> "Je ne fais jamais deux fois la même erreur. Je la fais 5 ou 10 fois avant d'être sur"

Préambule

Définition

Pour un **résultat mathématique** (proposition, propriété). Il est toujours **vrai**. quand il est fort, majeur, on dit que c'est un **théorème**, et quand il est moins important on utilises le terme '**lemme**'.

Définition démonstration

Faire une **démonstration** (preuve) c'est réaliser un processus qui permet de passer d'une (ou plusieurs) proposition supposée vraie prise comme hypothèse à une proposition appelée conclusion et ce en utilisant les **règles de logique**.
On aura plusieurs modes de démonstrations logiques en mathématique:

- Raisonnement par hypothèse auxilière
- Contraposée
- Absurde
- disjonction de cas
- contre-exemple
- analyse synthèse
- récurrence

Condition nécessaire et/ou suffisante

Soit P et Q deux énoncés mathématiques.

-> L'**implication** "$P \Rightarrow Q$", exprime une relation de cause à effet. P est la cause, et Q est l'effet. Elle signifie que pour avoir l'effet. il **suffit**, d'avoir la cause. En ce sens on dit que P est une **condition suffisante** pour Q.

-> Sa **contraposée**: $\text{non}(Q) \Rightarrow \text{non}(P)$ traduit le fait que de l'absence de l'effet on peut déduire l'absence de la cause . Dans ce sens, on dit que Q est une **condition nécessaire** pour P. "**Si je n'ai pas Q alors je n'ai pas P, si je n'ai pas l'effet, je n'ai pas la cause**."

On a l'équivalence logique: $P \Rightarrow Q \equiv \text{non}(Q) \Rightarrow \text{non}(P)$
-> En revanche les implications $P \Rightarrow Q$ et $Q \Rightarrow P$ ne sont pas logiquement équivalentes. $P \Rightarrow Q!(\equiv)Q \Rightarrow P$

- Rappelons que $P \iff Q$ est qualifié de double implication. Il se lit alors: "Pour que P, il faut et il suffit que Q" et on dit que P est une **condition necéssaire pour**Q. On le nomme aussi "Si et seulement si".

(cours 22/09/2023)

Raisonnement par hypothèse a+uxiliaire

But: il sert à montrer qu'un énoncé Q est vrai.
Principe: il s'appuie sur $[P \text{ et } (P \Rightarrow Q)] \Rightarrow Q$. Ainsi, si P est vrai et si $P =< Q$ est vraie alors Q est vrai.
Méthodologie: on cherche une implication $P \Longrightarrow Q$ que l'on sait vraie. Ainsi, au lieu de montrer que Q est vrai, on montre que P est vrai. Q sera vrai car $P \Rightarrow Q$ est vraie.

Exemple

Montrons que $A = \{2,3\}$ et $B = \{x \in \mathbb{R} \mid x^2 + x - 6 = 0\}$ sont deux sous ensembles égaux. On va alors essayer de faire $A = B \Leftrightarrow A \in B \text{ et} B \in A$. Mais il est plus intelligent de faire .
Donc, ici on a: et . Il suffit donc de vérifier que est vrai. C'est immédiat puisque d'une part et vérifient l'équation possédant deux racines réelles distinctes (), on a: et donc:

Remarque

représente le nombres d'éléments dans un ensemble.

Raisonnement par contraposée

Remarque

Parfois c'est plus facile d'utiliser la contraposée.

But: Il sert à montrer une implication .
Principe: il s'appuie sur l'équivalence logique:

Au lieu de l'implication "" on montre plutôt sa contraposée, càd l'implication: .

Méthodologie: On suppose l'énoncé '' vrai, et on montre que cela entraîne que l'énoncé est vrai.

Exemple

Montrons (par contraposée) que:
Il faut donc montrer: pour tout .
Soit . Supposons impair: tel que: . D'où:
Avec . Le nombre est donc pair.

Remarque

c'est que l'on pose une nouvelle définition. On pose une nouvelle variable qui **par définition** est égal à .

Remarque

Donc on doit montrer quelque soit , alors c'est tout les , donc on dit 'prenons un quelconque' => Soit .

Raisonnement par l'absurde

But: il sert à montrer qu'un énoncé est vrai.

Principe: il s'appuie sur l'équivalence logique:

Il consiste donc à montrer que entraîne un énoncé (que l'on doit trouver) et son contraire .

Méthodologie: on suppose l'énoncé vrai et on cherche alors qui, sous cette hypothèse, serait à la fois vrai et faux. On dit que l'on a obtenu une contradiction ou que l'hypothèse est contradictoire.

Exemple

Montrons (par l'absurde) que (rappelons que est par définition, le nombre réel positif dont le carré vaut).
Donc, on va prendre la négation de l'énoncé, ici: , c'est à dire qu'il existe avec et **premiers entre eux** (fraction irréductible, ils ont aucun diviseurs en commun). Donc on va écrire . On va donc l'élever au carré:

Donc, est pair, et donc, est pair. Donc il existe tel que . Remplaçons par dans .

ou encore: càd que est pair. On en déduit que est pair, càd qu'il existe tel que . Donc, on a Donc, ils ont un diviseur commun (). ce qui est contraire à notre hypothèse et sont premiers entre eux. La démonstration par l'absurde de est donc terminée.

Disjonction de cas

but: montrer qu'un énoncé: est vrai.
Principe: il s'appuie sur l'équivalence logique:
Pour résumer, on va diviser l'ensemble en plusieurs sous groupes. ou éléments.
où et si .

Méthodologie:
On cherche des sous-ensembles de tels que: et si et on sépare les raisonnements suivant que .

Exemple

Montrons que pour tout . Utilisons pour cela un raisonnement par disjonction de cas.

1. Si est pair, càd: avec , alors:
2. Si est impair, càd: , avec , alors:

Remarque

On utilises souvent la disjonction de cas afin d'éviter un cas particulier, tel que dans une division.

Raisonnement par contre-exemple

But: montrer qu'un énoncé: est faux.
Principe: on montre que sa négation est vraie. Rappel:

Méthodologie: on cherche alors à exhiber (au moins) un élément in E et que la propriété soit fausse. En d'autres termes, **l'exceptions infirme la règle**.

Exemple

On a l'énoncé: "Toute fonction de dans est soit paire, soit impaire" est faux puisqu'on peut trouver une fonction de qui n'est ni paire, ni impaire. C'est par exemple le cas de l'exponentielle

De même , l'énoncé est faux puisqu'on peut trouver un entier naturel pour lequal . C'est le cas, par exemple, de

Contre-exemple pour une implication:
Un raisonnement par contre exemple sert aussi à montrer qu'un énoncé est faux.

Remarque

Rappelons que l'énoncé exprime une relation de cause à effet pour tout . ici la cuse est . L'effet est . Pour montrer par contre(exempl, qu'un tel énoncé est faux, on montre qu'il existe un pour lequel on a la cause (càd est vrai) mais pas l'effet (càd est faux).

On vient donc de justifier:

Raisonnement par analyse-synthèse

But: déterminer la (les) solution(s) d'un problème.
Méthodologie: il s'effectue en deux étapes:

1. **Étape d'analyse** - On suppose que le problème considéré possède déjà une solution et on en déduit que cette solution possède certaines propriétés (ce sont donc des conditions nécessaires puisqu'on procède par implication).
    - En pratique, cela permet d'identifier un (ou plusieurs) candidat(s).
    - S'il n'y a qu'un seul candidat, alors cette étape d'analyse montre **l'unicité** de la solution du problème considéré.
2. **Étape de synthèse** - On teste ensuite si les conditions nécessaires obtenues sont suffisantes.
    - En pratique, on teste chacun des candidats.
    - Si aucun candidat ne répond au problème.

Remarque

Si on procède par équivalence plutôt que par implication, on a pas forcément besoins de l'étape de synthèse.

Exemple

Montrons que toute fonction réelle est la somme d'une fonction paire et d'une fonction impaire, de manière unique. Soit une fonction définie sur , à valeurs dans .
Étape d'analyse - Supposons qu'il existe deux fonctions paire et impaire telles que:
.
Puisque, est paire et est impaire, on a aussi:
. D'où:
On a aussi:
pour tout . On remarque qu'il n'y a qu'un seul candidat pour et qu'un seul pour ce qui montre l'unicité de et celle de .
Étape de synthèse: on vérifie que les fonctions et conviennent, càd que est paire, impaire (le faire) et que:

Remarque

Si de est pair, alors
Si de est impair, alors .