13)

a) Es gilt

① $A = m_2 + m_3 = E \cdot I + F \cdot K$

② $B = t_1 + m_5 + m_6 = m_1 + m_2 + m_5 + m_6 = s_2 \cdot s_6 + EI + s_1 \cdot s_5 + s_4 \cdot L$

$= ((G+H)-E)\cdot(L-(J-I)) + EI + (G+H)(J-I) + (F-(s_1-E))\cdot L$

$= (G+H-E)\cdot(L-J+I) + EI + (G+H)(J-I) + (F-G-H+E)\cdot L$

$= \cancel{GL} - \cancel{GJ} + \cancel{GI} + \cancel{HL} - \cancel{HJ} + \cancel{HI} - \cancel{EL} + EJ - \cancel{EI} + \cancel{EI} + \cancel{GJ} - \cancel{GI} + \cancel{HJ} - \cancel{HI}$

$+ FL - \cancel{GL} - \cancel{HL} + \cancel{EL}$

$= EJ + FL$

③ $C = t_2 - m_7 = t_1 + m_4 - H \cdot s_8 = m_1 + m_2 + m_4 - H(s_6 - K)$

$= s_2 \cdot s_6 + EI + s_3 \cdot s_7 - H \cdot (L-(J-I)-K)$

$= ((G+H)-E)\cdot(L-(J-I)) + EI + (E-G)(L-J) - H\cdot(L-J+I-K)$

$= (G+H-E)\cdot(L-J+I) + EI + EL - EJ - GL + GJ - HL + HJ - HI + HK$

$= \cancel{GL} - \cancel{GJ} + GI + \cancel{HL} - \cancel{HJ} + \cancel{HI} - \cancel{EL} + \cancel{EJ} - \cancel{EI} + \cancel{EI} + \cancel{EL} - \cancel{EJ} - \cancel{GL}$

$+ \cancel{GJ} - \cancel{HL} + \cancel{HJ} - \cancel{HI} + HK$

$= GI + HK$

④ $D = t_2 + m_5 = t_1 + m_4 + s_1 \cdot s_5 = m_1 + m_2 + s_3 \cdot s_7 + (G+H)\cdot(J-I)$

$= s_2 \cdot s_6 + EI + (E-G)(L-J) + (G+H)(J-I)$

$= ((G+H)-E)\cdot(L-(J-I)) + EI + (E-G)(L-J) + (G+H)(J-I)$

$= (G+H-E)\cdot(L-J+I) + EI + (E-G)(L-J) + (G+H)(J-I)$

$= \cancel{GL} - \cancel{GJ} + \cancel{GI} + \cancel{HL} - \cancel{HJ} + \cancel{HI} - \cancel{EL} + \cancel{EJ} - \cancel{EI} + \cancel{EI} + \cancel{EL}$

$- \cancel{EJ} - \cancel{GL} + \cancel{GJ} + GJ - \cancel{GI} + \cancel{HJ} - \cancel{HI}$

$= GJ + HL$

Nach VL Lineare Algebra gilt

$$\begin{bmatrix} E & F \\ G & H \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} I & J \\ K & L \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} EI+FK & EJ+FL \\ GI+HK & GJ+HL \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} A & B \\ C & D \end{bmatrix}$$

Somit ist der Algorithmus korrekt.

13b) $T(n) \hat{=}$ Anzahl der Operationen, die zur Multiplikation zweier $n \times n$ Matrizen benötigt werden.

Für $n > 1$ gilt $T(n) = 7 \cdot T\left(\frac{n}{2}\right) + 15 \cdot \left(\frac{n}{2}\right)^2$,

da nach dem Algorithmus 7 Multiplikationen und 15 Additionen / Subtraktionen von $n/2 \times n/2$ - Matrizen notwendig ist.

Iteration ergibt

$$T(n) = 7 \cdot T\left(\frac{n}{2}\right) + 15 \cdot \left(\frac{n}{2}\right)^2 = 7 \cdot \left(7 \cdot T\left(\frac{n}{4}\right) + 15 \cdot \left(\frac{n}{4}\right)^2\right) + 15 \cdot \left(\frac{n}{2}\right)^2$$

$$= 7^2 \cdot T\left(\frac{n}{2^2}\right) + 7 \cdot 15 \cdot \left(\frac{n}{2^2}\right)^2 + 15 \cdot \left(\frac{n}{2}\right)^2$$

$$= 7^3 \cdot T\left(\frac{n}{2^3}\right) + 7^2 \cdot 15 \left(\frac{n}{2^3}\right)^2 + 7 \cdot 15 \left(\frac{n}{2^2}\right)^2 + 15 \cdot \left(\frac{n}{2}\right)^2$$

$$= 7^{\log_2 n} \cdot T(1) + \sum_{i=1}^{\log_2 n} 7^{i-1} \cdot 15 \cdot \left(\frac{n}{2^i}\right)^2$$

$$= 7^{\log_2 n} \cdot T(1) + \frac{15}{7} \sum_{i=1}^{\log_2 n} 7^i \cdot \frac{n^2}{(2^i)^2}$$

$$= 7^{\log_2 n} \cdot T(1) + \frac{15n^2}{7} \sum_{i=1}^{\log_2 n} \left(\frac{7}{4}\right)^i$$

$$= 7^{\log_2 n} \cdot T(1) + \frac{15n^2}{7} \cdot \frac{7}{4} \sum_{i=1}^{\log_2 n} \left(\frac{7}{4}\right)^{i-1}$$

$$= 7^{\log_2 n} \cdot T(1) + \frac{15n^2}{7} \cdot \frac{7}{4} \cdot \sum_{i=0}^{\log_2 n} \left(\frac{7}{4}\right)^i$$

geo. Reihe ↓

$$= 7^{\log_2 n} \cdot T(1) + \frac{15n^2}{7} \cdot \frac{7}{4} \cdot \left(\frac{\left(\frac{7}{4}\right)^{\log_2 n} - 1}{\frac{7}{4} - 1}\right)$$

$$= 7^{\log_2 n} \cdot T(1) + \frac{15n^2}{4} \cdot \left(\frac{4}{3}\right) \cdot \left(\left(\frac{7}{4}\right)^{\log_2 n} - 1\right)$$

$$= 7^{\log_2 n} \cdot T(1) + 5n^2 \cdot \left(\frac{7}{4}\right)^{\log_2 n} - 5n^2$$

$$= 7^{\log_2 n} \cdot T(1) + 5n^2 \cdot \frac{7^{\log_2 n}}{4^{\log_2 n}} - 5n^2$$

$$= 7^{\log_2 n} \left(T(1) + \frac{5n^2}{4^{\log_2 n}}\right) - 5n^2$$

$$\overset{*}{=} n^{\log_2 7} \left(T(1) + \frac{5n^2}{4^{\log_2 n}}\right) - 5n^2$$

$$\overset{**}{=} n^{\log_2 7} \cdot (T(1) + 5) - 5n^2$$

$$\approx n^{2{,}807355} \cdot (T(1) + 5)$$

$* \quad 7^{\log_2 n} = \left(2^{\log_2 7}\right)^{\log_2 n} = \left(2^{\log_2 n}\right)^{\log_2 7} = n^{\log_2 7}$

$** \quad \frac{5n^2}{4^{\log_2 n}} = 5 \cdot \frac{2^{\log_2 (n^2)}}{4^{\log_2 n}} = 5 \cdot \frac{2^{2\log_2 (n)}}{4^{\log_2 n}} = 5$

Somit benötigt der Algorithmus $\Theta\left(n^{2{,}807355}\right)$ Zeit.