Distribuciones notables

Introducción

- En este tema estudiaremos diversos tipos de experimentos que son muy frecuentes y algunas de las variables aleatorias asociadas a ellos.
- Estas variables reciben distintos nombres que aplicaremos sin distinción al tipo de población del experimento a la variable o a su función de probabilidad, densidad o distribución.
- Empezaremos con las variables aleatorias discretas que se presentan con frecuencia ya que están relacionadas con situaciones muy comunes como el número de caras en varios lanzamiento de una moneda, el número de veces que una maquina funciona hasta que se estropea, el numero de clientes en una cola,...

Distribución Bernoulli

- Consideremos un experimento con dos resultados posibles éxito (E) y fracaso (F). El espacio de sucesos será.
- Supongammos que $P(E) = p$ y entonces $P(F) = 1 - p = q$ con $0 < p < 1$.
- Consideremos la aplicación

$$X : \Omega = \{E, F\} \to \mathbb{R}$$

definida por

$$X(E) = 1,\ X(F) = 0$$

- Su función de probabilidad es

$$P_X(x) = \begin{cases} q & \text{si } x = 0 \\ p & \text{si } x = 1 \\ 0 & \text{en cualquier otro caso} \end{cases}$$

- Bajo estas condiciones diremos que X sigue una distribución de probabilidad Bernoulli de parámetro p y lo denotaremos por

$$X \equiv Ber(p) \text{ o también } X \equiv B(1, p).$$

- A los experimentos de este tipo (éxito/fracaso) se les denomina experimentos Bernoulli.

Resumen v.a con distribución Bernoulli, $Ber(p)$

Bernoulli	$Ber(p)$
$D_X =$	$\{0,1\}$
$P_X(x) = P(X=x) =$	$\begin{cases} q & \text{si } x=0 \\ p & \text{si } x=1 \\ 0 & \text{en otro caso} \end{cases}$
$F_X(x) = P(X \leqslant X) =$	$\begin{cases} 0 & \text{si } x<0 \\ q & \text{si } 0 \leqslant x < 1 \\ 1 & \text{si } 1 \leqslant x \end{cases}$
$E(X) =$ $Var(X) =$	p $p \cdot q$

Veamos los cálculos básicos $Ber(p=0.25)$

```
> pbinom(0,size=1,prob=0.25)
[1] 0.75
> pbinom(1,size=1,prob=0.25)
[1] 1
```



```
> dbinom(0,size=1,prob=0.25)
[1] 0.75
> dbinom(1,size=1,prob=0.25)
[1] 0.25
> rbinom(n=20,size = 1,prob=0.25)
 [1] 1 0 0 0 1 0 0 0 0 1 0 0 1 0 0 1 0 0 0 0
```


El siguiente código dibuja las función de probabilidad y la de distribución de una $Ber(0.25)$

```
> plot(x=c(0,1),y=dbinom(c(0,1),size=1,prob=0.25),
+     ylim=c(0,1),xlim=c(-1,2),xlab="x",
+     main="Función de probabilidad\n Ber(p=0.25)")
> curve(pbinom(x,size=1,prob=0.25),
+     xlim=c(-1,2),col="blue",
+     main="Función de distribución\n Ber(p=0.25)")
```

Matemáticas III
GINF

Variables Aleatorias
Distribuciones notables
Algunas variables aleatorias discretas
Distribución Bernoulli
Resumen v.a con distribución Bernoulli, $Ber(p)$
Distribución Binomial
Distribución Geométrica
Distribución binomial negativa

Matemáticas III
GINF

Variables Aleatorias
Distribuciones notables
Algunas variables aleatorias discretas
Distribución Bernoulli
Distribución Binomial
Distribución Geométrica
Distribución binomial negativa

Distribución Binomial

Si repetimos n veces de forma independiente un experimento Bernoulli de parámetro p.
El espacio muestral Ω estará formado por cadenas de E's y F's de longitud n Consideremos la v.a.

$$X(\overbrace{EFFF\ldots EEF}^{n}) = \text{número de éxitos en la cadena.}$$

Entonces

$$P_X(x) = \begin{cases} \binom{n}{x} p^x (1-p)^{n-x} & \text{si } x = 0, 1, \ldots, n \\ 0 & \text{en otro caso} \end{cases}.$$

Matemáticas III
GINF

Variables Aleatorias
Distribuciones notables
Algunas variables aleatorias discretas
Distribución Bernoulli
Distribución Binomial
Distribución Geométrica
Distribución binomial negativa

En las anteriores circustancias diremos que la v.a. sigue una ley de probabilidad binomial con parámetros n y p y lo denotaremos así

$$X \equiv B(n, p).$$

Obviamente se tiene que una bernoulli es una binomial con $n = 1$

$$B(1, p) = Ber(p).$$

Observaciones sobre la distribución binomial

- La probabilidad de fracaso la denotaremos con $q = 1 - p$, sinb ningún aviso adicional.
- Su función de distribución no tienen una formula general, por ello esta tabulada.
- En el material de la asignatura disponéis de unas tablas de esta distribución para distintos valores de n y p.
- Cualquier paquete estadístico, hoja de cálculo,... dispone de funciones para el cálculo de estas probabilidades, así que el uso de las tablas queda totalmente anticuado.

Resumen v.a con distribución binomial $B(n,p)$

Binomial	$B(n,p)$
$D_X =$	$\{0,1,\ldots n\}$
$P_X(x) = P(X=x) =$	$\begin{cases} \binom{n}{x} \cdot p^x \cdot (1-p)^{n-x} & \text{si } x = 0,1,\ldots,n \\ 0 & \text{en otro caso.} \end{cases}$
$F_X(x) = P(X \leqslant X) =$	Tabulada
$E(X) =$	$n \cdot p$
$Var(X) =$	$n \cdot p \cdot (1-p)$

Cálculos con R

Veamos los cálculos básicos $B(n = 10, p = 0.25)$

```
> pbinom(0,size=10,prob=0.25)
[1] 0.05631351
> pbinom(1,size=10,prob=0.25)
[1] 0.2440252
```


Funciones de R para la binomial

```
> dbinom(0,size=10,prob=0.25)
[1] 0.05631351
> dbinom(1,size=10,prob=0.25)
[1] 0.1877117
> rbinom(n=20,size = 10,prob=0.25)
 [1] 3 2 3 4 2 2 1 3 2 4 2 4 4 1 2 3 3 3 3 2
```

El siguiente código dibuja las función de probabilidad y la de distribución de una $B(n=10, p=0.25)$

```
> plot(x=c(0,10),y=dbinom(c(0:10),size=10,prob=0.25),
+   ylim=c(0,1),xlim=c(-1,11),xlab="x",
+   main="Función de probabilidad\n B(n=10,p=0.25)")
> curve(pbinom(x,size=10,prob=0.25),
+   xlim=c(-1,10),col="blue",
+   main="Función de distribución\n B(n=10,p=0.25)")
```


Matemáticas III
GINF

Variables Aleatorias

Distribuciones notables

Algunas variables aleatorias discretas

Distribución Bernoulli

Distribución Binomial

Distribución Geométrica

Distribución binomial negativa

Matemáticas III
GINF

Variables Aleatorias

Distribuciones notables

Algunas variables aleatorias discretas

Distribución Bernoulli

Distribución Binomial

Distribución Geométrica

Distribución binomial negativa

Distribución Geométrica

- Repetitamos un experimento Bernoulli, de parámetro p, de forma independiente hasta obtener el primer éxito.
- Sea X la v.a. que cuenta el número de fracasos antes del primer éxito. Por ejemplo que hayamos tenido x fracasos será una cadena de x fracasos culminada con un éxito. Más concretamente

$$P(\overbrace{FFF\ldots F}^{x}E)=P(F)^x\cdot P(E)=(1-p)^x\cdot p=q^x\cdot p.$$

Su función de probabilidad es

$$P_X(x) = P(X = x) = \begin{cases} (1-p)^x p & \text{si } x = 0, 1, 2, \ldots \\ 0 & \text{en otro caso} \end{cases}.$$

- Una v.a. de este tipo diremos que sigue una distribución geométrica de parámetro p..
- La denotaremos por $Ge(p)$.
- Su dominio es $D_X = \{0, 1, 2, \ldots\}$.

Matemáticas III GINF
Variables Aleatorias
Distribuciones notables
Algunas variables aleatorias discretas
Distribución Bernoulli
Distribución Binomial
Distribución Geométrica
Propiedad de la carencia de memoria
La variable geométrica que cuenta el número de intentos
Resumenes de las variables con distribución geométrica $Ge(p)$
Resumen v.a con distribución geométrica $Ge(p)$ comenzando en 1.
Distribución binomial negativa

Propiedades (Propiedad de la carencia de memoria)

Sea X una v.a. discreta con dominio $D_X = \{0, 1, 2, \ldots\}$. Entonces X sigue una ley $Ge(p)$ si y sólo si

$$P(X \geqslant k + j / X > j) = P(X \geqslant k)$$

para todo $k, j = 1, 2, 3 \ldots$ y $P(X = 1) = p$.

Matemáticas III GINF
Variables Aleatorias
Distribuciones notables
Algunas variables aleatorias discretas
Distribución Bernoulli
Distribución Binomial
Distribución Geométrica
Propiedad de la carencia de memoria
La variable geométrica que cuenta el número de intentos
Resumenes de las variables con distribución geométrica $Ge(p)$
Resumen v.a con distribución geométrica $Ge(p)$ comenzando en 1.
Distribución binomial negativa

- La igualdad $P(X \geqslant k + j / X > j) = P(X \geqslant k)$ significa que aunque ya llevemos más de j fracasos la probabilidad de que necesitemos al menos k intentos más no disminuye es la misma que si empezáramos de nuevo el experimento.
- A este efecto se le suele referenciar con la frase el experimento carece de memoria o es un experimento sin memoria.

Matemáticas III GINF
Variables Aleatorias
Distribuciones notables
Algunas variables aleatorias discretas
Distribución Bernoulli
Distribución Binomial
Distribución Geométrica
Propiedad de la carencia de memoria
La variable geométrica que cuenta el número de intentos
Resumenes de las variables con distribución geométrica $Ge(p)$
Resumen v.a con distribución geométrica $Ge(p)$ comenzando en 1.
Distribución binomial negativa

La variable geométrica que cuenta el número de intentos para obtener el primer éxito.

- Supongamos que sólo estamos interesados en el número de intentos para obtener el primer éxito.
- Si definimos $Y=$ número de intentos para obtener el primer éxito. Entonces $Y = X + 1$ donde $X \equiv Ge(p)$.
- Su dominio es valores en $\{1, 2, \ldots\}$
- $E(Y) = E(X+1) = E(X) + 1 = \frac{1-p}{p} + 1 = \frac{1}{p}$.
- $Var(Y) = Var(X+1) = Var(X) = \frac{1-p}{p^2}$.

Resumen v.a con distribución geométrica $Ge(p)$ empezando en 0

Y = número de fracasos para conseguir el primer éxito

Geométrica que empieza en 0

$$D_X = \{0, 1, \ldots n\}$$

$$P_X(x) = P(X = x) = \begin{cases} (1-p)^x \cdot p & \text{si } x = 0, 1, \ldots, n \\ 0 & \text{en otro caso.} \end{cases}$$

$$F_X(x) = P(X \leqslant X) = \begin{cases} 0 & \text{si } x < 0 \\ 1 - (1-p)^{k+1} & \text{si } \begin{cases} k \leqslant x < k+1 \\ \text{para } k = 1, 2, \ldots \end{cases} \end{cases}$$

$$E(X) = \frac{1-p}{p}$$
$$Var(X) = \frac{q}{p^2}$$

Matemáticas III GINF

Variables Aleatorias
Distribuciones notables
Algunas variables aleatorias discretas
Distribución Bernoulli
Distribución Binomial
Distribución Geométrica
Propiedad de la carencia de memoria
La variable geométrica que cuenta el número de intentos
Resumenes de las variables con distribución geométrica $Ge(p)$
Resumen v.a con distribución geométrica $Ge(p)$ comenzando en 1.
Distribución binomial negativa

Resumen v.a con distribución geométrica $Ge(p)$ comenzando en 1

X = número de intentos para obtener el primer éxito

Geométrica $Ge(p)$, $q = 1 - p$.

$$D_X = \{1, \ldots n\}$$

$$P_X(x) = P(X = x) = \begin{cases} (1-p)^{x-1} \cdot p & \text{si } x = 1, \ldots, n \\ 0 & \text{en otro caso.} \end{cases}$$

$$F_X(x) = P(X \leqslant X) = \begin{cases} 0 & \text{si } x < 1 \\ 1 - q^k & \text{si } \begin{cases} k \leqslant x < k+1 \\ \text{para } k = 1, 2, \ldots \end{cases} \end{cases}$$

$$E(X) = \frac{1}{p}$$
$$Var(X) = \frac{1-p}{p^2}$$

Matemáticas III GINF

Variables Aleatorias
Distribuciones notables
Algunas variables aleatorias discretas
Distribución Bernoulli
Distribución Binomial
Distribución Geométrica
Propiedad de la carencia de memoria
La variable geométrica que cuenta el número de intentos
Resumenes de las variables con distribución geométrica $Ge(p)$
Resumen v.a con distribución geométrica $Ge(p)$ comenzando en 1.
Distribución binomial negativa

Cálculos con R

Veamos los cálculos básicos con R para la distribución geométrica $Ge(p = 0.25)$ emnpezando en 0

```
> dgeom(0,prob=0.25)
[1] 0.25
> pgeom(0,prob=0.25)
[1] 0.25
> dgeom(1,prob=0.25)
[1] 0.1875
```


Matemáticas III GINF

Variables Aleatorias
Distribuciones notables
Algunas variables aleatorias discretas
Distribución Bernoulli
Distribución Binomial
Distribución Geométrica
Propiedad de la carencia de memoria
La variable geométrica que cuenta el número de intentos
Resumenes de las variables con distribución geométrica $Ge(p)$
Resumen v.a con distribución geométrica $Ge(p)$ comenzando en 1.
Distribución binomial negativa

Cálculos con R

Veamos los cálculos básicos con R para la distribución geométrica $Ge(p = 0.25)$ empezando en 0

```
> pgeom(1,prob=0.25)
[1] 0.4375
> rgeom(n=20,prob=0.25)
 [1]  3  2  5  1  1  1  0  0  0  1  1 12  4  0  8  2
```

El siguiente código dibuja las función de probabilidad y la de distribución de una $Ge(p = 0.25)$

```
> plot(x=c(0,10),y=dgeom(c(0:10),size=10,prob=0.25),
+   ylim=c(0,1),xlim=c(-1,11),xlab="x",
+   main="Función de probabilidad\n Ge(p=0.25)")
> curve(pgeom(x,prob=0.25),
+   xlim=c(-1,10),col="blue",
+   main="Función de distribución\n Ge(p=0.25)")
```


Matemáticas III GINF

Variables Aleatorias
Distribuciones notables
Algunas variables aleatorias discretas
Distribución Bernoulli
Distribución Binomial
Distribución Geométrica
Propiedad de la carencia de memoria
La variable geométrica que cuenta el número de intentos
Resumenes de las variables con distribución geométrica $Ge(p)$
Resumen v.a con distribución geométrica $Ge(p)$ comenzando en 1.
Distribución binomial negativa

Matemáticas III GINF

Variables Aleatorias
Distribuciones notables
Algunas variables aleatorias discretas
Distribución Bernoulli
Distribución Binomial
Distribución Geométrica
Propiedad de la carencia de memoria
La variable geométrica que cuenta el número de intentos
Resumenes de las variables con distribución geométrica $Ge(p)$
Resumen v.a con distribución geométrica $Ge(p)$ comenzando en 1.
Distribución binomial negativa

Distribución binomial negativa

- Repetimos el experimento hasta obtener el r-ésimo éxito.
- Sea X la v.a que cuenta el número de repeticiones del experimento hasta el r-ésimo éxito.
- Su función de probabilidad es

$$P_X(x) = P(X = x) = \begin{cases} \binom{x-1}{r-1}(q)^{x-r}p^r & \text{si } x = r, r+1, \ldots \\ 0 & \text{en otro caso} \end{cases}$$

- Una v.a. con este tipo de distribución recibe el nombre de binomial negativa y la denotaremos por $BN(p, r)$. Notemos que $BN(p, 1) = Ge(p)$.

Resumen v.a con distribución Binomial Negativa $BN(r, p)$

$X =$ número de intentos para conseguir el r-ésimo éxito
Binomial negativa $BN(r, p)$ r éxitos, probabilidad de éxito p, $q = 1 - p$
$D_X = \{r, 1, \ldots\}$
$P_X(x) = P(X = x) = \begin{cases} \binom{x-1}{r-1} \cdot q^{x-r} \cdot p^r & \text{si } x = r, r+1, \ldots \\ 0 & \text{en otro caso.} \end{cases}$
$F_X(x) = P(X \leqslant X) =$ no tiene fórmula (utilizar tablas o función de R.)
$E(X) = \frac{r}{p}$ $Var(X) = \frac{r \cdot q}{p^2}$