | 0.91 | 0.91 | 0.91 | 0.91 | 0.91 | 0.91 | 0.91 | 0.91 |
| 7 | 0.93 | 0.93 | 0.93 | 0.93 | 0.93 | 0.93 | 0.92 | 0.92 | 0.92 | 0.92 |
| 8 | 0.94 | 0.94 | 0.94 | 0.94 | 0.94 | 0.94 | 0.94 | 0.94 | 0.93 | 0.93 |
| 9 | 0.95 | 0.95 | 0.95 | 0.95 | 0.95 | 0.95 | 0.95 | 0.94 | 0.94 | 0.94 |
| 10 | 0.96 | 0.96 | 0.96 | 0.96 | 0.95 | 0.95 | 0.95 | 0.95 | 0.95 | 0.95 |
| 11 | 0.97 | 0.96 | 0.96 | 0.96 | 0.96 | 0.96 | 0.96 | 0.96 | 0.96 | 0.96 |
| 12 | 0.97 | 0.97 | 0.97 | 0.97 | 0.97 | 0.96 | 0.96 | 0.96 | 0.96 | 0.96 |
| 13 | 0.98 | 0.97 | 0.97 | 0.97 | 0.97 | 0.97 | 0.97 | 0.97 | 0.97 | 0.97 |
| 14 | 0.98 | 0.98 | 0.98 | 0.97 | 0.97 | 0.97 | 0.97 | 0.97 | 0.97 | 0.97 |
| 15 | 0.98 | 0.98 | 0.98 | 0.98 | 0.98 | 0.98 | 0.98 | 0.97 | 0.97 | 0.97 |
| 16 | 0.98 | 0.98 | 0.98 | 0.98 | 0.98 | 0.98 | 0.98 | 0.98 | 0.98 | 0.98 |
| 17 | 0.99 | 0.99 | 0.98 | 0.98 | 0.98 | 0.98 | 0.98 | 0.98 | 0.98 | 0.98 |
| 18 | 0.99 | 0.99 | 0.99 | 0.99 | 0.98 | 0.98 | 0.98 | 0.98 | 0.98 | 0.98 |
| 19 | 0.99 | 0.99 | 0.99 | 0.99 | 0.99 | 0.99 | 0.98 | 0.98 | 0.98 | 0.98 |
| 20 | 0.99 | 0.99 | 0.99 | 0.99 | 0.99 | 0.99 | 0.99 | 0.99 | 0.98 | 0.98 |
| 21 | 0.99 | 0.99 | 0.99 | 0.99 | 0.99 | 0.99 | 0.99 | 0.99 | 0.99 | 0.99 |
| 22 | 1.00 | 0.99 | 0.99 | 0.99 | 0.99 | 0.99 | 0.99 | 0.99 | 0.99 | 0.99 |
| 23 | 1.00 | 1.00 | 0.99 | 0.99 | 0.99 | 0.99 | 0.99 | 0.99 | 0.99 | 0.99 |
| 24 | 1.00 | 1.00 | 1.00 | 0.99 | 0.99 | 0.99 | 0.99 | 0.99 | 0.99 | 0.99 |
| 25 | 1.00 | 1.00 | 1.00 | 1.00 | 0.99 | 0.99 | 0.99 | 0.99 | 0.99 | 0.99 |
| 26 | 1.00 | 1.00 | 1.00 | 1.00 | 1.00 | 0.99 | 0.99 | 0.99 | 0.99 | 0.99 |
| 27 | 1.00 | 1.00 | 1.00 | 1.00 | 1.00 | 1.00 | 0.99 | 0.99 | 0.99 | 0.99 |
| 28 | 1.00 | 1.00 | 1.00 | 1.00 | 1.00 | 1.00 | 1.00 | 0.99 | 0.99 | 0.99 |
| 29 | 1.00 | 1.00 | 1.00 | 1.00 | 1.00 | 1.00 | 1.00 | 1.00 | 0.99 | 0.99 |
| 30 | 1.00 | 1.00 | 1.00 | 1.00 | 1.00 | 1.00 | 1.00 | 1.00 | 1.00 | 0.99 |
| 31 | 1.01 | 1.00 | 1.00 | 1.00 | 1.00 | 1.00 | 1.00 | 1.00 | 1.00 | 1.00 |
| 32 | 1.01 | 1.00 | 1.00 | 1.00 | 1.00 | 1.00 | 1.00 | 1.00 | 1.00 | 1.00 |
| 33 | 1.01 | 1.01 | 1.00 | 1.00 | 1.00 | 1.00 | 1.00 | 1.00 | 1.00 | 1.00 |
| 34 | 1.01 | 1.01 | 1.00 | 1.00 | 1.00 | 1.00 | 1.00 | 1.00 | 1.00 | 1.00 |
| 35 | 1.01 | 1.01 | 1.01 | 1.00 | 1.00 | 1.00 | 1.00 | 1.00 | 1.00 | 1.00 |
| 36 | 1.01 | 1.01 | 1.01 | 1.00 | 1.00 | 1.00 | 1.00 | 1.00 | 1.00 | 1.00 |
| 37 | 1.01 | 1.01 | 1.01 | 1.00 | 1.00 | 1.00 | 1.00 | 1.00 | 1.00 | 1.00 |
| 38 | 1.01 | 1.01 | 1.01 | 1.01 | 1.00 | 1.00 | 1.00 | 1.00 | 1.00 | 1.00 |
| 39 | 1.01 | 1.01 | 1.01 | 1.01 | 1.00 | 1.00 | 1.00 | 1.00 | 1.00 | 1.00 |
| 40 | 1.01 | 1.01 | 1.01 | 1.01 | 1.01 | 1.00 | 1.00 | 1.00 | 1.00 | 1.00 |

| $n_1 \backslash n_2$ | 31 | 32 | 33 | 34 | 35 | 36 | 37 | 38 | 39 | 40 |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| 1 | 0.46 | 0.46 | 0.46 | 0.46 | 0.46 | 0.46 | 0.46 | 0.46 | 0.46 | 0.46 |
| 2 | 0.70 | 0.70 | 0.70 | 0.70 | 0.70 | 0.70 | 0.70 | 0.70 | 0.70 | 0.70 |
| 3 | 0.80 | 0.80 | 0.80 | 0.80 | 0.80 | 0.80 | 0.80 | 0.80 | 0.80 | 0.80 |
| 4 | 0.85 | 0.85 | 0.85 | 0.85 | 0.85 | 0.85 | 0.85 | 0.85 | 0.85 | 0.85 |
| 5 | 0.88 | 0.88 | 0.88 | 0.88 | 0.88 | 0.88 | 0.88 | 0.88 | 0.88 | 0.88 |
| 6 | 0.91 | 0.91 | 0.90 | 0.90 | 0.90 | 0.90 | 0.90 | 0.90 | 0.90 | 0.90 |
| 7 | 0.92 | 0.92 | 0.92 | 0.92 | 0.92 | 0.92 | 0.92 | 0.92 | 0.92 | 0.92 |
| 8 | 0.93 | 0.93 | 0.93 | 0.93 | 0.93 | 0.93 | 0.93 | 0.93 | 0.93 | 0.93 |
| 9 | 0.94 | 0.94 | 0.94 | 0.94 | 0.94 | 0.94 | 0.94 | 0.94 | 0.94 | 0.94 |
| 10 | 0.95 | 0.95 | 0.95 | 0.95 | 0.95 | 0.95 | 0.95 | 0.95 | 0.95 | 0.95 |
| 11 | 0.96 | 0.96 | 0.95 | 0.95 | 0.95 | 0.95 | 0.95 | 0.95 | 0.95 | 0.95 |
| 12 | 0.96 | 0.96 | 0.96 | 0.96 | 0.96 | 0.96 | 0.96 | 0.96 | 0.96 | 0.96 |
| 13 | 0.97 | 0.96 | 0.96 | 0.96 | 0.96 | 0.96 | 0.96 | 0.96 | 0.96 | 0.96 |
| 14 | 0.97 | 0.97 | 0.97 | 0.97 | 0.97 | 0.97 | 0.97 | 0.96 | 0.96 | 0.96 |
| 15 | 0.97 | 0.97 | 0.97 | 0.97 | 0.97 | 0.97 | 0.97 | 0.97 | 0.97 | 0.97 |
| 16 | 0.97 | 0.97 | 0.97 | 0.97 | 0.97 | 0.97 | 0.97 | 0.97 | 0.97 | 0.97 |
| 17 | 0.98 | 0.98 | 0.98 | 0.98 | 0.97 | 0.97 | 0.97 | 0.97 | 0.97 | 0.97 |
| 18 | 0.98 | 0.98 | 0.98 | 0.98 | 0.98 | 0.98 | 0.98 | 0.98 | 0.97 | 0.97 |
| 19 | 0.98 | 0.98 | 0.98 | 0.98 | 0.98 | 0.98 | 0.98 | 0.98 | 0.98 | 0.98 |
| 20 | 0.98 | 0.98 | 0.98 | 0.98 | 0.98 | 0.98 | 0.98 | 0.98 | 0.98 | 0.98 |
| 21 | 0.98 | 0.98 | 0.98 | 0.98 | 0.98 | 0.98 | 0.98 | 0.98 | 0.98 | 0.98 |
| 22 | 0.99 | 0.99 | 0.98 | 0.98 | 0.98 | 0.98 | 0.98 | 0.98 | 0.98 | 0.98 |
| 23 | 0.99 | 0.99 | 0.99 | 0.99 | 0.98 | 0.98 | 0.98 | 0.98 | 0.98 | 0.98 |
| 24 | 0.99 | 0.99 | 0.99 | 0.99 | 0.99 | 0.99 | 0.99 | 0.98 | 0.98 | 0.98 |
| 25 | 0.99 | 0.99 | 0.99 | 0.99 | 0.99 | 0.99 | 0.99 | 0.99 | 0.99 | 0.98 |
| 26 | 0.99 | 0.99 | 0.99 | 0.99 | 0.99 | 0.99 | 0.99 | 0.99 | 0.99 | 0.99 |
| 27 | 0.99 | 0.99 | 0.99 | 0.99 | 0.99 | 0.99 | 0.99 | 0.99 | 0.99 | 0.99 |
| 28 | 0.99 | 0.99 | 0.99 | 0.99 | 0.99 | 0.99 | 0.99 | 0.99 | 0.99 | 0.99 |
| 29 | 0.99 | 0.99 | 0.99 | 0.99 | 0.99 | 0.99 | 0.99 | 0.99 | 0.99 | 0.99 |
| 30 | 0.99 | 0.99 | 0.99 | 0.99 | 0.99 | 0.99 | 0.99 | 0.99 | 0.99 | 0.99 |
| 31 | 0.99 | 0.99 | 0.99 | 0.99 | 0.99 | 0.99 | 0.99 | 0.99 | 0.99 | 0.99 |
| 32 | 1.00 | 0.99 | 0.99 | 0.99 | 0.99 | 0.99 | 0.99 | 0.99 | 0.99 | 0.99 |
| 33 | 1.00 | 1.00 | 0.99 | 0.99 | 0.99 | 0.99 | 0.99 | 0.99 | 0.99 | 0.99 |
| 34 | 1.00 | 1.00 | 1.00 | 0.99 | 0.99 | 0.99 | 0.99 | 0.99 | 0.99 | 0.99 |
| 35 | 1.00 | 1.00 | 1.00 | 1.00 | 0.99 | 0.99 | 0.99 | 0.99 | 0.99 | 0.99 |
| 36 | 1.00 | 1.00 | 1.00 | 1.00 | 1.00 | 0.99 | 0.99 | 0.99 | 0.99 | 0.99 |
| 37 | 1.00 | 1.00 | 1.00 | 1.00 | 1.00 | 1.00 | 0.99 | 0.99 | 0.99 | 0.99 |
| 38 | 1.00 | 1.00 | 1.00 | 1.00 | 1.00 | 1.00 | 1.00 | 0.99 | 0.99 | 0.99 |
| 39 | 1.00 | 1.00 | 1.00 | 1.00 | 1.00 | 1.00 | 1.00 | 1.00 | 0.99 | 0.99 |
| 40 | 1.00 | 1.00 | 1.00 | 1.00 | 1.00 | 1.00 | 1.00 | 1.00 | 1.00 | 0.99 |

## C.5 Funció de distribució de Kolmogorov $D(n)$

Donat $n$ i $\alpha$, en la taula es pot trobar $x$ tal que:

$$p\{D(n) \leq x\} = \alpha.$$

| $n\backslash\alpha$ | 0.99 | 0.975 | 0.95 | 0.9 | 0.85 | 0.8 | 0.75 | 0.7 | 0.65 | 0.6 |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| 1 | 0.995 | 0.988 | 0.975 | 0.950 | 0.925 | 0.900 | 0.875 | 0.850 | 0.825 | 0.800 |
| 2 | 0.929 | 0.888 | 0.842 | 0.776 | 0.726 | 0.684 | 0.646 | 0.613 | 0.582 | 0.553 |
| 3 | 0.829 | 0.768 | 0.708 | 0.636 | 0.596 | 0.565 | 0.538 | 0.515 | 0.493 | 0.473 |
| 4 | 0.734 | 0.674 | 0.624 | 0.565 | 0.525 | 0.493 | 0.468 | 0.447 | 0.429 | 0.412 |
| 5 | 0.669 | 0.613 | 0.563 | 0.509 | 0.474 | 0.447 | 0.424 | 0.403 | 0.386 | 0.370 |
| 6 | 0.617 | 0.564 | 0.519 | 0.468 | 0.435 | 0.410 | 0.390 | 0.372 | 0.355 | 0.341 |
| 7 | 0.576 | 0.526 | 0.483 | 0.436 | 0.405 | 0.381 | 0.362 | 0.346 | 0.331 | 0.317 |
| 8 | 0.542 | 0.494 | 0.454 | 0.410 | 0.381 | 0.358 | 0.340 | 0.324 | 0.311 | 0.298 |
| 9 | 0.513 | 0.468 | 0.430 | 0.387 | 0.360 | 0.339 | 0.322 | 0.307 | 0.294 | 0.282 |
| 10 | 0.489 | 0.446 | 0.409 | 0.369 | 0.343 | 0.323 | 0.306 | 0.292 | 0.279 | 0.268 |
| 11 | 0.468 | 0.426 | 0.391 | 0.352 | 0.327 | 0.308 | 0.293 | 0.279 | 0.267 | 0.256 |
| 12 | 0.449 | 0.409 | 0.375 | 0.338 | 0.314 | 0.296 | 0.281 | 0.268 | 0.256 | 0.246 |
| 13 | 0.432 | 0.394 | 0.361 | 0.325 | 0.302 | 0.285 | 0.270 | 0.258 | 0.247 | 0.237 |
| 14 | 0.418 | 0.380 | 0.349 | 0.314 | 0.292 | 0.275 | 0.261 | 0.249 | 0.238 | 0.229 |
| 15 | 0.404 | 0.368 | 0.338 | 0.304 | 0.282 | 0.266 | 0.252 | 0.241 | 0.230 | 0.221 |
| 16 | 0.392 | 0.357 | 0.327 | 0.295 | 0.274 | 0.258 | 0.245 | 0.233 | 0.223 | 0.214 |
| 17 | 0.381 | 0.347 | 0.318 | 0.286 | 0.266 | 0.250 | 0.238 | 0.227 | 0.217 | 0.208 |
| 18 | 0.371 | 0.337 | 0.309 | 0.279 | 0.259 | 0.244 | 0.231 | 0.221 | 0.211 | 0.203 |
| 19 | 0.361 | 0.329 | 0.301 | 0.271 | 0.252 | 0.237 | 0.225 | 0.215 | 0.206 | 0.197 |
| 20 | 0.352 | 0.321 | 0.294 | 0.265 | 0.246 | 0.232 | 0.220 | 0.210 | 0.201 | 0.193 |
| 21 | 0.344 | 0.313 | 0.287 | 0.259 | 0.240 | 0.226 | 0.215 | 0.205 | 0.196 | 0.188 |
| 22 | 0.337 | 0.306 | 0.281 | 0.253 | 0.235 | 0.221 | 0.210 | 0.200 | 0.192 | 0.184 |
| 23 | 0.330 | 0.300 | 0.275 | 0.247 | 0.230 | 0.216 | 0.205 | 0.196 | 0.188 | 0.180 |
| 24 | 0.323 | 0.294 | 0.269 | 0.242 | 0.225 | 0.212 | 0.201 | 0.192 | 0.184 | 0.176 |
| 25 | 0.317 | 0.288 | 0.264 | 0.238 | 0.221 | 0.208 | 0.197 | 0.188 | 0.180 | 0.173 |
| 26 | 0.311 | 0.283 | 0.259 | 0.233 | 0.217 | 0.204 | 0.194 | 0.185 | 0.177 | 0.170 |
| 27 | 0.305 | 0.277 | 0.254 | 0.229 | 0.213 | 0.200 | 0.190 | 0.181 | 0.174 | 0.167 |
| 28 | 0.300 | 0.273 | 0.250 | 0.225 | 0.209 | 0.197 | 0.187 | 0.178 | 0.171 | 0.164 |
| 29 | 0.295 | 0.268 | 0.246 | 0.221 | 0.205 | 0.193 | 0.184 | 0.175 | 0.168 | 0.161 |
| 30 | 0.290 | 0.264 | 0.242 | 0.218 | 0.202 | 0.190 | 0.181 | 0.172 | 0.165 | 0.158 |
| 31 | 0.285 | 0.259 | 0.238 | 0.214 | 0.199 | 0.187 | 0.178 | 0.170 | 0.162 | 0.156 |
| 32 | 0.281 | 0.255 | 0.234 | 0.211 | 0.196 | 0.184 | 0.175 | 0.167 | 0.160 | 0.154 |
| 33 | 0.277 | 0.252 | 0.231 | 0.208 | 0.193 | 0.182 | 0.173 | 0.165 | 0.158 | 0.151 |
| 34 | 0.273 | 0.248 | 0.227 | 0.205 | 0.190 | 0.179 | 0.170 | 0.162 | 0.155 | 0.149 |
| 35 | 0.269 | 0.245 | 0.224 | 0.202 | 0.187 | 0.177 | 0.168 | 0.160 | 0.153 | 0.147 |
| 36 | 0.265 | 0.241 | 0.221 | 0.199 | 0.185 | 0.174 | 0.165 | 0.158 | 0.151 | 0.145 |
| 37 | 0.262 | 0.238 | 0.218 | 0.196 | 0.182 | 0.172 | 0.163 | 0.156 | 0.149 | 0.143 |
| 38 | 0.258 | 0.235 | 0.215 | 0.194 | 0.180 | 0.170 | 0.161 | 0.154 | 0.147 | 0.141 |
| 39 | 0.255 | 0.232 | 0.213 | 0.191 | 0.178 | 0.168 | 0.159 | 0.152 | 0.145 | 0.140 |
| 40 | 0.252 | 0.229 | 0.210 | 0.189 | 0.176 | 0.165 | 0.157 | 0.150 | 0.144 | 0.138 |
| $n > 40$ | $\frac{1.62}{\sqrt{n}}$ | $\frac{1.48}{\sqrt{n}}$ | $\frac{1.34}{\sqrt{n}}$ | $\frac{1.22}{\sqrt{n}}$ | $\frac{1.13}{\sqrt{n}}$ | $\frac{1.07}{\sqrt{n}}$ | $\frac{1.02}{\sqrt{n}}$ | $\frac{0.97}{\sqrt{n}}$ | $\frac{0.93}{\sqrt{n}}$ | $\frac{0.89}{\sqrt{n}}$ |

# Bibliografia

[Amo92] Jesús Amon. *Estadística para psicólogos*, volume 2. Piràmide, 14 edition, 1992.

[Can92] George C. Canavos. *Probabilidad y Estadística. Aplicaciones y Métodos.* McGraw-Hill, 1992.

[Lar90] Harold J. Larson. *Introducción a la Teoria de las Probabilidades e Inferencia Estadística.* Limusa, 1990.

[MR96] Douglas C. Montgomery and George C. Runger. *Probabilidad y Estadística aplicadas a la Ingeniería.* McGraw-Hill, 1996.

[NWW88] John Neter, William Wassermann, and G. A. Whithmore. *Applied Statistics.* Allyn and Bacon, Inc., third edition, 1988.

[WM91] R. E. Walpole and R. H. Myers. *Probabilidad y Estadística.* McGraw-Hill, 1991.

# Índex alfabètic