Aufgabe 14.
(a)
Definition. Fuer $g : \mathbb{N}_0 \to \mathbb{R}^+$ definieren wir

$$\mathcal{O}'(g) := \{f : \mathbb{N}_0 \to \mathbb{R}^+ | \exists n_0 \in \mathbb{N}_0 \forall n \geq n_0 : f(n) \leq c \cdot g(n)\}$$

Behauptung. Es gilt $\mathcal{O}(g) = \mathcal{O}'(g)$ fuer alle $g : \mathbb{N}_0 \to \mathbb{R}^+$
Beweis. Sei $g : \mathbb{N}_0 \to \mathbb{R}^+$ beliebig.
„$\subset$“: Sei $f \in \mathcal{O}(g)$. Dann existiert ein $c \in \mathbb{R}^+$ fuer alle $n \geq n_0$ mit $f(n) \leq c \cdot g(n)$. Insbesondere gilt fuer beliebiges $n_0 \in \mathbb{N}_0$:

$$\forall n \geq n_0 : f(n) \leq c \cdot g(n)$$

Damit folgt $f \in \mathcal{O}'(g)$.
„$\supset$“: Sei nun $f \in \mathcal{O}'(g)$. Dann finden wir $c \in \mathbb{R}^+$ und $n_0 \in \mathbb{N}_0$ mit $f(n) \leq c \cdot g(n)$ fuer alle $n \geq n_0$. O.B.d.A. sei $n_0 \neq 0$, sonst ist nichts zu zeigen. Nun definieren wir $M := \{1, \ldots, n_0 - 1\}$ und $\tilde{c} := \max_{n \in M} \frac{f(n)}{g(n)} > 0$. Fuer alle $n \in M$ gilt dann $\frac{f(n)}{g(n)} \leq \tilde{c} \Leftrightarrow f(n) \leq \tilde{c} \cdot g(n)$. Wir setzen $c^* = \max\{\tilde{c}, c\}$. Dann gilt

$$\forall n \in \mathbb{N}_0 : f(n) \leq c^* \cdot g(n)$$

Folglich $f \in \mathcal{O}(g)$. □

(b)
Behauptung. Fuer Funktionen $f, g : \mathbb{N}_0 \to \mathbb{R}^+$ gilt:

$$\lim_{n \to \infty} \frac{f(n)}{g(n)} = 0 \Rightarrow f(n) \in \mathcal{O}(g)$$

Beweis. Seien also $f, g : \mathbb{N}_0 \to \mathbb{R}^+$ mit $\lim_{n \to \infty} \frac{f(n)}{g(n)} = 0$. Insbesondere zu $c = 1$ finden wir ein $n_0 \in \mathbb{N}_0$, sodass $\frac{f(n)}{g(n)} < 1$ fuer alle $n \geq n_0$ gilt. Damit gilt auch $f(n) < g(n)$ fuer alle $n \geq n_0$. Dann ist $f \in \mathcal{O}'(g)$ und nach (a) folgt $f \in \mathcal{O}(g)$. □

(c)
Definition Sei $\mathcal{F} := \{f : \mathbb{N}_0 \to \mathbb{R}^+\}$ die Menge aller Abbildungen von $\mathbb{N}_0$ nach $\mathbb{R}^+$. Auf $\mathcal{F}$ definieren wir eine Aequivalenzrelation $\sim$ folgendermassen:

$$f \sim g :\Leftrightarrow f \in \Theta(g) \qquad \text{, fuer alle } f, g \in \mathcal{F}$$

Wir erhalten damit

$$\mathcal{F}/\!\sim = \{\Theta(f) : f \in \mathcal{F}\}$$

Weiter laesst sich auf $\mathcal{F}/\!\sim$ eine Halbordnung $\preccurlyeq$ folgendermassen definieren:

$$\Theta(f) \preccurlyeq \Theta(g) :\Leftrightarrow f \in \mathcal{O}(g) \qquad ; f, g \in \mathcal{F}$$

Beobachtung. Es gilt $f \in \Theta(g) \Leftrightarrow \Theta(f) = \Theta(g) \Leftrightarrow \Theta(f) \preccurlyeq \Theta(g)$ und $\Theta(g) \preccurlyeq \Theta(f)$.
Beispiel. Wir erhalten somit:

$$\begin{aligned}\Theta(f_{16}) \preccurlyeq \Theta(f_{18}) \preccurlyeq \Theta(f_{15}) \preccurlyeq \Theta(f_9) = \Theta(f_{13}) \preccurlyeq \Theta(f_{11}) \preccurlyeq \Theta(f_{10}) \preccurlyeq \Theta(f_1) \preccurlyeq \\ \Theta(f_{14}) \preccurlyeq \Theta(f_2) \preccurlyeq \Theta(f_4) \preccurlyeq \Theta(f_6) = \Theta(f_7) \preccurlyeq \Theta(f_8) \preccurlyeq \Theta(f_5) \preccurlyeq \Theta(f_{17}) \preccurlyeq \\ \Theta(f_3) \preccurlyeq \Theta(f_{12})\end{aligned}$$