Aufgabe 15

a) (i) $f(n) = n$ und $g(n) = n^2$

(ii) $f(n) = n$ und $g(n) = \begin{cases} n^2, & \text{falls } n \text{ gerade} \\ 1, & \text{falls } n \text{ ungerade} \end{cases}$

(iii) $f(n) \in \Theta(g(n)) \land f(n) \in o(g(n))$

$\overset{\text{Def. VL}}{\iff} f(n) \in \Omega(g(n)) \land f(n) \in O(g(n)) \land f(n) \in o(g(n))$

$\overset{\text{Def. VL}}{\iff} g(n) \in O(f(n)) \land f(n) \in O(g(n)) \land f(n) \in o(g(n))$

Es gibt keine Funktion, da $g(n) \in O(f(n)) \land f(n) \in O(g(n))$ oder $g(n) \in O(f(n)) \land f(n) \in o(g(n))$ unmöglich ist

BEH: $g(n) \in O(f(n)) \land f(n) \in o(g(n))$ ist nie wahr.

BEW: Es gilt $g \leq c_1 \cdot f$ und $f < c_2 \cdot g \iff \frac{f}{c_2} < g$

$\Rightarrow \frac{f}{c_2} < g \leq c_1 \cdot f \quad \Rightarrow f < c_1 \cdot c_2 \cdot f$

Wähle $c_2 = \frac{1}{2c_1} \quad \Rightarrow f < c_1 \cdot \frac{1}{2c_1} \cdot f$

$\iff f < \frac{1}{2} f$ ↯

(iv) $f \in \Theta(g) \land f \notin O(g)$

$\overset{\text{Def. VL}}{\iff} f \in O(g) \land f \in \Omega(g) \land f \notin O(g)$ ↯ $f \in O(g) \land f \notin O(g)$ unmöglich

(v), (vi) $f(n) = n^2$ und $g(n) = n$

b) i) $a = 4$ und $b = 2 \Rightarrow n^{\log_2 4} = n^2$ $\quad f(n) = n$

Wähle $\varepsilon = \frac{1}{2}$. Dann gilt $f(n) = n \in O(n^{\frac{3}{2}}) \Rightarrow T(n) \in \Theta(n^2)$

ii) $a = 4$ und $b = 2 \Rightarrow n^{\log_2 4} = n^2$

Dann gilt $f(n) = n^2 \in \Theta(n^2) \Rightarrow T(n) \in \Theta(n^{\log_2 4} \cdot \log n)$

iii) $a = 4$ und $b = 2 \Rightarrow n^{\log_2 4} = n^2$ $\quad f(n) = n^3$. Wähle $\varepsilon = \frac{1}{2}$. Dann gilt $f(n) = n^3 \in \Omega(n^{2+\frac{1}{2}})$. Des Weiteren lässt $a \cdot f(\frac{n}{b}) \leq c \cdot f(n)$ für eine Konstante $c < 1$ erfüllen, denn

$4 \cdot (\frac{n}{2})^3 = 4 \cdot \frac{n^3}{8} = \frac{1}{2} \cdot n^3 \leq c \cdot n^3$. Wähle $c = \frac{3}{4} < 1$

Dann gilt $\frac{1}{2} n^3 \leq \frac{3}{4} n^3$

$\Rightarrow T(n) \in \Theta(n^3)$

iv) $T(n) = 2 \cdot T(\sqrt{n}) + \log_2 n$

Substituiere nun $n = 2^k$.

Dann gilt: $T(2^k) = 2T(\sqrt{2^k}) + \log_2(2^k)$

$$= 2T\left(\left(2^k\right)^{\frac{1}{2}}\right) + k \cdot \log_2(2)$$

$$= 2T\left(2^{\frac{k}{2}}\right) + k \cdot 1$$

Setze $U(k) := T(2^k)$

$$U(k) = T(2^k) = 2U\left(\frac{k}{2}\right) + k$$

Dann ist $a = 2 = b$ und $f(k) = k$

$\Rightarrow k^{\log_2 2} = k \in \Theta(k)$

$\Rightarrow U(k) \in \Theta(k \cdot \log_2 k)$

Resubstituieren ergibt: $\left(2^k = n \Leftrightarrow \log_2 n = k,\ U(k) = T(2^k)\right)$

$U(k) = T(2^k) \in \Theta(k \cdot \log_2 k)$

$\Rightarrow T(n) \in (\log_2 n \cdot \log_2(\log_2 n))$

(v) $T(n) = 2 \cdot T\left(\frac{n}{2}\right) + n \log_2 n$

$a = 2 = b \Rightarrow n^{\log_2 2} = n$, $f(n) = n \cdot \log_2 n$

BEH: Fall 3 lässt sich nicht anwenden, da $f(n)$ nicht polynomial größer ist als n

Z: $\frac{n \cdot \log_2 n}{n} = \log_2 n$ ist asymptotisch kleiner als $\frac{n^{1+\varepsilon}}{n} = n^{\varepsilon}$ für jedes $\varepsilon > 0$. Also $\log_2 n \in o(n^{\varepsilon})\ \forall \varepsilon > 0$

$$\lim_{n\to\infty} \frac{\log_2 n}{n^{\varepsilon}} = \lim_{n\to\infty} \frac{\log_2 n}{2^{\log_2 n \cdot \varepsilon}} = \lim_{n\to\infty} \frac{\log_2 n}{(2^{\varepsilon})^{\log_2 n}} \overset{\log_2 n := n}{\Rightarrow} \lim_{n\to\infty} \frac{n}{\underbrace{(2^{\varepsilon})}_{>1\ \forall \varepsilon>0}{}^{n}} = 0$$

□

Bestimmung der Laufzeit

Iteration ergibt $T(n) = n \cdot T(1) + \sum_{k=1}^{\log_2 n} n \cdot \log_2\left(\frac{n}{2^k}\right)$

$= n \cdot T(1) + n \cdot \sum_{k=1}^{\log_2 n} \left(\log_2(n) - k \cdot \log_2(2)\right)$

$= n \cdot T(1) + n \cdot \left(\sum_{k=1}^{\log_2 n} \log_2(n) - \sum_{k=1}^{\log_2 n} k\right)$

kleiner Gauß

$= n \cdot T(1) + n \cdot \left(\log_2^2(n) - \left(\frac{\log_2^2(n) + \log_2(n)}{2}\right)\right)$

$= n \cdot T(1) + n \cdot \left(\frac{1}{2}\log_2^2(n) - \frac{1}{2}\log_2(n)\right)$

$= n \cdot T(1) + \frac{n}{2} \cdot \log_2^2(n) - \frac{n}{2}\log_2(n)$

$\log_2^2(n)$ wächst stärker als $\log_2(n)$, da $\lim_{n\to\infty} \frac{\log_2^2(n)}{\log_2(n)} = \infty$

$\Rightarrow T(n) \in \Theta(n \cdot \log_2^2(n))$

□