Felix Janssen
Benedikt Rips
Marcel Schoppmeier

Aufgabe 30.

(a)

Folgende Funktionen g_i sind jeweilige asymptotische obere Schranken von f_i, $i = 1, \dots, 4$.

$$\begin{aligned}
g_1 &: \mathbb{N} \to \mathbb{R}^+, n \mapsto n^4 \\
g_2 &: \mathbb{N} \to \mathbb{R}^+, n \mapsto n \cdot \log_2^2(n) \\
g_3 &: \mathbb{N} \to \mathbb{R}^+, n \mapsto n^2 \\
g_4 &: \mathbb{N} \to \mathbb{R}^+, n \mapsto \log_2^2(n)
\end{aligned}$$

(b)

Satz 1. *Sei* $f : \mathbb{N} \to \mathbb{R}^+$, $n \mapsto \log_2(n^n)$ *und* $g : \mathbb{N} \to \mathbb{R}^+$, $n \mapsto n^2 \cdot \log_2(n)$.
Dann gilt: $f \in \mathcal{O}(g)$

Beweis. Ferner sei $n \geq 1$, dann gilt

$$f(n) = \log_2(n^n) = n \cdot \log_2(n) \leq n^2 \log_2(n) = g(n)$$

Folglich gilt $f \in \mathcal{O}(g)$. □

(c)

Satz 2. *Sei* $f : \mathbb{N} \to \mathbb{R}^+$, $n \mapsto n \cdot \log_4(n)$ *und* $g : \mathbb{N} \to \mathbb{R}^+$, $n \mapsto n \cdot \log_2(n)$.
Dann gilt: $f \in \Omega(g)$.

Beweis. Wir definieren $c = \frac{1}{\log_4(2)} \in \mathbb{R}^+$. Dann folgt f.a. $n \in \mathbb{N}$:

$$g(n) = n \cdot \log_2(n) = n \frac{\log_4(n)}{\log_4(2)} = c \cdot n \log_4(n) = f(n)$$

Damit ist nun $f \in \Theta(g)$ und insbesondere $f \in \Omega(g)$. □

(d)

Satz 3. *Sei*

$$f : \mathbb{N} \to \mathbb{R}^+, n \mapsto \begin{cases} n! & \text{for } 1 \leq n \leq 17 \\ 2^{2^n} & \text{for } 18 \leq n \leq 42 \\ \log_2(n) & \text{for } 43 \leq n \end{cases}$$

Ferner sei $g : \mathbb{N} \to \mathbb{R}^+, n \mapsto \log + 2n$.
Dann gilt: $f \in \mathcal{O}(g)$.

Beweis. Sei $n \geq 43$. Dann gilt $f(n) = \log_2(n) = g(n)$. Und damit gilt per Definition $f \in \mathcal{O}(g)$. $\square$