Marcel Schoppmeier (XXXXXX)
Benedikt Rips (XXXXXX)
Felix Janssen (426950)

Aufgabe 8.
(a) Die Adjazensmatrix $A_{\mathcal{G}}$ des vorstehenden Graphens $\mathcal{G}$ lautet:

$$A_{\mathcal{G}} = \begin{pmatrix} & & \top & & & \\ & & \top & & \top & \\ & & & \top & & \top \\ & & \top & & & \\ & \top & & & & \\ \top & & \top & & \top & \end{pmatrix}$$

(b) Die Zwischenschritte nach jedem Durchlauf der aeusseren Schleife im Warshall-Algorithmus lauten:

$$A_{\mathcal{G}}^{(1)} = \begin{pmatrix} \top & & \top & & & \\ & \top & \top & & \top & \\ & & \top & \top & & \top \\ & & \top & \top & & \\ & \top & & & \top & \\ \top & & \top & & \top & \top \end{pmatrix}$$

$$A_{\mathcal{G}}^{(2)} = \begin{pmatrix} \top & & \top & & & \\ & \top & \top & & \top & \\ & & \top & \top & & \top \\ & & \top & \top & & \\ & \top & \top & & \top & \\ \top & & \top & & \top & \top \end{pmatrix}$$

$$A_{\mathcal{G}}^{(3)} = \begin{pmatrix} \top & & \top & \top & & \top \\ & \top & \top & \top & \top & \top \\ & & \top & \top & & \top \\ & & \top & \top & & \top \\ & \top & \top & \top & \top & \top \\ \top & & \top & \top & \top & \top \end{pmatrix}$$

$$A_{\mathcal{G}}^{(4)} = \begin{pmatrix} \top & & \top & \top & & \top \\ & \top & \top & \top & \top & \top \\ & & \top & \top & & \top \\ & & \top & \top & & \top \\ & \top & \top & \top & \top & \top \\ \top & & \top & \top & \top & \top \end{pmatrix}$$

$$A_{\mathcal{G}}^{(5)} = \begin{pmatrix} \top & & \top & \top & & \top \\ & \top & \top & \top & \top & \top \\ & & \top & \top & & \top \\ & & \top & \top & & \top \\ & \top & \top & \top & \top & \top \\ \top & \top & \top & \top & \top & \top \end{pmatrix}$$

$$A_{\mathcal{G}}^{(6)} = \begin{pmatrix} \top & \top & \top & \top & \top & \top \\ \top & \top & \top & \top & \top & \top \\ \top & \top & \top & \top & \top & \top \\ \top & \top & \top & \top & \top & \top \\ \top & \top & \top & \top & \top & \top \\ \top & \top & \top & \top & \top & \top \end{pmatrix}$$

(c) Die Distanzmatrix $D_{\mathcal{G}'}$ des Graphen $\mathcal{G}'$ hat die Form:

$$D_{\mathcal{G}'} = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 9 & \infty & \infty & \infty \\ \infty & 0 & 6 & 4 & 1 & \infty \\ \infty & \infty & 0 & 1 & \infty & 1 \\ \infty & \infty & 1 & 0 & \infty & \infty \\ \infty & 1 & \infty & \infty & 0 & \infty \\ 1 & \infty & \infty & \infty & 1 & 0 \end{pmatrix}$$

(d) Die Zwischenschritte nach jedem Durchlauf der aeusseren Schleife im Floyd-Algorithmus lauten:

$$A_{\mathcal{D}}^{(1)} = \begin{pmatrix} 0.0 & 1.0 & 9.0 & \infty & \infty & \infty \\ \infty & 0.0 & 6.0 & 4.0 & 1.0 & \infty \\ \infty & \infty & 0.0 & 1.0 & \infty & 1.0 \\ \infty & \infty & 1.0 & 0.0 & \infty & \infty \\ \infty & 1.0 & \infty & \infty & 0.0 & \infty \\ 1.0 & 2.0 & 10.0 & \infty & 1.0 & 0.0 \end{pmatrix}$$

$$A_{\mathcal{D}}^{(2)} = \begin{pmatrix} 0.0 & 1.0 & 7.0 & 5.0 & 2.0 & \infty \\ \infty & 0.0 & 6.0 & 4.0 & 1.0 & \infty \\ \infty & \infty & 0.0 & 1.0 & \infty & 1.0 \\ \infty & \infty & 1.0 & 0.0 & \infty & \infty \\ \infty & 1.0 & 7.0 & 5.0 & 0.0 & \infty \\ 1.0 & 2.0 & 8.0 & 6.0 & 1.0 & 0.0 \end{pmatrix}$$

$$A_{\mathcal{D}}^{(3)} = \begin{pmatrix} 0.0 & 1.0 & 7.0 & 5.0 & 2.0 & 8.0 \\ \infty & 0.0 & 6.0 & 4.0 & 1.0 & 7.0 \\ \infty & \infty & 0.0 & 1.0 & \infty & 1.0 \\ \infty & \infty & 1.0 & 0.0 & \infty & 2.0 \\ \infty & 1.0 & 7.0 & 5.0 & 0.0 & 8.0 \\ 1.0 & 2.0 & 8.0 & 6.0 & 1.0 & 0.0 \end{pmatrix}$$

$$A_{\mathcal{D}}^{(4)} = \begin{pmatrix} 0.0 & 1.0 & 6.0 & 5.0 & 2.0 & 7.0 \\ \infty & 0.0 & 5.0 & 4.0 & 1.0 & 6.0 \\ \infty & \infty & 0.0 & 1.0 & \infty & 1.0 \\ \infty & \infty & 1.0 & 0.0 & \infty & 2.0 \\ \infty & 1.0 & 6.0 & 5.0 & 0.0 & 7.0 \\ 1.0 & 2.0 & 7.0 & 6.0 & 1.0 & 0.0 \end{pmatrix}$$

Marcel Schoppmeier (XXXXXX)
Benedikt Rips (XXXXXX)
Felix Janssen (426950)

$$A_{\mathcal{D}}^{(5)} = \begin{pmatrix} 0.0 & 1.0 & 6.0 & 5.0 & 2.0 & 7.0 \\ \infty & 0.0 & 5.0 & 4.0 & 1.0 & 6.0 \\ \infty & \infty & 0.0 & 1.0 & \infty & 1.0 \\ \infty & \infty & 1.0 & 0.0 & \infty & 2.0 \\ \infty & 1.0 & 6.0 & 5.0 & 0.0 & 7.0 \\ 1.0 & 2.0 & 7.0 & 6.0 & 1.0 & 0.0 \end{pmatrix}$$

$$A_{\mathcal{D}}^{(6)} = \begin{pmatrix} 0.0 & 1.0 & 6.0 & 5.0 & 2.0 & 7.0 \\ 7.0 & 0.0 & 5.0 & 4.0 & 1.0 & 6.0 \\ 2.0 & 3.0 & 0.0 & 1.0 & 2.0 & 1.0 \\ 3.0 & 4.0 & 1.0 & 0.0 & 3.0 & 2.0 \\ 8.0 & 1.0 & 6.0 & 5.0 & 0.0 & 7.0 \\ 1.0 & 2.0 & 7.0 & 6.0 & 1.0 & 0.0 \end{pmatrix}$$

Aufgabe 10.
Um eine Umordnung der Belegung der Zimmer mathematisch darzustellen betrachten wir Abbildungen $\mathbb{N} \to \mathbb{N}$ ueber den natuerlichen Zahlen. Damit keine zwei Gaeste in ein und dasselbe Zimmer verlegt werden, sind dabei nur injektive Abbildungen von Interesse.

(a) Betrachte folgende injektive Abbildung $f : \mathbb{N} \to \mathbb{N}$, $n \mapsto n+1$. Anschaulich geht jeder Gast ins naechste Zimmer, sodass am Ende das Zimmer mit der Nummer 1 nicht belegt ist.

(b) Die fuenfzigfache Anwendung von f erzeugt die gewuenschten freien Zimmer. Damit ist

$$g := f^{50} := \underbrace{f \circ f \circ \cdots \circ f}_{\text{50 mal}} : \mathbb{N} \to \mathbb{N}; n \mapsto n + 50$$

als Verkettung injektiver Funktionen wieder injektiv. Danach sind die ersten 50 Zimmer frei.

(c) Bisher mussten wir nur sicherstellen, dass endlich viele Zimmer geraeumt werden. Dies liess sich realisieren, indem wir alle Gaeste um die gewuenschte Anzahl "weiterziehen"liessen. Da wir nun unendlich viele Gaeste erwarten, benoetigen wir eine kluge Idee, damit unsere bisherigen Gaeste mit nur ëndlich grossemÄufwand wieder ein neues Zimmer beziehen koennen. Dazu betrachten wir die Abbildung $h : \mathbb{N} \to \mathbb{N}; n \mapsto 2n$. Diese Abbildung ist injektiv, da fuer $n \neq m$ gilt $2n \neq 2m$. Anschaulich bezieht jeder Gast jenes Zimmer, welches die doppelte so grosse Nummer hat, wie sein bisheriges. In Folge dessen wird jedes zweite Zimmer frei. Es gilt $im(h) = 2\mathbb{N}$ und $M := \mathbb{N} \setminus im(h) = \{2m - 1 : m \in \mathbb{N}\}$ ist nicht endlich, sonst gaebe es ein Maximum $m_{max} \in M \subset \mathbb{N}$. OBdA gilt $m_{max} > 1$. Dann goelte $m_{max} < 2m_{max} - 1 \in M$ Widerspruch zu $m_{max} = max(M)$. Also wurden unendlich viele Zimmer frei, in die die anreisenden Gaeste unterkommen koennen.