78) Sea X una variable aleatoria con función de densidad :

$$f(x) = \begin{cases} k \cdot (1+x^2) & \text{si } x \in (0,3) \\ 0 & \text{si } x \notin (0,3) \end{cases}$$

a) Calcular la constante k y la función de distribución de X.

b) Calcular la probabilidad de que X esté comprendida entre 1 y 2

c) Calcular la probabilidad de que X sea menor que 1

d) Sabiendo que X es mayor que 1, calcular la probabilidad de que sea menor que 2

Solución a)

La función es positiva, continua y derivable

$$1 = \int_{-\infty}^{+\infty} f(x)dx \Rightarrow \int_0^3 k(1+x^2)dx = k\left[x + \frac{x^3}{3}\right]_0^3 = k \cdot 12 \Rightarrow k = \frac{1}{12}$$

Función de distribución :

$$F(x) = \int_{-\infty}^{x} f(t)dt = \begin{cases} 0 & \text{si } x \leq 0 \\ \frac{1}{12}\left[x + \frac{x^3}{3}\right] & \text{si } 0 < x < 3 \\ 1 & \text{si } x \geq 3 \end{cases}$$

Solución b)

$$P(1 < X \leq 2) = \int_1^2 \frac{1}{12}(1+x^2)dx = \frac{1}{12}\left[x + \frac{x^3}{3}\right]_1^2 = \frac{1}{12}\left[\left(2+\frac{8}{3}\right) - \left(1+\frac{1}{3}\right)\right] = \frac{5}{18}$$ [1]

Solución c)

Como la función es continua, por definición $P(X \leq x) = P(X < x) = F_X(x)$ por tanto tienen la misma probabilidad

$$P(X < 1) = F(1) = \frac{1}{12}\left(1+\frac{1}{3}\right) = \frac{1}{9}$$

Solución d)

Se trata de una probabilidad condicionada $=P(X < 2/X > 1) = \frac{P(1<X<2)}{P(X>1)} = \frac{5/18}{8/9} = \frac{5}{16}$ Donde $P(X > 1) = 1 - P(X \geq 1) = 1 - P(X < 1) = 1 - \frac{1}{9} = \frac{8}{9}$.
También se puede calcular de forma directa:

$$P(X > 1) = \int_1^3 \frac{1}{12}(1+x^2)dx = \frac{1}{12}\left[x + \frac{x^3}{3}\right]_1^3 = \frac{8}{9}$$

[1] Regla de Barrow (Integral definida) : $\int_a^b f(x)dx = F(x)\Big|_a^b = F(b) - F(a)$ siendo $F(x)$ la primitiva de la integral

79) La función de densidad de una variable aleatoria continua es :

$$f(x) = \begin{cases} ax^2 + b & \text{si } x \in (0,3) \\ 0 & \text{si } x \notin (0,3) \end{cases}$$

Determinar a y b, sabiendo que $P(1 < X \leq 2) = 2/3$

Solución)

$$1 = \int_{-\infty}^{+\infty} f_x dx = \int_0^3 (ax^2+b)dx = \left[\frac{ax^3}{3} + bx\right]_0^3 = \left[\left(\frac{27a}{3} + 3b\right) - \left(\frac{a(0^3)}{3} + b \cdot 0\right)\right] \Rightarrow 9a+3b = 1$$

Se necesita otra ecuación para poder resolver el sistema de ecuaciones despejando a y b, para ello sabemos que $P(1 < x \leq 2) = 2/3$

$$\frac{2}{3} = \int_1^2 (ax^2 + b)dx = \left[\frac{ax^3}{3} + bx\right]_1^2 = \left[\left(\frac{8a}{3} + 2b\right) - \left(\frac{a}{3} + b\right)\right] \Rightarrow 7a + 3b = 2$$

Se resuelve el sistema de ecuaciones, dando como resultado : $a = -\frac{1}{2}$, $b = \frac{11}{6}$

80) La duración en minutos de unas ciertas comunicaciones telefónicas es una variable aleatoria con función de distribución:

$$F(x) = \begin{cases} 0 & \text{si } x \leq 0 \\ 1 - \frac{1}{2}e^{-x/3} - \frac{1}{2}e^{-R[x/3]} & \text{si } x > 0 \end{cases}$$

donde $R[x]$ es la parte entera de x. Calcular la probabilidad de que la comunicación dure:

a) Más de 6 minutos

b) Menos de 4 minutos

c) Exáctamente 3 minutos

d) Menos de 9 minutos, sabiendo que ha durado más de 5

e) Más de 5 minutos, sabiendo que ha durado menos de 9

Se trata de una variable aleatoria que no es discreta ni continua. La función de distribución tiene un salto en cada múltiplo positivo de 3 . Ya que en estos puntos al coincidir la parte entera con la parte no entera siempre vale 1 con lo que da un salto, siendo estríctamente creciente en el intervalo entre salto y salto. En los demás puntos la función es contínua.

Solución a)

$$P(X > 6) = 1 - P(X \leq 6) = 1 - F_X(6) = 1 - \left(1 - \frac{1}{2}e^{-6/3} - \frac{1}{2}e^{-R[6/3]}\right) = 1 - \left(1 - \frac{1}{2}e^{-2} - \frac{1}{2}e^{-2}\right) = e^{-2}.$$

Solución b)

$P(X < 4) = P(X \leq 4) - P(X = 4) = F(4)$ Ya que como en $X = 4$ la función de distribución es contínua en 4 se tiene que $P(X = 4) = 0$
$= 1 - \frac{1}{2}e^{-4/3} - \frac{1}{2}e^{-1}$ (La parte entera de 4/3 es 1)

Solución c)

En $x = 3$ *la función de distribucióno no es contínua, el* $\lim_{x \to 3^-}$ *la parte entera de* $e^{-R[3/3]}$ *es menor que 1 por tanto es 0.* $P(X = 3) = P(X \leq 3) - P(X < 3) = F(3) - \lim_{x \to 3^-}$ En $x = 3$ la función no es contínua

$$= 1 - \frac{1}{2}e^{-3/3} - \frac{1}{2}e^{-R[-3/3]} - \lim_{x \to 3^-}\left(1 - \frac{1}{2}e^{-3/3} - \frac{1}{2}e^{0}\right) = \frac{1}{2} - \frac{1}{2e}$$

Solución d)

$$P(X < 9/X > 5) = \frac{P(X < 9 \cap X > 5)}{P(X > 5)} = \frac{P(5 < X < 9)}{P(X > 5)}$$

$$P(5 < X < 9) = \lim_{x \to 9^-} F(x) - F(5) = 1 - \frac{1}{2}e^{-5/3} - \frac{1}{2}e^{-1} - \left(1 - \frac{1}{2}e^{-3} - \frac{1}{2}e^{-2}\right) = -\frac{1}{2}e^{-3} - \frac{1}{2}e^{-2} + \frac{1}{2}e^{5/3} + \frac{1}{2}e^{-1}$$

$$P(X > 5) = 1 - P(X \leq 5) = 1 - F(5) = 1 - \left(1 - \frac{1}{2}e^{-5/3} - \frac{1}{2}e^{-1}\right) = \frac{1}{2}e^{-5/3} + \frac{1}{2}e^{-1}$$

Solución e)

$$P(X > 5/X < 9) = \frac{P(5 < X < 9)}{P(X < 9)} \Rightarrow P(X < 9) = P(X \leq 9) - P(X = 9) = 1 - \frac{1}{2}e^{-3} - \frac{1}{2}e^{-2}$$

81) Sea X una variable aleatoria con densidad :

$$f(x) = \begin{cases} 1 - |x| & \text{si } |x| \leq 1 \\ 0 & \text{en caso contrario} \end{cases}$$

a) Encontrar la función de distribución de X

b) Calcular $P(X \geq 0)$ y $P(|X| < 1/2)$

a) Solución 1 : Mediante Cálculo de área $a = \frac{bxa}{2}$.

La función valor absoluto es :

$$|x| = \begin{cases} +x & \text{si } x \geq 0 \\ -x & \text{si } x \leq 0 \end{cases}$$

La función quedará definida por trozos de la siguiente manera :

$$f(x) = \begin{cases} 1 - x & \text{si } 0 \leq x \leq 1 \\ 1 + x & \text{si } -1 \leq x \leq 0 \end{cases}$$

Además como és simétrica su media es el valor central

Area Trozo $-1 \leq x \leq 0$
$F_X(x) = \frac{(x-(-1)(1+x)}{2} = \frac{(x+1)(x+1)}{2} = \frac{(x+1)^2}{2}$

El otro trozo, al ser simétrico $= 1 - F_X(x)$, o sea el complementario

$F_X(x) = 1 - \frac{(1-x)(1-x)}{2} = 1 - \frac{(1-x)^2}{2}$

$$F_X(x) = \begin{cases} 0 & \text{si } x \leq -1 \\ \frac{(x+1)^2}{2} & \text{si } -1 \leq x \leq 0 \\ 1 - \frac{(1-x)^2}{2} & \text{si } 0 \leq x \leq 1 \\ 1 & \text{si } 1 < x \end{cases}$$

a) Solución 2 : Integrando cada trozo

$$F_X(x) = P(X \leq x) = \int_{-\infty}^{x} f_t dt = \int_{-1}^{x} (1+t)dt = t + \frac{t^2}{2}\bigg|_{-1}^{x} = x + \frac{x^2}{2} - (-1 + \frac{1}{2})$$

$$= \frac{(x+1)^2}{2} F_X(x) = P(X \leq x) = \int_{-1}^{x} f_t dt = \int_{-1}^{0} (1+t)dt + \int_{0}^{x} (1-t)dt = 1 - \frac{(1-x)^2}{2}$$

b) Solución 1 : $P(|X| \leq \frac{1}{2}) = P(\frac{1}{2} < X < -\frac{1}{2}) = F_X(\frac{1}{2}) - F_X(-\frac{1}{2}) =$
Sustituyendo en la función de distribución : $1 - \frac{(1-1/2)^2}{2} - \frac{((-1/2)+1)^2}{2} = 1 - \frac{1}{8} - \frac{1}{8} = \frac{3}{4}$

b) Solución 2 : Por Simetría $P(|x| < \frac{1}{2}) = 1 - 2\frac{(-1/2-(-1))1/2)}{2} = 1 - \frac{1}{4} = \frac{3}{4}$
Integrando los trozos sale igual :

$$\int_{-1/2}^{1/2} f_x dx = \int_{-1/2}^{0} (1+x)dx + \int_{0}^{1/2} (1-x)dx = [x + \frac{x^2}{2}]_{-1/2}^{0} + [x - \frac{x^2}{2}]_{0}^{1/2} = \frac{3}{4}$$

84) Consideremos $f : \Re \rightarrow \Re$ dada por

$$f(x) = \begin{cases} 0 & \text{si } x \leq 0 \\ a(1+x) & \text{si } 0 < x \leq 1 \\ 2/3 & \text{si } 1 < x \leq 2 \\ 0 & \text{si } x > 2 \end{cases}$$

a) Determinar el valor de a para que f sea una densidad

b) En este caso si X es una variable aleatoria continua con densidad f, calcular $P(1/2 < X \leq 3/2)$

c) Calcular, para el valor de a encontrado $E(X)$ y $Var(X)$.

a) Solución 1 : Mediante la gráfica

$$\frac{2}{3} + \frac{a}{2} + a = 1 \Longrightarrow (\frac{1}{2} + 1)a = 1 - \frac{2}{3} \Longrightarrow a = \frac{2}{9}$$

a) Solución 2 : Integrando cada trozo

$$1 = \int_{-\infty}^{+\infty} f_x dx = \int_0^1 a(1+x)dx + \int_1^2 (2/3)dx = a(x+\frac{x^2}{2})\Big|_0^1 + \frac{2}{3}x|_1^2 = a(1+\frac{1}{2}) - 0 + (\frac{2}{3})2 - (\frac{2}{3})1 \Longrightarrow a = \frac{2}{9}$$

b) Solución : Integrando la función de densidad

$$P(1/2 < X \leq 3/2) = \int_{1/2}^{3/2} f_x dx = \int_{1/2}^1 \frac{2}{9}(1+x)dx + \int_1^{3/2} (2/3)dx = \frac{2}{9}(x+\frac{x^2}{2})|_{1/2}^1 + \frac{2}{3}(\frac{3}{2} - 1) = \frac{19}{36}$$

c) Solución :

$$E(X) = \int_0^1 x\frac{2}{9}(1+x)dx + \int_1^2 x\frac{2}{3}dx = \frac{2}{9}\left(\frac{x^3}{3} + \frac{x^2}{2}\right)\Bigg|_0^1 + \frac{2}{3}\left(\frac{4}{2} - \frac{1}{2}\right) = \frac{2}{9}\left(\frac{1}{3} + \frac{1}{2}\right) + \frac{2}{3}\frac{3}{2} = \frac{32}{27}$$

$$E(X^2) = \int_0^1 x^2\frac{2}{9}(1+x)dx + \int_1^2 x^2\frac{2}{3}dx = \frac{2}{9}\left(\frac{x^3}{3} + \frac{x^4}{4}\right)\Bigg|_0^1 + \frac{2}{3}\left(\frac{x^3}{3}\right)\Bigg|_1^2 = \frac{2}{9}\left(\frac{1}{3} + \frac{1}{4}\right) + \frac{2}{3}\left(\frac{8}{3} - \frac{1}{3}\right) = \frac{91}{54}$$

$$Var(X) = E(X^2) - \big(E(X)\big)^2 = \frac{91}{54} - \left(\frac{32}{27}\right)^2 = \frac{409}{1458}$$

Transformación de variables aleatorias

85) Sea X la variable que nos da la puntuación obtenida al lanzar un dado. Calcular la distribución de las variables $Y = X^2$, $Z = X^2 - 6x + 6$. Calcular las esperanzas y las varianzas de las variables Y y Z.

a) Solución $Y = X^2$

$$P(Y = k) = P(X^2 = k)$$

Con esta transformación Y toma los valores : $\{1^2, 2^2, 3^2, 4^2, 5^2, 6^2\} = \{1, 4, 9, 16, 25, 36\}$

$$E(Y) = \sum_{x=0}^{6} x \cdot P(x) = 1 \cdot \frac{1}{6} + 4 \cdot \frac{1}{6} + 9 \cdot \frac{1}{6} + 25 \cdot \frac{1}{6} + 36 \cdot \frac{1}{6} = \frac{75}{6}$$

$$E(Y^2) = \sum_{x=0}^{6} x^2 \cdot P(x) = 1^2 \cdot \frac{1}{6} + 4^2 \cdot \frac{1}{6} + 9^2 \cdot \frac{1}{6} + 25^2 \cdot \frac{1}{6} + 36^2 \cdot \frac{1}{6} = \frac{2019}{6}$$

$$Var(Y) = E(Y^2) - (E(Y))^2 = \frac{2019}{6} - \left(\frac{75}{6}\right)^2 = 180{,}25$$

b) Solución $Z = x^2 - 6x + 6$

Con esta transformación Z toma los valores : $\{f(1), f(2), f(3), f(4), f(5), f(6)\} = \{1, -2, -3, -2, 1, 6\}$
Hay valores que se repiten (1 y -2), por tanto las probabilidades son :

$P(Z = 1) = P(x^2 - 6x + 6) = 1 = P(\{Z = 1\} \cup \{Z = 5\}) = \frac{2}{6}$
$P(Z = -2) = P(x^2 - 6x + 6) = -2 = P(\{Z = 2\} \cup \{Z = 4\}) = \frac{2}{6}$
$P(Z = -3) = P(x^2 - 6x + 6) = -3 = P(Z = 5) = \frac{1}{6}$
$P(Z = 6) = P(x^2 - 6x + 6) = 1 = P(Z = 6) = \frac{1}{6}$

$$E(Z) = \sum_{x=0}^{4} z \cdot P(z) = 1 \cdot \frac{2}{6} + (-2) \cdot \frac{2}{6} + (-3) \cdot \frac{1}{6} + 6 \cdot \frac{1}{6} = -\frac{2}{3}$$

$$E(Z^2) = \sum_{x=0}^{4} z \cdot P(z) = 1^2 \cdot \frac{2}{6} + (-2)^2 \cdot \frac{2}{6} + (-3)^2 \cdot \frac{1}{6} + 6^2 \cdot \frac{1}{6} = \frac{55}{6}$$

$$Var(Z) = E(Y^2) - (E(Y))^2 = \frac{2019}{6} - \left(\frac{75}{6}\right)^2 = 180{,}25$$

86) Conocida la función de distribución de una variable aleatoria continua X, hallar la función de densidad de $Y = X^2$ y de $Z = e^x$

Solución : $Y = X^2$
La función es contínua , $D_Y = (0, +\infty)$, $y > 0$

$$F_Y(y) = P(Y \leq y) = P(X^2 \leq y) = P(-\sqrt{y} \leq x \leq \sqrt{y}) = F_X(\sqrt{y}) - F_X(-\sqrt{y})$$

$$F_Y(y) = \begin{cases} F_X(\sqrt{y}) - F_X(-\sqrt{y}) & \text{si } y \leq 0 \\ 0 & \text{en caso contrario} \end{cases}$$

Función de densidad : Derivar la función de distribución (Regla de la Cadena : $f(x)\cdot f'(x)$

$$f_Y(y) = F_Y'(y) = \begin{cases} f_X(\sqrt{y})\Big(\frac{1}{2\sqrt{y}}\Big) - F_X(-\sqrt{y})\Big(-\frac{1}{2\sqrt{y}}\Big) & \text{si } y > 0 \\ 0 & \text{en caso contrario} \end{cases}$$

Solución : $Z = e^x$

$$F_Z(z) = P(Z \leq z) = P(e^x \leq z) = P(x \leq ln(z)) = F_X(ln(z))$$

$$F_Z(z) = \begin{cases} F_X(lnz) & \text{si } z < 0 \\ 0 & \text{si } z > 0 \end{cases}$$

Función de densidad : Derivar la función de distribución (Regla de la Cadena : $f(x)\cdot f'(x))$

$$f_Z(z) = F_Z'(z) = \begin{cases} f_X(lnz)\Big(\frac{1}{z}\Big) & \text{si } z < 0 \\ 0 & \text{si } z > 0 \end{cases}$$

87) La función de distribución de una variable aleatoria X es:

$$F_X(x) = \begin{cases} 0 & \text{si } x \leq 0 \\ 1 - e^(-x^2) & \text{si } x > 0 \end{cases}$$

Encontrar la función de densidad de la variable aleatoria $Y = ln(X + 1)$

Solución :

La función es contínua , $D_X = (0, +\infty)$, $D_Y = (0, +\infty)$, $y > 0$, $Y = ln(x + 1)$

$$F_Y(y) = P(Y \leq y) = P(ln(x + 1) \leq y) = P(x + 1 \leq e^y) = P(x \leq e^y - 1) =$$

$$F_X(e^y - 1) = \begin{cases} 0 & \text{si } e^y - 1 < 0 \\ 1 - e^{-(e^y-1)^2} & \text{si } e^y - 1 > 0 \end{cases} \Longrightarrow F_X(e^y - 1) = \begin{cases} 0 & \text{si } y < 0 \\ 1 - e^{-(e^y-1)^2} & \text{si } y > 0 \end{cases}$$

Función de densidad : Derivar la función de distribución (Regla de la Cadena : $f(x){\cdot}f'(x)$)

$$f_X(x) = F'_X(x) = \begin{cases} 0 & \text{si } y > 0 \\ -e^{-(e^y-1)^2}(-2(e^y - 1)e^y) & \text{si } y < 0 \end{cases}$$

88) La función de densidad de una variable aleatoria X es:

$$f_X(x) = \begin{cases} x+1 & \text{si } x \in (-1,0] \\ -x+1 & \text{si } x \in (0,1] \\ 0 & \text{si } x \in (-\infty,-1] \cup (1,\infty) \end{cases}$$

Definimos la variable aleatoria $Y = g(X)$, donde g es la función

$$g(x) = \begin{cases} 1 & \text{si } x \in (1/2,\infty) \\ 0 & \text{si } x \in (-1/2,1/2] \\ -1 & \text{si } x \in (-\infty,-1/2] \end{cases}$$

Determinar la función de masa de probabilidad y la de distribución de Y. Calcular las esperanzas y varianzas de X e Y

Solución :

Se trata de una transformación para pasar de continua a discreta , $D_X = (-1,1)$, $D_Y = (-1,0,1)$, $Y = h(X)$

$P_Y(y) = P(Y = y)$ Como que $f(x)$ es una distribución triangular se puede calcular el área del triángulo

- $P(Y=-1) = P(g(X)) = -1) = P(X < -1/2) = \frac{(-\frac{1}{2}-(-1))\frac{1}{2}}{2} = \frac{1}{8}$
- $P(Y=1) = P(g(X)) = 1) = P(X > 1/2) = \frac{1}{8}$ (Por Simetría)
- $P(Y=0) = 1 - \left(\frac{1}{8}+\frac{1}{8}\right) = \frac{3}{4}$

Función de Probabilidad de Y : $P(y) = \begin{cases} 1/8 & \text{si } y=-1 \\ 3/4 & \text{si } y=0 \\ 1/8 & \text{si } y=1 \end{cases}$

Función de Distribución de Y (Acumulada) : $F_Y(y) = \begin{cases} 0 & \text{si } y < -1 \\ 1/8 & \text{si } -1 \le y < 0 \\ 7/8 & \text{si } 0 \le y < 1 \\ 1 & \text{si } 1 \le y \end{cases}$

Nota : Al ser una distribución simétrica sus Esperanzas valen 0

$$E(X) = \int_{-\infty}^{+\infty} f_x dx = \int_{-1}^{0} x(x+1)dx + \int_{0}^{1} x(-x+1)dx = 0$$

$$E(X) = \sum_{x=1}^{3} xP(x) = \frac{1}{8}(-1) + \frac{3}{4}(0) + \frac{1}{8}(1) = 0$$

89) El precio por estacionar un vehículo en un aparcamiento es de 75 pts. por la primera hora o fracción, y de 60 pts. a partir de la segunda hora o fracción. Supongamos que el tiempo, en horas, que un vehículo cualquiera permanece en el aparcamiento se modeliza según la siguiente función de densidad :

$$f_X(x) = \begin{cases} e^{-x} & \text{si } x \geq 0 \\ 0 & \text{si } x < 0 \end{cases}$$

Calcular el ingreso medio por vehículo

Solución :

Sea la variable aleatoria Y=Ingreso medio por vehículo, X=Tiempo en horas
Analizado cada caso tenemos que : Si el tiempo es 1 hora o menos : $(0 < x < 1) = coste = 75 + 60{\cdot}0$
Si está entre 1 hora y dos horas : $(1 < x < 2) = coste = 75 + 60{\cdot}1$, etc...
Se define la transformación : $Y = h(X) = 75 + k{\cdot}60$ si $k \leq x < k+1$ para $k = 0, 1, 2, \dots$
Se pide el Valor Esperado de $Y = E(Y)$

$$E(Y) = \int_{-\infty}^{+\infty} f_Y(y)dy =$$

$$E(Y) = E(h(X)) = \int_{-\infty}^{+\infty} h(X) \cdot f_X(x)dx = \int_0^{+\infty} h(X) \cdot e^{-x}dx$$

$$\int_0^1 75 \cdot e^{-x}dx + \int_1^2 (75+60) \cdot e^{-x}dx + \cdots + \int_k^{k+1} (75+k60) \cdot e^{-x}dx$$

$$= \sum_{k=0}^{+\infty} \int_k^{k+1} (75+k60) \cdot e^{-x}dx = \Big[-e^{-x}\Big]_k^{k+1} = -e^{-(k+1)} + e^{-k} = -e^{-k-1} + e^{-k}$$

$$= \sum_{k=0}^{+\infty} (75+k60)(-e^{-k-1}) + \sum_{k=0}^{+\infty} (75+k60)(e^{-k})(^2)$$

Descomponemos en varias partes la suma : Sea $\sum_{k=0}^{+\infty} -e^{-k+1} + e^{-k} =$

$$(1-e)\sum_{k=0}^{+\infty} \left(\frac{1}{e}\right)^k = (1-e)\frac{1}{1-e^{-1}} = \frac{1-e}{1-e^{-1}}$$

La otra suma : Sea $\sum_{k=1}^{+\infty} (1-e) \cdot k \cdot e^{-k} =^3$

$$(1-e)\sum_{k=0}^{+\infty} k \cdot e^{-k} = {}^4\frac{1}{e}(1-e)\sum_{k=0}^{+\infty} k \cdot \left(\frac{1}{e}\right)^{k-1} = \frac{1-e}{e}\frac{1}{(1-e^{-1})^2}{}^5$$

Por tanto $E(Y) = 75\frac{1-e}{1-e^{-1}} + 60\frac{1-e}{e}\frac{1}{(1-e^{-1})^2}$

---

[2]Regla de la cadena : $(e^{f(x)})' = e^{f(x)} \cdot f'(x) \Rightarrow (e^{\lambda x})' = \lambda e^{\lambda x}$
[3]El sumatorio empieza en 1 ya que en 0 vale 0
[4]Se multiplica por $\frac{1}{e}$
[5]$\sum_{k=1}^{+\infty} k \cdot x^{k-1} = \left(\frac{1}{1-x}\right) = \frac{1}{(1-x)^2}$

90) Calcular E(X) y Var(X) para una v.a. X que tiene por función de densidad:

$$f_X(x) = \begin{cases} \frac{1}{2\sqrt{x}} & \text{si } x \in (0,1) \\ 0 & \text{si } x \notin (0,1) \end{cases}$$

Solución :

$$E(X) = \int_{-\infty}^{+\infty} x \cdot f(x)dx = \int_0^1 x\frac{1}{2\sqrt{x}}dx = \frac{1}{2}\int_0^1 \frac{x}{x^{1/2}} = \frac{1}{2}\int_0^1 x^{1-1/2} = \frac{1}{2}\left[\frac{2x^{3/2}}{3}\right]_0^1 = \frac{1}{3}$$

$$E(X^2) = \int_{-\infty}^{+\infty} x^2 \cdot f(x)dx = \int_0^1 x^2\frac{1}{2\sqrt{x}}dx = \frac{1}{2}\int_0^1 \frac{x^2}{x^{1/2}} = \frac{1}{2}\int_0^1 x^{2-1/2} = \frac{1}{2}\left[\frac{2x^{5/2}}{5}\right]_0^1 = \frac{1}{5}$$

$$Var(X) = E(X^2) - (E(X))^2 = \frac{1}{5} - \frac{1}{9} = \frac{4}{45}$$

91) Consideremos una variable aleatoria X con función de densidad

$$f_X(x) = \begin{cases} \frac{1}{2} & \text{si } 0 < x < 2 \\ 0 & \text{en caso contrario} \end{cases}$$

Determinar $E(Y)$, donde $Y = ln(X)$

Solución :

Primero mediante la fórmula de transformación de v.a. hallamos la función de densidad

- $Y = ln(X)$
- $h^{-1}(Y) = e^y$
- $h'(Y) = \frac{1}{x}$

$f_Y(y) = \frac{f_X(e^y)}{\left|\frac{1}{x}\right|} = \frac{\frac{1}{2}}{\frac{1}{e^y}} = \frac{e^y}{2}$

Función de densidad :

$$f_Y(y) = \begin{cases} \frac{e^y}{2} & \text{si } -\infty < y < ln2 \\ 0 & \text{en caso contrario} \end{cases}$$

$$E(Y) = \int_{-\infty}^{ln(2)} y \cdot \frac{e^y}{2} dy = \frac{1}{2} \int_{-\infty}^{ln(2)} y \cdot e^y dy =$$

Integramos por partes :

$$\begin{cases} u = y & du = dy \\ dv = e^y dy & v = e^y \end{cases}$$

$$\frac{1}{2}\left[y \cdot e^y \Big|_{-\infty}^{ln2} - \int_{-\infty}^{ln(2)} e^y dy \right] = \frac{1}{2}\left(ln2 \cdot e^{ln2} - \lim_{y \to -\infty} y \cdot e^y - e^y \Big|_{-\infty}^{ln2} \right) = \frac{1}{2}\left(2 \cdot ln2 - \left(2 - \lim_{y \to -\infty} e^y \right) \right) =$$

$= \frac{1}{2}(2 \cdot ln2 - 2) = ln2 - 1$

Desigualdad de Chebychef

93) Sea X una variable aleatoria que toma los valores $-k, 0, k$ con probabilidades $\frac{1}{8}, \frac{3}{4}$ y $\frac{1}{8}$ respectivamente.

a) Calcular $P(|X-\mu| \geq 2\sigma)$ $(\mu = E(X), \sigma^2 = Var(X))$

b) Obtener una cota superios de la probabilidad anterior utilizando la Desigualdad de Chebychef.

Solución

- $E(X) = \sum_{x=1}^{3} xP(x) = -k \cdot \frac{1}{8} + 0 \cdot \frac{3}{4} + k \cdot \frac{1}{8} = 0$
- $E(X^2) = \sum_{x=1}^{3} x^2 \cdot P(x) = -k^2 \cdot \frac{1}{8} + 0^2 \cdot \frac{3}{4} + k^2 \cdot \frac{1}{8} = \frac{k^2}{4}$
- $Var(X) = E(X^2) - (E(X))^2 = \frac{k^2}{4}$
- Por tanto $\mu = 0, \sigma^2 = \frac{k^2}{4}, \sigma = \sqrt{\frac{k^2}{4}} = \frac{k}{2}$

Sustituimos los valores en la fórmula : $P\left(|X-0| \geq 2 \cdot \frac{k}{2}\right) = P(|X| \geq k)$

95) El número de periódicos vendidos en un kiosko es una variable aleatoria de media 200 y desviación típica 10. ¿Cuántos ejemplares diarios tiene que encargar el dueño del kiosko para tener la seguridad de que al menos el 99 % de los días no se quedará sin existencias?
Solución a)

- X=Nº de periòdicos vendidos
- $\mu_X = 200$
- $\sigma_X = 10$
- a=Cantidad de periódicos que aseguran el 99 % de los días no se quedarán sin existencias

Aplicamos la desigualdad de Chebychef : $P(|X - \mu| \geq a) \leq \frac{\sigma^2}{a^2}$

Interpretando el enunciado, se dice que el número de periódicos vendidos (X) *tiene que ser menor o igual al nº de periódicos que tiene que encargar el vendedor para no quedarse sin existencias* (a)*, Y esto corresponde a la siguiente desigualdad :* $P(X \leq a) = 0{,}99$

En la Desigualdad de Chebyshef la igualdad está al revés, para aplicar la anterior aplicamos el complementario en toda la desigualdad, quedando de esta manera : $P(|X - \mu_X| \leq k) \geq 1 - \frac{\sigma^2}{k^2} = 0{,}99$. k es el valor que desconocemos.

$$P(\mu_X - k \leq X \leq \mu_X + k) \geq 1 - \frac{\sigma^2}{k^2})$$

$$1 - \frac{10^2}{k^2} = 0{,}99 \Rightarrow k^2 = 10000 \Rightarrow k = 100$$

$$a = \mu_X + k = 200 + 100 = 300$$

96) El número de días al año que un trabajador de un pequeño comercio está de baja por enfermedad es una variable aleatoria de media 10 y desviación típica 2. Si cada uno de estos días la empresa pierde 10000 pts. determinar los límites inferior y superior de las pérdidas anuales por trabajador con un grado de fiabilidad no inferior a 95 %

Solución)

- X=Nº de días de baja del trabajador
- $\mu_X = 10$
- $\sigma_X = 2$

Aplicando la Desigualdad de Chebyshef : $P(|X - \mu_X| \geq a) \leq \frac{\sigma^2}{a^2} = 0{,}95.$

Aplicamos el complementario a la Desigualdad : $P(\mu_X - k \leq X \leq \mu_X + k) \geq 1 - \frac{\sigma^2}{k^2})$

$$1 - \frac{2^2}{k^2} = 0{,}95 \Rightarrow k^2 = \sqrt{\frac{4}{0{,}05}} \Rightarrow k = \sqrt{80}$$

Los límites estarán entre $10000(10 - \sqrt{80}) \leq coste \leq 10000(10 + \sqrt{80})$